Fakultet for naturvitenskap og teknologi

Institutt for matematikk og statistikk

Fra fyrstikkmønster til matematiske symboler

En casestudie av tre elevers arbeid med to forskjellige geometriske mønster

—

Vanja Renée Antonsen

MAT – 3906 Masteroppgave i matematikk - lektorutdanning
Juni 2017

Forord

Denne masteroppgaven er resultatet av min femårige utdannelse innen integrert lektorutdanning i realfag. Prosessen har til tider vært krevende, men den har også vært spennende og lærerik. Jeg vil takke alle som har bidratt og hjulpet meg gjennom denne prosessen.

Først vil jeg takke elevene som var med i prosjektet, uten dere hadde det ikke blitt noen oppgave. Jeg vil også takke elevenes faglærer i matematikk for nyttig innspill i gjennomføringen av prosjektet.

Jeg vil også rette en stor takk til mine dyktige veiledere Anne Birgitte Fyhn og Trygve Johnsen. Tusen takk for god veiledning gjennom hele prosessen med denne oppgaven. Dere har ledet meg gjennom prosessen med gode innspill, verdifulle diskusjoner og konstruktive tilbakemeldinger.

Videre vil jeg takke Thor – Martin Antonsen, som har lest korrektur på oppgaven. Du har bidratt med mange gode råd over lange telefonsamtaler. Jeg setter utrolig stor pris på det!

En stor takk til mamma, pappa og Villiam. Dere har støttet meg gjennom hele prosessen, og for at døren hjemme alltid har vært åpen.

Til slutt vil jeg takke mine medstudenter for menge gode faglige diskusjoner og godt samarbeid gjennom studietiden. Takk for at dere har bidratt til sosiale og minnerike opplevelser, gjennom faglige og ikke – faglige begivenheter.

Tromsø, juni 2017

Vanja Renée Antonsen

Sammendrag

Dette er en masteroppgave i matematikkdidaktikk som fremstiller elever i arbeid med geometriske mønster. På bakgrunn av stor interesse i fagområdet algebra og elevers forståelse for det matematiske symbolspråket vil jeg se på problemstillingen: *Hvordan kan arbeid med geometriske mønster bidra til elevenes forståelse av det matematiske symbolspråket?*

Hensikten med studien er å undersøke hvordan elevers resonneringskompetanse kommer til uttrykk gjennom deres arbeid med geometriske mønster, og hvordan arbeidsprosessen kan bidra til elevenes forståelse av det matematiske symbolspråket. Jeg har undersøkt en gruppe på tre elever som arbeider med to forskjellige geometriske mønster, og undersøkelsen kan karakteriseres som en beskrivende enkelcase.

Funnene fra analysen viser at elevenes resonneringskompetanse i en høyere grad kommer til uttrykk i arbeid med det første geometriske mønsteret (Fyrsikkmønster 1) sammenlignet med det andre geometriske mønsteret (Fyrstikkmønster 2). I oppgaven - Fyrstikkmønster 1 arbeidet elevene i større grad med gjetninger som var veiledet av intuisjoner og følelser enn de gjorde i oppgaven - Fyrstikkmønster 2, som kan være årsaken til forskjell i funnene. Funnene viser blant annet at deloppgavene i Fyrstikkmønster 1 og Fyrstikkmønster 2, og bruken av fyrstikker som manipulerende gjenstander har bidratt til elevenes forståelse av det matematiske symbolspråket.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

I juni 2015 la Ludvigsenutvalget[1] fram stuttrapporten NOU 2015: 8 *Framtidens skole: fornyelse av fag og kompetanser*, en rapport med anbefalinger knyttet til framtidige krav til kompetanse og fornyelse av fag og læreplaner. Rapporten understreker at i dagens samfunn endrer kunnskapens innhold og form seg på en rask måte. Utfra denne endringen må fagene fornyes og skolen videreutvikles for at elevenes potensial skal realiseres. For å realisere elevenes potensial må det skapes nye vilkår for elevenes læring, og fremtidsrettede kompetanser utvikles. Rapporten legger vekt på dybdelæring. Elevene skal tilegne seg kunnskap og forstå det de har lært. Dette forutsetter at eleven er aktiv i egen læringsprosess, og bruker egne læringsstrategier.

Rapporten fremhever betydningen av fire kompetanseområder: fagspesifikk kompetanse, kompetanse i å lære, kompetanse i å kommunisere, samhandle og delta og kompetanse i å utforske og skape. Dette er grunnlaget for fornyelse av skolens innhold (NOU 2015: 8, 2015). Min masteroppgave retter oppmerksomheten mot ett av de fire kompetanseområdene rapporten understreker viktigheten av: kompetanse i å utforske og skape. Elevene skal kunne resonnere og analysere, identifisere relevante spørsmål og bruke relevante strategier for å løse problemer. Videre poengterer rapporten at skolen skal legge til rette for at elevene skal få utforske, se nye muligheter og utvikle nye løsninger.

Dette kapitelet er delt inn i tre hoveddeler. Først beskriver jeg bakgrunnen for studien. Deretter presenterer jeg oppgavens problemstilling og refleksjoner rundt problemstillingen. Til slutt gir jeg en oversikt over oppgavens oppbygging.

1.1 Bakgrunn

Gjennom lektorutdanningen i realfag ved UIT – Norges arktiske universitet har jeg utviklet stor interesse for fagområdet algebra. I praksisperiodene i lektorutdanningen har jeg erfart at

[1] Ludviksenutvalget ble oppnevnt av regjeringen Stoltenberg II 21.juni 2013 for å vurdere grunnopplæringens fag opp mot krav til kompetanse i et framtidig samfunns- og arbeidsliv (NOU 2015: 8, 2015).

matematikkundervisningen i skolen ofte følger en tradisjonell form. I en slik undervisningsform introduserer læreren et nytt tema, og deretter jobber elevene individuelt med oppgavene. Elevene får da i en liten grad mulighet til å utforske og diskutere oppgavene med medelever. Videre har jeg erfart at mange av elevene fra praksisperiodene har uttrykket at fagområdet algebra er vanskelig. Elevene gav uttrykk for at det var problematisk å forstå bokstavsymbolene, og videre uttrykke situasjoner ved å bruke det matematiske symbolspråket. Disse erfaringene førte til at fagområdet algebra ble mer interessant.

Jeg har også i løpet av lektorutdanningen i realfag fått kunnskap om de internasjonale testene Trends in Mathematics and Science Studies (TIMSS), Trends in Mathematics and Science Studies Advanced (TIMSS Advanced) og Programme for International Student Assessment (PISA). I november 2016 ble nye resultater fra TIMSS og TIMSS Advanced publisert. Resultatene fra TIMSS viser at norske elever i 8. klasse prestere bedre i matematikk fra 2011 til 2015, og kan karakteriseres som middels gode i et europeisk perspektiv (Bergem, Kaarstein, & Nilsen, 2016). De siste PISA - resultatene som ble publisert i desember 2016, viser også framgang i norske elevers matematikkprestasjoner fra 2012 til 2015. Videre viser resultatene at norske elever for første gang siden den første PISA – undersøkelsen ble gjennomført i 2012 presterer høyere enn OECD – gjennomsnittet i matematikk (Kjærnsli & Jensen, 2016). Likevel viser resultatene fra TIMSS at "algebrakrisen" i norske skoler fortsetter. Elevene prestere svakt i algebra i forhold til de andre emneområdene tall, geometri og statistikk. Videre viser resultatene i algebra en signifikant tilbakegang i perioden 2011 – 2015 (Bergem, Kaarstein, & Nilsen, 2016).

Resultatene hvor elevene skårer lavt i algebra vekket min interesse, og derfor valgte jeg at studien skal omhandle tilnærming til algebra i skolen. Utfra dette kan jeg i min forskning ta for meg læreraspektet eller elevaspektet. Jeg har valgt en elevfokusert tilnærming, siden jeg ønsker å øke mine kunnskaper om hvordan elever går fram når de løser algebraiske oppgaver. Videre har jeg valgt å ta utgangspunktet i Ludviksensutvalgets kompetanseområde: kompetanse i å utforske og skape. Utfra dette kompetanseområdet har jeg valgt å rette studien inn mot elever i arbeid med geometriske mønster, hvor elevene får utforske mønster ved bruk av fyrstikk som manipulerende gjenstander. Videre har jeg bestemt at studien skal handle om hvordan elevenes arbeidsprosess med geometriske mønster kan bidra til forståelse av det matematiske symbolspråket. I denne studien skal jeg undersøke om og hvordan elever resonnerer rundt arbeid med geometriske mønster.

1.2 Formål og problemstilling

Formålet med studien er å undersøke hvordan elevers resonneringskompetanse kommer til uttrykk gjennom deres arbeid med to forskjellige geometriske mønster, og hvordan arbeidsprosessen kan bidra til elevenes forståelse av det matematiske symbolspråket. Jeg har derfor valgt følgende problemstilling:

Hvordan kan arbeid med geometriske mønster bidra til elevenes forståelse av det matematiske symbolspråket?

1.3 Oppgavens oppbygning

I kapittel 2 vil jeg ta for meg oppgavens teorigrunnlag. Jeg vil presentere sentrale teorier som vil kunne bidra til å besvare oppgavens problemstilling.

Kapittel 3 er metodekapittelet. I dette kapittelet vil jeg redegjøre for metodiske valg og refleksjoner i studien. Videre presentere jeg oppgavene, elevene som studiet skildrer, og samarbeidet med elevens faglærer i matematikk. Jeg vil også redegjøre for valg som jeg har tatt for å sikre studiens validitet og reliabilitet. Jeg har valgt å avslutte metodekapittelet med metodekritikk og etiske overveielser.

I kapittel 4 presentere jeg funnene og analysen av funnene i studien. Jeg har valgt å dele kapittelet inn i to hoveddeler: Fyrstikkmønster 1 og Fyrstikkmønster 2. I disse to hoveddelene kategorisere jeg elevenes resonnement utfra hvordan elevene viser resonneringskompetanse, som tilsvarer tenking på forskjellige nivåer.

Kapittel 5 er diskusjonsdelen av oppgaven. I diskusjonsdelen redegjør jeg først for forskjeller og likheter mellom oppgavene Fyrstikkmønster 1 og Fyrstikkmønster 2. Deretter diskutere jeg funnene opp mot oppgavens problemstilling, og videre diskutere jeg funnene opp mot tidligere forskning.

I kapittel 6 oppsummerer jeg funnene i studien, og besvarer oppgavens problemstilling. Til slutt redegjør jeg for veien videre i studien.

2 Teori

I dette kapittelet presenterer jeg teori som danner hovedgrunnlaget for analysen min. Først presenterer jeg algebra i et historisk perspektiv, og deretter tilnærminger til algebra i skolen. Videre vil jeg se nærmere på voksende geometriske mønster, og generalisering av figurfølger som aktivitet i skolen. Deretter vil jeg ta for meg van Hieles (1986) nivåer av matematisk tenking, Deweys (1998) teori om reflektert tenking og Brousseaus (2002) holdninger som viser til den didaktiske kontrakten. Til slutt vil jeg presentere Niss et al. (2002) rammeverk for matematisk kompetanse.

2.1 Algebra

Det finnes forskjellige perspektiver på hva algebra er, og disse har variert over tid. Ifølge Kiselman & Mouwitz (2008) er algebra en del av matematikken der man studerer grupper, ringer, kropper og lignende strukturer. Andre hevder at algebra er et matematisk språk (Bednarz, Kieran & Lee, 1996; Kaput & Blanton, 2001). Videre anser Bednarz, Kieran & Lee (1996) algebra som en egen "kultur" i matematikken. De fremhever at den algebraiske kulturen er en måte å tenke på, et verktøy, en aktivitet og generalisert aritmetikk.

Ifølge Hole (2006) oppfattes ofte ordet algebra som "bokstavregning" i skolen. Dette kan være misvisende, fordi bokstavene bare er et hjelpemiddel elevene bruker for å lære algebra. Selve ordet "algebra" stammer fra det arabiske ordet al - jabr, og ble for første gang brukt i den matematiske læreboka *Hisab al – jabr w'al - muqabala* skrevet av matematikeren al – Khwarizmi på 800 - tallet. Han definerte ordet al - jabr som eliminering av substraksjoner (Drijvers, Goddijn, & Kindt, 2011). Fra den gang og fram til 1900 – tallet har algebra blitt sett på som et verktøy for manipulering av symboler og arbeid med ligninger (Kieran, 2007). På nettsiden WolframMathworld, som særlig brukes av matematikere og studenter på universitetsnivå, blir ordet "algebra" definert slik:

> *One use of the word "algebra" is the abstract study of number systems and operations within them, including such advanced topics as groups, rings, invariant theory, and cohomology. This is the meaning mathematicians associate with the word "algebra". When there is the possibility of confusion, this field of mathematics is often referred to as abstract algebra* (Renze & Weisstein, 2017).

Definisjonen ovenfor viser til at algebra omhandler undersøkelse av tallsystemer og regneoperasjoner i tallsystemer. Ifølge Drijvers, Goddijn & Kindt (2011) viser definisjonen til at det er en relasjon mellom den abstrakte algebraen og algebraen i skolen. Dette inkluderer blant annet operasjoner med variabler, løse ligninger, lage formler fra problemsituasjoner, arbeid med funksjoner i form av formler, tabeller og grafer, og finne derivat. Videre understreker de at det er forskjell i hvordan algebra er brukt og utviklet, og hvordan skolen underviser i algebra.

Kaput & Blanton (2001) hevder at skolen har behov for et bredere og dypere syn på algebra, mer enn bare som systematisk håndtering av symboler. Videre hevder de at algebra kan beskrives utfra algebraisk tenkning, som er en kompleks sammensetning av fem sammenhengende aspekter ved skole algebraen:

1. *Algebra som generalisering og formalisering av mønster og betingelser.* I dette aspektet er algebraens generaliserende element fremhevet, som innebærer å finne forskjellige mønster og sammenhenger som kan uttrykkes generelt. Videre kan dette aspektet deles i to underkategorier. Den første fremstiller generalisert aritmetisk resonnement, som fokuserer på tallsystemets egenskaper. Et eksempl på dette er den kommutative loven for addisjon der a + b = b + a. Den andre skildrer generalisert kvantitative resonnement, som fokuserer på egenskaper og relasjoner mellom spesielle tall. Et eksempel på dette er at summen av to oddetall blir et partall.
2. *Algebra som syntaktiske styrte manipulasjoner av formalisme*. Dette aspektet fremstiller bokstavregning ved bruk av bestemte regler. Et eksempel under denne kategorien er forenkling av et algebraisk uttrykk ved å trekke sammen like komponenter.
3. *Algebra som et studie av strukturer og systemer abstrahert fra utregninger og relasjoner*. Dette aspektet fremstiller resonnering og generalisering av abstrakt algebra, for eksempel gruppeteori.
4. *Algebra som studie av funksjoner, relasjoner og avhengig variasjon*. Dette aspektet omhandler generalisering utfra numeriske mønster eller figurfølger, for så å kunne gi en funksjonsbeskrivelse. Videre kan funksjonsbeskrivelsen også omhandle at en ser på

hvordan neste figur eller tall kan beskrives med å ta utgangspunkt i nåværende figur eller tall.

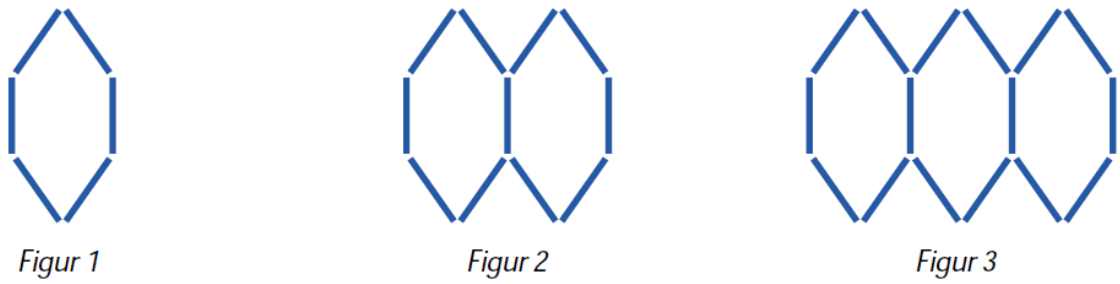
5. *Algebra som et språk for utvikling av modeller og for kontrollering av fenomener*. Dette aspektet omhandler at algebra er et bredt anvendelsesorientert språk for utvikling av modeller, og til å kontrollere fenomen.

De matematiske oppgavene, voksende geometriske mønster som min studie omhandler kan plasseres under Kaput og Blantons (2001) fjerde aspekt.

2.2 Voksende geometriske mønster

Zazkis & Liljedahl (2002) hevder at mønster er matematikkens hjerte og sjel. Lee (1996) hevder at alt i matematikken omhandler generalisering av mønster. Et matematisk mønster kan beskrives som en forutsigbar regularitet som involverer numeriske, romlige og logiske relasjoner. Et matematisk mønster kjennetegnes av at det har en struktur, som igjen er sammensatt av ulike organiserte elementer. Videre kan strukturen være konstruert ved at elementer av mønsteret repeteres i en sekvens (Mulligan & Mitchelmore, 2009).

I matematikken er et voksende mønster et mønster som systematisk øker eller minker (Papic & Mulligan, 2007). Et voksende mønster vil utvikles i samsvar med en prosedyre (Måsøval, 2011). Om et mønster er illustrert ved bruk av bilder, der mønsteret vokser ved at for eksempel antall kvadrater eller femkanter i figuren gradvis endres etter en additiv struktur, kalles mønsteret et visuelt voksende mønster eller et voksende geometrisk mønster (Warren & Cooper, 2008). Strukturen til et voksende geometriske mønster kan sees i figurenes varierte egenskaper, og kan videre uttrykkes i en formel (Mulligan & Mitchelmore, 2009). Nedenfor har jeg presentert et voksende mønster som er konstruert gjennom geometriske figurer.



Figur 1: Eksempel på et voksende geometrisk mønster, T=5n + 1 (Ahlström, 2001).

Det voksende geometriske mønsteret er satt sammen av en utvidelsessekvens, som endres hver gang mønsteret repeteres. Endringen kan være at noe blir lagt til eller fjernet fra enheten. Den endrede utvidelsessekvensen blir kalt figur. I eksemplet ovenfor er utvidelsessekvensen fem fyrstikker (som er variabelen *n*). Hver figur i det voksende geometriske mønsteret har en numerisk verdi (som er symbolet *T* i figur 1) som stiger. Den numeriske verdien bestemmes ut fra veksten i mønsteret (multiplikatoren × 5 i eksemplet over) og den delen av mønsteret som forblir det samme (konstanten +1 i eksemplet over). I eksemplet ovenfor er den første numeriske verdien 6, og deretter forsetter man med å legge til fem hver gang, i en uendelig sekvens.

2.2.1 Unit of repeat

Et voksende geometrisk mønster kan også være et gjentagende mønster. Ifølge Threlfall (1999) er gjentagende mønster satt sammen av elementer (utvidelsessekvens) som blir gjentatt i mønsteret. Elementene som blir gjentatt, betegner han repeteringsenhet (Unit of repeat). Videre hevder han at matematiske aktiviteter som involverer manipulering av mønster, vil gi elever evne til å se repeteringsenheten i et gjentagende mønster. I figur 1 er repeteringsenheten fem fyrstikker. Når elever for eksempel arbeider med dette voksende geometriske mønsteret i figur 1, kan de beskrive mønsteret i form av hva som blir gjentatt: «*Det er fem fyrstikker, fem fyrstikker og fem fyrstikker*». Threlfall hevder da at elevene gjenkjenner og bruker små sekvenser som gjentagende elementer. Det vil føre til at elever blir bevisst om forholdet mellom en del av mønsteret og hele mønsteret som blir gjentatt.

2.3 Generalisering av figurfølger som aktivitet i skolen

Stacey & MacGregor (2001) hevder at i skolen er den tradisjonelle innføringen av algebra blitt gjennomført ved bruk av bokstavsymboler som ukjente tall. I denne innføringen lærer elevene først regler for bruk av bokstavsymboler, som de videre bruker for å løse ligninger. En annen innføring er at elevene bruker bokstavsymboler som ukjente tall i arbeid med tallfølger, uten først å ha lært regler (Fyhn, et al., 2015). Ifølge Stacey & MacGregor (2001) vil en introduksjon ved bruk av figurfølger først ta for seg generalisering av funksjonssammenhenger og algebraiske uttrykk. Videre hevder de at elevene vil få en forståelse av generaliseringen som de videre vil bruke til å formulere og løse ligninger.

Ifølge Radford (1996) er generaliseringen av et geometrisk eller numerisk mønster en prosedyre, hvor elevenes mål er å oppnå et nytt resultat. Dette skjer ved at elevene finner et uttrykk eller en formel som baserer seg på strukturen av figurfølgen, og ikke av deres konkrete observasjoner. Videre hevder han at elever i arbeid med en figurfølge vil for eksempel finne antall prikker ved bruk av aritmetikken helt fram til de har funnet de generelle strukturene av figuren. Når elevene benytter de generelle strukturene av figuren er de over i algebra og har kommet inn i generaliseringsfasen. Radford (2003) hevder at generelle figurer bare forekommer i elevenes begrepsverden, og er annerledes enn konkrete objekter ved at elevene kan oppfatte dem gjennom tegn og redskaper. Videre hevder han at overgangen fra spesielle tilfeller til generaliseringer kan være utfordrende for elevene, fordi det krever en overgang fra å utforske objekter som de kan konstruere fysisk til å kunne behandle mentale objekter.

Flere studier viser at elever har vanskeligheter med å se mønsteret i figurfølger, og videre kunne uttrykke dem som et matematisk uttrykk (Lee, 1996, Stacey & MacGregor, 2001; Warren, 2005). Ifølge Lee (1996) kunne elevene som deltok i hennes studier, se mønstrene og tegne de kommende figurene. Hun kom videre fram til at elevene hadde problemer med å beskrive mønsteret ved bruk av det matematiske symbolspråket. Dette viser at elevene lykkes med noen representasjonsformer, men ikke alle. Stacey og MacGregor (2001) kom blant annet fram til at elever som muntlig kunne uttrykke en formel korrekt, en kort stund etter kunne uttrykke formelen skriftlig på en korrekt måte. Videre fremhevet de at det verbale språket er en viktig forutsetning i overgangen til det matematiske symbolspråket. Fyhn et al.

(2015) kom fram til at elevene ikke hadde problemer i overgangen til symbolspråket. De kom fram til at sammensatte uttrykk som *2n* var uproblematisk, mens *2n – 1* var vanskelig for elevene.

I Warrens (2005) studier manglet elevenes muntlige beskrivelser av figurfølger presisjon. Elevene som deltok i studiene brukte gester og manipulerende gjenstander som støtte i forklaringene av figurfølgene. Videre poengterte hun at lærer og bruk av manipulerende gjenstander vil kunne hjelpe elevene i arbeidet med generalisering av figurfølger. Videre hevder hun at manipulerende gjenstander og konkrete spørsmål fra læreren vil støtte elevene i å finne de manglende trinnene i mønstrene, og videre støtte deres tenkning.

2.4 van Hieles - nivåer

Ifølge Thompson & Martinsson (1997) er matematikk en deduktiv vitenskap. I en deduktiv tilnærming går man ut fra et antall faste aksiomer (som må oppfylle visse krav), og videre utleder man nye resultater gjennom logiske slutninger. De hevder videre at matematisk forskning har en induktiv tilnærming. I forsking arbeider matematikere i høy grad med gjetninger og eksempler, som er veiledet av intuisjoner og følelser. Når forskerne har kommet fram til et resultat (som er nokså sannsynlig), prøver forskerne å finne et bevis for sitt resultat.

Van Hieles - nivåer av matematisk tenkning kan forståes utfra den induktive tilnærmingen. På 1950 - tallet utviklet den nederlandske matematikklæreren van Hiele en teori som gjennom fem nivåer beskriver elevers utvikling av matematisk tenking. Van Hiele erfarte tidlig at en gjentatte ganger kan forklare enkelte deler av matematikkfaget til elevene, og de vil likevel ikke ha noen forståelse av det han forklarte. Videre prøvde han å forandre forklaringene, men for elevene virket det som om han snakket et annet språk. Da oppdaget han at han var på et høyere nivå av matematisk tenkning enn elevene var. Utfra denne observasjonen reflekterte han over hvordan man kan stimulere og utvikle elevenes tenking fra et matematisk nivå til et annet (van Hiele, 1986).

I van Hieles (1986) teori om matematisk tenking har språket en sentral rolle for at elevene skal kunne utvikle seg fra et nivå til neste, og hvert nivå har et eget språk. Første nivå omhandler visualisering, der elevene vil gjenkjenne noe intuitivt. Ifølge Fyhn et al. (2015) vil en elev som er på dette nivået for eksempel huske at tre multiplisert med tre er lik ni. Eleven bare “vet” at det blir slikt, og kan ikke gi svare på “hvorfor”. Andre nivå omhandler analyse. På dette nivået kan elevene behandle regneoperasjoner med konkrete tall. Elevene kan for eksempel kalkulere at: 4 × 3 = 12 og 6 + 8 = 14. Tredje nivå tar for seg logiske sammenheng. Elevene skal her generalisere resultater som for eksempel :$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. Det fjerde nivået handler om deduksjon, hvor elevene skal kunne formulere formelle bevis. Nivå fem som er det siste nivået, omhandler analyse av deduktive systemer. Elevene skal her kunne utforme og sammenligne aksiomer, definisjoner og teoremer (van Hiele, 1986). Ifølge Smestad (2008) er de to siste nivåene særlig relevante for de som studerer matematikk på universitetsnivå. Derfor er de tre første nivåene mest relevante for min casestudie.

Nivåene i teorien til van Hiele (1986) er hierarkiske. Det som forstås implisitt på et nivå, vil forstås eksplisitt på neste nivå. Dermed er det ikke mulig “å hoppe over” et nivå i elevenes utvikling. Ifølge van Hiele er overgangene mellom nivåene ikke en naturlig prosess, og overgangene vil påvirkes av undervisning. For at en elev skal nå nivå én må han ha et visuelt nettverk av relasjoner, og en intuisjon som viser vei. Overgangen fra nivå én til nivå to er å gå fra et nivå uten et nettverk av forbindelser til et nettverk med forbindelser. Resonnering ved nivå tre omhandler generalisering. Ifølge Fyhn et al. (2015) vil elever som har utviklet et fattig nettverk av nivå to - relasjoner, eller bruker nettverket automatisk vil ha en begrenset innsikt til den indre strukturen i dette nettverket. Dermed vil disse elevene ikke være i stand til å begrunne resultatene på nivå tre.

2.5 Reflektert tenking

Dewey (1998) hevder at personer kan tenke reflekterende bare når de er villig til å beherske spenningen og problemene som oppstår i det intellektuelle søket. Det er mange som opplever denne søkeprosessen som ubehagelig, og ønsker at den skal ta slutt så snart som mulig. Videre føler de kanskje at denne tilstanden av tvil kan betraktes som en induksjon på mental underlegenhet. Dewey bruker personer når han henviser til reflektert tenking. Jeg har videre valgt å bruke elever når jeg diskuterer Deweys teori, siden det er elever denne oppgaven fremstiller.

Ifølge Dewey (1998) må en elev være villig til å opprettholde og utvide tvilstilstanden (stimulering av grundige hendelser), for at en tanke skal være genuin gjennomtenkt. Videre innebærer dette at eleven ikke skal godta en idé eller foreslå en positiv påstand om en mening før han har funnet reflekterende grunner. Dewey hevder også at holdninger og evnen til å trene tanker har en viktig verdi. Kunnskap om holdningene alene er ikke nok. Elevene må ha et ønske og en vilje til å bruke dem. Videre diskutere han tre forskjellige holdninger som elevene må fremme for å sikre deres tilegnelse og bruk. Nedenfor vil jeg presentere Deweys tre holdninger.

Den første holdningen er *åpent sinn*. Dewey (1998) definerer denne holdningen som frihet fra fordommer, partiskhet og vaner nært sinnet som gjør det umulig å vurdere nye problemer og ideer. Denne holdningen er også noe mer aktivt og positivt enn hva ordene ovenfor antyder. Det å ha et åpent sinn inkludere et aktivt ønske om å lytte til flere sider av samme sak, å ta hensyn til fakta uansett hvilke kilder de kommer fra, å gi full oppmerksomhet til alternative muligheter, og å gjenkjenne muligheter for feil der meningen er sterkest. Videre hevder han at mental treghet er en faktor som vil lukke sinnet for nye ideer. Da velger eleven en vei med lite motstand og problemer. Det vil da kreve hardt arbeid for å endre de "gamle" meningene. Selvbildet til eleven kan anse det som et tegn på svakhet å innrømme at meningene var feil. Den ubevisste frykten fører da til passive holdninger som hindrer elevene i å gjøre nye observasjoner. Den samlede effekten av disse kreftene er da å stenge sinnet, og å skape uttak fra nye intellektuelle kontrakter som er nødvendig for å lære. Disse kan bekjempes ved å fremme våken nysgjerrighet og spontan rekkevidde til det nye, som er essensen av det åpne sinnet.

Når en elev for eksempel viser stor interesse for en oppgave, sier man ofte at eleven gjør det *helhjertet*. Å gjøre noe helhjertet viser til Deweys (1998) andre holdning. Denne holdningen kan gjenkjennes i praktiske og moralske handlinger, og den er like viktig i intellektuell utvikling. Dewey hevder at elevers delte interesse er den største fiende for effektiv tenkning. Elevers delte interesse blir ofte produsert i skolen. En elev kan gi en overfladisk oppmerksomhet til læreren i matematikkundervisningen, mens elevenes innerste tanker er opptatt av interesser som er mer attraktiv for eleven. Denne delte interessen kan komme av at eleven føler seg forpliktet til å lære, fordi eleven må bestå eksamen, få en god karakter eller har et ønske om å behage læreren/foreldre. Dette eksemplet kan i noen tilfeller virke trivielt, men det kan også være alvorlig. Det kan bidra til dannelse av generelle vaner eller holdninger som er ugunstig for reflektert tenkning.

Den tredje holdningen er ansvarlighet. Ansvarlighet blir vanligvis oppfattet som en moralsk egenskap enn som en intellektuell ressurs. Dewey (1998) definerer denne holdningen som å vurdere konsekvensene av en handling. Dette innebærer at elevene skal være villig til å tilegne seg konsekvensene når de følger fornuften fra enhver posisjon som allerede er tatt. Videre hevder han at elever bekjenner visse meninger, men de er ikke villig til å forplikte seg til konsekvensene som kommer fra dem. Når elever lærer noe som er fjernt fra deres erfaringer, vekker det ingen nysgjerrighet. Det er utenfor deres forståelse. De begynner da å måle verdien og virkeligheten av skolens fag, som er forskjellig fra målingene av livsforhold som gjør en viktig appell. Da kan de ha en tendens til å bli intellektuell uansvarlig. De ber ikke om meningen med det de lærer, som innebærer hvilken forskjell det fører til i resten av deres meninger og handlinger.

2.6 Didaktisk kontrakt

På 1980 – tallet introduserte den franske matematikkdidaktikeren Brousseau begrepet didaktisk kontrakt, som skildrer holdninger, forventninger og oppfattelser som oppstår mellom læreren og elevene i matematikkundervisningen. I matematikkundervisningen har læreren og elevene ulike roller, og som fører til at de er to forskjellige parter i den didaktiske kontrakten. Læreren og elevene har ulike forventninger til hverandres roller i undervisningen, og videre er de avhengige av hverandre for å gjennomføre undervisningen (Brousseau, 2002).

Ifølge Blomhøj (1994) bygges det over tid et spesielt forhold mellom læreren og elevene i deres møte med matematikkfaget i skolen. Dette forholdet som dannes, kan da beskrives som en didaktisk kontrakt for undervisningen. Videre vil denne kontrakten danne rammer for virksomheten i undervisningen, og samspillet mellom læreren og elevene. Den didaktiske kontrakten har både positive og negative sider for elevenes læring i matematikk. Den positive siden av kontrakten er at den kan føre til trygghet i undervisningen, der den har klare rammer for hva læreren og elevene kan forvente av hverandre. Videre fremhever kontrakten også hvilke holdninger som er ønskelig. Den negative siden kan vise seg gjennom tilegnelse av kunnskap. Elevene kan for eksempel løse matematiske oppgaver på bakgrunn av lærerens forventninger, og ikke fordi de ønsker å oppnå ny kunnskap. Dette kan føre til at elevene løser oppgavene uten en forståelse, der de kun slavisk følger regnemetodene. Da vil elevene ikke kunne vite hva de skal gjøre om oppgavene endres. Blomhøj fremhever at den didaktiske kontrakten ofte må brytes for at elevene skal tilegne seg ny kunnskap, og ikke løse oppgavene slik læreren forventer.

Den didaktiske kontrakten kommer tydelig fram i samtale mellom læreren og en enkelt elev, når eleven har problemer med å løse oppgaven som er gitt av læreren. I en slik situasjon er eleven opptatt av å oppfylle lærerens krav, og eleven er bevisst om at læreren har forventninger til hans handlinger. Eleven har også kunnskap om at den didaktiske kontrakten kan føre til at læreren ikke kan fortelle hvilken handlinger han forventer av eleven. Det kan da hindre elevens læring. Eleven må derfor tolke lærerens signaler (verbalt og ikke – verbalt), som fører til at elevens overordnede formål er å opprettholde sin del av den didaktiske kontrakten. Dette blir da styrende for elevens læring, og eleven har ikke et ønske om å løse det matematiske problemet (Blomhøj, 1994). For eksempel kan en lærer gi en elev en algebraoppgave, der eleven skal løse en ligning. Eleven har ikke kunnskap eller forståelse for hvordan han skal løse ligningen. Da kan eleven bli mer opptatt av å observere lærerens signaler, enn å løse ligningen.

Tilsvarende er læreren også opptatt av å opprettholde sin del av kontrakten. Læreren ønsker å gi eleven tilstrekkelig hjelp, slik at eleven kan utføre oppgaven som er relevant for elevens læring. Hvis læreren for eksempel har en grunnleggende idé om at læring i matematikk krever at eleven er aktiv, vil læreren da formidle støtte indirekte til eleven (omformulere problemet, henvise til elevens kunnskap eller erfaring av lignende oppgaver). I dette samspillet er læreren opptatt av å tolke signaler fra elevene, som viser til om eleven forstår deler eller hele konteksten av oppgaven. Det kan føre til at læreren feiltolker elevenes svar på oppgaven på grunn av elevenes engasjement som ligger i bunn av den didaktiske kontrakten. Dermed kan eleven lære noe i matematikk ved å bryte den didaktiske kontrakten ved å involvere seg i oppgaven og ta kontroll over egen læring (Blomhøj, 1994). For eksempel når en elev løser en ligning som han ikke forstår. Eleven kan da spørre læreren om hjelp, og læreren vil forklare deler eller hele framgangsmåten. Da kan eleven godta framgangsmåten og gi uttrykk til læreren at han forstår, selv om han ikke forstår. Hvis eleven stiller seg spørrende til lærerens framgangsmåte, vil eleven bryte den didaktiske kontrakten.

2.7 Matematisk kompetanse

Meld. St. 28 (2015–2016) *Fag – Fordypning – Forståelse. En fornyelse av Kunnskapsløftet* og Stortingets Innst. 19 S (2016–2017) omhandler målene og rammene for fornyelsen av læreplanverket for Kunnskapsløftet. I fagfornyelsen står det blant annet at den skal bidra til gode skolefag med relevant innhold, og at progresjonen i opplæringsløpet og sammenhengen mellom fag skal forbedres. Videre står det at skolen og lærerne skal tilrettelegge for at elevene tilegner seg solid faglig kunnskap, forståelse og grunnleggende ferdigheter. Elevene skal kunne anvende det de lærer i ulike sammenhenger. I fagfornyelsen har kompetansebegrepet følgende definisjon:

> «*Kompetanse er å tilegne seg og anvende kunnskaper og ferdigheter til å mestre utfordringer og løse oppgaver i kjente og ukjente sammenhenger og situasjoner. Kompetanse innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenkning*» (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 5).

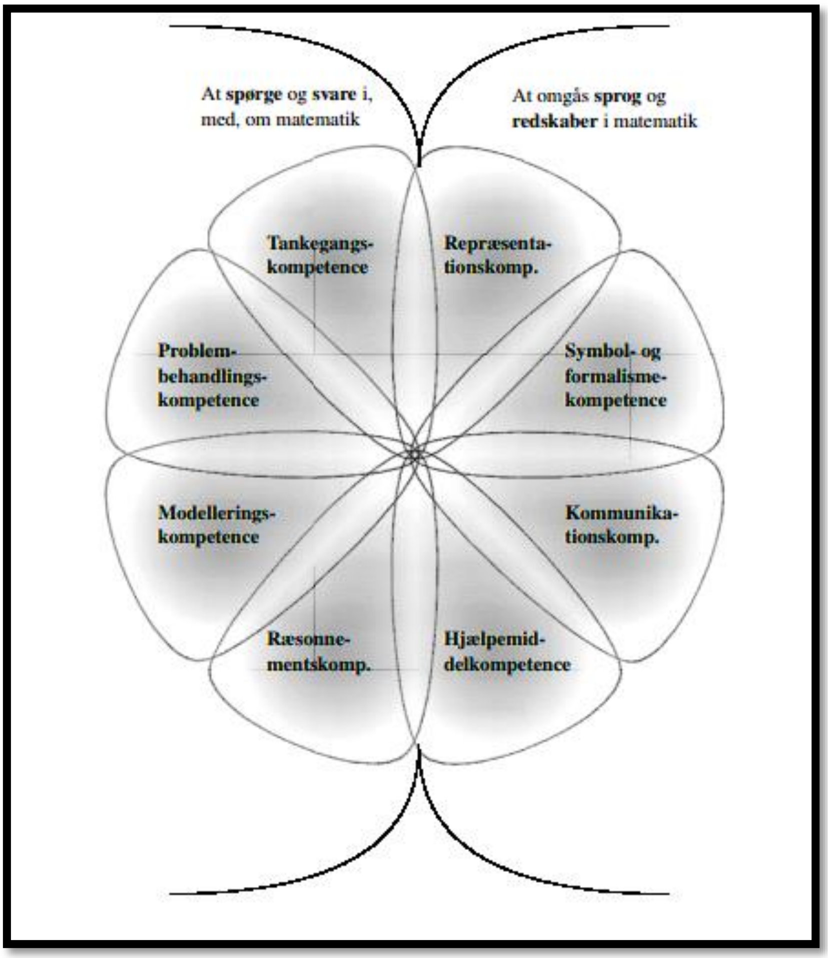
Definisjonen ovenfor viser til at kunnskaper og ferdigheter er forutsetninger for og deler av det å utvikle kompetanse. Elevene må få erfaring med å anvende det de har lært i gamle og nye sammenhenger. De skal også ha en forståelse av det de har lært, kunne reflektere over det de gjør, og foreta kritiske og etiske vurderinger (Kunnskapsdepartementet, 2017).

I matematikk blir kompetansebegrepet brukt litt forskjellig av ulike forfattere. I nasjonale og internasjonale tester blir matematisk kompetanse brukt som et verktøy for å måle elevenes matematikkprestasjoner. Jeg har valgt å ta utgangspunkt i Niss et al. (2002) modell med åtte kompetanser for å beskrive matematisk kompetanse.

2.7.1 Niss' åtte matematiske kompetanser fordelt på to hovedgrupper

Ifølge Niss et al. (2002) består den helhetlige matematiske kompetansen av å ha kjennskap om, å forstå, utøve, anvende, og kunne ta stilling til matematikk og matematisk virksomhet i en rekke mangfoldige sammenhenger, der matematikken inngår eller kan komme til å inngå. Videre hevder Niss et al. at en elev med matematisk kompetanse har en innsiktsfull beredskap til å handle riktig i situasjoner som involverer en bestemt type matematisk utfordring.

Niss et al. (2002) definerer åtte matematiske kompetanser som til sammen utgjør den helhetlige matematiske kompetansen. Disse åtte kompetansene er gjensidig relatert, men har egen identitet. Videre deler Niss et al. de åtte matematiske kompetansene i to hovedgrupper. Den første hovedgruppen omhandler å kunne spørre og svare i matematikk, som utgjør de fire første kompetansene. De fire siste kompetansene utgjør den andre hovedgruppen, som omhandler å kunne håndtere matematikkens språk og redskaper. I figuren nedenfor presenteres de åtte matematiske kompetansene:



Figur 2: En visuell presentasjon av de åtte matematiske kompetansene (Niss, et al., 2002).

Niss et al. (2002) hevder at en matematisk kompetanse ikke kan erverves eller holdes isolert fra de andre kompetansene. Dette kommer av at alle kompetansene ikke er atskilte komponenter av den helhetlige matematiske kompetansen, og på et gitt tidspunkt kan de overlappe hverandre. Nedenfor vil jeg gi en grundigere beskrivelse av de åtte kompetansene.

Tankegangskompetanse

Den første kompetansen i den første hovedgruppen (å kunne spørre og svare i matematikk) er tankegangskompetanse. Matematisk tankegangskompetanse omhandler at elevene skal ha en bevissthet rundt hvilke spørsmål som er karakteristiske for matematikken. Elevene skal også kunne stille matematiske spørsmål og ha et overblikk over hvilke typer svar som forventes. Det består av at elevene skal kunne kjenne, forstå og bruke matematiske begreper, kunne utvide begreper ved abstraksjon og forstå hva som ligger i generaliseringen av matematiske resultater. Ifølge Niss et al. omhandler også denne kompetansen at elevene skal kunne skille mellom påstander, antagelser og bevis.

Problembehandlingskompetanse

Problembehandlingskompetansen består i at elevene skal kunne finne og formulere (avgrense og presisere) matematiske problemstillinger. Videre skal de kunne løse disse matematiske problemstillingene. Elevene skal etter hvert også kunne løse de matematiske problemstillingene ved bruk av egne og andres framgangsmåter. Niss et al. hevder at de matematiske problemene kan være rene, anvendte, åpne og lukkede oppgaver.

Modelleringskompetanse

Modelleringskompetanse handler om at elevene på den ene siden skal kunne analysere strukturer og egenskaper ved modeller, og videre kunne bedømme modellenes gyldighet og holdbarhet i forhold til den virkelige situasjonen. På den andre siden omhandler kompetansen at elevene skal kunne utføre aktiv modellbygging i en gitt kontekst. Ifølge Niss et al. inneholder aktiv modellbygging en rekke forskjellige faktorer. Elevene skal først kunne strukturere den situasjonen som kan modelleres. Deretter skal situasjonen matematiseres, som vil si at den skal oversettes til det matematiske språket med objekter, relasjoner og matematiske problemstillinger. Videre skal elevene kunne behandle modellen, herunder løse de matematiske problemene. Den vil da gi elevene anledning til å validere og bedømme holdbarheten av modellen både internt og eksternt. Modelleringskompetanse innebærer også at elevene skal kunne være kritiske i analyse prosessen, ha et overblikk og kunne kommunisere med andre om modellen og dens resultater.

Resonneringskompetanse

Den siste kompetansen i den første hovedgruppen (å kunne spørre og svare i matematikk) er resonneringskompetanse. Denne kompetansen består i at elevene skal kunne følge, bedømme, tenke ut og gjennomføre et matematisk resonnement (Niss, et al., 2002). Ifølge Lithner (2007) er et matematisk resonnement en tankeprosess som produserer antakelser, og fører til konklusjoner i løsningen av oppgaver. Resonneringen behøver ikke være korrekt eller formelt logisk, så lenge den er støttet av fornuftige begrunnelser og gir mening for elevene. Niss et al. (2002) hevder også at under resonneringskompetansen skal elevene ha viten og forståelse for et matematisk bevis. Elevene skal kunne vite hvordan et bevis er forskjellig fra matematiske resonnement, og kunne avgjøre når et matematisk resonnement utgjør et gyldig bevis eller ikke.

Representasjonskompetanse

Den første kompetansen i den andre hovedgruppen (å kunne håndtere matematikkens språk og redskaper) er representasjonskompetanse. Denne kompetansen omhandler blant annet at elevene skal kunne forstå (som vil si avkode, tolke, skille mellom) og bruke forskjellige representasjoner av matematiske objekter, fenomener, problemer eller situasjoner. Et eksempel på denne kompetansen er at elevene skal ha evne til å tegne en figur for å finne et mønster, system eller sammenheng. Denne kompetansen innebærer også at elevene skal ha en forståelse av de forskjellige forbindelsene mellom ulike representasjoner for de samme handlinger. Det vil blant annet si at elevene skal kunne velge blant dem og oversette imellom de forskjellige representasjonsformene (Niss, et al., 2002).

Symbol- og formalismekompetanse

Symbol- og formalismekompetansen består i at elevene blant annet skal kunne avkode symbol- og formalismespråket. Videre skal de kunne oversette fram og tilbake mellom det matematiske symbolspråket og det hverdagslige språket. Elevene skal også kunne behandle og bruke symbolske utsagn, uttrykk og formler. Da vil de få innsikt i "spillereglene" for formelle matematiske systemer (Niss, et al., 2002).

Kommunikasjonskompetanse

Kommunikasjonskompetanse forståes som at elevene skal kunne sette seg inni og fortolke andres matematiske skrifter, muntlige eller visuelle utsagn og "tekster". Elevene skal også kunne uttrykke seg på ulike måter og på forskjellige nivåer av teoretiske og tekniske presisjon både skriftlig, muntlig eller visuelt for forskjellige kategorier av mottakere.

Hjelpemiddelkompetanse

Den siste kompetansen i den andre hovedgruppen (å kunne håndtere matematikkens språk og redskaper) er hjelpemiddelkompetanse. Denne kompetansen består av at elevene skal ha kjennskap til ulike relevante redskaper for matematisk virksomhet. Videre skal de ha innblikk i deres muligheter og begrensninger i forskjellige situasjoner, slik at de kan brukes på en hensiktsmessig og reflektert måte (Niss, et al., 2002).

3 Metode

I metodekapittelet presenterer jeg den metodiske tilnærmingen i studien, og hvilke metoder jeg har benyttet for å samle inn og analysere data. Videre vurderer jeg studiens kvalitet ved å bruke begrepene validitet og relabilitet. Til slutt trekker jeg frem metodekritikk og etiske overveielser.

3.1 Metodisk tilnærming

Denne masteroppgaven handler om elever som arbeider med algebra, nærmere bestemt med geometriske mønster. Problemstillingen er: «*Hvordan kan arbeid med geometriske mønster bidra til elevenes forståelse av det matematiske symbolspråket?*». Dette gjør jeg ved å gjennomføre en casestudie der formålet er å få kunnskap om elevers resonneringskompetanse gjennom deres arbeid med geometriske mønster, og hvordan arbeidsprosessen kan bidra til en forståelse av det matematiske symbolspråket. Utfra problemstillingen velger jeg en kvalitativ tilnærming. Bjørndal (2015) framholder at i forskning der forskningsmetoden er kvalitativ, ønsker forskeren å få en helhetsforståelse av sosiale prosesser og sammenhenger i et lite utvalg deltakere eller respondenter. Dersom forskeren ønsker å undersøke et fenomen i et stort utvalg, på en strukturert og systematisk måte, vil det være hensiktsmessig å velge en kvantitativ metode. I kvantitativ forsking undersøker forskeren fenomen innenfor et stort utvalg ved å ta utgangspunkt i tall og statistikker.

For å kunne undersøke og få en dypere forståelse av hvordan elever viser resonneringskompetanse når de arbeider med geometriske mønster, har jeg begrenset omfanget av deltagere og tidsramme. Jeg valgte derfor å undersøke en liten gruppe av elevene innenfor en bestemt tidsramme. Forskningen min er da basert på en casestudie, som belyses og tolkes gjennom et oppgavebasert intervju og observasjon.

3.2 Casestudie

Ifølge Christoffersen & Johannessen (2012) blir casestudier ofte benyttet innenfor utdanningsforskning. Casestudier kan knyttes til kvalitative tilnærminger, som observasjon eller åpne intervjuer. Videre fremmer de at i en casestudie ønsker en forsker å innhente mye informasjon fra noen enheter over en kort eller lang tidsperiode gjennom en detaljert datainnsamling. Eksempler på enheter kan være elever, elevgrupper, klasser eller skoler. Disse enhetene i casen er tids- og stedsavhengige. Ifølge Andersen (1997), gir casestudie mulighet til å gå i dybden av en enhet, og vil gi mulighet for en helhetlig analyse av enheten som studeres.

Stake (1995) hevder at målet med en casestudie er at analysen, tolkningen og rapporteringen skal gi leserne en forståelse av tematikken som er utforsket. Han hevder videre at det finnes ingen fasit på hvordan casestudier kan gjennomføres, og at det finnes forskjellige typer casestudier som er definert utfra hva forskeren ønsker å studere. Yin (1994) presentere tre hovedtyper av caser: undersøkende (forsker definerer spørsmål og hypoteser til en etterfølgende studie), beskrivende (forsker beskriver et fenomen innenfor en kontekst) og forklarende (forsker presenterer data på sammenhenger mellom årsak og virkning). Videre hevder Yin at disse tre hovedtypene kan deles i to dimensjoner: en enkeltcase eller flere caser.

Jeg har som formål å beskrive og undersøke hvordan elevers resonneringskompetanse kommer til uttrykk gjennom arbeid med geometriske mønster, og videre hvordan denne arbeidsprosessen kan bidra til en forståelse av det matematiske symbolspråket. Ifølge Christoffersen & Johannessen (2012) kan dette karakteriseres som en beskrivende casestudie, hvor forskeren ikke ønsker å utvikle nye teorier eller modeller. I en slik studie kan forskeren avdekke en sosial “verden” ved å forske på objektene i deres naturlige miljø. Deretter kan forskeren prøve å gjengi den sosiale virkeligheten i en saklig kontekst. I min forskning vil jeg prøve å avdekke hvordan arbeid med geometriske mønster kan bidra til en forståelse av det matematiske symbolspråket. I denne oppgaven vil jeg gjengi hvordan en gruppe elever arbeidet med to forskjellige geometriske mønster i en matematikktime på skolen. Jeg vil bruke en gruppe på tre elever, og forskningen min kan karakteriseres som en beskrivende enkeltcase.

Ifølge Postholm (2005) er det problemstillingen og formålet med studien som avgjør hvilke og antall caser som forskeren velger å studere. Videre framholder hun at også rammeverket for forskningsarbeidet har relevans for valget av caser. I et mindre forskningsarbeid kan det være hensiktsmessig at forskeren velger én case, slik at det er mulig å gjennomføre undersøkelsen innenfor den tidsrammen som står til disposisjon. Det gir også forskeren mulighet til å gå i dybden av casen. Formålet i mitt prosjekt er å gå i dybden av innsamlet data, og innenfor rammeverket for prosjektet er det hensiktsmessig å studere bare en case. Jeg har valgt å belyse casen ved hjelp av observasjon og oppgavebasertintervju.

3.2.1 Observasjon

Begrepet observasjon kommer fra latin og betyr å iaktta eller å undersøke. I en pedagogisk sammenheng er observasjon en oppmerksom iakttakelse. Dette innebærer at en person konsentrerer seg for å observere noe som har en pedagogisk betydning (Bjørndal, 2015). Ifølge Postholm (2005) foregår en observasjonen i naturlige omgivelser, og den brukes som et verktøy for innsamling av data. Jeg har valgt å bruke observasjon som et verktøy i min beskrivende casestudie, fordi jeg ønsket å observere elevenes atferd under arbeid med geometriske mønster. Observasjonen av elevenes atferd og det elevene verbalt uttrykker kan gi en helhetlig forståelse av hvordan elevenes resonnement kommer til uttrykk.

Bjørndal (2015) hevder at det finnes to ulike former for observasjon. De to ulike formene er observasjon av første orden og observasjon av andre orden. Observasjon av første orden finner sted når en utenforstående (forsker, pedagog eller student) observerer den pedagogiske situasjonen. I denne situasjonen er observasjonen observatørens primære oppgave, siden han ikke trenger å konsentrere seg om noen andre oppgaver. Observasjon av andre orden er når en lærer eller veileder kontinuerlig observerer den pedagogiske situasjonen som han/hun selv er en del av. Da foregår observasjonen samtidig som den pedagogiske aktiviteten. Observasjonen er ikke det primære, men en komplementær og sidestilt oppgave til den pedagogiske aktiviteten.

I denne studien vil jeg først observere elevene mens de arbeider med fyrstikkmønster, og deretter observerer jeg elevene samtidig som jeg intervjuer dem. Når elevene arbeider med fyrstikkmønstrene, vil min primære oppgave være å observere hvordan elevene arbeider. I denne delen av prosjektet vil jeg benytte observasjon av første orden. Hvis jeg må bryte inn under elevenes arbeidsprosess med fyrstikkmønstrene, blir jeg også en del av den pedagogiske aktiviteten. Det vil da føre til at jeg benytter observasjon av andre orden. I det påfølgende intervjuet vil jeg benytte observasjon av andre orden. Da jeg observerer elevene samtidig som jeg intervjuer dem. Observasjonen blir da en sidestilt oppgave, siden mitt hovedfokus er å intervjue elevene.

3.2.2 Oppgavebasert intervju

I studien har jeg valgt å bruke et oppgavebasert intervju som intervjuform. Et oppgavebasert intervju består av at informanter får utdelt oppgaver som de skal løse, og etter løsningsprosessen er det et påfølgende intervju. Oppgavebaserte intervjuer er en underkategori av Piagets kliniske intervjuer som ble benyttet tidlig på 1960 – tallet for å få en dypere forståelse av barns kognitive prosesser (Goldin, 1997). Maher & Sigley (2014) hevder at et oppgavebasert intervju vil gi forskeren innsikt i elevenes eksiterende matematiske kunnskaper, og hvordan elevene bygger nye ideer på tidligere ideer for å utvikle egen kunnskap. I min studie er et oppgavebasert intervju best egnet for innsamling av data, fordi det gir innsikt i hvordan elevene arbeider med geometriske mønster. Et forskningsintervju vil ikke inneholde oppgaver som elevene skal arbeide med, og dermed vil det ikke gi samme datasamling som et oppgavebaserte intervju. Når elevene arbeider med oppgavene vil jeg få innsikt i deres tankeprosesser. Videre vil det gi innblikk i elevenes nivåer av matematisk tenkning ved at de forteller hva de tenker og hvilke valg de gjør under oppgaveløsningen.

Ifølge Goldin (1997) er formålet med et oppgavebasert intervju å (a) observere elevenes matematiske atferd, ofte i en kontekst som omhandler oppgaveløsning, og (b) trekke slutninger fra observasjonen, som gjør det mulig for forskeren å si noe om elevenes mulige meninger, kunnskapsstrukturer, kognitive prosesser, påvirkning eller endring av disse i løpet av intervjuet. Formålet med det oppgavebaserte intervjuet i min studie er å observere elevenes matematiske atferd når de arbeider med geometriske mønster, og ut fra dette trekke slutninger om elevenes nivåer av matematisk tenkning. Videre bruke disse slutningene til å si noe om elevenes arbeid med geometriske mønster kan bidra til en forståelse av det matematiske symbolspråket.

I oppgavebaserte intervjuer har forsker og informanter en interaksjon ved at informantene får utdelt oppgaver. Forskeren skal på forhånd ha reflektert gjennom oppgavene, og de skal velges ut ifra intervjuets formål (Maher & Sigley, 2014). Oppgavebaserte intervjuer kan være strukturerte, semistrukturerte eller åpne intervjuer. I min studie har jeg valgte at det oppgavebaserte intervjuet skal være semistrukturert, hvor oppgavene og det matematiske temaet var fastsatt. Ifølge Christoffersen & Johannessen (2012) har et semistrukturert intervju en overordnet intervjuguide som utgangspunkt, hvor rekkefølgen av spørsmål og tema kan variere.

3.3 Samarbeid med matematikklærer

Høsten 2016 begynte jeg å arbeide som hjelpelærer i en 1P matematikk-klasse på en videregående skole i Troms. Utfra denne bakgrunnen så jeg det som en god mulighet til å bruke enkelte elever fra klassen i mitt masterprosjekt. Tidlig på høsten spurte jeg faglæreren om jeg kunne gjennomføre et prosjekt i klassen i forbindelse med masteroppgaven min, og han svarte positivt. På dette tidspunktet hadde jeg ikke bestemt hva prosjektet skulle omhandle eller formulert problemstillingen i oppgaven. I samtale med faglæreren fikk jeg forskjellige innspill til mulige prosjekt, og han pekte på begrensninger som jeg kunne møte under gjennomføringen. I samtale med min oppgaveveileder kom jeg til slutt fram til mitt endelige prosjektopplegg, og hvilke elever som kunne være aktuelle deltakere i prosjektet.

Før jeg skulle gjennomføre studie med de aktuelle elevene (presenteres i det påfølgende kapittelet), sendte jeg en mail med de to prosjektoppgavene til elevenes faglærer. Han gav positiv tilbakemelding på oppgavene, og ønsket også at hele klassen skulle arbeide med disse oppgavene. Utfra dette kom vi fram til at mens de enkelte elevene deltok i studien, skulle resten av klassen arbeide med de samme oppgavene i klasserommet.

3.4 Beskrivelse av utvalg

I løpet av høsten fikk jeg kunnskap om at elevene hadde forskjellig måloppnåelse i matematikkfaget. Jeg observerte at enkelte elever med ulik måloppnåelse frivillig arbeidet sammen når de skulle arbeide individuelt med oppgaver. En av disse gruppene bestod av tre elever, som jeg har valgt å kalle; *Maria*, *Harald* og *Thor*. Maria hadde høy måloppnåelse i matematikkfaget, operasjonalisert som karakter 5. Begge guttene hadde lav måloppnåelse i faget, operasjonalisert som karakter 2. Hver matematikktime samarbeidet disse elevene, og jeg observerte at alle tre elevene var aktive. I tillegg observerte jeg at de hadde mange faglige diskusjoner når de arbeidet med oppgavene. Utfra disse observasjonene valgte jeg at denne gruppen skulle være casen i masterprosjektet.

Begrunnelsen for at denne gruppen ble valgt, er at elevene har ulikt forhold til matematikk, er trygge på hverandre og på lærerne. Alle tre er blide, hyggelige og utadvendte elever. I samtaler med gruppen er de åpne og imøtekommende. De svarer på spørsmål, og stiller reflekterende spørsmål tilbake. Dette tolker jeg som om at de er trygge på seg selv og omgivelsene. Maria er aktiv og "lederen" i gruppen. Hun tar ansvar, og forklarer/hjelper guttene. Harald er en snakkesalig elev, og sier fort ifra hvis han ikke forstår. Videre er han flink til å stille spørsmål om oppgavene, utregningene og løsningene. Dette kan tolkes som om Harald er opptatt av å få en forståelse av oppgavene. Thor er mindre snakkesalig enn Harald, og stiller ikke så mange spørsmål. Han godtar ofte utregninger og løsninger uten å ha en forståelse, og arbeider videre med de neste oppgavene. Det at elevene har ulikt forhold til matematikk, vurderte jeg som viktig. Elevenes ulike forhold til matematikk kan føre til interessant data i generaliseringsprosessen av geometriske mønster.

3.5 Presentasjon av fyrstikkmønster

Fyrstikkoppgavene som ble valgt til studien, er hentet fra Nämnaren[2]. Disse oppgavene kan brukes som introduksjon i algebraundervisningen, og oppgavene kan tilpasses etter elevenes alder. Videre vil oppgavene gi mulighet til rike diskusjoner, samt utvikle elevenes logiske tankegang og tallforståelse (Ahlström, 2001). Oppgavene omhandler numeriske følger som er representert gjennom geometrisk mønster. Jeg valgte å bruke disse oppgavene i studien, fordi oppgavenes oppbygning blant annet kan knyttes til van Hieles nivåer (1986). De er også laget slik at alle elevene starter på samme nivå. Elevene skal gjennom oppgaven behandle informasjon om figurene, som de videre skal bruke for å uttrykke mønsteret i figurene ved det matematiske symbolspråket.

De to oppgavene jeg har valgt å bruke har en induktiv tilnærming, hvor elevene arbeider med gjetninger og eksempler som er veiledet av intuisjoner og følelser (Thompson & Martinsson,

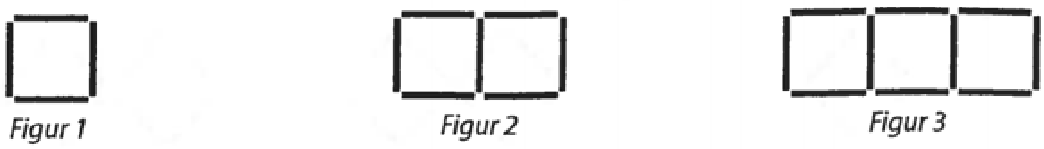
[2] Nämnaren er et svensk tidsskrift som kommer ut fire ganger i året. Målet med tidsskriftet er å forbedre matematikkundervisningen i barnehager, grunnskoler, videregående skoler, voksenopplæring og lærerutdanning ved å dele praksis og relevant forskning knyttet til læring og undervisning i matematikk (NCM & Nämnaren, 2013)

1997). Ved å arbeide med disse to oppgavene kan elevene vise resonneringskompetanse, representasjonskompetanse og symbol- og formalismekompetanse. Nedenfor presenterer jeg og beskriver de to oppgavene jeg har valgt.

3.5.1 Fyrstikkmønster 1

Oppgaven - Fyrstikkmønster 1 fremstiller et geometrisk mønster som er en lineær vekst ($T = 3n + 1$, hvor T står for totalt antall fyrstikker og n står for figurens nummer). Nedenfor i figur 3 har jeg presentert hele oppgaven.

Figurene nedenfor er bygd opp av fyrstikker etter et mønster:



1) Bygg figurene ovenfor med fyrstikker.
2) Bygg figur nummer fire i samme mønster.
3) Bygg figur nummer fem.
4) Fyll inn de tallene som mangler i tabellen nedenfor:

Figurens nummer	1	2	3	4	5	10	20	50
Antall fyrstikker								

5) Forklar med ord hvordan dere finner antall fyrstikker for en bestemt figur. Kan dere ut av dette lage en formel?

Figur 3: Oppgaven - Fyrstikkmønster 1 (Ahlström, 2001)

De tre første deloppgavene i fyrstikkmønster 1 går ut på at elevene skal bygge/legge opp figurene 1 til 5. Disse deloppgavene forutsetter at elevene kan se hvordan mønsteret i figurfølgen utvikler seg, og bruke mønsteret til å bygge/legge opp figurene. Elevene som klarer disse tre deloppgavene, vil vise resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå én (van Hiele, 1986). I deloppgave fire skal eleven fylle inn antall fyrstikker for de gitte figurene i tabellen. Denne deloppgaven forutsetter at elevene kan bruke mønsteret i figurfølgen til å beregne antall fyrstikker i de påfølgende figurene. Elevene som mestrer denne deloppgaven viser resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå to (van Hiele, 1986).

Før intervjuet med elevene sendte jeg en mail med oppgavene til elevenes faglærer (se kapittel 3.3), og hvor jeg ønsket tilbakemelding på oppgavene. Elevenes faglærer har bedre kjennskap til elevenes matematikk-kunnskaper enn jeg har, og kunne gi tilbakemelding om oppgavene var tilpasset elevene. I en samtale dagen etter jeg hadde sendt mailen, fikk jeg innspill om å endre Fyrstikkmønster 1 deloppgave fem. Først var deloppgaven formet slik at elevene skulle velge mellom fire alternativ og begrunne den formelen som beskrev mønsteret. Faglæreren mente at det var bedre hvis den siste deloppgaven var åpen, slik at elevene selv skulle prøve å finne en formel. Hans erfaring var at hvis elevene skulle velge en formel som passet mønsteret, kunne de fort bli forvirret når de så formler med symboler. Videre mente han at elevene ville få en bedre forståelse hvis de skulle prøve å se en sammenheng mellom figurene, og deretter komme fram til en formel. Ifølge han er overgangen mellom en gitt situasjon og det å kunne uttrykke situasjonen med det matematiske symbolspråket et kritisk punkt i elevenes læringsprosess.

Med bakgrunn i faglærerens erfaringer, valgte jeg derfor å endre deloppgave fem. Dette valget kan også begrunnes med utgangspunkt i van Hieles (1986) nivåer. Hvis elevene skal kunne mestre ett nivå, må elevene først beherske store deler av de lavere nivåene. Elevene bør først behersker å forklare hvordan de finner antall fyrstikker for en bestemt figur, og deretter klare å lage en generell formel. Van Hiele hevder også at elevene bruker ulikt "språk" på de forskjellige nivåene. Utfra dette valgte jeg derfor at oppgaveteksten ikke skulle inneholde noen symboler. I tilfelle noen av elevene ikke mestret store deler av de lavere nivåene, slik at alle elevene startet på samme nivå. Derfor omhandler deloppgave fem at elevene først skal forklare med ord hvordan de kan finne antall fyrstikker for en bestemt figur, og deretter lage en generell formel[3]. Denne deloppgaven forutsetter at elevene kan beskrive mønsteret ved

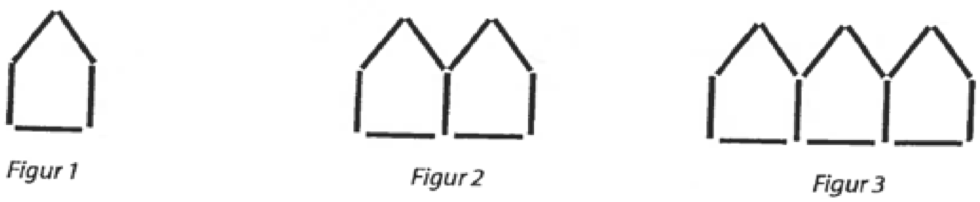
[3] I denne oppgaven bruker jeg begrepene formel og matematisk uttrykk om hverandre, fordi enkelte didaktikere bruker begrepet formel mens andre bruker matematisk uttrykk.

bruk av det matematiske symbolspråket. Elevene som klarer denne deloppgaven, viser resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå tre.

3.5.2 Fyrstikkmønster 2

Oppgaven - Fyrstikkmønster 2 fremstiller et geometrisk mønster som også er en lineær vekst (T = 4n + 1). Nedenfor i figur 4 har jeg presentert hele oppgaven.

Figurene nedenfor er bygd opp av fyrstikker etter et mønster:



1) Bygg de tre figurene ovenfor med fyrstikker.
2) Bygg figur nummer fire i samme mønster.
3) Bygg figur nummer fem.
4) Fyll inn de tallene som mangler i tabellen nedenfor:

Figurens nummer	1	2	3	4	5	10	20	50
Antall fyrstikker								

5) Velg den formelen som stemmer. Hvor n er figurens nummer og T er totalt antall fyrstikker.

$T = n \cdot 4$ $\quad$ $T = n \cdot 4 + 1$

$T = n \cdot 5$ $\quad$ $T = n \cdot 5 + 1$

Figur 4: Oppgaven - Fyrstikkmønster 2 (Ahlström, 2001).

De tre første deloppgavene i Fyrstikkmønster 2 omhandler at elevene skal bygge/legge opp figurene 1 til 5. Deloppgavene forutsetter at elevene kan se hvordan mønsteret i figurfølgen utvikler seg, og bruke det til å bygge/legge opp figurene. Elevene som mestrer disse tre deloppgavene, viser resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå én i van Hieles (1986) teori. I deloppgave fire skal elevene fylle inn antall fyrstikker for de gitte figurene i tabellen. For å kunne utføre denne deloppgaven må elevene bruke mønsteret i figurfølgen til å beregne antall fyrstikker i de påfølgende figurene. Elevene som klarer dette, viser resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå to.

Etter innspill fra faglærer valgte jeg ikke å endre deloppgave fem. Utfra at jeg ønsket å undersøke om jeg ville få ulik data i forhold til deloppgave fem i Fyrstikkmønster 1. Deloppgave fem omhandler at elevene skal velge den formelen som beskriver mønsteret utfra fire svaralternativer. I det matematiske uttrykket står symbolet T for totalt antall fyrstikker og n for figurens nummer. Jeg valgte å bruke disse symbolene, fordi jeg ønsket at elevene skulle se en sammenheng mellom det hverdagslige språket og symbolene. Denne deloppgaven forutsetter at elevene forstår det matematiske symbolspråket, og kan bruke det for å velge den formelen som beskriver mønsteret i figurene. Elevene som klarer dette, viser resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå tre.

3.6 Intervjuguide

I utformingen av intervjuguiden valgte jeg å benytte Goldins (1997) fem prinsipper for et oppgavebasert intervju. Goldins fem prinsipper for utformingen av oppgavebaserte intervjuer går ut på; oppgavens tilgjengelighet for elevene; rik representasjonsstruktur; åpen problemløsning; tydelige kriterier; interaksjon med læringsmiljøet. Nedenfor vil jeg begrunne hvordan de fem prinsippene er anvendt i utformingen av studiens intervjuguide.

Utfra Goldins (1997) første prinsipp ønsket jeg å velge oppgaver som var av en slik karakter at elevene kunne skape både indre og ytre representasjoner av mønstrene for å komme fram til løsninger. Videre hevder Goldin at oppgavene i tillegg bør ha en rik representasjonsstruktur, som er det andre prinsippet. Det impliserer at elevene utfra oppgavene skal kunne skape symbolske og imaginære representasjoner. Begrensningen for valg av oppgaver ligger i problemstillingen og intervjuets varighet. Jeg valgte derfor å bruke oppgaver med lineære vekster, som er representert gjennom geometriske mønster. Videre ønsket jeg å variere oppgavene ved å bruke to ulike lineære vekster, som jeg har diskutert i delkapittelet ovenfor. Jeg valgte også at den siste deloppgaven i begge oppgavene skulle være ulik, etter innspill fra elevenes faglærer.

Goldins (1997) tredje prinsipp omhandler at intervjuguiden skal utformes slik at elevene får mulighet til å løse oppgavene med liten påvirkning fra intervjuer. Videre hevder Goldin at intervjuguiden skal ha tydelige kriterier, som er fjerde prinsipp. Jeg valgte derfor å utforme intervjuguiden slik at elevene først fikk utdelt de to oppgavene (en om gangen), uten at jeg stilte noen spørsmål. Det gav meg som intervjuer mulighet til å fange opp umiddelbare, spontane reaksjoner. Deretter fikk elevene beskjed om å løse oppgavene samtidig som de fortalte hva de tenkte. Denne delen av intervjuet foregikk uten veiledning fra meg som intervjuer. Det førte til at jeg ikke påvirket elevene, og da fikk jeg en bedre innsikt i hvordan de arbeidet med oppgavene. Videre valgte jeg å designe intervjuguiden med eventuelle åpne oppfølgingsspørsmål i tilfelle elevene ble stille eller stoppet helt opp i oppgaveløsningen. Goldin (1997) hevder at det er viktig at intervjueren ikke påvirker elevene med å stille ledende spørsmål, eller ved å stille spørsmål for tidlig. Derfor bestemte jeg at hvis elevene ble stille under oppgaveløsningen, skulle jeg noter dette på notatarket mitt. Etter at elevene var ferdig med oppgavene, kunne jeg da gå tilbake å stille eventuelle oppfølgingsspørsmål. Da forhindret jeg å forstyrre elevenes tankeprosesser under oppgaveløsningen, og videre forhindret jeg at verdifull data ikke gikk tapt. Til slutt valgte jeg å forme intervjuguiden med spørsmål knyttet til oppgavene, elevenes arbeidsmetode og matematisk kompetanse. Utfra at jeg ønsket å få mer dybdekunnskap om elevenes tanker og valg under oppgaveløsningene.

I det siste prinsippet fremhever Goldin (1997) at elevene skal ha tilgang på ulike og varierte representasjonsformer. Denne tilgangen vil bidra til at intervjuer kan observere et større spekter av løsninger, og ha mulighet til å trekke flere slutninger om elevens indre prosesser om hvordan de tenker under oppgaveløsningen. I intervjuet hadde elevene tilgang til oppgavearkene, kladdeark, kalkulator, blyanter, viskelær, tusjer (i ulike farger) og bokser med fyrstikker. Elevene ble i starten informert om at de hadde fri tilgang til disse artiklene under hele intervjuet.

Jeg valgte å ta lydopptak av intervjuet, slik at jeg i ettertid kunne få tilgang til eventuelle deler av intervjuet som jeg ikke fikk med meg da intervjuet ble utført.

3.7 Pilotintervju

Det ble gjennomført et pilotintervju tre dager før det aktuelle intervjuet med elevene. Det var tre personer i tjueårs - alderen som deltok. To av disse personene var lektorstudenter med hovedfag i matematikk, og de gikk inn i rollen som elever med 1P matematikk. Under intervjuet skulle disse to ha tilsvarende kompetanse som to av elevene (én med høy måloppnåelse og én med lav måloppnåelse). Den tredje personen var en første - års lærerstudent, som selv hadde tatt matematikk 1P og 2P fra videregående skole. Det var tre år siden denne personen sist hadde matematikk, og ut fra hans bakgrunn tok han rollen som en av elevene med lav måloppnåelse.

Hensikten med pilotintervjuet var å avdekke mulige mistolkninger rundt oppgavene, spørsmålsstillingen og eventuelle misforståelser som kunne oppstå under selve intervjuet. I tillegg ble det gjennomført for å forberede og bevisstgjøre meg på min rolle under selve intervjuet.

Det ble brukt lydopptaker under pilotintervjuet. Jeg observerte og skrev notater mens personene løste oppgavene. Etter at forsøkspersonene hadde løst oppgavene, ble intervjuet gjennomført. Til slutt var det en samtale om oppgavene og intervjuet. I samtalen fikk jeg tilbakemelding om at en av deloppgavene kunne mistolkes, og innspill til hvordan deloppgaven kunne om formuleres. Jeg fikk også tilbakemelding om at spørsmålene i intervjuet inneholdt vanskelige akademiske ord, som elevene kunne ha problemer med å forstå. På grunnlag av pilotintervjuet ble formuleringen av den ene deloppgaven endret, og språket i intervjuguiden ble tilpasset elevenes nivå.

3.8 Analytiske refleksjoner og begrunnelser

Etter at det oppgavebaserte intervjuet var gjennomført, ble lydopptaket transkribert. Det var vanskelig å transkribere store deler av lydopptaket, fordi elevene snakket samtidig. Dette tolker jeg som at elevene kom med spontane ytringer. Disse spontane ytringene viser til troverdighet med at elevene uttrykker det de tenker og mener. Jeg valgte først å dele transkripsjonen i fem kategorier: Fyrstikkmønster 1, Fyrstikkmønster 2, spørsmål knyttet til oppgaven, spørsmål knyttet til arbeidsmetoden og spørsmål knyttet til elevenes matematiske kompetanse. Under det oppgavebaserte intervjuet tok jeg notater utfra hva jeg observerte (se delkapittel 3.2.1). Disse notatene og elevenes oppgaveark ble kategorisert sammen med kategoriene i transkripsjonen.

Jeg begynte med å kode datamaterialet i kategoriene Fyrstikkmønster 1 og Fyrstikkmønster 2. I kodingen valgte jeg å bruke Niss et al. (2002) rammeverk for matematisk kompetanse, hvor jeg tok utgangspunkt i resonneringskompetanse, representasjonskompetanse og symbol- og formalismekompetanse. Videre knyttet jeg resonneringskompetansen til van Hieles (1986) nivåer, hvor elevene viser resonneringskompetanse som kan kategoriseres som tenking på ulike nivåer. Utgangspunktet for kodingsprosessen ble derfor de fire kategoriene: resonnement kategorisert som nivå én, resonnement kategorisert som nivå to, resonnement kategorisert som nivå tre og resonnement kategorisert som nivå fire. Videre valgte jeg også å se oppgaveløsningen i lys av Deweys (1998) to holdninger, "åpent sinn og hel - hjertet", og i tillegg holdninger som viser til den didaktiske kontrakten (Brousseau, 2002) da jeg kodet elevenes gjetninger. Til slutt valgte jeg å kode elevenes arbeidsprosess i lys av begrepsparet induktiv og deduktiv tilnærming (Thompson & Martinsson, 1997).

Da jeg hadde kodet datamaterialet i Fyrstikkmønster 1 og Fyrstikkmønster 2, kom jeg fram til at jeg hadde tilstrekkelig datamateriale. Elevenes utsagn var innholdsrike, og jeg hadde nok data som jeg kunne arbeide videre med. Derfor valgte jeg ikke å kode resten av transkripsjonen. I tillegg var det resterende datamaterialet i transkripsjonen dårlig, fordi elevene ikke uttrykte seg utdypende i det påfølgende intervjuet. Elevenes utsagn gav ikke noen muligheter for koding.

Kort oppsummert har jeg i analysen valgt å kode og systematisere det oppgavebaserte intervjuet i to kategorier: Fyrstikkmønster 1 og Fyrstikkmønster 2. Begge disse kategoriene er analysert utfra forskjellige teorier. Ettersom jeg ønsker å få en helhetlig forståelse av hvordan elevene arbeider med geometriske mønster, og videre hvordan denne arbeidsprosessen kan bidra til elevenes forståelse av det matematiske symbolspråket.

3.9 Kvalitet i studien

Validitet og reliabilitet er begreper som blir brukt i forskning for å sikre høy grad av objektivitet (Christoffersen & Johannessen, 2012). I kvalitativ forskning er begrepene generaliserbarhet, pålitelighet og troverdighet sentrale (Cohen, et al., 2007; Schoenfeld, 2007). Ryeng (2002) understreker at kvalitativ forskning forutsetter at forskeren har faglig innsikt, og oppmerksomhet som er rettet mot metodiske utfordringer. Da vil forskerens fokus under produksjon av data og valg av skrivestil avgjøre studiets reliabilitet og validitet.

3.9.1 Validitet

Christoffersen & Johannesen (2012) omtaler begrepet validitet som studiets gyldighet. I en studie kan ikke validitet oppfattes som noe absolutt, og videre beskrives det som et kvalitetskrav som kan være tilnærmet oppfylt. Ifølge Kvale & Brinkmann (2009) omhandler gyldighet hvorvidt en studie faktisk undersøker det den skal undersøke.

Kvale (1997) hevder at valideringsarbeidet skal fungere som en kvalitetskontroll gjennom hele studien. Dette er i kontrast til den tradisjonelle tilnærmingen, som hevder at valideringsarbeidet bare skal foreligge i slutten av studien. Videre trekker Kvale fram syv stadier som berører validering gjennom hele studien. Det er: tematisering, planlegging, intervjuing, transkribering, analysering, validering og rapportering. Nedenfor har jeg valgt å begrunne validiteten i egen studie opp mot Kvales syv stadier.

Første stadium handler om tematisering. I dette stadiet vurderer Kvale (1997) gyldighet av prosjektets teoretiske forutantakelser, og hvor logisk utledningen fra det teoretiske grunnlaget til forskningsspørsmål er (eller motsatt). I min studie er problemstillingen utgangspunktet for valg av teori, hvor hovedaspektene er generalisering av geometriske mønster og forståelse for det matematiske symbolspråket. Utfra disse to aspektene er teorigrunnlaget i denne masteroppgaven bygd opp.

Det andre stadiet handler om planlegging. Den første kategorien i dette stadiet skildrer at gyldigheten av kunnskapen som produseres avhenger av undersøkelsesmetodens kvalitet (Kvale, 1997). Ettersom jeg ønsket å studere hvordan en bestemt gruppe elever arbeider med to ulike geometriske mønster, vil resultatene ikke bli de samme dersom intervjuet ble gjennomført med en annen gruppe elever. Derimot ville resultatet i stor grad kunne blitt det samme dersom intervjuet hadde blitt gjort på nytt på samme gruppe elever og forsker. Den andre kategorien i dette stadiet omhandler å minimere skadelige konsekvenser (Kvale, 1997). I mitt tilfelle handler det om at elevene ville miste undervisning da intervjuet foregikk parallelt med undervisningen. Denne kategorien har jeg grundigere diskutert under etiske overveielser, senere i oppgaven.

Kvales (1997) tredje stadium tar for seg gjennomføringen av intervjuet, hvor validitet omhandler intervjupersonens troverdighet og selve intervjuets kvalitet. I min studie omhandler dette at oppgavene som ble valgt til det oppgavebaserte intervjuet var av tilstrekkelig høy kvalitet, og eventuelle vurderinger i forhold til innsamling av data under intervjuet. Oppgavenes kvalitet og gjennomføring av intervjuet er diskutert under delkapitlene 3.5 og 3.6 tidligere i oppgaven.

Fjerde stadium handler om transkriberingsprosessen. Dette stadiet tar for seg valg av språklig stil for transkripsjonen, som omhandler gyldighet i overføringsprosessen fra muntlig til skriftlig form (Kvale, 1997). Elevene som deltok i min studie hadde nord - norsk dialekt, og jeg valgte å bruke dialekt som skriveform i transkripsjonen. Dette kan ha ført til at elevenes utsagn har mistet eller endret mening under transkripsjonen. Da jeg erfarte at enkelte ord på dialekt var problematisk å oversette til skriveform. Etter transkripsjon var ferdig valgte jeg å lese den opp mot lydopptaket, for å sikre at jeg ikke hadde mistet noen ord eller setninger i elevenes utsagn.

De tre siste stadiene fremstiller analysering, validering og rapportering. Validitet i analyseringen omhandler gyldighet av spørsmålene som stilles i intervjuet og om tolkningene av svarene på spørsmålene er logiske (Kvale, 1997). I analyseprosessen kodet jeg elevenes utsagn ut ifra teori som passet. Jeg valgte å kode datamaterialet tre ganger, for å forsikre at jeg ikke hadde feilkodet eller oversett noe. Validering og rapportering omhandler leserens rolle som validitetsbedømmer av oppgaven som helhet. Oppgaven er skrevet slik at leseren kan reflektere seg til funnene utfra teorigrunnen i oppgaven.

3.9.2 Reliabilitet

Reliabilitet omhandler i hvor høy grad studiets data er pålitelig. Reliabiliteten berører nøyaktigheten av hvordan studiets data: brukes, samles inn og bearbeides (Christoffersen og Johansen, 2012). Innenfor kvalitativ forskning kan reliabilitet knyttes til i hvor stor grad det er mulig å få de samme resultatene dersom studiet gjennomføres på et annet tidspunkt av en annen forsker (Kvale & Brinkmann, 2009). Ifølge Cohen et al. (2007) handler det da om at det er stor grad av nøyaktighet mellom de innsamlede dataene og det som faktisk hender under undersøkelsen.

I mitt tilfelle er intervjuet, ikke reproduserbart. Studien tar utgangspunkt i et oppgavebasert intervju som er påvirket av en kontekst. Hvis en gjentar det oppgavebaserte intervjuet, vil den innsamlede dataen ikke bli like nøyaktig. Jeg som intervjuer, elevgruppen som informanter, sted og tidspunkt for intervjuet og rammene rundt intervjuet har påvirket den innsamlede dataen. Dermed kan en ikke gjenskape den samme intervjusituasjonen, siden forholdene vil endres over tid. Da må reliabiliteten i studie omhandle påliteligheten i det som er blitt utført. En leser av denne oppgaven skal da kunne forstå hva som er gjort, hvorfor det er gjort og eventuelle konsekvenser prosessen har medført.

3.10 Metodekritikk

Det første jeg vil trekke fram i metodekritikken er tidsperspektivet i gjennomføringen av casestudien, som har vært en begrensende faktor. Postholm (2005) hevder at i et mindre forskningsarbeid er det hensiktsmessig å velge en case innenfor tidsperspektivet man har til rådighet. Jeg valgte derfor å gå i dybden av en case, for å få en helhetlig forståelse av hvordan arbeidet med to forskjellige geometriske mønster kan bidra til de tre elevenes forståelse av det matematiske symbolspråket. Casestudien gir ikke en generell eller allmenngyldig beskrivelse, som kan gjelde for flere elever. Funnene beskriver bare de aktuelle elevene som jeg har undersøkt.

3.11 Etiske overveielser

Det er forskerens ansvar å sikre informantenes anonymitet. Ifølge Christoffersen & Johannessen (2012) skal all data som inneholder personopplysninger formidles i anonymisert form. Det vil si at jeg som forsker ikke kan oppgi elevenes navn, og jeg kan videre ikke formidle informasjon som kan tilbakeføres til elevene. I den forbindelse ble studien meldt til Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS (NSD), og som godkjente studien. Dette innebærer at lydopptaket ble lagret på en minnepenn som kun jeg hadde tilgang til. Videre ble transkripsjonen bearbeidet uten at elevenes navn ble gjengitt, og den ble lagret på samme minnepenn som lydopptaket. I denne oppgaven er elevenes navn anonymisert ved at jeg har valgt å gi dem tilfeldige navn. Da studien var ferdigstilt ble lydopptaket destruert.

I et forskningsprosjekt må jeg følge forskningsetiske retningslinjer som er vedtatt av den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH). Disse retningslinjene kan slås sammen til tre typer hensyn som forskeren må reflektere over: (1) informantenes rett til selvbestemmelse og autonomi, (2) forskernes plikt til å respektere informantenes privatliv og (3) forskernes ansvar for å unngå skade (Christoffersen & Johannessen, 2012). Av disse har jeg i min studie tatt stilling til to av hensynene. Forskerens plikt til å respektere informantenes privatliv var ikke aktuell i min studie, siden studie ikke omhandlet elevenes privatliv. Videre vil jeg presentere hvordan jeg har fulgt opp de to andre hensynene.

Det første hensynet skildrer elevenes rett til selvbestemmelse og autonomi. Ifølge Christoffersen & Johannessen (2012) vil det si at elevene selv har rett til å bestemme over egen deltagelse i studien. I min studie var det viktig at elevenes frivillighet ble ivaretatt. Jeg hadde allerede en relasjon til elevene som lærer, og denne relasjonen kunne føre til at elevene følte seg presset til å delta. Etter samtale med en fagperson fra Norsk Senter for Forskningsdata (NSD) kom jeg fram til hvordan rekrutteringen kunne foregå, slik at elevenes frivillighet ble ivaretatt. Elevene fikk dermed tre ulike anledninger til å velge egen deltakelse i studie. Først gjennom samtale med meg da jeg informerte om prosjektet. Deretter gjennom samtale med faglærer noen dager før selve intervjuet. Det var viktig at elevene i samtale med faglærer fikk velge over egen deltakelse. Elevene er mer trygg på faglærer, og utfra det kunne si om de ville delta eller ikke. Til slutt fikk elevene ved oppstart av intervjuet mulighet til å velge om de ville delta (samtykkeerklæring). Jeg valgte også ved oppstart å informere en gang til om studiet, hvem som hadde tilgang på den innsamlede informasjonen og elevenes rettigheter. Elevene var fylt 16 år, og dermed kunne de samtykke selv siden studien ikke innhentet noen sensitive opplysninger. Det var ingen av elevene som valgte å avbryte etter dette.

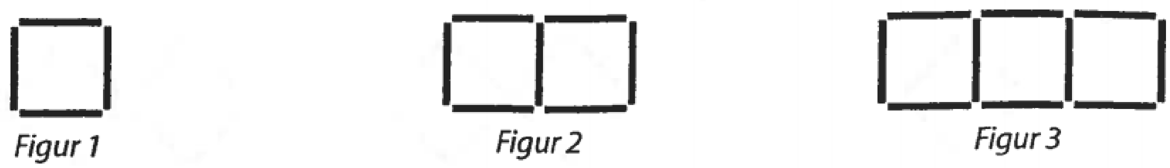
Det andre hensynet går ut på å unngå skade. Ifølge Christoffersen & Johannesen (2012) handler det om at forskeren må vurdere om innsamlingen av data kan berøre sårbare og følsomme områder hos elevene. Disse tilfellene var ikke aktuelle, siden studiet ikke omhandler elevenes personlige liv. Det som imidlertid kunne være til skade for elevene, var at de mistet undervisning med at intervjuet foregikk parallelt med undervisningen. Dette ble løst i samarbeid med faglærer ved at resten av klassen fikk arbeide med de samme oppgavene. Det påfølgende intervjuet ble begrenset til ca. 30 minutter, samt at jeg ble enig med faglærer om at det ikke ble introdusert nye emner i klassen mens intervjuet foregikk.

4 Analyse

I dette kapittelet presenterer jeg funn og analysen av datamaterialet. Fokuset i analysen er rettet mot elevenes utsagn i arbeidet med geometriske mønster. Jeg har også knyttet data fra det jeg observerte da elevene arbeidet med de to geometriske mønstrene, til elevenes utsagn. Videre har jeg delt analysen inn i to hoveddeler: Fyrstikkmønster 1 og Fyrstikkmønster 2. Elevenes utsagn er systematisert og belyst utfra oppgavens teoretiske grunnlag, slik at jeg kan beskrive hvordan elevene viser resonneringskompetanse gjennom arbeid med geometriske mønster.

4.1 Fyrstikkmønster 1

Dette kapitelet gjengir elevene i arbeid med oppgaven - Fyrstikkmønster 1. Fyrstikkmønster 1 er en numerisk følge, som er representert gjennom et geometrisk mønster. Figur 5 viser det geometriske mønsteret i oppgaven.



Figur 5: Det geometriske mønstret (T = 3n +1) i oppgaven - Fyrstikkmønster 1 (Ahlström, 2001).

4.1.1 Resonnement kategorisert som nivå én

De tre første deloppgavene i Fyrstikkmønster 1 omhandlet at elevene skulle bygge/legge opp figurene 1 til 5. Disse deloppgavene forutsatte at elevene så hvordan mønsteret i figurfølgen utviklet seg, og brukte fyrstikkene til å bygge/legge opp figurene. Elevene startet med å lese oppgaveteksten. Deretter begynte de å bygge en figur hver. Etter ca. et minutt valgte de å bygge figurene i lag. Dette på grunn av praktiske årsaker, og at figurene ble mer oversiktlige. De bygget først figur 1, og deretter tok de utgangpunkt i figur 1 for å bygge de resterende figurene. Nedenfor er et utdrag fra samtalen da de bygget figurene:

Maria: Man legg tre til..

Harald: Man legg tre til.

Thor: Det er jo figur 2.

Maria: Ja! Figur 1, så figur 2 og legg til tre fyrstikker, så figur 3.

Thor: Så vi skal ikke ha en…(Blir avbrutt)

Maria: Nå har vi figur 3. Så tre fyrstikker til, så har vi figur 4 og så tre fyrstikker til..

I utdraget ovenfor uttrykker Maria og Harald først at mønsteret i figurfølgen øker med tre, som viser til en relasjon mellom to tall. Videre uttrykker Maria «*Ja! Figur 1, så figur 2 og legg til tre fyrstikker, så figur 3*», som er en nøyaktig beskrivelse av mønsterets utvikling i figurfølgen. Dette tolker jeg som at elevene har funnet de tre fyrstikkene som øker utfra mønsteret. Disse tre fyrstikkene indikerer at elevene har funnet repeteringsenheten (Unit of repeat), som de videre bruker til å bygge de resterende figurene (Threlfall, 1999). I denne delen av oppgaven blir mønsteret representert ved at elevene bruker en sekvens av tre fyrstikker, som viser elevenes representasjonskompetanse (Niss, et al., 2002). Videre gjenkjenner elevene mønstret som noe intuitivt, og de kan ikke forklare hvorfor mønsteret øker slik som det gjør. Resonneringskompetansen som elevene viser tilsvarer tenking på nivå én, hvor elevene skal kunne gjenkjenne noe induktivt (van Hiele, 1986).

Deloppgave fire i Fyrstikkmønster 1 handlet om at elevene skulle fylle inn antall fyrstikker for de gitte figurene i tabellen. Denne deloppgaven forutsatte at elevene brukte mønsteret i figurfølgen til å beregne antall fyrstikker i de påfølgende figurene. Elevene fant antall fyrstikker i figurene en til fem ved å telle fyrstikkene i figurene de allerede hadde bygd. For figur 10 diskuterte de hvordan de kunne finne antall fyrstikker. Nedenfor er et utdrag fra diskusjonen.

Maria: Ehhh, men hvis vi har 16 på 5? Og så må vi legge til 3 til vi får liksom mønster 10 eller figur 10.

Thor: Åja, æ vet. Det er jo…(Blir avbrutt)

Maria: Det er jo 10.

Thor: Bare hoppe rett opp på 10.

Maria: Ja, det hoppe rett opp.

(Alle ler)

Maria: Så da blir det?

Thor: Det blir masse.

Maria: 19 eller 20 eller noe, jeg kan ikke matematikk akkurat nå!

Thor: Vi har jo nok fyrstikker til å prøve.

Maria: Ja, prøv. (Ler)

I utdraget ovenfor uttrykker Maria at de kan ta utgangspunkt i figur 5 for å finne antall fyrstikker i figur 10. Videre fremhever hun at de vil få figur 10 ved å legge til tre fyrstikker gjentatte ganger til figur 5. Maria og Thor betegner denne prosessen som "det hoppe rett opp på 10". Videre utrykker Thor «*Det blir masse*» for antall fyrstikker i figur 10. Thors utsagn tolker jeg som at han er usikker på hvordan han kan finne antall fyrstikker, eller at han ikke har kunnskap om antall ganger de må legge til tre fyrstikker. Deretter uttrykker Maria «*19 eller 20 eller noe,…*» for antall fyrstikker i figur 10, hvor ingen av forslagene er riktig. Dette tolker jeg som at Maria har en ren regnefeil, eller at hun gjetter på svaret. Marias regnefeil kan komme av unøyaktig utregning på grunn av forventningspress eller stress. Det at Maria gjetter på svaret, kan tolkes som at hun er bevisst på at jeg og de andre elevene har positive forventninger til hennes handlinger. Da har Maria som intensjon å oppfylle disse forventningene, og ikke et ønske om å løse oppgaven. Marias forventninger viser da implisitt til den didaktiske kontrakten, som hun har som formål å opprettholde (Brousseau, 2002).

I slutten av utdraget har Thor en idé om at de kan bygge figur 10 ved at han uttrykker «*Vi har jo nok fyrstikker til å prøve*». Utfra Thors utsagn tolker jeg det som han har et ønske om å bygge figur 10 for å finne antall fyrstikker, heller enn å gjette på svaret. Dette indikerer at Thor tar kontroll over egen læring ved at han velger å bygge figur 10. Thor er ikke opptatt av å oppfylle mine forventninger, som er at han skal kunne regne seg fram til antall fyrstikker. Denne handlingen viser til at Thor bryter den didaktiske kontakten ved at han tar ledelse og involverer seg i oppgaven (Brousseau, 2002).

Elevene løser denne delen av oppgaven med å bygge figur 10, og deretter telle 31 fyrstikker. I denne delen av oppgaven viser elevene fremdeles resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå én. De har problemer med å behandle regneoperasjoner med konkrete tall, og derfor viser de ikke resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå to. En mulig tolkning er at elevene ikke har et nettverk av forbindelser, som fører til at de ikke klarer å se at de skal legge til $3 \times 5 = 15$ fyrstikker til figur 5. Ved å legge disse 15 fyrstikkene til figur 5 vil de få 31 fyrstikker som er antall fyrstikker i figur 10 (van Hiele, 1986).

4.1.2 Resonnement kategorisert som nivå to

De resterende figurene i deloppgave fire forutsatte også at elevene brukte mønsteret i figurfølgen for å beregne antall fyrstikker. Å bygge de resterende figurene med fyrstikker ville bli krevende på grunn av at det ikke ville være plass for figurene på bordet, og ikke nok fyrstikker. Elevene valgte å ta utgangspunkt i figur 10 for å beregne antall fyrstikker i figur 20. Nedenfor er et utdrag fra diskusjonen gjengitt.

> Thor: Og det blir vel dobbelt så mye…Nei, det blir ikke dobbelt så mye.
>
> Maria: Det blir ikke dobbelt så stort
>
> Thor: Nei
>
> Maria: Men blir det ikke dobbelt så mye minus en fyrstikk? Fordi, eh…Jo, det blir det. Den ene fyrstikken er i to!
>
> Thor: Ja
>
> Maria: Så da kan vi bare regne ut neste. Jeg må bare teste det ut.
>
> Harald: Da blir det jo sånn 61…Det blir 61, neste.

I utdraget over uttrykker Thor først at antall fyrstikker i figur 20 er det dobbelte antall av fyrstikker i figur 10. Videre hevder Maria at dette er feil ved at hun fremhever: «*Men blir det ikke dobbelt så mye minus en fyrstikk? Fordi, eh…Jo, det blir det. Den ene fyrstikken er i to!*». Utfra Marias utsagn tolker jeg det som at hun har kommet fram til at den valgte fremgangsmåten vil gi en ekstra fyrstikk i midten av figuren. Det fører til at hun foreslår at de må trekke fra en fyrstikk. Marias utsagn viser at hun har evnen til å tenke ut, følge og bedømme et matematisk resonnement. Dette viser til Marias resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå to, hvor hun mestrer regneoperasjoner med konkrete tall (Niss et al., 2002; van Hiele, 1986). En mulig tolkning er at elevene har kommet fram til antall fyrstikker i figur 20 ved å beregne $31 \times 2 - 1 = 61$, ved bruk av konkrete tall. Da bruker elevene konkrete tall i representasjon av mønsteret, som viser til elevenes representasjonskompetanse (Niss, et al., 2002).

Elevene tok også utgangspunkt i figur 10 da de skulle finne antall fyrstikker i figur 50. I utdraget som jeg presentere nedenfor er det første gang Harald tar ordet i diskusjonen. Han har fram til dette tidspunktet observert de andre to elevene, og bare kommet med to uttalelser. Det at Harald tar ordet i diskusjonen tolker jeg som han fram til dette tidspunktet har vært usikker. Haralds usikkerhet kan komme av at han har liten erfaring med å arbeide med oppgaver som er induktiv tilnærmet. Det at Harald tar ordet kan komme av at han har oppdaget at han kan prøve seg fram. En mulig tolkning er at Harald har en lav terskel for å kunne løse oppgaven når han får arbeide med fyrstikker som manipulerende gjenstander. Nedenfor er et utdrag fra diskusjonen.

> Maria: Det er sikkert feil. Men da har vi 50, må vi gange? Må vi gange 31 med 5 kanskje, jeg vet ikke…Jeg tror det
>
> Harald: Ikke se på meg!
>
> Maria: Æ kan ingen ting!
>
> Harald: Det er jo jeg som har dyskalkuli!
>
> (Maria og Harald begynner å le)
>
> Thor: Okei, 154… Æ vet ikke. Det er sikkert riktig.
>
> Maria: Vi får håpe det.

I utdraget ovenfor fremhever Maria først at antall fyrstikker i figur 50 er 31 (antall fyrstikker i figur 10) multiplisert med 5. Deretter sier Maria og Harald at de ikke har kunnskap i matematikk. Til slutt i utdraget uttrykker Thor at antall fyrstikker i figur 50 er 154, som ikke er riktig. En mulig tolkning er at Thor har brukt Marias forslag, og videre kommet fram til antall fyrstikker i figur 50 ved å beregne $31 \times 5 - 1 = 154$. Denne framgangsmåten er lik den elevene brukte for å finne antall fyrstikker i figur 20, men i dette tilfellet vil framgangsmåten ikke gi riktig svar. Thor tar ikke hensyn til at for hver gang han multipliserer antall fyrstikker i figur 10, må han også trekke fra en. Dermed blir ikke generaliseringen av figuren og svaret riktig. Thors framgangsmåte ville ha vært riktig hvis han hadde beregnet $31 \times 5 - 4 = 151$.

Thors utsagn «*Okei, 154… Æ vet ikke. Det er sikkert riktig.*» tolker jeg som om at han er usikker, men han godtar svaret. Det at Thor godtar svaret kan komme av den didaktiske kontrakten, som fører til at Thor er opptatt av å oppfylle forventingene jeg har til hans handlinger. Thor er bevisst om at jeg har forventinger til at han skal klare å beregne antall fyrstikker for figur 50, og som han er opptatt av å oppfylle (Brousseau, 2002). En mulig tolkning er at Thor har lite erfaring å jobbe med oppgaver som har en induktiv tilnærming, hvor man arbeider med antagelser for så å utlede en formel (Thompson & Martinsson, 1997). I denne delen av oppgaven representerer elevene mønstret med konkrete tall, som viser til elevenes representasjonskompetanse (Niss, et al., 2002). De har også evne til å behandle regneoperasjoner med konkrete tall, men oppnår ikke riktig svar. En mulig tolkning av dette er at elevene har et fattig nettverk av nivå - to relasjoner. Det fører til at de har en begrenset innsikt til den indre strukturen av nettverket, som fører til at de ikke klarer å vurdere om svaret er riktig (van Hiele, 1986). En annen mulig tolkning er at elevene har en regnefeil under beregningen, som kan komme av unøyaktighet på grunn av forventningspress eller stress.

4.1.3 Resonnement kategorisert som nivå fire

Deloppgave fem i Fyrstikkmønster 1 handler om at elevene først skulle forklare med ord hvordan de kunne finne antall fyrstikker for en bestem figur, og videre lage en generell formel. Denne deloppgaven forutsetter at elvene kan beskrive det geometriske mønsteret ved å bruke det matematiske symbolspråket. Elevene ignorerte den første delen, og begynte å diskutere hvordan de kunne lage en formel. Nedenfor er et utdrag fra diskusjonen.

> Maria: Det er for avansert!
>
> Harald: Emmmm
>
> Maria: Okei, blir ikke det (skriver noe på arket)…Slutt å se på meg!

Harald: Hvis man for eksempel har en figur som er…

Maria: 4 × x – 1?

Harald: Ja.

Maria: Kan vi skrive det? Æ vet ikke om det er en formel. (Begynner å le)

Harald: Ikke jeg heller.

Thor: Det går sikkert å skrive det.

Maria: Men æ vet ikke om det er riktig

Thor: Ja, men det fungere sikkert.

Maria: Ja, man tar 4 × 3 – 1.

Thor: Ja, men det blir jo…

Maria: Hva er det?... 11 eller noe.

(Maria og Harald ler)

I utdraget ovenfor uttrykker Maria en lineær vekst «4x – 1», hvor førstegradsleddet er *4x* og konstantleddet er *-1*. Det er riktig at mønsteret er en lineære vekst, men Marias uttrykk er ikke riktig. Utfra Marias utsagn tolker jeg det som at hun ikke har anvendt tidligere slutninger fra oppgaven for å komme fram til uttrykket, eller at hun har lite erfaring å jobbe med oppgaver som har en induktiv tilnærming. Videre beviser Maria at uttrykket ikke er riktig ved å sjekke det for figur 3. I denne delen av oppgaven viser Maria resonneringskompetanse. Hun tenker ut, gjennomfører og beviser et matematisk resonnement (Niss, et al., 2002). I dette tilfellet beviser Maria at det matematiske resonnementet ikke stemmer ved at hun sjekker det for figur 3. Det at Maria prøve å bevise et resonnement viser til resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå 4, hvor elevene skal kunne formulere formelle bevis (van Hiele, 1986).

Etter ca. 5 sekunder kom Maria med et nytt forslag. Nedenfor er Marias forslag gjengitt.

Maria: Kan det være + 1?

Thor: Nei, hallo? Altså det der gjelder jo på begge dem liksom, og den der også på begge dem, og den på begge dem liksom.

I utdraget uttrykker Maria «*Kan det være + 1?*», som impliserer uttrykket «*4x + 1*». Marias utsagn viser at hun har tatt utgangspunkt i det tidligere foreslåtte uttrykket. Hun har bare endret konstantleddet fra *-1* til *+1*. Det nye uttrykket har riktig konstantledd, men førstegradsleddet er ikke riktig. Dette tolker jeg som at Maria holder på med kvalifisert gjetting. Hun reflekterer rundt gjettingen, og behersker problemene som oppstår underveis i det intellektuelle søket (Dewey, 1998). Maria viser også at hun mestrer å arbeide med oppgaver som har en induktiv tilnærming. Dette ved at hun i høy grad arbeider med gjetninger som er veiledet av intuisjoner og følelser (Thompson & Martinsson, 1997). En annen mulig tolkning er at Maria har problemer med å forstå hva variabelen x representere i mønsteret, og som fører til at uttrykket ikke blir riktig. Thor uttrykker til slutt at uttrykket ikke er riktig ved å vise til figurene de har bygget.

4.1.4 Resonnement kategorisert som nivå tre

Elevene fortsatte å diskutere hvordan de kunne lage et uttrykk. Nedenfor er et nytt utdrag fra diskusjonen.

> Maria: Vi kan prøve å lage en graf, så får vi kanskje se hva som skjer med det…(ler). Men der er liksom...(Blir avbrutt)
>
> Thor: Vi kan ta 3 + 3 + 3 + 3 + 1?
>
> (Alle ler)
>
> Maria: Vent litt.
>
> Thor: Hvordan da lager vi en formel?
>
> Maria: Kan det være… emmh. (Skriver noe på arket)

I utdraget ovenfor uttrykker Maria først at de kan lage en graf, og videre se hva som skjer. På dette tidspunktet i arbeidsprosessen begynte Maria å lage en graf på et ark, og hennes oppmerksomhet var rettet mot denne handlingen. Dette tolker jeg som at Maria har en våken nysgjerrighet, og gir oppmerksomhet til alternative muligheter. Marias holdning viser at hun har et åpent sinn (Dewey, 1998). Videre uttrykker Thor «*Vi kan ta 3 + 3 + 3 + 3 + 1?*», som er fremgangsmåten for antall fyrstikk i figur 4 ved bruk av konkrete tall. Denne framgangsmåten som Thor uttrykker for figur 4 er riktig, fordi $3 + 3 + 3 + 3 + 1 = 3 \times 4 +$

1. Dette viser også til at Thor uttrykker en framgangsmåte hvor han bruker repeteringsenheten (Unit of repeat), som i dette tilfellet er det konkrete tallet tre (Threlfall, 1999).

Videre er Thor usikker hvordan han kan bruke framgangsmåten for å lage et uttrykk. Dette tolker jeg som at Thor har liten kunnskap om hvordan han kan generalisere mønster, eller at han har lite erfaring å arbeide med oppgaver som har en induktiv tilnærming. Det at Thor har lite erfaring, kan komme av at han har mere erfaring å arbeide med oppgaver der det matematiske uttrykket er gitt på forhånd, og som videre skal brukes til å løse resten av oppgaven. Dette fører til at han får problemer med å oversette framgangsmåten som han uttrykker med konkrete tall til det matematiske symbolspråket. I denne delen av oppgaven viser Thor at han kan tenke ut og gjennomføre et matematisk resonnement, men det fører ikke til noen konklusjoner i oppgaveløsningen (Niss, et al., 2002). Da viser Thor resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå to, hvor han kan behandle regneoperasjoner med konkrete tall (van Hiele, 1986). Videre kom Thor med et nytt forslag.

> Thor: Fungerer det ikke med 3 × x + 1?
>
> Maria: Hæ?
>
> Thor: 3 × x + 1, eller var det det du sa tidligere?
>
> Maria: Nei, æ sa minus 1. Det fungerte ikke så bra. For hvis vi har 1, blir det 2.

I utdraget ovenfor uttrykker Thor «*Fungerer det ikke med* $3 \times x + 1$*?*», som er det matematiske uttrykket for mønsteret i figurene. Det matematiske uttrykket er riktig, fordi det kan brukes til å finne antall fyrstikker for en bestemt figur i oppgaven. Utfra Thors utsagn tolker jeg det som at det matematiske resonnementet som han tenkte ut og gjennomførte (se avsnittet over) har ført til konklusjoner i oppgaven. Dette viser til at Thor har evne til å oversette framgangsmåten han beskrev med konkrete tall til det matematiske symbolspråket. Da viser Thor til resonneringskompetanse og symbol- og formalismekompetanse (Niss, et al., 2002).

Jeg observerte på dette tidspunktet at Maria fortsatt arbeidet med grafen på arket, og hennes oppmerksomhet var ikke rettet mot Thor. Dette kan ha ført til hun forvekslet uttrykket $3 \times$

$x + 1$ med $3 \times x - 1$ som hun tror hun foreslo tidligere i oppgaven (hun foreslo egentlig $4 \times x - 1$). Utfra dette blir det matematiske uttrykket som Thor har foreslått utelukket. Videre beviser Maria at uttrykket $3 \times x - 1$ ikke er riktig, ved å bruke uttrykket for antall fyrstikker i figur 1. I denne delen av oppgaven viser Maria på nytt at hun har evne til å bevise et matematisk resonnement. Det at Maria beviser et resonnement, viser til resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå 4 (van Hiele, 1986). Deretter begynte elevene å gi opp, og Harald spurte meg om de kunne besvare oppgaven med et spørsmålstegn. Da bestemte jeg at dette var et riktig tidspunkt å gripe inn i elevenes arbeidsprosess. Jeg spurte elevene hvorfor uttrykket Thor foreslo ikke var riktig.

> Maria: Æ vet ikke.
>
> Harald: Hva sa du?
>
> Thor: 3 × x + 1, trur æ.
>
> Maria: Ok, det kan stemme. Du må jo si at du sa det. Jeg trudde du sa 4x. Jeg har jo migrene…Da stemme det jo. Det høres riktig ut.
>
> Thor: Ok, sure. Da skriv vi det.
>
> Maria: Burde vi ikke sjekke om det er riktig, selv om det høres riktig ut?
>
> Thor: Neida.
>
> Maria: Jo, fordi det er helt riktig.

I starten av utdraget ovenfor tolker jeg det som at Maria og Harald ikke har fulgt med da Thor foreslo det matematiske uttrykket «$3 \times x + 1$». I matematikktimene og gjennom elevenes arbeidsprosess med oppgaven observerte jeg at guttene hele tiden fulgte med da Maria snakket, og hvis guttene kom med forslag, ønsket de bekreftelse fra henne. Utfra dette tolker jeg det som Thor har vært usikker, fordi han ikke fikk bekreftelse fra Maria. Thors usikkerhet kan ha ført til at han ikke har prøvd å begrunne det matematiske uttrykket. Videre sier Maria at hun har forvekslet uttrykkene, og videre fremhever hun at det matematiske uttrykket er riktig. Dette fører til at Thor også bekrefter at det matematiske uttrykker er riktig, uten at han begrunner det. Videre poengter Maria at de burde kontrollere uttrykket. Til slutt hevder hun at uttrykket er riktig, og hun utelukker å kontrollere det. Jeg griper derfor inn for andre gang, og spør om de kan forklare hvorfor uttrykket er riktig.

Maria: For hvis vi har tre, blir x =1, liksom. Da ganger man tre med en og legger til en, og har figur 1. Hvis man da ganger tre med to, da får man seks, og så legg til en, og da får man syv. Slik fortsetter det.

Marias utsagn ovenfor viser at hun kan begrunne det matematiske uttrykket ved å ta utgangspunkt i figurene. Hun uttrykker at når x = 1 indikere det tre fyrstikker, og videre ved å addere en til de tre fyrstikkene vil man da få figur 1. Figur 2 vil bli tre fyrstikker multiplisert med 2, og deretter addert til 1. Det at Maria uttrykker tre fyrstikker multiplisert med 2 tolker jeg som at hun hevder at x = 2. Til slutt uttrykker Maria at mønsteret vil fortsette å vokse slik hun har beskrevet. Marias utsagn viser at hun kan oversette fram og tilbake mellom det hverdagslige språket og det matematiske symbolspråket. Da viser Marias symbol- og formalismekompetanse (Niss, et al., 2002). I oppgaven har Maria utviklet et nettverk av relasjoner, som fører til at hun er i stand til å begrunne det matematiske uttrykket (Fyhn, et al., 2015). Ved at Maria klarer å begrunne det matematiske uttrykket viser hun resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå tre, hvor elevene skal kunne generalisere resultater (van Hiele, 1986).

4.1.5 Oppsummering av Fyrstikkmønster 1

I oppgaven - Fyrstikkmønster 1 har jeg analysert hvordan elevene viser resonneringskompetanse i arbeid med et geometrisk mønster. Jeg har valgt å kategorisere elevenes resonnement utfra van Hieles (1986) nivåer. I tabell 1 nedenfor har jeg oppsummert hva som kjennetegner elevenes resonnement på de ulike nivåene.

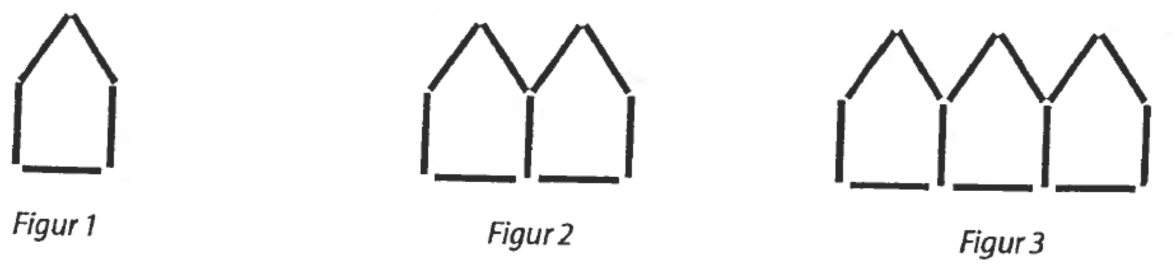
Resonnement som tilsvarer	**Kjennetegn**
Nivå én, hvor elevene skal gjenkjenne noe induktivt.	- Elevene bruker repeteringsenheten (tre fyrstikker) til å bygge figurene 1–5. - Elevene finner antall fyrstikker i figur 1–5 ved å telle fyrstikkene i figurene de har bygget.
Nivå to, hvor elevene skal behandle regneoperasjoner	- Elevene bruker konkrete figurer for å beregne antall fyrstikker - Elevene beregner antall fyrstikker i figur 20 ved å bruke konkrete tall.

med konkrete tall.	
Nivå tre, hvor elevene skal generalisere resultater.	- Thor bruker repeteringsenheten som i dette tilfellet er det konkrete tallet tre for å finne det matematiske uttrykket (3x + 1). - Maria begrunner det matematiske uttrykket (3x + 1) utfra figurene de har bygget.
Nivå fire, hvor elevene skal formulere formelle bevis.	- Maria beviser at uttrykkene (4x – 1 og 3x – 1) ikke er riktig ved å bruke figurene de har bygget.

Tabell 1: Oppsummering av hva som kjennetegner elevenes resonnement på de ulike nivåene.

4.2 Fyrstikkmønster 2

Dette kapittelet gjengir elevene i arbeid med oppgaven - Fyrstikkmønster 2. Oppbyggingen av oppgaven - Fyrstikkmønster 2 er i all hovedsak lik Fyrstikkmønster 1 (se også kapittel 3.5.2) Oppgaven fremstiller en numerisk følge, som er representert gjennom et geometrisk mønster (slik som i oppgaven - Figurmønster 1). Forskjellen på de to oppgavene er deloppgave fem. Figur 6 viser det geometriske mønsteret i oppgaven.



Figur 6: Det geometriske mønstret (T = 4n +1) i oppgaven - Fyrstikkmønster 2 (Ahlström, 2001).

4.2.1 Spontane reaksjoner på oppgaven

Da elevene fikk utdelt oppgaven, uttrykket de umiddelbare, spontane reaksjoner. Disse reaksjonene er gjengitt i utdraget nedenfor.

Maria: Åh, nei!

Thor: Åhhh…Det blir det samme, bare vanskeligere.

Harald: 4 *… + 1.

Maria: 4 * + 1? (Ler) 4 * +1 ? (Ler)

Harald: 4x + 1. (Ler).

Maria: Det kan godt hende!

Harald: Jeg bare tenkte med en gang.

Maria: Det overasker meg ikke om det er det.

Harald: Jeg bare tenkte hvor lett det var forje gang.

Maria: Jo, for man legg til fire hver gang. Så, det er sikkert helt rett!

I utdraget ovenfor uttrykker Thor at oppgaven ligner på oppgaven - Fyrstikkmønster 1, og at den er vanskeligere. Dette tolker jeg som at Thor har oppdaget at figurene representerer et gjentagende mønster som inneholder en repeteringsenhet (Unit of repeat). Denne oppdagelsen viser at Thor har evne til å se repeteringsenheten etter å ha arbeidet med Fyrstikkmønster 1 som involvere manipulering av mønster (Threlfall, 1999). Det at Thor uttrykker oppgaven som vanskeligere, kan komme av at han erfarte Fyrstikkmønster 1 som vanskelig, og likheten av oppgavene fører til at han tror det blir vanskeligere.

Videre uttrykker Harald «$4 \times \ldots + 1$», som viser at han har prøvd å lage et matematisk uttrykk for mønsteret. I uttrykket stopper Harald opp i ca. 3 sekunder mellom operasjonene multiplikasjon og addisjon. Dette tolker jeg som om Harald er usikker eller at tankene hans er preget av delte interesser. Haralds usikkerhet kan komme av at han har liten kunnskap om matematiske uttrykk som inneholder variabler, og som fører til at han er redd for å uttrykke det matematiske uttrykket feil. Usikkerheten kan også komme av at Harald ikke har erfaring med å være den første på gruppen som foreslår en løsning. Det at Haralds tanker er preget av delte interesser tolker jeg som at tankene hans er opptatt av interesser som er mer attraktiv enn oppgaven. Det fører til at han ikke går helhjertet inn i oppgaven (Dewey, 1998).

Videre stiller Maria seg spørrende til Haralds utsagn. Deretter uttrykker Harald «$4x + 1$», som er det riktige matematiske uttrykket for antall fyrstikker i en bestemt figur. Dette tolker jeg som at Harald blir tryggere da Maria stiller seg spørrende til uttrykket. Det fører til at han uttrykker det matematiske uttrykket på nytt, der det inneholder en variabel. En annen mulig tolkning er at da Maria stiller seg spørrende til Haralds utsagn vekker det interesse hos han, og som fører til at han går helhjertet inn i oppgaven (Dewey, 1998).

I denne delen av oppgaven foreslår Harald en løsning som tilsvarer tenking på nivå tre. Oppgavene er laget slik at alle elevene starter på samme nivå, men elevene kan allerede være på et høyere nivå enn det oppgaven tilsvarer. I forhold til oppgaven viser Harald resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå tre, men i forhold til det matematiske uttrykket viser han resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå én. Harald kan ikke gi noen forklaring på "hvorfor" uttrykket blir slik, han bare "vet" det. Det fører til at han i denne delen av oppgaveløsningen viser resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå én, hvor elevene skal kunne gjenkjenne noe induktivt (van Hiele, 1986).

4.2.2 Resonnement kategorisert som nivå én

De tre første deloppgavene i Fyrstikkmønster 2 handlet om at elevene skulle bygge/legge opp figurene 1 til 5. Disse deloppgavene forutsatte at elevene så hvordan mønsteret i figurfølgen utviklet seg, og videre brukte fyrstikkene til å bygge/legge opp figurene. Elevene bygget figurene 1–5 uten å uttrykke seg verbalt. Jeg valgte å ikke bryte inn, fordi da kunne jeg ha forstyrret elevene i arbeidsprosessen. Det at elevene arbeider uten å uttrykke seg verbalt, tolker jeg som at de er konsentrerte. Elevene bygger konkrete figurer ved å bruke fyrstikker, og de prøver å finne sammenhenger i mønsteret. Det at elevene prøver seg fram i oppgaven viser at elevene tar kontroll over egen læring. Det fører til at de bryter den didaktiske kontrakten (Brousseau, 2002). En mulig tolkning er at elevene får en konkret oppgave, som fører til at de tør å prøve seg fram. At elevene tør å prøve seg fram kan komme av fyrstikkene, som fører til at elevene har en lav terskel for å løse deloppgavene. I denne delen av oppgaven kan ikke elevene beskrive hvorfor mønsteret øker slik som det gjør, og for dem er mønsteret intuitivt. Utfra dette viser elevene resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå én. (van Hiele, 1986).

I deloppgave fire i Fyrstikkmønster 2 skal elevene fylle inn antall fyrstikker for de gitte figurene i tabellen. Denne deloppgaven forutsatte at elevene brukte mønsteret i figurfølgen til å beregne antall fyrstikker i de påfølgende figurene. Elevene begynte å diskutere antall fyrstikker i de figurene de allerede hadde bygd. Nedenfor er et utdrag fra diskusjonen.

Maria: Okei, en har fem fyrstikk.

Harald: Ti!

Maria: Hæ?

Harald: På den nr. 2.

Maria: Wow, æ datt ut…Blir det ikke ni?

(Stille i fem sekunder)

Maria: Åtte? Syv?

Thor: Det blir jo ni!

I utdraget ovenfor uttrykker Maria først at antall fyrstikker i figur 1 er fem, som er riktig. Videre uttrykker Harald «*Ti!*» for antall fyrstikker i figur 2, som ikke er riktig. Utfra Haralds utsagn tolker jeg det som han enten gjetter på antall fyrstikker for figur 2, eller at han viser resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på et lavere nivå enn oppgaven. Haralds forslag kan også være en slurvefeil på grunn av forventningspress, fordi han allerede har uttrykt det matematiske uttrykket riktig. Det at Harald gjetter på svaret, kan bety at han er bevisst om at jeg og de andre elevene har positive forventinger til hans mulighet til å løse oppgaven, og han er opptatt av å oppfylle mine krav til oppgaveløsningen. At Harald er opptatt av å oppfylle mine krav viser til forventningene som oppstår i den didaktiske kontrakten (Brousseau, 2002). Denne delen av oppgaven tilsvarer resonneringsevne på nivå to, der elevene skal kunne behandle regneoperasjoner med konkrete tall. Det at Harald viser resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på et lavere nivå enn oppgaven, kan komme av at han enda ikke har dannet et nettverk av forbindelser (van Hiele, 1986).

Videre uttrykker Maria «*Wow, æ datt ut…Blir det ikke ni?*». Utfra Marias utsagn tolker jeg det som hun blir forvirret av Haralds utsagn. Maria får ikke noe respons fra de andre to på spørsmålet, noe som fører til at hun også begynner å gjette. Det at Maria gjetter på svaret tolker jeg som at hun er usikker, siden hun ikke får noe respons fra de andre. Marias gjetting kan også komme at hun begynner å miste konsentrasjonen, siden hun tidligere har sagt at hun har vondt i hodet/migrene. Til slutt uttrykker Thor at svaret er ni.

4.2.3 Resonnement kategorisert som nivå to

Maria fortsatte å finne antall fyrstikker for figur 3–20 ved at hun gjorde utregningene på et ark, og deretter fylte hun inn svarene i tabellen. De andre to guttene observerte Maria mens hun gjorde utregningene uten at de stilte noen spørsmål eller avbrøt henne. At Maria gjorde utregningen på egen hånd tolker jeg som at hun ønsker å prøve seg fram. Hun tar da kontroll over egen læring, og bryter den didaktiske kontrakten (Brousseau, 2002). Nedenfor er et utdrag fra hvordan elevene kom fram til antall fyrstikker i figur 50.

> Maria: Ok, fire gange fem blir…., blir ikke det… 201 på 50?
>
> Thor: Sjekk!
>
> Harald: 5 * 50?
>
> Maria: 4 * 50!...Fordi, fire gange fem er tjue.
>
> (Harald regner på kalkulatoren)
>
> Harald: Det blir 200.
>
> Maria: Ok + 1.
>
> Thor: Ok. 200 + 1.

I utdraget ovenfor uttrykker Maria at det er 201 fyrstikker i figur 50. Hun begrunner dette med at $4 \times 5 = 20$, og ut fra denne beregningen antar hun at $4 \times 50 = 200$. Harald kontrollerer at Marias antagelse stemmer ved å bruke kalkulatoren. Videre hevder Maria at det er $200 + 1 = 201$ fyrstikker i figur 50, som er riktig. Dette tolker jeg som at Maria har en forståelse for at figurens mønster vokser med fire fyrstikker, og hun bruker dette mønsteret til å finne antall fyrstikker for figur 50. I denne delen av oppgaven viser Maria representasjonskompetanse ved at hun representerer mønstret ved å bruke konkrete tall (Niss, et al., 2002). Maria viser også at hun kan behandle regneoperasjoner med konkrete tall, og hun bruker forbindelser mellom regneoperasjoner for å komme fram til svaret. Da viser Maria resonneringskompetanse som tilsvarer tekning på nivå to (van Hiele, 1986).

4.2.4 Resonnement kategorisert som nivå tre

Deloppgave fem omhandlet at elevene skulle velge den riktige formelen for figurfølgen. Denne deloppgaven forutsatte at elevene hadde forståelse for det matematiske symbolspråket, og kunne bruke det for å velge formelen som beskrev det geometriske mønsteret. Elevene begynte å diskutere oppgaven. Nedenfor er et utdrag fra diskusjonen.

> Maria: Trudde vi bestemte formelen tidligere.
>
> Harald: Det er denne (peker på arket), ikke sant?
>
> Maria: Ja. Det er den der…Det var også den vi brukte.

I utdraget ovenfor uttrykker Maria at de allerede har funnet formelen. Da peker Harald på formelen $T = n \times 4 + 1$, som står på arket. Videre bekrefter Maria at det er den riktige formelen ved å uttrykke «*Ja. Det er den der...Det var også den vi brukte*.». Utfra Marias utsagn tolker jeg det som at hun har brukt denne formelen da hun kom fram til svarene i deloppgave fire. Jeg bestemte meg for å gripe inn, og spørre hvordan elevene kom fram til tallene i tabellen.

> Maria: Vi brukte formelen. Fordi vi tenkte…
>
> Thor: Vi plusset på fire for hver gang.
>
> Maria: Ja…Hæ? (Ler). Jeg i hvert fall tenkte at man ganger figurens nummer med 4, pluss 1.

I utdraget ovenfor uttrykker Maria at hun har brukt formel for å finne antall fyrstikker i figurene, altså en deduktiv tilnærming. Hun har brukt den matematiske formelen for å komme fram til svarene (Thompson & Martinsson, 1997). Videre uttrykker Thor «Vi plusset på fire for hver gang», som er en beskrivelse av mønsterets utvikling. Thors utsagn tolker jeg slik at han har funnet repeteringsenheten (Unit of repeat). I dette tilfellet indikere repeteringsenheten tallet fire, som elevene har brukt videre i beregningen for antall fyrstikker i figurene (Threlfall, 1999). Avslutningsvis sier Maria at hun kom fram til antall fyrstikker ved å multiplisere figurens nummer med fire og deretter legge til en. Utfra disse utsagnene spurte jeg om elevene kunne utdype hvordan de brukte formelen i deloppgave fire. Nedenfor er et utdrag fra samtalen.

> Maria: Hvis vi først…Her er figur 1. Så legger man på fyrstikker for hver gang.
>
> Inervjuer: Ja?
>
> Maria: Hver figur. Da får man det antallet, liksom fyrstikker. Og figurens nummer er to. Det er bare sånn.
>
> Intervjuer: Hvor er den eneren dere legger til?
>
> Maria: Det er den i midten.
>
> Thor: Den er igjen fra den tidligere, og så en del av den andre.
>
> Maria: Fordi vi plusser ikke på fem, for da blir det en ekstra. Det blir liksom to i midten da…Trur æ.

I utdraget ovenfor uttrykker Maria hvordan hun har brukt formelen ved å ta utgangspunkt i figur 1. Videre har hun problemer med å uttrykke hvordan mønsteret i figuren vokser ut fra formelen. Maria uttrykker «*Det er bare sånn*». Dette tolker jeg som at Maria har en forståelse for formelen hun har brukt, men hun mangler en del av innholdet i forklaringen. Da jeg spør om de kan forklare hva konstanten (+1) i formelen tilsvarer i mønsteret, uttrykker Maria og Thor at det er fyrstikken som er i midten i figur to/den som er igjen fra tidligere (fra figur 1). Jeg tolker dette som at elevene har en forståelse for formelen, selv om de mangler litt av innholdet i begrunnelsen av formelen. I denne delen av oppgaven viser Maria og Thor resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå tre, hvor elevene skal kunne generalisere resultatene (van Hiele, 1986).

4.2.5 Oppsummering av Fyrstikkmønster 2

I oppgaven - Fyrstikkmønster 2 har jeg også analysert hvordan elevene viser resonneringskompetanse i arbeid med det geometriske mønsteret. Jeg har valgt å kategorisere elevenes resonnement utfra van Hieles (1986) nivåer. I tabell 2 har jeg oppsummert hva som kjennetegner elevenes resonnement på de ulike nivåene.

Resonnement som tilsvarer	**Kjennetegn**
Nivå én, hvor elevene skal gjenkjenne noe induktivt.	- Elevene bygger figurene 1–5 ved å prøve seg fram med fyrstikkene. - Harald uttrykker det matematiske uttrykket (4x + 1).
Nivå to, hvor elevene skal behandle regneoperasjoner med konkrete tall.	- Elevere bruker konkrete tall for å beregne antall fyrstikker i figur 50.
Nivå tre, hvor elevene skal kunne generalisere resultater.	- Maria og Thor begrunner det matematiske uttrykket (4x + 1) utfra figurene de har bygget.
Nivå fire, skal kunne formulere formelle bevis.	- Elevene i studien viser ikke resonnement som tilsvarer tenking på nivå fire i arbeid med Fyrstikkmønster 2.

Tabell 2: Oppsummering av hva som kjennetegner elevenes resonnement

5 Diskusjon

I denne delen av oppgaven diskuterer jeg analysen av funnene som jeg redegjorde for i kapittel 4. Først vil jeg diskutere mulige årsaket til at funnene i Fyrstikkmønster 1 og Fyrstikkmønster 2 er ulike når det gjelder elevenes resonneringskompetanse. Videre vil jeg trekke fram hva som fører til at elevene klarer å begrunne de matematiske uttrykkene, og hvordan dette viser at elevene innehar en forståelse for det matematiske symbolspråket i lys av van Hieles (1986) nivåer. Til slutt vil jeg sammenligne mine funn med funn gjort i andres forskning.

5.1 Forskjeller i funn i arbeidet med å løse deloppgavene i Fyrstikkmønster 1 og Fyrstikkmønster 2

Funnene fra analysen viser dels like og dels forskjellige resultater i oppgavene Fyrstikkmønster 1 og Fyrstikkmønster 2, selv om oppgavene i alt vesentlig hadde lik oppbygging. I Fyrstikkmønster 1 viser elevene flere resonneringskompetanser som er i samsvar med tenking på forskjellige nivåer enn de gjør i Fyrstikkmønster 2. Videre viser elevene resonneringskompetanse i Fyrstikkmønster 1 som tilsvarer tenking til og med nivå fire, mens i Fyrstikkmønster 2 viser de resonneringskompetanse som tilsvarer tenking til og med nivå tre.

Oppgavene i studien hadde en induktiv tilnærming. Thompson & Martinsson (1997) viser til at matematikk har en induktiv tilnærming når man arbeider med bruk av en høy grad av gjetninger, som er veiledet av intuisjoner og følelser. Funnene i analysen viser at elevene i større grad arbeidet med gjetninger veiledet av intuisjoner og følelser i Fyrstikkmønster 1 sammenliknet med Fyrstikkmønster 2. Å bruke gjetninger som er veiledet av intuisjoner og følelser kan har ført til at elevene i Fyrtikkmønster 1 - oppgaven oppnådde tenking på et høyere nivå enn de gjorde i Fyrstikkmønster 2 - oppgaven. I Fyrstikkmønster 1 hadde elevene en induktiv tilnærming til deloppgavene, mens i Fyrstikkmønster 2 dominerer den deduktive tilnærmingen.

Det at den induktive tilnærmingen i Fyrstikkmønster 1 og 2 har ført til ulike resultater i analysen, kan komme av flere underliggende årsaker. Først vil jeg trekke fram elevenes arbeidsprosess med Fyrstikkmønster 1 opp mot Fyrstikkmønster 2. I arbeidsprosessen med å løse deloppgavene i Fyrstikkmønster 1 prøvde elevene seg fram, og de tok kontroll over egen læring. Jeg erfarte at elevene tidlig i arbeidsprosessen fant repeteringsenheten (Unit of repeat), som de verbalt uttrykte som en økning på tre fyrstikker. I slutten av arbeidet med Fyrstikkmønster 1 brukte Thor repeteringsenheten som det konkrete tallet tre til å finne det matematiske uttrykket for mønstret i figurene (Threlfall, 1999). Funnene i analysen viser at ved å prøve seg fram utviklet elevene et nettverk av relasjoner, hvor de var i stand til å begrunne det matematiske uttrykket for mønsteret (van Hiele, 1986). I tillegg viste Maria at hun kunne bevise at et matematisk resonnement ($4x – 1$ som uttrykk for Fyrstikkmønster 1) ikke stemte når hun kontrollerte det mot figur 3.

Jeg erfarte at da elevene fikk utdelt deloppgavene i Fyrstikkmønster1 oppdaget de likheter mellom Fyrstikkmønster 1 og 2. Dette kan tyde på at elevene oppdaget repeteringsenheten (fem fyrstikker), noe som førte til at Harald fant det matematisk uttrykket før de hadde startet å arbeide med oppgaven. I slutten av oppgaven kom det fram at elevene hadde brukt det matematiske uttrykket gjennom arbeidet med Fyrstikkmønster 2. Det at elevene brukte det matematiske uttrykket i arbeidsprosessen, kan ha ført til at de i mindre grad har arbeidet med gjetninger ledet av intuisjoner og følelser. Dette viser at oppgaveløsningen har vært preget av en deduktiv tilnærming, hvor elevene har arbeidet utfra et aksiom og utledet nye resultater (Thompson & Martinsson, 1997). Den deduktive tilnærmingen kan komme av at Fyrstikkmønster 2 har virket kjent for elevene etter å ha arbeidet med Fyrstikkmønster 1. Dette kan tyde på at elevene har oppdaget at Fyrstikkmønster 2 tar for seg noe de allerede har kunnskap om. Videre har de da brukt det matematiske uttrykket i arbeidsprosessen med de resterende deloppgavene. Dette kan tolkes som at elevene har utviklet et begrenset nettverk av relasjoner, og som har ført til at elevene kan begrunne deler av det matematiske uttrykket for mønsteret i figurene (van Hiele, 1986).

Det siste jeg vil trekke fram i forhold til den induktive tilnærmingen, er de matematiske uttrykkene i Fyrstikkmønster 1 og 2. De to matematiske uttrykkene er begge lineære vekster, hvor uttrykket for Fyrstikkmønster 1 er $T = 3n + 1$ og for Fyrstikkmønster 2 er $T = 4n + 1$. De inneholder begge et førstegradsledd, og har samme konstantledd. Det at elevene skulle komme fram til sluttprodukter som var like, kan også ha ført til at elevene i større grad brukte gjetninger ledet av intuisjoner og følelser i Fyrstikkmønster 1 sammenliknet med

Fyrstikkmønster 2. Etter å ha gjennomført analysen oppdaget jeg at det geometriske mønsteret i Fyrstikkmønster 2, for eksempel kunne ha representert en eksponentiell vekst og ikke en lineær vekst. Dette kunne da ha ført til at oppgaveløsningen i Fyrstikkmønster 2 ikke var preget av en deduktiv tilnærming, og at elevene i en høyere grad hadde arbeidet med gjetninger veiledet av intuisjoner og følelser.

5.2 Elevenes forståelse av det matematiske symbolspråket

Problemstillingen i denne oppgaven er: *«Hvordan kan arbeid med geometriske mønster bidra til elevenes forståelse av det matematiske symbolspråket?»*. Funnene fra analysen viser at elevene kan begrunne det matematiske uttrykket for mønsteret i Fyrstikkmønster 1 og Fyrstikkmønster 2. I denne delen av oppgaven vil jeg trekke fram hva som fører til at elevene klarer å begrunne de matematiske uttrykkene, og hvordan dette viser at elevene innehar en forståelse for det matematiske symbolspråket.

Først vil jeg belyse forståelse av det matematiske symbolspråket utfra Niss et al. (2002) symbol- og formalismekompetanse og van Hieles (1986) nivå tre. Niss et al. definerer elevenes forståelse for det matematiske symbolspråket utfra symbol- og formalismekompetanse. Ifølge Niss et al. vil elever som viser forståelse for det matematiske symbolspråket, kunne oversette fram og tilbake mellom det matematiske symbolspråket og det hverdagslige språket. Dette innebærer blant annet at elevene skal kunne behandle symbolske uttrykk og formler. Jeg har valgt å knytte van Hieles nivåer til hvordan elevene utvikler forståelse for det matematiske symbolspråket. Elevenes forståelse for det matematiske symbolspråket i studien kan beskrives gjennom nivå én til tre, hvor nivå tre viser til at elevene har utviklet forståelse for det matematiske symbolspråket. Nivå tre viser blant annet til at elevene skal kunne begrunne de generaliserende resultatene. I denne studien vil forståelse for det matematiske symbolspråket innebære at elevene kan uttrykke mønsteret i figurene ved å bruke det matematiske symbolspråket, og videre begrunne de matematiske uttrykkene.

Det første jeg vil trekke fram som fører til at elevene klarer å begrunne de matematiske uttrykkene, er oppbyggingen av oppgavene i selve studien. Oppbygningen av Fyrstikkmønster 1 og Fyrstikkmønster 2 kan knyttes til van Hieles nivåer (1986). Alle elevene starter på samme nivå (se kapittel 3.5). I oppgaveløsningene får elevene arbeide med manipulerende gjenstander som fyrstikker. Å bruke manipulerende gjenstander innebærer at elevene har en lav terskel for å kunne løse oppgavene. I Fyrstikkmønster 1 fant elevene repeteringsenheten ved å bruke fyrstikkene, og hvor repeteringsenheten var tre fyrstikker. Videre omgjorde Thor repeteringsenheten til det konkrete tallet tre, og brukte det konkrete tallet tre for å finne det matematiske uttrykket for mønsteret. Ifølge Threlfall (1999) vil matematiske aktiviteter som involverer manipulering av mønster føre til at elever blir bevisst om forholdet mellom en del av mønsteret og hele mønsteret som blir gjentatt. Dette er en av grunnene til at elevene klarer å begrunne de matematiske uttrykkene.

Oppbyggingen av oppgavene er laget slik at det elevene forstår som implisitt i en deloppgave, vil de forstå eksplisitt i neste deloppgave. Dette på grunn av at arbeidsprosess med deloppgave 1–3 stimulerer elevenes tenking til å oppnå nivå én. Arbeidsprosessen med deloppgave 4 stimulerer elevenes tenking til å oppnå nivå to, og deloppgave 5 stimulerer elevenes tenkning til å oppnå nivå tre. Denne hierarkiske utviklingen av elevenes tenking er en viktig forutsetning for at elevene får innsikt i den indre strukturen av mønstrene. Innsikt i den indre strukturen av mønsteret fører til at elevene klarer å begrunne det matematiske uttrykket for mønsteret i Fyrstikkmønster 1 og Fyrstikkmønster 2.

Jeg vil også trekke fram at elevene ved bruk av sine kognitive ressurser gjør at de klarer å begrunne de matematiske uttrykkene. Fyrstikkmønster 1 og Fyrstikkmønster 2 har som sagt en induktiv tilnærming, hvor elevene i en høy grad må arbeide med gjetninger veiledet av intuisjoner og følelser. Funnene i analysen viser at elevene reflekterer rundt gjetningene, og de løser problemene som oppstår underveis. Maria viser at hun har et åpent sinn ved at hun gir oppmerksomhet til alternative muligheter i arbeidsprosessen. Harald viser at han går helhjertet inn i arbeidet med Fyrstikkmønster 2 ved å uttrykke det matematiske uttrykket i starten av oppgaven. Det at han går helhjertet inn i oppgaven viser at tankene hans ikke er preget av delte interesser, og fokuset hans ligger i oppgaven (Dewey, 1998). Disse holdningene er viktige faktorer gjennom arbeidsprosessen, og de fører til at elevene klarer å begrunne de matematiske uttrykkene.

I denne studien viser Maria og Thor forståelse for det matematiske symbolspråket ved at de begrunner de matematiske uttrykkene for mønstrene i Fyrstikkmønster 1 og Fyrstikkmønster 2. Videre tar Maria og Thor utgangspunkt i figurene de har bygget i begrunnelsen for de matematiske uttrykkene. Dette viser at de kan oversette mellom det hverdagslige språket og det matematiske symbolspråket. I begrunnelsen viser de resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå tre. Videre indikerer dette at de innehar symbol- og formalismekompetanse, som viser til en forståelse for det matematiske symbolspråket.

5.3 Sammenlikning med tidligere forskning

Ut i fra arbeidene til Lee (1996), Stacey & MacGregor (2001) og Warren (2008) antok jeg at elevene ville ha problemer med å uttrykke mønsteret i figurene ved bruk av det matematiske symbolspråket. Videre hadde jeg også antagelser om at Harald og Thor ikke ville klare å uttrykke mønsteret i figurene ved bruk av det matematiske symbolspråket. Funnene fra analysen viser at mine antagelser ikke stemte på disse punktene.

I tråd med funnene til Lee (1996) viser funnene i min analyse at elevene i studien kunne se mønstrene, og de kunne bygge de kommende figurene. Videre var overgangen fra de konkrete figurene til å uttrykke det matematiske uttrykket for mønstrene utfordrende for elevene. I henhold til Radford (1996) forekommer den generelle strukturen av figurene kun i elevenes begrepsverden. Den oppfattes annerledes enn konkrete objekter, fordi elevene kun kan oppfatte den gjennom tegn og redskaper. Dette fører til at overgangen blir utfordrende for elevene, fordi det krever en overgang fra å utforske konkrete objekter (som fysisk kan konstrueres) til å behandle mentale objekter. Jeg erfarte at i arbeidet med Fyrstikkmønster 1 mestret Maria overgangen fra konkrete objekter (fyrstikker) til mentale objekter (de matematiske uttrykkene som er $3x + 1$ og $4x + 1$). Maria var i stand til å begrunne det matematiske uttrykket utfra figurene. Da har Maria funnet en kobling mellom tegn i hennes begrepsverden og de konkrete objektene (fyrstikkene).

I Fyrstikkmønster 2 manglet Maria og Thor en del av innholdet i begrunnelsen av det matematiske uttrykket. Dette funnet kan kobles til Warrens (2005) studier, hvor elevenes muntlige beskrivelser av figurfølgene manglet presisjon. Elevene i Warrens studier brukte manipulerende gjenstander som støtte i begrunnelsen av figurfølgene. Jeg erfarte også at elevene brukte figurene de hadde bygd som støtte i begrunnelsen av det matematiske uttrykket. Videre erfarte jeg at fyrstikkene som manipulerende gjenstander hjalp elvene med å finne de manglende trinnene i mønsteret, slik som Warren også påpekte. Mine funn i denne studien viser derfor det samme som andres forskning.

6 Avslutning

I dette kapittelet vil jeg gi en oppsummering av studien. Først vil jeg presentere mine konklusjoner utfra problemstillingen. I siste delkapittel vil jeg ta for meg mine refleksjoner til videre forskning innen dette feltet.

6.1 Oppsummering

I denne masteroppgaven har jeg belyst følgende problemstilling:

> Hvordan kan arbeid med geometriske mønster bidra til elevenes forståelse av det matematiske symbolspråket?

Jeg valgte å gjennomføre en beskrivende casestudie ved hjelp av observasjon og intervju. Dette innebærer at jeg har belyst hvordan tre elever arbeider med to forskjellige geometriske mønster og hvordan arbeidsprosessen med de geometriske mønstrene kan bidra til en forståelse av det matematiske symbolspråket. Det er elevenes egne utsagn i arbeid med de to geometriske mønstrene og mine observasjoner som har vært sentrale for min tolkning. Ettersom jeg ønsket å gå i dybden, og videre få en helhetlig forståelse av elevenes resonnement i arbeid med geometriske mønster.

Under analysen valgte jeg å bruke Niss et al. (2002) rammeverk for matematisk kompetanse, hvor jeg tok utgangspunkt i resonneringskompetanse, representasjonskompetanse og symbol- og formalismekompetanse. Videre knyttet jeg resonneringskompetanse til van Hiles (1986) nivåer. Jeg valgte også å ta i bruk Deweys (1998) to holdninger åpent sinn og helhjertet. I tillegg analyserte jeg holdninger som viser til den didaktiske kontrakten (Brousseau, 2002). Jeg valgte også å analysere om arbeidsprosessen til elevene hadde en induktiv eller deduktiv tilnærming (Thompson & Martinsson, 1997). Videre ble funnene fra Fyrstikkmønster 1 og Fyrstikkmønster 2 sammenlignet for å se om det var noe forskjell i hvordan elevene viste resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på de forskjellige nivåene.

I analysen og diskusjonen har jeg belyst at forståelsen for det matematiske symbolspråket varierte innad i elevgruppen. Maria og Thor viste resonneringskompetanse som tilsvarer tenking på nivå tre, og som viser at de kan begrunne de matematiske uttrykkene. Elevene klarer å begrunne de matematiske uttrykkene, og viser dermed at de forstår det matematiske symbolspråket. Harald viste at han kan finne det matematiske uttrykket i Fyrstikkmønster 2, men han klarer ikke å begrunne uttrykket. Videre har jeg drøftet funnene i lys av van Hieles (1986) nivåer. Bruken av fyrstikker som manipulerende gjenstander kan ha ført til at elevene klarer å begrunne de matematiske uttrykkene for mønsteret i figurene.

Tidligere forsking på dette området har avdekket utfordringen knyttet til overgangen fra å se mønsteret i figurfølgen til å uttrykke mønsteret med det matematiske symbolspråket. Jeg valgte derfor å gi elevene to oppgaver (Fyrstikkmønster 1 og Fyrstikkmønster 2) for å undersøke om de kan bidra til å belyse elevenes forståelse av det matematiske symbolspråket. På bakgrunn av min studie og mine funn vil jeg konkludere med at arbeidet med geometriske mønster har bidratt til disse elevenes forståelse av det matematiske symbolspråket. Mine funn tyder på at deloppgavene i Fyrstikkmønster 1 og Fyrstikkmønster 2, og bruken av fyrstikker som manipulerende gjenstander har bidratt til elevenes forståelse av det matematiske symbolspråket. Ettersom elevene fikk utforske mønster og skape matematiske uttrykk som inneholdt symboler. I tillegg indikerer funnene at elevene tar kontroll over egen læring (bryter den didaktiske kontrakten), har et åpent sinn og går helhjertet inn i oppgavene som også kan ha bidratt til elevenes forståelse av det matematiske symbolspråket. Denne masteroppgaven gir imidlertid ikke grunnlag for å si noe generelt eller allmenngyldig om hvordan arbeid med geometriske mønster kan bidra til elevers forståelse av det matematiske symbolspråket.

6.2 Veien videre

I løpet av denne studien har jeg fått et innblikk i forskning innenfor matematikkdidaktikk. Videre har jeg fått ny kunnskap om hvordan elever tenker og reflekterer i arbeid med geometriske mønster. I tillegg har jeg erfart at tilnærmingen i oppgavene er en viktig faktor for elevenes tanker og refleksjoner. Elevene bør få arbeide selvstendig i grupper, og ta kontroll over egen læring ved å prøve seg fram. For meg som er en kommende lektor i realfag er dette kunnskap og erfaringer som jeg kan bruke i matematikkundervisningen.

Tidsperspektivet i gjennomføringen av studien har vært en begrensende faktor. Arbeidet har til tider vært krevende, men hele arbeidsprosessen har vært kunnskapsrik. Dersom jeg hadde mer tid til rådighet, ville jeg ha gjennomført undersøkelsen i flere elevgrupper. I tillegg ville jeg ha gitt elevene varierende oppgaver innenfor geometriske mønster. Dette ville ha ført til at jeg kunne ha sammenlignet resultatene i elevgruppene, og fått et bredere perspektiv på hvordan arbeide med geometriske mønster bidrar til elevers forståelse av det matematiske symbolspråket.

7 Referanser

Ahlström, R. (2001). Mönster med stickor. *Nämnaren årgang, (1),* 32–35.

Andersen, S. S. (1997). *Case - studier og generalisering.* Bergen - Sandviken: Fagbokforlaget.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra* (s. 3–12). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bergem, O. K., Kaarstein, H., & Nilsen, T. (2016). *Kan vi lykkes i realfag: Resultater og analyser fra TIMSS 2015.* Sandefjord: Universitetsforlaget.

Bjørndal, C. R. (2015). *Det vurderende øyet.* Oslo: Gyldendal Akademisk.

Blomhøj, M. (1994). Ett osynligt kontrakt mellan elever och lärare. *Nämnaren, årgang (4),* 36–45.

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* New York: Kluwer Academic Publishers .

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Oslo: Abstrakt forlag.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methodes in education (6. utg.).* London: Routledge.

Dewey, J. (1998). *Reflective thinking an aim.* Boston: Houghton Mifflin Company.

Drijvers, P., Goddijn, A., & Kindt, M. (2011). Algebra Education: Exploring Topics and Themes. I P. Drijvers (Red.), *Secondary Algebra Education* (s. 5–26). Rotterdam: Sense Publishers.

Fyhn, A. B., Nutti, Y. J., Eira, E. J., Børresen, T., Sandvik, S., & Hætta, O. E. (2015). Ruvden as a basis for the teaching of mathematics: A Sámi mathematics teacher's experiences. I E. S. Huaman, & B. Sriraman (Red.), *Indigenous Innovation: Universalities and Peculiarities* (s. 169–186). Rotterdam: SensePublishers.

Goldin, G. A. (1997). Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research Methods in Mathematics Education. Monograph, Vol. 9, Qualitative Research Methods in Mathematics Education*, 40–62.

Hole, A. (2006). *Grunnleggende matematikk i skoleperspektiv.* Oslo: Universitetsforlaget.

Innst. 19 S, (2016–2017).(2016). *Innstilling til Stortinget fra kirke-, utdannings- og forskningskomiteen.* Oslo: Kirke- utdanning- og forskningskomiteen.

Kaput, J. J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part I: Transforming task structures. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study. Vol I* (s. 344–351). Melbourne: The University of Melbourne.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. I F. K. Lester (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 707–762). Charlotte, NC: Information Age.

Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* Göteborg: NCM, Göteborgs universitet.

Kjærnsli, M., & Jensen, F. (2016). *Stø Kurs: Norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015.* Sandefjord : Universitetsforlaget.

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Strategi for fagfornyelsen av Kunnskapsløftet og Kunnskapsløfte samisk.* Oslo: Kunnskapsdepartementet.

Kvale, S. (1997). *Det kvalitative forskningsintervju.* Oslo: Gyldendal Akademisk.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju.* Oslo: Gyldendal Akademisk.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 87–106). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lithner, J. (2007). A research framework for creative and imitative reasoning. I *Educational Studies in Mathematics, Vol. 67, No. 3* (s. 255–276). Springer Science .

Maher, A. C., & Sigley, R. (2014). Task-Based Interviews in Mathematics Education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education.* Dordrech: Springer Netherlands.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal Vol. 21 (2. utg.)*, 33–49.

Måsøval, H. S. (2011). *Factors constraining students' appropriation of algebraic generality in shape patterns: A case study of didactical situations in mathematics at a university college.* Kristiansand: University of Agder.

NCM, & Nämnaren. (2013, mai 23). *Om Nämnaren*. Hentet fra Nationellt centrum för matematikutbildning: http://ncm.gu.se/node/645

Niss, M., Jensen, T. H., Andersen, T. B., Andersen, R. W., Christoffersen, T., Damgaard, S., . . . Nissen, K. (2002). *Kompetencer og matematiklæring.* København: Undervisningsministeriets forlag.

NOU 2015: 8. (2015). *Fremtidens skole: Fornyelse av fag og kompetanser.* Oslo: Departementenes sikkerhets- og serviceorganisasjon, Informasjonsforvaltning.

Papic, M., & Mulligan, J. T. (2007). The growth of early matematical pattering: An intervention study. I J. Watson, & K. Beswick (Red.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice — Volume 2* (s. 591–600). Adelaide: MERGA.

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi.* Oslo: Universitetsforlaget.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra* (s. 107–111). Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning, Vol. 5 (1)*, 37–70.

Renze, J., & Weisstein, E. W. (2017, 01 25). *Algebra*. Hentet fra MathWorld -- A: http://mathworld.wolfram.com/Algebra.html

Ryeng, A. (2002). *Det kvalitative intervjuet: Fra vitenskapsteori til feltarbeid.* Bergen: Fagbokforlaget.

Schoenfeld, A. H. (2007). Method. I F. K. Lester (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 67–107). Charlotte, NC: Information Age.

St.meld. nr. 28 (2015-2016). (2016). *Fag – Fordypning – Forståelse. En fornyelse av Kunnskapsløftet.* Oslo: Det kongelige kunnskapsdepartement.

Stacey, K., & MacGregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Red.), *Perspectives on school algebra* (s. 141–153). Dordrecht: Kluwer.

Thompson, J., & Martinsson, T. (1997). *Kunnskapsforlagets matematikkleksikon.* Oslo: Kunnskapsforlaget.

Threlfall, J. (1999). Repeating Patterns in Early Primary Years. I A. Orton (Red.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (s. 18–30). London: Cassell.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight - A Theory of Mathematics Education.* Netherlands: Academic Press Inc.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. I H. L. Chick, & J. L. Vincent (Red.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 305–312). Melbourne, Australia: PME.

Warren, E., & Cooper, T. J. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds thinking. I *Education Studies in Mathematics. Vol 67* (s. 171–185). Springer.

Yin, R. K. (1994). *Case Study Research – Design and Methods.* London: Sage Publications.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and notation. *Educational Studies in Mathematics. Vol 49*, 379–402.

8 Vedlegg

8.1 Vedlegg 1 – Tilbakemelding fra NSD

Anne Birgitte Fyhn
Institutt for lærerutdanning og pedagogikk UiT Norges arktiske universitet

9006 TROMSØ

Vår dato: 15.02.2017 Vår ref: 52070 / 3 / ASF Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 11.01.2017. Meldingen gjelder prosjektet:

52070	*Elevers matematiske kompetanse - en kvalitativ stuide om elevers matematiske kompetanse når de arbeider med et geoetrisk mønster*
Behandlingsansvarlig	*UiT Norges arktiske universitet, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Anne Birgitte Fyhn*
Student	*Vanja Renee Antonsen*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 19.05.2017, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Katrine Utaaker Segadal

Amalie Statland Fantoft

Kontaktperson: Amalie Statland Fantoft tlf: 55 58 36 41

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no

8.2 Vedlegg 2 – Informasjonsskriv

INFORMASJONSSKRIV MED FORESPØRSEL OM Å DELTA I FORSKNINGSPROSJEKT

Forespørsel om å delta i et oppgavebasertintervju i forbindelse med masteroppgave.

I forbindelse med min masteroppgave i lektorutdanning ved Universitetet i Tromsø, Norges arktiske universitet ønsker jeg å intervjue tre elever som går matematikk 1P.

Formålet med prosjektet er å avdekke hvilke kompetanser elever anvender når de arbeider med to forskjellige geometriske mønster. Elevene vil sammen arbeide med de geometriske mønstrene og høyt forklare hvordan de utfører oppgavene. Etter oppgavene vil det være et intervju som omhandler selve oppgavene, elevenes arbeidsmetode og hva slags matematisk kompetanse de anvendte for å løse oppgavene. Jeg anvender lydopptaker til intervjuet for å sikre at jeg får med meg hva elevene sier. Varigheten på intervjuet vil være maksimum 45 minutter.

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Alle deltagerne vil være anonymisert, slik at disse ikke er gjenkjennbare. Informasjonen som blir hentet ut gjennom intervjuene vil bli brukt i min mastergradsavhandling, våren 2017. Etter endt prosjekt vil datamaterialet bli destruert.

Jeg vil presisere at det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke deg fra deltakelsen uten begrunnelse. Hvis du trekker deg fra studien vil alle opplysninger om deg slettes.

Dersom du har noen spørsmål, ta kontakt med student Vanja på 45299914 og e-post van024@post.uit.no eller veileder Anne Birgitte Fyhn på tlf 77646120 og e-post anne.fyhn@uit.no.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS.

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å delta

----

(Deltakers signatur, dato og sted)

8.3 Vedlegg 3 - Intervjuguide

1) Informasjon

Først vil jeg dele ut samtykkeerklæringen, og be elevene lese gjennom og signere. Jeg vil også spørre elevene om de har noe spørsmål angående samtykkeerklæringen. Videre vil jeg forklare elevene at de er anonyme, og alt de sier under intervjuet vil være taushetsbelagt.

Videre forklare jeg elevene hva prosjektet omhandler:

- Prosjektet omhandler å avdekke hvilke kompetanser dere anvender når dere arbeider med to geometriske mønster.

Videre vil jeg informere dem om hvordan intervjuet skal foregå:

- Intervjuet består av to deler. I første del av intervjuet vil jeg be dere arbeide med to geometrisk mønster. Jeg vil at dere skal arbeide sammen, og fortelle høyt hva dere tenker og gjør. Forestill dere at dere er alene i rommet, og skal arbeide med en oppgave. Jeg vil være stille og observere mens dere arbeider.
- I andre del av intervjuet vil jeg stille dere noen spørsmål som omhandler selve oppgavene, deres arbeidsmetode og hva slags matematiske kompetanser dere anvendte under arbeidet med de geometriske mønstrene.
- Under hele intervjuet vil jeg bruke en lydopptaker for å sikre at jeg får med meg hva dere sier. Videre eventuelt betrygge elevene hvis de synes det er ubehagelig at jeg bruker lydopptaker.

2) Oppgaveløsningen

Elevene får utdelt oppgavene (en om gangen). Da vil jeg be elevene om å prate høyt mens de arbeider med det geometriske mønsteret. Jeg kommer ikke til å stille noen spørsmål mens elevene arbeider. Hvis elevene blir stille mens de arbeider, vi jeg notere dette ned. Etter de er ferdig med å arbeide, kan jeg stille følgende spørsmål:

- Hva gjorde dere der?
- Hvorfor gjorde dere det?
- Hvordan kom dere fram til dette?
- Hvordan hjalp dette dere i å komme fram til løsningen?

Dersom elevene ikke får til oppgaven eller står fast underveis, kan jeg stille følgende spørsmål:

- Er det noen sammenheng mellom figurene?
- Hva er forskjellen mellom figurene?

3) Intervju

Spørsmål knyttet til oppgaven:

- Synes dere oppgaven var vanskelig? Hvis nei, hvorfor ikke? Hvis ja, hva var vanskelig?
- Synes dere det var vanskelig å lage en formel i oppgave 1 -5)? Hvis ja, hvorfor? Hvis nei, hvorfor ikke?
- Har dere møtt noen lignende oppgavetyper før i matematikkundervisningen? Hvis ja, utdyp hvordan det var.
- Kunne dere tenkt dere å arbeide med flere slike oppgaver i matematikkundervisningen? Hvorfor?

Spørsmål knyttet til elevenes arbeidsmetode:

- Hvordan synes dere det var å arbeide med oppgavene på en slik måte som dere gjorde nå?
- Hvilken erfaringer har dere fra tidligere med å arbeide på en slik måte?
- Kunne dere tenkt dere å arbeide slik med oppgaver i matematikktimene?
- Ville dere ha fått en bedre forståelse for å uttrykke situasjoner matematisk om dere fikk arbeide slik som dere gjorde akkurat nå med lignende oppgaver? Hvis ja, hvorfor? Hvis nei, hvorfor?

Spørsmål knyttet til hva slags matematisk kompetanse elevene anvendte for å løse oppgaven:

> Matematisk kompetanse består av å ha kunnskaper om, forstå, utøve, anvende og ta stilling til matematikk og matematisk virksomhet i sammenhenger hvor matematikk inngår eller kan komme til å inngå (Niss et al,, 2002, s. 43).

På hvilken måte mener dere at dere har trent/brukt følgende kompetanser i prosessen fra start til slutt i oppgaveløsningen:

- Representasjonskompetanse
    - Kompetansen omhandler blant annet at elevene skal ha en evne til å finne et mønster, system eller sammenheng. De skal også kunne bruke gjenstander, figurer, tabeller og liknende til å gjøre konkrete ting mer abstrakt
- Symbol- og formalismekompetanse
    - Kompetansen omhandler at elevene skal kunne bruke og avkode det formelle matematiske språket på en slik måte at det gir mening for deg selv og andre.
- Tankegangskompetanse
    - Kompetansen omhandler å kunne stille matematiske spørsmål og «ha blikk for» hvilke typer svar som forventes. Det vil si å kjenne, forstå og kunne bruke matematiske begreper, og å kunne abstrahere og generalisere.
- Resonneringskompetanse
    - Kompetansen omhandler å kunne ”tenke matematisk”, og bruke de logiske reglene som gjelder i matematikk. De vil si at elevene skal ha oversikt over en matematisk problemstilling, kunne følge en logisk tanerekke og gjennomføre den i detalj.
- Kommunikasjon
    - Kompetansen omhandler å kunne sette seg inn i og fortolke andres matematikkholdige tekster, og å kunne uttrykke seg om det matematiske forholdet på ulike måter.
- Modelleringskompetanse
    - Kompetansen omhandler å kunne lage et matematisk uttrykk som beskriver en virkelig situasjon, gjennomføre beregninger, kunne forklare hva svaret betyr for situasjonen, og hvilke forutsetninger som må være oppfylt for at modellen skal kunne brukes og svaret være gyldig. Kompetansen omhandler også å kunne diskutere modellen med andre og vurdere ulike modeller opp mot hverandre.
- Hjelpemiddelkompetanse
    - Kompetansen omhandler å kunne vite hvilke ulike hjelpemidler som egner seg til matematisk virksomhet, å ha innblikk i muligheter og begrensninger disse hjelpemidlene gir, og å kunne bruke dem på en hensiktsmessig måte.