Fakultet for Naturvitenskap og Teknologi, institutt for Matematikk og Statistikk

Lærebøkers tilrettelegging for problemfylt aktivitet
- en mixed methods studie.

—

Robin Bergheim

Mastergradsoppgave i matematikk - lektorutdanning i realfag (MAT-3906), juni 2017

30 studiepoeng

Sammendrag

Denne masteroppgaven i matematikkdidaktikk har hatt som formål å finne ut *i hvilken grad lærebøker i matematikk legger til rette for problemfylt aktivitet på 8. trinn.* For å svare på dette utledet jeg en teoridel omhandlende problemfylt aktivitet i sammenheng med DNR-basert undervisning og spesielt intellektuelt behov. Deretter bygde jeg opp et konseptuelt rammeverk for analyse, gjennom en syntese av flere teorier. Spesielt sentral ble Fuller, Rabin, & Harels (2011) fire punkter for problemfylt undervisning gjennom intellektuelt behov.

Gjennom lærebokanalysen hadde jeg et pragmatisk kunnskapssyn og anvendte et mixed methods design på et utvalg bestående av de tre mest brukte lærebøkene i matematikk på 8. trinn; Maximum 8, Faktor 8 og Nummer 8. Jeg gjorde kvalitative vurderinger av oppgavene i bøkene og representerte funnene kvantitativt gjennom rammeverket mitt. I tillegg gjennomførte jeg en kvalitativ tilleggsanalyse for å få innsikt i teoriformidlingen i bøkene. Her hadde jeg fokus på å belyse forskjellene i bøkene, som ikke handlet spesifikt om hver enkelt oppgave. Dette ga et helhetlig inntrykk av hvordan bøkene varierte seg imellom. På den måten kunne jeg danne meg et inntrykk av hvordan helheten i bøkene la til rette for problemfylt aktivitet, ikke bare oppgavene. Den kvantitative analysen av oppgaver var likevel hovedfokuset i masteroppgaven, da oppgavene faktisk er det som aktiviserer elevene.

Til slutt satt jeg igjen med statistikk som viste at 14,1 % av oppgavene i bøkene var problemfylte oppgaver i min forstand. Andelen i henholdsvis Nummer, Maximum og Faktor var 17,4 %, 14,8 % og 8,9 %, noe som viser til en ganske stor forskjell, der spesielt Faktor skiller seg negativt ut.

Det helhetlige inntrykket jeg sitter igjen med etter den kvalitative tilleggsanalysen er enda litt kvassere, og favoriserer Nummer i større grad enn tallene viser. Boken har et godt fokus på meningen bak problemer og varierer i større grad enn de andre to bøkene. I tillegg stiller de spørsmål på en måte som fremmer at elevene ofte må vurdere hva de skal regne ut. Det betyr ikke at det regnetekniske trenger å være vanskelig i det hele tatt, men at elevene blir utfordret på det intellektuelle plan i samsvar med Schoenfelds (1985) retningslinjer for problemer.

Selv om jeg ble positivt overrasket over Nummer, vil jeg påstå at alle bøkene kunne hatt større fokus på problemfylt aktivitet for å underbygge elevenes relasjonelle forståelse, i stedet for instrumentelle forståelse (Skemp, 1976).

Forord

Denne masteroppgaven fullfører min femårige lektorstudie i Realfag ved UiT. Gjennom matematikkdidaktikken ble det klart for meg at matematikken jeg kjente fra før, ikke var på høyde med potensialet matematikk faktisk har. Jeg lærte om problemer som læringskilder i motsetning til øvingsoppgaver, relasjonell forståelse i motsetning til instrumentell forståelse og skjønte fort at økt kompetanse på dette feltet kunne sette meg i bedre stand til å hjelpe mine framtidige elever. Jeg sitter igjen med et nytt syn på matematikkoppgaver og gleder meg til å kunne bidra med denne kunnskapen i neste kapittel, når jeg trer inn i arbeidslivet.

For dette vil jeg takke min hovedveileder, Per Øystein Haavold ved institutt for lærerutdanning og pedagogikk, som har vist stor interesse for prosjektet mitt og hjulpet meg til å gjennomføre undersøkelsen på en måte som ivaretok mine interesser og ideer. I tillegg vil jeg takke nestveileder, Ragnar Soleng ved institutt for matematikk og statistikk, for kjapp mailkorrespondanse og god informasjonsflyt gjennom prosessen.

Til slutt vil jeg rette en stor takk til Ann Monika Bergheim, Sverre Bergheim, Ragne Bergheim og Karoline Dahl-Thorstensen (henholdsvis min mor, far, søster og samboer) for god og konstruktiv hjelp i oppstartsprosessen og spesielt i avsluttende faser av prosjektet.

Arguineguin, Gran Canaria, Mai 2017

Robin Bergheim

Innholdsfortegnelse

Lærebøkers tilrettelegging for problemfylt aktivitet - en mixed methods studie.

1 Innledning

1.1 Personlig bakgrunn

Matematikk er så mangt. Lorentzen (2013, s. 8) omtaler matematikk som *«en skattkiste full av problemer»*, hvor mulighetene er enorme. Matematikken er menneskeskapt, for å beskrive verden rundt oss, og er helt nødvendig for å drive verden framover og for å leve som et individ i samfunnet. Helt siden tidlige dager på barneskolen har jeg likt matematikk. Dette på grunn av fagets helt egne evne til å være så presis som det går an å være. Dette var faget jeg trodde jeg forsto best av alle. Men det var ikke før jeg begynte på Universitetet i Tromsø at jeg virkelig innså det. Her fikk jeg sakte men sikkert en følelse av at den matematikken vi lærer, og den matematikken jeg alltid har lært, ikke helt har vært på høyde med selve potensialet matematikk har.

Jeg har alltid vært opptatt av å forstå matematiske sammenhenger, og var aldri fornøyd før jeg forsto hva jeg faktisk hadde gjort, og hvorfor. Samtidig slår kanskje de fleste seg til ro med å godta at ting blir som de blir, uten å gi det nøyere ettertanke. Det går fortere og er lettere, ergo et naturlig valg. Mens jeg har vært sta, og brukt masse tid på å se etter sammenhenger, har jeg hatt en følelse av at mange av mine klassekamerater har sett etter prosedyrer for å komme fram til riktig svar. De kunne ofte finne svaret, men visste ikke hvordan eller hvorfor svaret ble som det ble. På samme måte syns jeg undervisningen har hatt en vinkling mot det prosedyriske, instrumentelle og regnetekniske ved matematikken, kontra å fokusere på forklaringen bak fenomener. Det er ingen tvil om at det lønner seg å se både de store og de små sammenhengene, og jeg tror timevis med utforskende grubling kan ha påvirket min matematiske forståelse veldig positivt. Derfor tenker jeg – her er det noe som har manglet. Burde hovedfokuset i matematisk aktivitet vært litt annerledes?

1.2 Teoretisk bakgrunn

Det overordnede målet i matematikkundervisning er å hjelpe elever å utvikle matematisk kompetanse (Johnsson, Norquist, Liljekvist, & Lithner, 2014). Matematisk kompetanse kan defineres som evnen til å forstå, vurdere, utføre og bruke matematikk i matematiske situasjoner (Niss, 2007). Forståelse kan deles inn i instrumentell og relasjonell forståelse, hvor instrumentell forståelse handler om å forstå hvordan man utfører matematiske prosedyrer, mens relasjonell forståelse handler om å forstå meningen bak konsepter, og relasjoner mellom dem (Skemp, 1974).

Relasjonell forståelse har fått økende oppmerksomhet den siste tiden og Stylanides & Stylanides (2007) skriver at å oppnå relasjonell forståelse er et av de viktigste målene i matematikkutdanningen for alle studenter. Likevel er det ikke enighet om hvordan dette skal implementeres og undervises (Lester, 1994). Hiebert & Grouws (2007) skriver om *opportunity to learn* som den mest sentrale sammenhengen mellom undervisning og læring, og mener at elever må eksponeres for oppgaver hvor de opplever å slite med å forstå meningen bak problemer. På den måten vil slitet fungere som prosessen som rekonfigurerer den mentale sammenhengen mellom matematiske konsepter og prosedyrer (Hiebert & Grouws, 2007). Disse relasjonene blir reformert når ny informasjon ikke kan bli assimilert eller når gamle relasjoner ikke gir mening opp imot forståelsen av det nye problemet (Piaget, 1960; Skemp, 1971). Derfor mener Hiebert & Grouws (2007) at arbeid med problemer er viktig for læring i matematikk.

Johnsson et al. (2014) reiser tvil rundt undervisning og matematisk aktivitet som ikke fremmer relasjonell og konseptuell forståelse. I sin studie påviser de at kreativt arbeid med problemer, i motsetning til prosedyrisk arbeid med øvingsoppgaver fører til bedre matematisk forståelse, og på sikt også bedre hukommelse. Likevel blir mye tid brukt på å lære og øve på prosedyrer, hvor målet er at studentene skal lære en rask og enkel måte å løse oppgaver på (Hiebert, 2003). Denne aktiviteten kan i stor grad føles som meningsløs og problemfri for elevene (Fuller, Rabin, & Harel, 2011). Fuller et al. mener at matematisk aktivitet bør være drevet av intellektuelt behov, altså at elevene må se en grunn til å tilegne seg den kunnskapen de trenger for å løse problemer. Ved øving på prosedyrer vil ikke dette behovet bli tilfredsstilt, da det ikke er tilegning av kunnskap som er i fokus, men heller øvelse på allerede kjent kunnskap med kjent framgangsmåte. Elever som har blitt lite eksponert for problemer med intellektuelt behov, kan få vanskeligheter når de står ovenfor virkelige problemer, nettopp fordi livet ikke kommer med løsningsforslag. Dette fordi de ikke i stor nok grad har fått muligheten til å lære *(opportunity to learn)*, ifølge Hiebert & Grouws (2007).

En masteroppgave fra 2009 (Leer) så på sammenhengen mellom fokuset på problemløsning i den norske læreplanen L97 og eksamensoppgaver i 10. klasse. Den konkluderte med at læreplanen hadde forholdsvis godt fokus på utforskende aktiviteter som for eksempel problemløsning hvor elevene skulle utforske, eksperimentere og oppdage matematiske sammenhenger for å finne fram til svar (Leer, 2009). Eksamen derimot inneholdt i svært liten grad problemløsningsoppgaver, og ofte var de valgbare. Elevene kunne dermed få toppkarakterer bare ved å imitere og anvende prosedyrer de har pugget fra før.

Jensen (2007) skriver at vurdering og undervisningspraksis ofte henger sammen, og at denne sammenhengen blir tydeligere og tydeligere jo viktigere vurderingen er. En eksamen vil dermed ha stor innvirkning på undervisningspraksis, og en problemfri eksamen vil derfor dra undervisningen mot problemfrie former. Dette er ifølge Jensen (2007) et hinder for bruk av problemløsning i undervisning. Læreplanen, som skal være veiledende for undervisningen, kan dermed bli nedprioritert ved at eksamen tar over som veiledende for undervisningen (Jensen, 2007). Schoenfeld (2002) presiserer at viktige prøver eller eksamener påvirker både pensum som blir lært, metodene som blir brukt i opplæringen og dermed også på testresultatene. Dette kan skyldes lærernes press for at elevene deres skal score godt på prøver.

Det nevnte problemet kommer av det man på engelsk kaller for *teaching to the test*. Fenomenet har vært under sterkt kritikk for å ødelegge validiteten til prøver og eksamener. Popham (2001) illustrerer med en test som tar for seg 25 av 500 ord i et ønsket vokabular etter endt opplæring. Om testen er valid så bør en elev som klarer 60 % av de 25 ordene i testen, også kunne klare rundt 60 % av de 500 ordene i vokabularet. Når lærere forbereder elevene direkte til testen, eksempelvis med å øve ekstra på nøyaktig de ordene som vil komme på testen, så vil elevene score høyere, men kanskje generelt kunne færre ord. Testen kan da, på ingen måte si noe om hvor mange av de 500 ordene elevene faktisk kan.

Totalt sett kan dette tyde på at vurderingsformene burde vært revurdert. På alle nivå bør i hvert fall eksamen samsvare med veiledende læreplaner eller valgt pensum. Lærere som står midt imellom og blir presset fra alle sider har en tøff jobb. I utgangspunktet bør undervisningen forholde seg til læreplanen. Samtidig blir lærerne presset bort fra læreplanen av problemfrie vurderingsformer og et resultatorientert samfunn som av en eller annen grunn har snudd prestasjonsfokuset vekk fra eleven, og heller vendt det mot læreren. Heldigvis har vi lærebøker som kan virke litt avlastende, og kan være grei å støtte seg til når man ikke helt vet hvilken retning man burde gå. Men har lærebøkene bedre påvirkning på undervisningen enn vurderingen?

1.3 Innsnevring til en problemstilling

Mange studier viser at lærebøker også påvirker både læreres undervisning og i stor grad elevenes læring (Thompson, Senk, & Johnson, 2012; Cai, Yujing, & Lester, 2011; Stein, Remillard, & Smith, 2007). Tall fra TIMSS 2011 (Mullis, Martin, Foy, & Arora, 2012) viser at 94% av norske elever oppga at matematikklærerne deres brukte lærebøkene som utgangspunkt for undervisningen. Lærebøker, som bør reflektere læreplanen best mulig, har tydeligvis stor påvirkning på hva som undervises.

Fra den teoretiske bakgrunnen er det tydelig at problemfylt aktivitet er viktig for læring. Jeg er dermed interessert i å finne ut av i hvilken grad elever blir eksponert for problemfylt aktivitet. Siden lærebøker er en viktig og universell faktor i skolen, er de også et viktig område for forskning (Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt, & Houang, 2002). Derfor har jeg bestemt meg for å gjøre en studie rettet direkte mot lærebøker i min masteroppgave. Jeg skal selv arbeide fra 8. til 13. trinn etter endt utdanning, men problemfylt aktivitet derimot, bør komme inn mye tidligere 8. trinn. Ut ifra dette vil det være naturlig å se på så lave trinn som mulig, innenfor rammene som er satt av min utdanning. Jeg kunne tenkt meg å se på et helt læreverk, fra 8. til 10. trinn, for å få et helhetlig bilde av ungdomstrinnet, fram mot eksamen. Om jeg valgte dette ville jeg bare treffe en liten del av lærebøkene som blir brukt, og dermed hadde det ikke vært mulig å generalisere resultatene på samme måte som jeg ønsker. Derfor har jeg heller valgt å se på de mest aktuelle bøkene på 8. trinn for å prøve å få et helhetlig inntrykk av hvordan problemfylt aktivitet blir vektlagt der.

Med innledningen i tankene, formulerer jeg problemstillingen for masteroppgaven slik:
I hvilken grad legger lærebøker i matematikk på 8. trinn til rette for problemfylt aktivitet?

1.4 Gjennomføring og oppbygging

Gjennom teoridelen i kapittel 2 vil jeg ta for meg begrepet *problemfylt aktivitet*, og drøfte hva som skal til for at aktivitet skal kunne bli kalt problemfylt. Kapittel 3 vil ta for seg de metodiske valgene jeg har tatt og dermed beskrive i detalj hvordan jeg har gått fram for å gjøre undersøkelsen. Hovedanalysen vil kort fortalt ta for seg en stor mengde oppgaver og kategorisere de på likt grunnlag for å kunne trekke slutninger som gjelder for majoriteten på 8. trinn. Selve oppgavene i bøkene får hovedfokuset fordi det er oppgavene som legger grunnlag for aktiviteten elevene vil gjøre i regi av bøkene. Analysen av oppgaver vil basere seg på et konseptuelt rammeverk som skal kunne gi meg den informasjonen jeg trenger for å svare på problemstillingen. Dette rammeverket blir satt sammen i slutten av kapittel 2.

Jeg vil også gjøre en kvalitativ tilleggsanalyse som vil ta for seg aspekter ved lærebøkene som den kvantitative delen ikke plukker opp. Dette for å få et mer helhetlig bilde av hvordan lærebøkene legger til rette for problemfylt aktivitet. I kapittel 4 blir resultatene fra den totale undersøkelsen presentert, og videre blir resultatene diskutert opp imot teorien i kapittel 5. Det hele avsluttes med kapittel 6 hvor jeg oppsummerer undersøkelsen og svarer på problemstillingen.

2 Teoretisk grunnlag

2.1 Problemfylt aktivitet med konstruktivistiske trekk

Matematisk aktivitet havner i et spektrum mellom ekstremt problemfri og ekstremt problemfylt aktivitet (Fuller et al., 2011). Fra innledningen er det tydelig at en problemfylt tilnærming til matematisk aktivitet vil gi elevene mulighet til å utvikle relasjonell og konseptuell matematisk forståelse, noe som er et mål for matematikkutdannere verden over. Schoenfeld (1993) opererer med to kriterier for at en oppgave skal være et matematisk problem. (1) Elevene må være interessert og ønske å finne en løsning, og (2) elevene må ikke har noen umiddelbar løsningsmetode. Det finnes flere definisjoner på et matematisk problem, og de fleste ligner veldig på Schoenfelds definisjon. Det som skiller seg litt ut ifra noen andre definisjoner er punkt 1, som sier at elevene må ta problemet til seg og se på det som sitt eget. Jeg velger å forholde meg til denne definisjonen, da dette punktet viser seg å korrespondere godt med annen teori som jeg vil legge til grunn for undersøkelsen.

For at oppgaver skal være problemfylt må de dermed engasjere elevene og på den måten skape interesse for faget. I tillegg må elevenes kunnskap bli satt på prøve i løpet av prosessen med å løse problemet. Arbeid med slik type aktivitet vil utvikle elevenes matematiske kompetanse (Schoenfeld, 1992). Det er viktig å påpeke at en oppgave bare er et problem for en elev hvis den er vanskelig nok for den spesifikke eleven. Dette betyr at et problem for en elev ikke nødvendigvis er et problem for en annen. Vanskeligheten skal ikke være regneteknisk, men utfordre eleven på det intellektuelle planet (Schoenfeld, 1985). Det er viktig å forstå forskjellen mellom disse to, så jeg illustrerer det med noen eksempler fra Maximum 8 (Tofteberg, Stedøy-Johansen, Alseth, & Tangen, 2013). Boken har et system som merker et utvalg oppgaver i forskjellige vanskelighetsnivå. Det finnes tre nivåer og oppgaven under er av nivå 3, altså av de vanskeligste oppgavene:

1.141 Regn ut.

d. $\big((-3) * (-8) * (-5) \text{—} 78\big)/(-6)$

Figur 2-1: Oppgave som er regneteknisk vanskelig uten å være et problem (Tofteberg et. al, 2013, s. 67).

Oppgaven i figur 2-1 vil framstå som ganske vanskelig, men vil likevel ikke være en problemfylt oppgave ifølge Schoenfeld. Den fordrer øving på å regne med negative tall, både via multiplikasjon, divisjon og subtraksjon. Alt dette har elevene fått introdusert og kan fra før. Oppgaven byr ikke på forståelse utover disse prosedyrene. Det eneste som er vanskelig er at oppgaven er forholdsvis lang og inneholder mange ledd. Dermed er det en viss sjanse for at en elev som egentlig behersker disse enkeltoperasjonene til slutt vil gjøre en feil og ende opp med feil svar. Hvis regnestykket var enda lengre, men fortsatt besto av de samme tingene, hadde sjansen for feil svar blitt enda større, selv om det ikke er tilført noe nytt. Dermed er vanskeligheten i dette eksempelet rent regneteknisk og oppgaven blir dermed ikke et problem. Slike oppgaver kan kalles øvelser, hvor man øver på prosedyrer som blir presentert av læreboka enten som forklaring, eksempel eller som oppgavetekst. Schoenfeld (1993) påstår at majoriteten av oppgaver i lærebøkene er øvelser som denne oppgaven, og ikke problemer.

Oppgaver som er regneteknisk krevende kan også være problemer, men det vil ikke være fordi den er regneteknisk krevende. For at en oppgave skal være et problem må den være intellektuelt krevende. Det betyr at oppgaven må bygge på kunnskap elevene allerede innehar og by på forståelse av nye sammenhenger. Eleven vil på den måten slite med å forstå meningen bak problemet, og oppgaven vil dermed bygge relasjonell forståelse. (Skemp, 1971).

1.146 Ola skal bygge en rektangelformet hundegård.
Gjerdet selges i deler som er 2 meter brede. Arealet
til hundegården skal være 64 kvadratmeter.

…

Ola vil kjøpe færrest mulig gjerdedeler.

b. Hvilken lengde og bredde får hundegården? Hva kalles
denne formen?

Figur 2-2: Oppgave som utfordrer elevene på det intellektuelle plan (Tofteberg et. al, 2013, s. 27).

Oppgaven i figur 2-2 bygger videre på elevenes kunnskap om faktorisering og rektangler, samtidig som den byr på forståelsen av et helt annet prinsipp, nemlig at kvadratet er firkanten som har kortest omkrets i forhold til areal. Det er ikke spesielt regneteknisk vanskelig for elevene å finne ut av dette, men det er heller ikke meningen. Likevel må elevene først vurdere, så kanskje undersøke alle muligheter, før de kan generalisere og konkludere med et svar. Oppgaven legger til rette for et aha-moment som skal bidra til forståelse utover det de hadde fra før.

Tankene om problemer som læringskilde er ikke klekket nylig, men stammer fra psykologen Jean Piaget (1896-1980) som er veldig sentral i matematikkdidaktisk teori. Hans hovedpoeng var at all læring skjer i mennesket, som opplever, tolker og lærer gjennom sin egen eksisterende kunnskap og oppfatning (Piaget, 1960). Han mente at kunnskap bygges gjennom en kontinuerlig spenning mellom *accommondation* og *assimilation.*

Kort sagt er assimilation prosessen når mennesker opplever noe nytt og setter det i sammenheng med sin forståelse av verden (McLeod, 2015). Dette kan skje når opplevelsen og forståelsen av verden stemmer overens, men også ved feiltagelser når de ikke stemmer overens. Ofte kan man overse enkle detaljer eller misforstå situasjoner på grunn av sin foreliggende kunnskap. Det skal mye til for å endre ens syn på verden slik man opplever den. Dermed kan det hende at man, på automatisk vis, endrer sin oppfatning av opplevelser slik at de passer overens med sin virkelighetsforståelse (McLeod, 2015).

Accommondation, på den andre siden, er prosessen hvor en ny opplevelse, som ikke passer inn med virkelighetsforståelsen, endrer personenens syn på virkeligheten (McLeod, 2015). Denne prosessen handler om å feile og å lære av det. Når man handler på en måte og utfallet ikke blir slik man forventer, bruker man den nye observasjonen til å tilpasse virkelighetsforståelsen slik at den henger sammen med hendelsen man nettopp observerte (McLeod, 2015). På denne måten er det meningen at elever skal bygge sin egen forståelse av hvordan matematikken henger sammen.

Piaget påsto at *«hver gang man lærer et barn noe som barnet heller kunne ha funnet ut av selv, hindrer man barnet i å danne sin egen kunnskap og dermed forstå fenomenet fullt ut»* (min oversettelse av Piaget, 1970, s. 715). Man bør altså la elevene tenke og gruble selv, uten å styre dem for mye på veien til kunnskap. Senere har dette også blitt grunnlaget i utformingen av læringsteorien Konstruktivismen, og spesielt grenen Kognitiv konstruktivisme, som i likhet med Piaget fokuserer mye på den kognitive utviklingen hos elever. Elevene må gruble, utforske, oppleve og trekke slutninger for å tilegne seg ny lærdom (Piaget, 1970). Oppgaver som bygger på disse egenskapene vil fremme elevenes tankeprosesser og forbedre deres evne til å resonere. Derfor bør lærerne være tilgjengelig for å hjelpe på en slik måte at elevene får en tilstrekkelig forståelse av problemer, men unngå å frarøve dem muligheten til å gruble selv. Det teoretiske rammeverket DNR-basert læring (forkortes til DNR) av Harel (2007) beskriver og utdyper dette nærmere innen læring og undervisning av matematikk.

2.1.1 DNR-basert læring

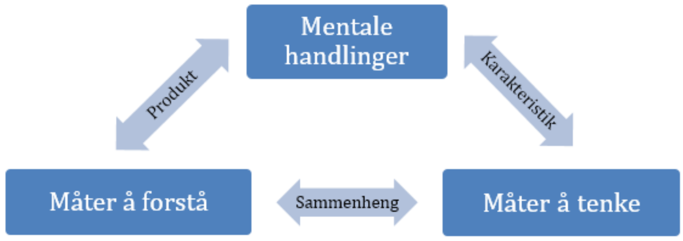
Initialene D, N og R står for de tre fundamentale undervisningsprinsippene som rammeverket er bygd opp av, nemlig *duality*, *necessity* og *repeated reasoning.* Denne typen undervisning skal hjelpe elevene å utvikle måter å forstå – og måter å tenke på (duality), stimulere elevenes intellektuelle behov (necessity), og sørge for at kunnskapen elevene får gjennom aktiviteten blir husket og kan brukes videre (repeated reasoning) (Harel, 2007).

Ifølge DNR kommer læring av utsettelse for problematiske situasjoner, hvor elevene opplever å slite med å forstå prinsipper og ideer. Dette i samsvar Piagets konstruksjon av forståelse gjennom accommondation og assimilation. Ideen støttes også av TRU Math, som kaller godt arbeid med givende problemer for *productive struggles* (produktivt slit) og sier at det er i slike utfordrende situasjoner at elever lærer best (Schoenfeld & the Teaching for Robust Understanding Project, 2016).

Elevenes motivasjon til å komme seg gjennom slike utfordringer er forankret både psykologisk (motivasjon) og intellektuelt. Necessityprinsippet bygger på at det er bra for elever å oppleve et slikt slit som i utgangspunktet fører til oppdagelsen av ny kunnskap. Dette skjer ifølge DNR gjennom å løse problemer hvor ny eller utvidet kunnskap er nødvendig å tilegne seg for å finne en løsning. Når elever føler det er nødvendig å tilegne seg nye eller utvidet kunnskap, har de fått et intellektuelt behov for å løse et problem. Da kan de ta problemet til seg og behandle det som sitt eget, som Schoenfeld (1993) sier er et sentralt kriterium for et problem.

Intellektuelt behov kan illustreres som følger. La K være en bit kunnskap som innehas av en person. Da eksisterer det en problematisk situasjon, S, som oppsto før K, som var grunnen til at K oppsto. En slik problematisk situasjon, S, vil være personens intellektuelle behov til å lære seg K (Harel, 2013). Dermed er det tydelig at intellektuelt behov er avhengig av problemfylte situasjoner. Matematikkundervisningen bør derfor ikke appellere til underholdning eller drives av belønning og straff, men fokusere på elevenes intellektuelle behov ved å utnytte menneskers utrolige evne til å være nysgjerrig (Harel, 2008b).

I tillegg til intellektuelt behov må den matematiske integriteten opprettholdes i undervisningen. Matematikkens integritet i et pensum består av alle *måter å forstå* og *måter og tenke på* som har utviklet seg gjennom matematikkens historie. Matematikk blir utført gjennom mentale handlinger. Mentale handlinger kan for eksempel være *å sammenligne* eller *å vurdere*. Forståelsen vil være produktet av disse handlingene, mens tankegangen vil karakteriserer handlingene. Disse to undergruppene utgjør dermed all matematikk slik vi kjenner den i dag. Matematikere praktiserer matematikken ved å gjennomføre mentale handlinger med en viss karakteristikk (måter å tenke på) og produserer et sluttresultat som representerer måten de forstår problemet på. Matematisk aktivitet vil dermed bestå av et konseptuelt triangel av begreper, som illustrert i 2-3.



Figur 2-3: Trekanten: mentale handlinger, måter å forstå og måter å tenke på (Harel, 2008a)

Det blir derfor tydelig at problemer hvor sammensatte mentale handlinger er sentrale i utviklingen av den matematiske forståelsen, tankene bak de mentale handlingene og matematikken i seg selv (den matematiske integriteten). Eksempelvis bør bevisets rolle i matematikk være sentral og de mentale handlingene man gjør når man beviser, går langt utover bare å bevise. Bevishandlingen består også av de mentale handlingene tolking, undersøking, sammenkobling, modellering, generalisering, og så videre (Harel, 2008a).

Måter å tenke og måter og forstå på henger sammen, og lærere må derfor bidra til å hjelpe elever å tenke på nye måter. Det finnes mange måter å tenke på, men to typiske måter å tenke på er (1) gjenkjenning av mønster i resultat og (2) gjenkjenning av mønster i prosesser som fører til resultat (Harel, 2008a). For å illustrere forskjellen benytter han beviset for at rekken 1, 2, 4, 8, 16, …, kommer av potensen 2^n. På en side kan man påpeke at verdien av 2^n utfolder seg til å bli verdiene i den originale rekken. Dette vil være typisk gjenkjennelse av mønster i resultat. Man kan også bevise det samme ved å demonstrere at prosessen som genererte rekken er ekvivalent med gjentatt multiplisering med 2. Denne måten å tenke på vil falle under kategori 2. Harel (2008a) påpeker at de fleste, både elever og lærere, har lett for å bli fristet til å se direkte på resultatmønstre, i stedet for å se på prosessen som leder fram til resultatet. Dette er som regel lettere og tar mindre tid, men gir ikke den samme forståelsen som er tiltenkt. Det er derfor ønskelig at fokuset bør flyttes over til meningen av problemer i stedet for resultatet.

R-en, som står for *repeated reasonning* presiserer at elevene gjentatte ganger må eksponeres for muligheten til å resonere seg fram til løsningsstrategier, for å lære seg prosessene som ligger bak både problemer og matematiske ideer. Når man lærer seg å resonere vil man ikke være like avhengig av å huske regler og prosedyrer. Man kan heller resonere seg fram til hvordan man må regne ut. På den måten vil man alltid kunne klare å finne tilbake til kunnskap om prosedyrer som kanskje har lett for å bli borte når den ikke brukes og øves på regelmessig.

DNR baserer seg dermed på problemer som læringskilde og presiserer viktigheten av intellektuelt behov, samtidig som de ser nytten i å kunne resonere seg fram til løsningsmetoder. Dette vil for eksempel være viktig i arbeid med problemer som ikke kan løses med enkle prosedyrer. Måten man tenker på vil karakterisere matematikken man tilegner seg, mens måten man forstår på vil være et produkt av de mentale handlingene. Disse to utgjør som sagt den matematiske integriteten.

Tankene om DNR-basert læring kan forenes med konstruktivismen og det problemfylte synet på læring som jeg tidligere har formidlet. Vi har fra teorien at intellektuelt behov er en problemfylt situasjon som skal danne grunnlag for ny kunnskap. Dette betyr implisitt at der det er intellektuelt behov er det problemfylt aktivitet. Det reiser spørsmålet: kan man ha problemfylt aktivitet uten intellektuelt behov? Fuller et al. (2011) påstår at aktivitet blir problemfylt dersom den er drevet av et intellektuelt behov. Ergo antyder han svaret «nei», på foreliggende spørsmål. I tillegg har vi fra definisjonen av et problem av Schoenfeld (1993) at oppgaver ikke blir problem før elever tar det til seg og ønsker å finne en løsning. Dette ønsket er ifølge DNR drevet av nettopp intellektuelt behov. Ut ifra dette vil jeg si at problemfylt aktivitet og intellektuelt behov er helt avhengig av hverandre.

Fuller et al. (2011) foreslår fire retningslinjer for undervisning som skal gi elevene en problemfylt opplevelse ved å stimulere deres intellektuelle behov i form av DNRs prinsipper. Han foreslår at man må:

1. Formulere klare mål:

   Man bør jobbe mot klare, langsiktige mål. Dette gjelder generelt, men også for hver enkelt aktivitet. Man kan forvente at lærerne bidrar på dette punktet, men likevel kan lærebøkene gjøre en god del av jobben.
2. Poengtere meningen med problemer og deres løsning:

   For å undervise med intellektuelt behov bør man ha et miljø hvor å forstå problemet fullt ut er viktigere enn å produsere et svar. Når elevene forstår problemet tilstrekkelig vil det være større sjanse for at svarene de produserer inneholder matematisk innsikt, selv om svaret skulle vise seg å være feil. Mange feil kan spores tilbake til hvordan elevene forstår problemet, i stedet for deres mangel på kunnskap.

3. Velge oppgaver med omhu:

   Oppgavene som gis må være klare i teksten, problematiske og samtidig fornuftige (men ikke nødvendigvis fra virkeligheten). De skal kunne forstås med nåværende kunnskap og presse elevene ut av boksen for å se nye sammenhenger.

4. Tillate elevene å undersøke sine egne løsningsmetoder:

   Problemer bør komme uten framgangsmåte slik at elevene oppfordres til å finne egne måter å løse problemer på. I tillegg burde oppgaver som spesifikt er øvelser på bruk av standard prosedyrer ikke være løselig på en annen, lettere måte, da dette er frustrerende for elever. Elevene bør videre oppfordres til å sammenligne metoder og svar om det er mulig.

Disse fire retningslinjene vil forme min analyse av lærebøker, når jeg i kapittel 2.5 bygger opp rammeverket mitt.

2.2 Mål for matematikkundervisningen

Som tidligere nevnt er det overordnede målet i matematikkundervisning å hjelpe elever å utvikle matematisk kompetanse (Johnsson et al., 2014). Niss (2007) definerer matematisk kompetanse som evnen til å forstå, vurdere, utføre og bruke matematikk i matematiske situasjoner. I læreplanverket for Kunnskapsløftet er kompetanse forstått som:

> *«… evnen til å løse oppgaver og mestre komplekse utfordringer. Elevene viser kompetanse i konkrete situasjoner ved å bruke kunnskaper og ferdigheter til å løse oppgaver. Det kan handle om å mestre utfordringer på konkrete områder innenfor utdanning, yrke og samfunnsliv eller på det personlige plan.»*
>
> *(Utdanningsdirektoratet, 2016)*

Med et videre synspunkt på opplæringen hevder Niss (2003) at det er tre overordnede årsaker til at samfunnet bruker ressurser på å undervise elever i matematikk. Disse består av ulike samfunnsmessige, kulturelle og politiske motiver, og framstår som et resultat av analyser av matematikkundervisning, gjennomført med både historisk og moderne perspektiv. For det første skal matematikkundervisningen bidra til den teknologiske og sosioøkonomiske utviklingen i samfunnet. For det andre skal den bidra til å opprettholde, og kanskje enda viktigere, utvikle samfunnet. For det tredje skal den gi individer de forutsetningene de trenger gjennom utdanning, yrkesliv, privatliv og som samfunnsborger (Niss, 2003, s. 291).

De første to grunnene er tett knyttet opp imot samfunnet, mens grunn nummer tre er knyttet til individet selv. Alle står fram i lyset av troen på at matematikk kan bidra til utviklingen av teknologi og økonomi i tillegg til å gi individer nødvendige forutsetninger i livet (Niss, 2003).

For å kunne anvende matematikken i dagliglivet er det viktig at forståelsen man har er relasjonell, og ikke bare instrumentell (Skemp, 1974). I dagliglivet kommer nemlig ikke problemer med enkle løsningsstrategier. De vil derimot være komplekse og avhengige av forskjellige variabler i hver situasjon. I tillegg må man ta hensyn til ulike relasjoner som kobler samfunnet sammen. Instrumentell kunnskap er kjennskap til hvordan man anvender prosedyrer, mens relasjonell kunnskap omhandler koblingen mellom fenomener og forklaringen om hvordan og hvorfor det er hensiktsmessig å regne på en gitt måte (Skemp, 1974). På den måten vil relasjonell kunnskap kunne utvides fra skolen til bruk i samfunnet. Instrumentell kunnskap vil være vanskeligere å anvende i situasjoner fra dagliglivet. Disse tankene er i samsvar med DNRs retningslinjer om å fremheve meningen med problemer i stedet for algoritmer for å finne rett svar.

2.3 Problemfylt aktivitet i læreplanen

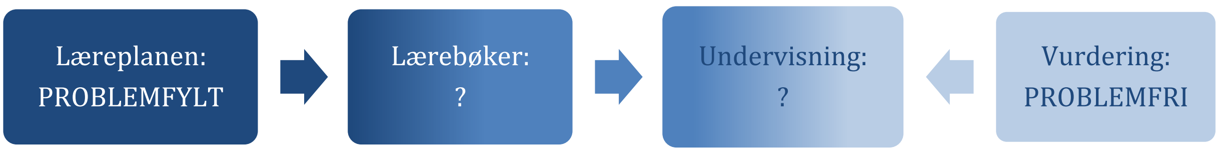
En læreplan er et nasjonalt styringsdokument som skal bestemme hvordan læring skal skje på skolen. Ifølge Imsen (2009) brukes det som redskap i alle faser av opplæringen. Det vil si at læreplanen skal være aktuell både i planlegging, gjennomføring og vurderingen i etterkant. Det virker som om læreplanen i matematikk fellesfag (Kunnskapsdepartementet, 2013) har hatt fokus på akkurat de tre punktene til Niss (2003) da de formulerte sitt første kapittel; *Føremål*. De prater om kulturarv, hvordan man systematiserer erfaringer, beskriver og forstår fenomener, og utforsker universet. I tillegg påpeker de at faget griper inn i de fleste vitale samfunnsområder og at et aktivt demokrati trenger borgere som er i stand til å forstå og kritisk vurdere kvantitativ data. Slik forsvarer de at matematisk kompetanse er helt nødvendig for å både forstå og kunne påvirke prosesser i samfunnet, samt å kunne fungere som et individ i et slikt samfunn (Kunnskapsdepartementet, 2013).

Det blir spesifikt påpekt at opplæringa skal veksle mellom utforskende, lekende, kreative og problemløsende aktiviteter, samt ferdighetstrening. De fire første aktivitetene som nevnes er typiske eksempler på aktivitet som ofte vil sees på som problemfylt. Derimot er den sistnevnte, ferdighetstreningen, under kritikk for å ta for stor plass i lærebøker gjennom starten av denne oppgaven. Resultatene mine vil bidra til å se utvalget av lærebøker i et helhetlig bilde og diskusjonen vil vurdere i hvilken grad problemfylt aktivitet og ferdighetstrening er representert.

Videre bygger læreplanen på de fem grunnleggende ferdighetene i skolen, *muntlige ferdigheter, å kunne skrive, å kunne lese, å kunne regne og digitale ferdigheter*. Ordet problem er nevnt i alle fem ferdighetene, bortsett fra i kategorien *å kunne lese*. Det faktum at problemer er nevnt spesifikt så mange ganger er i utgangspunktet bra, og i tillegg inneholder beskrivelsene en rekke ord som jeg assosierer med problemfylt aktivitet. Argumentere, drøfte, presentere, utvikle, systematisere, analysere, vurdere, utforske, simulere, og modellere er noen av ordene som så fint setter et problemfylt preg på de fem grunnleggende ferdighetene. I kategorien *å kunne lese* uttrykker de et stort fokus på at lesing innebærer å forstå sammensatte tekster med forskjellig matematisk innhold som uttrykk, grafer, diagram, tabeller, symbol, formler og logiske resonnement. Det er sterkt fokus på at teksten skal gi mening, noe som er verdsettes i et konstruktivistisk læringssyn.

Med det vil jeg påstå at læreplanen i matematikk har godt fokus på problemfylt aktivitet. En god læreplan hjelper dog ikke elevene direkte på noen måte. Elevene er mer avhengig av andre forhold, som lærebøker, undervisning og vurdering.

I figur 2-4 framstiller jeg et flytskjema over hvordan en problemfylt læreplan og en problemfri vurdering (ref. kapittel 1) påvirker lærebøker og undervisning. Min oppgave er å finne ut om lærebøkene reflekterer læreplanen på et problemfylt vis. Hvis de ikke gjør det vil den lyse fargen til høyre i flytskjemaet skyves enda mer over til venstre og det blir helt tydelig hvorfor undervisning har en tendens til å bli veldig prosedyrisk.



Figur 2-4: Flytskjema over hvordan den problemfylte læreplanen og den problemfrie vurderingen påvirker undervisningen

2.4 Tidligere forskning

Lærebøker har lenge vært et aktuelt felt for internasjonal forskning grunnet deres betydning for undervisning og læring. Fan, Zhu & Miao (2013) legger til at lærere i matematikk er mer avhengige av lærebøker enn lærere i andre fag. Spesielt har forskning på matematiske lærebøker fått mer oppmerksomhet de siste tiårene, med fokus på å utvikle metoder for forskning (Fan, 2013).

Fan et al. (2013) skriver at 65 % av alle studier på matematiske lærebøker har vært typiske lærebokanalyser og sammenligninger. Sammenligninger av lærebøker er her inkludert fordi man ikke kan sammenlikne bøker uten å analysere dem først. Resten av studiene har hovedsakelig fokus på hvordan lærebøker blir brukt og hvordan de påvirker undervisning og læring. Lærebokanalyser og sammenligninger inkluderer primært (1) analyser av en lærebok eller en lærebokserie, med fokus på hvordan spesifikke emner blir implementert og (2) analyser av forskjellige lærebokserier (ofte over landegrenser), med formål å sammenligne dem til slutt (Fan et al., 2013). Som en underkategori av lærebokanalyser lister de kognisjon og pedagogikk, hvor oppgaver og problemløsning var det mest populære emnet for forskning. Dette emnet skiller seg ut fordi det ikke er et spesifikt matematisk emne, som for eksempel geometri eller algebra, men likevel inngår i alle emnene. Mange av studiene hvor problemløsning inngikk, involverte også sammenligning av lærebøker (Fan et al., 2013).

Mayer, Sims & Tajika (1995) undersøkte hvordan matematiske lærebøker i Japan og USA framstiller problemløsning. De fant at Japanske bøker og klasserom hadde en tendens til å understreke meningen med problemer og selve løsningsprosessen i mye større grad enn de amerikanske. Zhu og Fan (2006) sammenlignet lærebøker i Kina og USA på 7. og 8. trinn, og kategoriserte forskjellige typer oppgaver. Derunder svarte de på om oppgavene var rutineoppgaver, åpne oppgaver, tradisjonelle oppgaver, og om de var relevante til den virkelige verden. De fant at oppgavene i de Kinesiske bøkene generelt var mer utfordrende.

Den største sammenligningen av lærebøker er gjennomført som en del av TIMSS-studien, som startet på 90-tallet. Over 40 land deltok i undersøkelsen, deriblant Norge og siden 1995 har undersøkelsen blitt gjort hvert fjerde år på fjerde og åttende trinn (Fan, Zhu, & Miao, 2013). Fra år 2015 har rammeverket *TIMSS Mathematics – eight grade* vært organisert etter to dimensjoner (Grønmo, 2013), der den kognitive dimensjonen er interessant for min studie. Dette rammeverket forteller hvilke tankeprosesser som er ønskelige å fremme gjennom oppgavene i lærebøker. TIMSS opererer med de tre domenene; knowing, applying og reasoning, som alle tre er viktige domener å inneha kompetanse i. Huntley og Terrell (2014) brukte dette rammeverket i sine studier som vektla lineære ligninger, og kom fram til at det var store forskjeller i mengden oppgaver i bøkene, men at oppgavene alltid krevde mest *knowing* og *applying* av elevene. *Applying* var oftest mest representert, og var størst i 11 av 15 kilder. Lærebøkene krevde lite og ingenting *reasoning.*

Stein & Smith (1998) har gjennom flere år utviklet et rammeverk som også er ment direkte rettet mot oppgaver i matematiske lærebøker. Dette rammeverket kaller de for *The Mathematical Task Framework*, og har blitt brukt av flere i forskning på lærebøker. Rammeverket deler oppgaver inn i to hovedgrupper, en gruppe som krever lave kognitive ferdigheter, og en som krever høye kognitive ferdigheter. Videre deles disse igjen inn i *memorization, procedures without connection, procedures with connection og doing mathematics*. Disse kan relateres ganske tett til rammeverket fra TIMSS (Johnsen & Storaas, 2015). En studie fra Sverige viste en stor overvekt av oppgaver med lave kognitive krav (Brändström, 2005). Det samme viser en studie fra USA (Jones & Tarr, 2007), mens en studie fra Tyrkia skiller seg ut ved å ha større andel oppgaver med høye kognitive krav (Ubuz, Erbas, Cetinkaya, & Özgeldi, 2010).

Charalambous, Delaney, Hsu, & Mesa (2010) brukte også dette rammeverket i sin studie på lærebøker fra Kypros, Irland og Taiwan. I tillegg utviklet de et større rammeverk rundt *The Mathematical Task Framework.* Dette vil jeg bygge videre på senere i oppgaven. Charalambous et al. (2010) fant en overvekt av lave nivåkrav i lærebøkene fra Kypros og Irland, og en overvekt av høye nivåkrav i lærebøkene fra Taiwan.

I Norge er det en rekke masteroppgaver som har brukt rammeverket The Mathematical Task Framework. Johnsen & Storaas (2015) fant et stort flertall av lave kognitive krav, og spesielt var *prosedyrer uten sammenheng* sterkt representert med gjennomsnittlig 82 % i Faktor-serien (1, 2 og 3 for ungdomstrinnet), mens den svenske/finske serien Pi (7, 8, 9 og Statistikk) i gjennomsnitt hadde rundt 70 % i samme kategori. Jopperud (2015) fant rundt 90 % *prosedyrer uten sammenheng* i Grunntall 8, og 86 % *prosedyrer uten sammenheng* i Faktor 8 under temaet algebra. Hun rapporterer for øvrig at Faktor 8, i forhold til Faktor 1, 2 og 3, inneholder oppgaver under den øverste kategorien.

All forskningen viser til en todelt trend. Lærebøkene i de vestlige landene har en tendens til å ha stor overvekt av lave kognitive ferdigheter, og aller størst er *prosedyrer uten sammenheng* og *applying* som opptar størsteparten av alle bøkene. I østlige land derimot, spesielt i Asia, viser det seg at oppgavene er mer utfordrende og studier viser overvekt av høye kognitive krav.

2.5 Oppbygging av et rammeverk

Selve rammene i mitt rammeverk velger jeg å hente fra (Charalambous et al., 2010). Analysen vil dermed bestå av en horisontal og en vertikal del. Den horisontale delen vil se på det overfladiske og strukturelle ved lærebøkene, mens den vertikale delen vil gå i dybden og se på hva de virkelig legger til rette for.

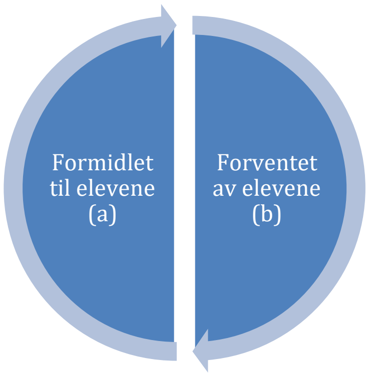
2.5.1 Horisontal oversikt

Gitt min problemstilling er det nødvendig med en oversikt over hvordan innholdet i lærebøkene er bygd opp. Dette fordi jeg må ha godt sammenligningsgrunnlag når jeg er ferdig å analysere. Dermed vil min horisontale oversikt inneholde sidetall, oppgaver, struktur, kapittelinndeling, navn på lærebøkene og forfattere.

I tillegg må jeg se på inndelingen som lærebøkene gjør, hver for seg, og selv sette grenser mellom tema som senere kan sammenlignes. Dette fordi lærebøkene sannsynligvis ikke har nøyaktig samme inndeling av kapitler og temaer. Videre valg angående inndeling av tema vil bli presentert i sin helhet i metodekapittelet. Hovedmålet i den horisontale analysen vil være å belyse strukturelle egenskaper ved bøkene, samt å skaffe en oversikt over oppbygging, med tanke på oppgaver, sider, osv. Dette vil legge et grunnlag for den vertikale analysen. Den vil også ta forbehold om uventede funn som kan bidra til å belyse problemstillingen min fra flere sider.

2.5.2 Vertikal dybde

Den vertikale delen av rammeverket skal stå for hovedanalysen som senere beskrives detaljert i metodedelen og blir presentert under resultater. Denne delen må utformes og kobles til problemfylt aktivitet. Jeg vil starte med å påpeke et mønster som går igjen under arbeid med lærebøker som læringskilde. Elevene vil først lese mål, forklaringer, eksempler og oppgavetekst og får dermed verdifull input som vil kunne bidra til å stimulere et intellektuelt behov via nøye gjennomtenkte og problematiske situasjoner. Videre vil oppgavene kreve handlinger fra elevene, som dermed må bruke de ideene som er presentert, implementere nye fakta og løse oppgaver. Deretter starter syklusen på nytt med mer lesing før nye oppgaver skal gjøres. Det er dermed to tydelige aspekter ved læring via lærebøker som er essensielle for analyse, nemlig (a) hva de formidler til elevene, og (b) hva de forventer tilbake gjennom oppgavene (Charalambous et al., 2010). Dette vises i figur 2.5. Min vertikale analyse deles derfor mellom punktene a og b. Fullers fire punkter vil kobles opp imot disse.



Figur 2-5: Syklusen som elevene går igjennom når de lærer ved hjelp av lærebøker

2.5.2.1 Formidlet til elevene

Punkt 1 av Fuller et al. (2011) sier at man må jobbe mot klare mål, både langsiktige mål og aktivitetsmål. Uten det er det sannsynlig at aktiviteten blir problemfri, ifølge Fuller et al. (2011). Dermed blir kategori 1 under *formidlet til elevene* altså *langsiktig mål*. I lærebøkene vil jeg derfor spesifikt se etter klare og definerte, langsiktige mål, og videre vurdere om hver enkelt oppgave vil bidra til å nå målene.

Videre skal hver oppgave ha et mål i seg selv, et *aktivitetsmål*. Dette målet bør være enten (a) å forstå noe nytt eller (b) å øve på noe som ikke er nytt. Å forstå noe nytt kan knyttes til å se sammenhenger, og da er det tre sammenhenger som gjør seg gjeldende (Charalambous et al., 2010). Underkategoriene til aktivitetsmål blir dermed *sammenhenger innenfor tema (SIT), sammenhenger utenfor tema (SUT)* og *sammenhenger til situasjoner utenfor skolen (SUS).* SIT vil være oppgaver som er relatert til teori innad i tema. En slik sammenheng er vanlig og til og med forventet. SUT derimot vil koble oppgaven opp imot andre aspekter ved matematikk, for eksempel andre tema eller overordnede matematiske ideer som ikke spesifikt er tatt opp teoretisk i forkant av oppgaven. Dette kan ofte føre til ny lærdom og relasjonell forståelse på tvers av tema. SUS viser til reelle situasjoner, for eksempel fra dagliglivet, hvor elevene må regne på noe som tilsynelatende har skjedd med for eksempel Per, Siri eller Mia.

Man kan som sagt forvente at de fleste oppgaver vil vise til en SIT, det vil si koble oppgaven direkte til det tema som man lærer om. Målet er at innholdet likevel bør være såpass utfordrende at elevene må bygge på kunnskapen de allerede har og strekke seg utover sin nåværende forståelse for at oppgaver skal gi mening (Schoenfeld & the Teaching for Robust Understanding

Project, 2016). Gjennom produktivt slit kan elevene lage koblinger og se sammenhenger på en ny måte. Enhver oppgave som havner utenfor denne kategorien vil virke litt malplassert, og dermed dra oppgaven mot problemfri aktivitet.

Oppgaver kan også strekke seg utover eget tema og gjøre koblinger med andre tema. Dette vil føre til SUT, og da vil oppgaven by på utfordringer utover det vanlige. Disse utfordringene går på å binde sammenhenger mellom det man jobber med og overordnede ideer eller andre tema. Slike oppgaver skal hjelpe elevene å sette matematikken inn i en større sammenheng, og er på den måten veldig viktig i søken mot å oppnå relasjonell forståelse.

SUS vil være litt annerledes enn de to forrige. Den vil enkelt og greit avgjøre om oppgaver har kontekst eller ikke. Det vil si om de handler om reelle situasjoner fra dagliglivet. Dette er viktig nettopp fordi det er i den virkelige verden at *ekte* problemer oppstår og at matematikken faktisk trengs.

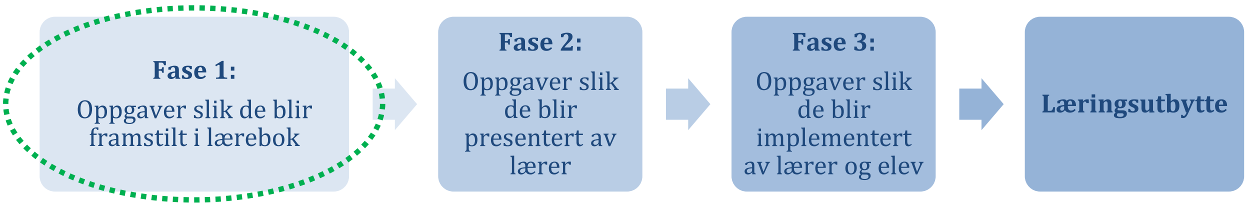
2.5.2.2 Forventet av elevene

Hiebert et al. (1997) sier at elevers oppfatning bygger på arbeidet de gjør, ikke hva lærerne formaner. Dette bygger opp om teorien om at lærebøker, med sine oppgaver, påvirker læringen til elevene i stor grad. Punkt 2 av Fuller et al. (2011) handler om at oppgavene som gjøres skal være problematiske, tydelige og fornuftige. Definisjonen av et problem fra starten av mitt teoretiske grunnlag, sier klart og tydelig at ingen kjent framgangsmåte må være kjent for eleven for at oppgaven skal være problematisk. Dette spesifiserer også punkt 4, og Fuller et al. (2011) sier at det må være intellektuelt behov for å løse oppgavene. Verken framgangsmåte eller svarformat bør være gitt og vanskeligheten på oppgaven må ikke tones ned til et slikt nivå at problemet ikke lenger blir et problem. Punkt 3, i likhet med Schoenfeld (1985), legger til at oppgaven må være såpass vanskelig at den utfordrer nåværende kunnskap i forsøk på å bygge den ytterligere opp. Samtidig sier punkt 4 at oppgavene skal ha fokus på meningen bak problemet, og ikke nødvendigvis på resultatet. Resultatet kan absolutt være en del av fokuset, men må ikke stjele oppmerksomheten fra meningen bak problemet. Når disse kriteriene møtes kan man utvikle seg og forstå nye koblinger.

Masteroppgaven er basert på et konstruktivistisk læringssyn med fokus på kognitive egenskaper. Derfor bør oppgaver stille kognitive krav til elevene slik at deres evne til å utføre intellektuelle og mentale prosesser skal utvikle seg. Av denne grunn innfører jeg rammeverket

The mathematical tasks framework som bygger på de fire nivåene av kognitive krav som jeg tidligere har nevnt; *memorization, procedures without connection, procedures with connection* og *doing mathematics* (Stein & Smith, 1998). Videre vil jeg kalle kategoriene for *hukommelse* (H), *prosedyrer uten sammenheng* (PU), *prosedyrer med sammenheng* (PM) og *matematikk* (M). Dette rammeverket vil kunne måle hva lærebøkene krever av elevene, og også om framgangsmåte er gitt eller ikke. Dermed dekker det både punkt 2, 3 og punkt 4 av Fuller et al. (2011), samt Schoenfelds (1993) definisjon av et problem.

Rammeverket ble i utgangspunktet utviklet for å kunne forbedre matematikkundervisningen under et prosjekt som kalles QUASAR (Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning) (Smith & Stein, 1998). De vektlegger rollen til en matematisk oppgave som læremiddel for elever og påpeker at oppgavene bør gjennomgå tre faser før den gir maksimalt læringsutbytte. Den første fasen er hvordan oppgaven er presentert i læreboka. Denne fasen er merket med en grønn stiplet linje i figur 2-6. Min analyse vil basere seg ene og alene på denne fasen, men jeg vil påpeke at oppgavene likevel er avhengig av de to neste fasene. Fase to omhandler hvordan oppgavene blir presentert og/eller forklart av læreren. Dette er viktig for forståelsen og rammene rundt oppgaven. Siste fase handler om hvordan elevene forstår oppgaven og arbeider med den. Denne kalles implementeringsfasen, og er spesielt viktig for elevenes læring, men likevel sterkt knyttet til de to forrige fasene (Stein & Smith, 1998). Her har lærere en gylden mulighet til å forme elevenes måter å tenke på, som igjen vil påvirke deres forståelse av oppgavene. Figur 2-6 viser hvordan de tre fasene henger sammen.



Figur 2-6: Matematikkoppgavenes tre steg i The Mathematical Tasks Framework (Stein & Smith, 1998)

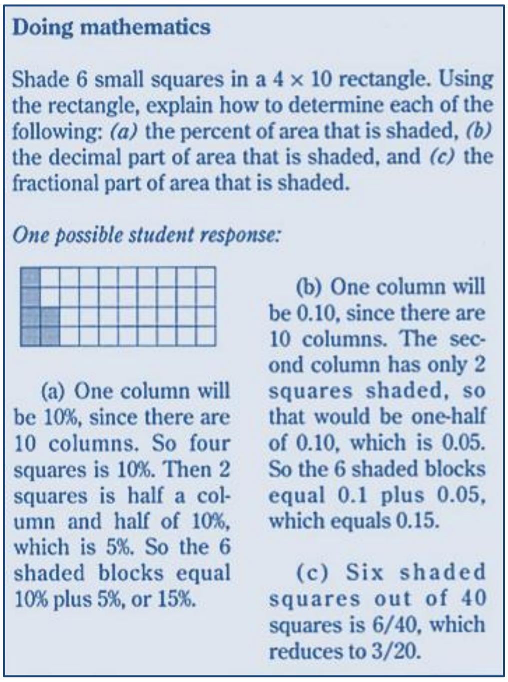
Oppgaver kommer i forskjellige former og krever ulike ferdigheter av elevene. Stein & Smith (1998) deler de kognitive kravene inn i fire kategorier, som gjenspeiler hvilket nivå av tenking som kreves for at elevene skal kunne løse oppgavene. Disse kognitive nivåene vil fortelle oss hva lærebøkene legger til rette for gjennom oppgaveteksten til hver enkelt oppgave.

Smith & Stein (1998) presenterer en analyseguide basert på dette rammeverket (se vedlegg 1). Der påpeker de at *hukommelse* er det laveste kravet til kognitive ferdigheter. På dette nivået er det kun forventet at elevene skal reprodusere fakta, formler eller sammenhenger som de har lært fra før. Oppgavene krever ingen utregning eller forståelse, bare hukommelse. Et eksempel fra Stein & Smith (1998) er en oppgave hvor elevene blir bedt om å skrive brøkene $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{4}$ som desimal og prosent. Dette er en typisk oppgave hvor elevene bør huske svaret og ingen prosedyrer er nødvendige.

Oppgaver som tilhører neste nivåkrav, *prosedyrer uten sammenheng*, er begrenset på den måten at de ikke har sammenheng med konsepter eller ideer som ligger til grunn for prosedyren som blir brukt. Prosedyren, eller framgangsmåten, er også gitt ut ifra oppgaveteksten, erfaring eller tidligere forklaringer eller eksempler i boka. Disse oppgavene krever likevel matematiske regneoperasjoner, så derfor er de et hakk over hukommelse. Slike oppgaver er typiske øvelser hvor målet er å lære seg prosedyrer og få rett svar kjapt, uten regnefeil. Et eksempel på en slik oppgave vil være å gjøre om brøken $\frac{3}{8}$ til desimaltall og brøk, ved å dele teller på nevner for å få desimaltall, og flytte komma to plasser til høyre for å finne prosenten (Stein & Smith, 1998). Begge de to første kategoriene vil bidra til instrumentell forståelse, da dypere matematisk forståelse også uteblir fra denne kategorien.

Kategorien *prosedyrer med sammenheng* vil på samme måte som forrige kategori i noen grad være bundet til prosedyrer og gitte framgangsmåter. De er ikke hugget i stein, men heller breie retningslinjer man kan følge. Det som er interessant her er at oppgavene byr på forståelse av ideer bak regneoperasjonene og gir dermed en sammenheng til matematiske konsept. Dette er et stort steg videre i hierarkiet over kognitive krav, og matematisk forståelse er for første gang i fokus. Slike typer oppgaver vil dermed komme under høyere kognitive krav sammen med det den siste kategorien. Eksempelvis kan man oppgradere oppgaven fra prosedyrer uten sammenheng ved å legge til at man skal koble brøken, desimaltallet og prosenten til et rutenett på 10x10 ruter (Stein & Smith, 1998). Dette stimulerer de kognitive egenskapene til elevene, hvor de må se sammenhenger og bruke det for å forklare og vise svaret sitt. Forhåpentligvis bidrar dette til konseptuell forståelse utover det elevene hadde fra før. Oppgavene er dermed begrenset i form av framgangsmåte og prosedyre, men legger likevel til rette for nye aha-moment. Dette vil ikke være typiske problemløsningsoppgaver, men vil likevel tilføre oppgavene et problemfylt preg.

Den siste kategorien, som jeg kaller for *matematikk*, inneholder oppgaver hvor framgangsmåte ikke er gitt eller kjent for elevene. Dermed blir de typiske problemer hvor elevene må bruke kompleks tenking utenfor boksen, som også Schoenfeld har som et kriterium for problemer. Elevene må selv undersøke prosesser, konsepter og forhold og gjennom det forstå prinsippene bak oppgaven. Oppgavene vil optimalt sett utfordre elevenes kjente kunnskap og bidra til økte kognitive evner. På grunn av vanskelighetsgraden ved slike oppgaver vil elevene måtte anstrenge seg og oppleve å slite i DNRs og TRU maths forstand. Hvis oppgavene blir for vanskelig blir dette ikke produktivt og da blir aktiviteten per definisjon problemfri ifølge Fuller et al. (2011). Dermed må læreren være aktiv ved å tilby hjelp på en slik måte at elevene kan finne ut av svaret på egen hånd (fortsatt uten algoritmisk tankegang/framgangsmåte). Her balanseres det på en fin linje mellom problemfylt og problemfri aktivitet. Det er derfor nødvendig at læreren er oppmerksom og kjenner elevene sine godt. På den måten vil jobbing med slike oppgaver gi elevene tilpasset opplæring hvor alle vil bli satt på prøve, noen med mer hjelp enn andre. Figur 2-7 viser et eksempel på en oppgave hvor nivå fire av kognitive krav vil være tydelig representert.


Doing mathematics

Shade 6 small squares in a 4 × 10 rectangle. Using the rectangle, explain how to determine each of the following: *(a)* the percent of area that is shaded, *(b)* the decimal part of area that is shaded, and *(c)* the fractional part of area that is shaded.

One possible student response:

(a) One column will be 10%, since there are 10 columns. So four squares is 10%. Then 2 squares is half a column and half of 10%, which is 5%. So the 6 shaded blocks equal 10% plus 5%, or 15%.

(b) One column will be 0.10, since there are 10 columns. The second column has only 2 squares shaded, so that would be one-half of 0.10, which is 0.05. So the 6 shaded blocks equal 0.1 plus 0.05, which equals 0.15.

(c) Six shaded squares out of 40 squares is 6/40, which reduces to 3/20.

Figur 2-7: Et eksempel på en oppgave som vil kategoriseres som doing mathematics ifølge Stein & Smith (1998, s 269)

Bare den siste kategorien vil kunne være helt typiske problemer ifølge definisjonen. Likevel tilfører *prosedyrer med sammenheng* noe ekstra i form av kognitive krav og relasjonell forståelse. Det er likevel ikke sagt at alle oppgaver bør være slik. Dette kommer helt an på hva målet med oppgaven skal være. Visse ting vil være nødvendig å «pugge» i matematikken. Dette for at matematikken skal kunne gjøres effektivt nok når man kommer på et høyere nivå som krever større kognitive ferdigheter. Elevene er avhengige av en kombinasjon mellom lave og høye kognitive krav for å kunne utvikle sin fullstendige matematiske kompetanse til et ønsket nivå.

2.6 Konseptuelt rammeverk

Som en oppsummering på kapittel 2.6 framstår figur 2-8 som mitt totale rammeverk. Dette er en syntese av teorier, spesifikt satt sammen for å passe mitt formål. Problemfylt aktivitet ble definert, drøftet og spesifisert tidlig i kapittel 2, samtidig som jeg belyste de konstruktivistiske trekkene ved slike tanker. Deretter introduserte jeg DNR og begrepet intellektuelt behov. Dette resulterte i fire veiledende punkter for problemfylt undervisning, som via intellektuelt behov skal bidra til at undervisningen blir problemfylt. Videre påpekte jeg en syklus i arbeid med lærebøker som rammeverket ikke kan se bort fra. Dette, satt sammen med ideen om horisontal og vertikal analyse, resulterte i et konseptuelt rammeverk *(conceptual framework)* (Lester, 2005), da de forskjellige delene er plukket ut ettersom jeg ser nytten i dem, i tilknytning til min problemstilling.s

Horisontal analyse

Bakgrunnsinformasjon:	Struktur:
- Tittel - Forfattere - Utgiver - Årstall	- Kapittelinndeling - Temainndeling - Antall sider - Antall oppgaver

Vertikal analyse

Formidlet til elevene:	Forventet av elevene:
- ***Langsiktig mål*** - ***Aktivitetsmål*** Sammenheng innenfor tema Sammenheng utenfor tema Sammenheng utenfor skolen	- ***Kognitive krav*** Hukommelse Prosedyre uten sammenheng Prosedyre med sammenheng Matematikk

Figur 2-8: Totalt rammeverk for analyse av lærebøker

En problemfylt oppgave vil måtte ha høye kognitive krav, altså PM og M, samt langsiktig mål, LM, og minst et av de tre aktivitetsmålene. Denne trioen er viktig, nettopp fordi en kognitivt krevende oppgave som mangler mål og mening ikke vil klare å gi elevene tilfredsstillende intellektuelt behov. Mangel på intellektuelt behov kan føre til at oppgaven føles unødvendig, og elevene mister interessen. Slik aktivitet anser Fuller et al. (2011) som problemfri. På samme måte vil en oppgave *med* intellektuelt behov, men *uten* kognitive utfordringer, aldri være problemfylt. Akkurat dette er det som til slutt vil avgjøre i hvilken grad lærebøkene legger til rette for problemfylt aktivitet. Kapittel 5.3 er dedikert til dette temaet og vil gi en større utredning, samt diskusjon av resultatene.

Dette rammeverket vil være bakgrunnen for min kvantitative analyse av oppgavene i bøkene. Gjennom bruken av rammeverket vil jeg hele tiden måtte vurdere foreliggende tekst, teori, eksempler og figurer. Likevel får jeg ikke framstilt hvordan bøkene formidler denne teorien til elevene gjennom rammeverket. Derfor vil jeg i tillegg til den kvantitative analysen gjøre en kvalitativ analyse av teoriformidlingen i bøkene. Dette vil bli en tilleggsanalyse som skal ha som hensikt å peke på en del aspekter ved bøkene som ikke kommer fram gjennom rammeverket. Dette kommer tydeligere fram i kapittel 3.6 som vil forklare mer i detalj hvordan det blir gjennomført. Resultatene fra tilleggsundersøkelsen vil bli presentert i kapittel 4.3, og vil bidra til å gi et mer helhetlig bilde og forståelse av hvordan bøkene som helhet formidler problemfylt aktivitet til elevene.

3 Metode

I denne seksjonen skal jeg beskrive og begrunne mine metodiske valg, basert på undersøkelsens teoretiske grunnlag. Jeg vil også beskrive i detalj hvordan jeg har operasjonalisert rammeverket og gått fram for å gjøre tilleggsanalysen. Mot slutten av kapittelet vil jeg diskutere oppgavens validitet og reliabilitet, samt hvilke etiske retningslinjer som oppgaven må forholde seg til.

3.1 Teoretisk perspektiv og forskningsdesign

Metodedelen vil belyse et pragmatisk kunnskapssyn hvor kunnskap sees på som noe instrumentelt. Dette i forstand av at kunnskap man har fungerer som verktøy, og vurderes i dens nytte i spesifikke situasjoner (Bryant, 2009 i Teppo, 2015). Hookway (2008) presiserer at egenskapen til å tenke, og derifra utbedre sin forståelse, bygger på samme måte som i konstruktivismen på erfariger man har med seg fra før. Dermed kan jeg også fungere som en aktiv deltaker i forskningen, i stedet for et senter for innsamlet data (Teppo, 2015).

Utviklingen av metodeteori har kommet såpass langt at det ikke lengre er veldig aktuelt om en studie er kvalitativ eller kvantitativ (Creswell, 2014). Forskningen vil nemlig ofte ha flytende overganger. Derfor kan man med et pragmatisk syn benytte utvalg, metoder og framgangsmåter der man ser muligheter og nytte. Dette vil ofte føre til bruk av Mixed Methods, hvor man kan anvende det som passer best til hver situasjon. Grønmo (1996) påstår at det alltid vil eksistere et punkt som representerer et metodevalg i alle problemstillinger, og at det som regel finnes et annet punkt som representerer et annet metodevalg. Å velge bare én forskningsmetode kan dermed gi alt for smale svar på visse fagfelt (Creswell, 2014). Min oppgave er intet unntak, og vil på flere måter vise seg å være innenfor dette feltet.

Mixed Methods vil ifølge Creswell & Plano Clark (2011) bestå av komplekse forskningsdesign. Alle vil havne mellom ytterpunktene fixed mixed methods design og emerged mixed methods design, hvor fixed betyr at designet var helt planlagt på forhånd av oppgaven, og emerged betyr at designed oppsto underveis i undersøkelsen. Min oppgave med pragmatisk kunnskapssyn og holdninger vil kanskje være tyngst representert på den sistnevnte siden hvor designet oppsto ettersom behovet gjorde seg gjeldende. Likevel er hoveddelen av oppgaven basert på et teorigrunnlag som fastsatte et rammeverk før jeg startet med analysene. Dermed er denne oppgaven et godt eksempel på en undersøkelse som er vanskelig å plassere på et spesielt og avgrenset metodeområde.

Ofte vil hensikten med mixed method design være triangulering. Det vil si at én metode blir brukt med den hensikt å bekrefte og understøtte den andre (Eliasson, 2006). Med et slikt design vil de to metodene supplere hverandre på en fin måte, noe som bidrar til god validitet i oppgaven (Grønmo, 1996). Jeg så under hovedanalysen at det var rom mellom mine teoretiske kategorier, typiske gråsoner, hvor en del oppgaver kunne gli inn. Disse oppgavene var en utfordring gjennom undersøkelsen, men med klare og stramme retningslinjer ble fordelingen rettferdig til slutt. Likevel er det hensiktsmessig å kunne formidle spennet og prosessen slik at undersøkelsen framstår som transparent og lett gjenkjennelig. I tillegg gjorde jeg kvalitative oppdagelser underveis, som kunne bidra til å forstå de store forskjellene i bøkene. Derfor trengte jeg å fange opp og presentere denne informasjonen på en måte som kunne bidra til økt forståelse for undersøkelsen. Jeg endte dermed opp med to separate undersøkelser; (1) den kvantitative analysen som baserte seg på rammeverket fra kapittel 2.7 og (2) den kvalitative tilleggsanalysen som skulle kunne forklare, illustrere og vise hvordan bøkene framstiller problemfylt aktivitet på en helhetlig måte. Den siste vil ikke ta feste i rammeverket, men heller være fri til å ta tak i det som virker hensiktsmessig.

Mitt grunnlag for valg av emerged mixed methods design var dermed det Greene, Caracelli & Graham (1989) kaller for complementarity. Videre utviklet Bryman (2006) en utvidet oversikt over grunner til å kombinere kvalitative og kvantitative metoder. Av totalt 16 grunner så er det tre som gjør seg spesielt gjeldende i min oppgave. Alle ville originalt inngått i complementarity, men disse er mer spesifikke og egner seg dermed godt for å forklare formålet med en slik mixing. De tre grunnene er forklart under i den sammenhengen som de er brukt i min studie:

1) Explanation: kvalitative funn forklarer kvantitative funn
2) Illustration: kvalitative funn illustrerer kvantitative funn
3) Context: kvalitative funn gir kontekstuell forståelse, eksempelvis av brede relasjoner mellom variabler som ikke kommer tydelig fram i kvantitative funn

Creswell & Plano Clark (2011) opererer med fire grunnleggende prinsipper som vil avgjøre hvilken type mixed method som blir brukt. Disse fire baserer seg på om de to analysene er avhengige av hverandre, om de starter samtidig, når mixingen skjer og hva som er hovedfokus i oppgaven. Jeg endte opp med et uavhengig, sekvensielt mixed method design med mixing under datainnsamling og hovedfokus på den kvantitative analysen. Uavhengig, betyr at de to analysene er gjort separate og sammenlignes til slutt. Sekvensiell, betyr at den kvalitative analysen startet etter den kvantitative delen og at den kvalitative delen startet etter hvert. Mixing under datainnsamling, betyr at utvalget til den kvalitative analysen ble valgt etter nytte. At fokuset er på den kvantitative analysen taler for seg selv.

Analysene jeg har gjennomført har vært av lærebøker, og dermed blir de mer spesifikt lærebokanalyser. Dette er systematiske gjennomganger av lærebøker, med hensikt å finne ut hvordan de gir elevene mulighet til å bygge relasjonell forståelse via problemfylt aktivitet. Mitt formål er ikke i hovedsak å sammenligne lærebøker, men dette er en fin måte å framstille data på. Derfor vil man også kunne se på studien min som en komparativ studie, basert på flere lærebokanalyser.

3.2 Metodevalg

Min kvantitative analyse er som nevnt delt inn i en horisontal og en vertikal del, og det vil være store forskjeller på disse to når det kommer til angrepsvinkel. Den horisontale analysen er inspirert av ytterpunktet Grounded Theory, som stammer fra Glaser & Strauss' bok *The discovery of Grounded Theory* (1967). Grounded Theory starter med datamaterialet som er under konstant sammenligning og fortsetter med åpensinnet koding hvor spesielle kategorier oppstår. Det hele ender med teorier og nye ideer. Målet er å finne kategorier som kan beskrive utvalget på en generaliserende måte hvor relasjoner er viktige å få fram. Ved å anvende denne vinklingen fikk jeg en induktiv innholdsanalyse, hvor jeg ikke hadde noe spesielt utgangspunkt før jeg startet, men bygde rammene underveis i analysen.

I motsetning til den induktive innholdsanalysen gjorde jeg i den vertikale analysen en deduktiv innholdsanalyse. Dette ble en systematisk gjennomgang av utvalget, der oppgavene ble kategorisert på bakgrunn av rammeverket som var klart på forhånd. Siden kategoriene var forhåndsbestemt argumenterer Creswell (2014) for at metoden ble deduktiv. Etter definerte rammer ville jeg finne sammenhenger i lærebøkene, i motsetning til den horisontale analysen hvor løse tråder ble satt i sammenheng. Analysen av oppgaver startet med å vurdere innholdet kvalitativt, og deretter bruke rammeverket til å systematisk kvantifisere datamaterialet. Dette støtter opp om tanken at metodene flyter over i hverandre og at det blir vanskelig å sette et skille mellom dem. Likevel vil dataen som presenteres fra den vertikale analysen utelukkende være kvantitativ, noe som gjenspeiler hovedfokuset i denne oppgaven.

Den rent kvalitative tilleggsanalysen av teoriformidlingen til bøkene ble en blanding av induktiv og deduktiv. Dette fordi analyseprosessen ikke fulgte faste retningslinjer. Jeg tok tak i de elementene som illustrerte forskjellene i bøkene, sammenlignet på tvers, og endte opp med funn fra flere elementer av teoriformidlingen som bidro til å se bøkene i et annerledes lys enn den kvantitative analysen. Noen elementer hadde jeg ingen teori om på forhånd, mens andre elementer hadde jeg teorier om. Denne analysen blir nærmere forklart i kapittel 3.6.

3.3 Utvalg

I Norge finnes det i dag tre store forlag som konkurrerer på de fleste plan, også på lærebøker. Disse tre er de eneste som har skrevet helt nye lærebøker etter Kunnskapsløftets reviderte plan trådde i kraft 2013 (flere andre bøker har for øvrig blitt revidert). Dermed var det naturlig å velge disse tre bøkene som mitt utvalg. I tillegg har jeg gjennom mailavvekslinger med alle tre forlagene fått bekreftet at disse tre er de mest brukte læreverkene i ungdomsskolen. Alle tre bøkene lover at læreverkene de er en del av dekker alle målene i Kunnskapsløftets reviderte læreplan (Hjardar & Pedersen, 2014; Hole, Jensen, Tellefsen, & Wallace, 2014; Tofteberg et al., 2013).

Tabell 3-1: Oversikt over utvalgte bøker

Lærebok	Forfattere	Utgiver	Årstall
Maximum 8	Tofteberg et al.	Gyldendal	2014
Faktor 8	Hjardar & Pedersen	Cappelen Damm	2014
Nummer 8	Hole et al.	Aschehoug	2013

3.4 Horisontal analyse

Ut fra rammeverket i figur 2-8 hadde jeg to utgangspunkt for den horisontale analysen. Det ene var å finne bakgrunnsinformasjon og det andre var å struktur. Hensikten med bakgrunnsinformasjon var å presentere utvalget, og var strengt tatt ingen stor analyse. Hensikten med strukturen, derimot var litt annerledes. Jeg visste at jeg ville presentere noen horisontale, strukturelle funn i kapittel 4, men jeg måtte først finne en måte å dele opp bøkene på. Alle bøkene er delt inn i kapitler, men bøkene opererer med ulike kapittelinndelinger. Dermed trengte jeg noen standarder som kunne tillate meg å sammenligne de ulike temaene i bøkene opp imot hverandre.

Jeg tok utgangspunkt i Kunnskapsløftets oppdeling i hovedområder på ungdomstrinnet. Disse fem er (1) tall & algebra, (2) geometri, (3) måling, (4) statistikk, sannsynlighet & kombinatorikk og (5) funksjoner. Denne inndelingen ville gitt en veldig ujevn fordeling av oppgaver når vi ser bare på 8. trinn, og forlagene har også valgt å dele temaene inn litt annerledes. Jeg la eksempelvis merke til at hovedområde 1; tall & algebra, ville inneholde 3 av 5 kapitler i Maximum, 4 av 7 kapitler i Faktor og 3 av 5 i Nummer. Dermed gikk jeg fram på en induktiv måte hvor målet var å finne tema som kunne representere utvalget og skape et godt sammenligningsgrunnlag. Dette gjennom konstant vurdering opp imot oppdelingen i Kunnskapsløftet. Jeg endte opp med 6 tema som presenteres i kapittel 4.1. De fleste resultatene i den vertikale analysen baserer seg på denne temainndelingen.

Med temainndeling på plass startet jeg arbeidet med generell struktur, det vil si sider og oppgaver. Disse delte jeg også inn i de samme 6 temaene som starten av den horisontale analysen resulterte i. Underveis var jeg åpen for oppdagelser som kunne bidra til å belyse problemstillingen min. Jeg fant det blant annet interessant å se på oppgaver som spesifikt var merket som øvingsoppgaver, utfordringer og grubleoppgaver. Jeg sorterte merkene fra de forskjellige bøkene slik at de kunne sammenlignes på tvers av bøkene. Deretter lagde jeg et system i den vertikale analysen som fanget opp disse merkede oppgavene slik at jeg fikk ut spesifikke data tilhørende bare disse. På den måten kunne jeg se om de merkede oppgavene faktisk krevde kognitive krav som blir forbundet med øvingsoppgaver, utfordringer og grubleoppgaver. På forhånd vil jeg anta at øvingsoppgavene krever lavere kognitive krav enn gjennomsnittet av oppgavene. Utfordringer bør stille betraktelig større krav, mens grubleoppgaver nesten utelukkende bør bestå av oppgaver under kategorien *matematikk*. Merkene fra bøkene, med sammenligningsgrunnlag, er presentert i tabell 4-3.

3.5 Vertikal analyse

Selv om den vertikale analysen er delt inn i *formidlet*- og *forventet av elevene* vil jeg påpeke at hele analyseprosessen har skjedd i ett. Jeg har tatt for meg oppgave for oppgave, og i hvert tilfelle vurdert om de har et *langsiktig mål* som passer, om de har *sammenheng innenfor tema*, *utenfor tema* og *utenfor skolen* og deretter hvilke kognitive krav oppgavene stiller til elevene. Analyseenheten er altså oppgaver, men jeg har hele tiden vurdert foreliggende mål, forklaringer og eksempler for å kunne plassere dem i de kategoriene hvor de hører hjemme.

Videre vil jeg forklare den vertikale analysen todelt. Først vil jeg vise hvordan det *grunnleggende analysesystemet* fungerte. Denne delen vil bestå av tanker og ideer jeg hadde på forhånd og selve dokumentet jeg lagde før jeg kunne gjennomføre analysene. Videre vil jeg belyse selve *analyseprosessen*, som vil bestå av en analyseoppskrift, etterfulgt av to eksempler på hvordan jeg fulgte denne oppskriften.

3.5.1 Grunnleggende analysesystem

Gjennom analysen har jeg kategorisert hver eneste deloppgave for seg. I tillegg har jeg sett på hver oppgave som likeverdig, som vil si at ingen oppgaver har blitt behandlet ulikt, uavhengig av om de kommer først eller sist i en rekke med for eksempel like oppgaver. Man kunne tenke seg at etter noen oppgaver ville oppgavetypen virke kjent og dermed føre til mindre kognitive krav. En slik tenkt situasjon kunne skjedd både innad i deloppgaver og i en rekke med hele oppgaver. Men faktumet er at elevene sjeldent gjør alle oppgaver i en bok. Det skjer en utvelgelse av oppgaver, ofte basert på elevens nivå, som gjør at jeg må tenke på alle oppgavene som likeverdige, uavhengig av hvor de er plassert i forhold til hverandre.

For å kunne analysere oppgavene i den vertikale analysen måtte jeg først utvikle et system som kunne plukke opp de ulike datavariablene jeg trengte. Samtidig måtte det kunne bidra til å framstille dataen på en fornuftig måte. Jeg valgte dermed å bruke Mictrosoft Office-produktet, Excel. Utviklingen tok ganske mye tid, men jeg endte opp med en passende mal som plukket opp alle de små detaljene som jeg følte var nødvendige. Et utklipp av malen med eksempeloppgaver er presentert i figur 3-1.

Som en test til meg selv laget jeg kolonne B som sa fra om jeg kodet feil innad i oppgaver. Dette var for eksempel om jeg krysset av for to kategorier under kognitive krav, hvor bare en skal krysses av. Denne detaljen viste seg å være nyttig.

Jeg lagde ett regneark for hvert tema i hver bok og endte opp med 17 regneark. ($6 * 3 - 1 = 17$. -1 kommer av at Maximum ikke inneholdt oppgaver i temaet *måling*). Kolonne C og D inneholder informasjon om hvilken oppgave som er analysert mens kolonnene E-M inneholder variablene *langsiktig mål, sammenheng innenfor tema, sammenheng utenfor tema, sammenheng utenfor skolen, hukommelse, prosedyrer uten sammenheng, prosedyrer med sammenheng* og *matematikk*. Kolonne N var for oppgaver som ikke var mulig å analysere med mitt rammeverk. Dette var oppgaver hvor elevene selv skulle lage oppgavene selv, og oppgaver som spesifikt var tilegnet å løse på datamaskin. Ofte var disse oppgavene formulert slik at elevene skulle gjøre en oppgave som de tidligere har gjort, nå på datamaskin.

	A	B	C	D	E	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
15																		
16			Verdi:		0,19	0,21	0,23	0,27	0,0	0,3	0,6	1,0						
17					Problemfylt aktivitet								0,0					
18		Test	Oppg.		Formidlet				Forventet				U	Merke				Sum
19			#	del.	LM	SIT	SUT	SUS	H	PU	PM	M	U	1	2	3	4	
20		Sum:			183	102	26	189	83	84	26	2	4	42	3	0	0	174,11
21		Flink	1	a	1	1		1		1								0,97
22		Flink		b	1			1		1								0,97
23		Flink		c	1			1	1									0,46
24		Flink	2		1	1		1		1								0,97
25		Flink	3	a	1		1	1		1								1,20
26		Flink		b	1	1		1		1								0,97
27		Flink		c			1	1		1								0,80
28		Flink	4	a	1	1		1		1								0,97
29		Flink		b	1	1		1			1							1,27
30		Flink		c				1	1									0,27
31		Flink		d	1			1		1								0,97
32		Flink	5	a	1			1	1									0,46
33		Flink		b	1			1	1									0,46
34		Flink		c				1		1								0,78
35		Flink	6										1					Umulig
36		Flink	7	a	1	1		1		1								0,97

Figur 3-1: Utdrag fra Excel-dokument hvor jeg kategoriserte oppgavene fra utvalget.

Kolonnene O-R er markeringer for oppgaver som skilte seg ut ved å tilhøre spesielle merker, som forklart i kapittel 3.4. Eksempelvis hvis oppgave 2 hadde vært en utfordringsoppgave (merket med en *stjerne* i Faktor og en *U* i Nummer) hadde jeg skrevet 1 i celle N24. Oppgaven ville da blitt tatt med i neste steg av beregninger både i totalen og under merke 2; utfordringsoppgaver. Jeg vil presentere resultater fra de tre ulike oppgavetypene som spesifikt er merket i bøkene, i kapittel 4.2.4.

Før jeg forklarer neste steg, vil jeg spesifisere hvilke data jeg fikk ut fra det man ser på figur 3-1. Summene på rad 20 forteller oss bare hvor mange oppgaver som havner under hver kategori. Det sier ikke noe om hvordan kategoriene henger sammen. Tallene viser altså bare totale resultater for hver bok under hvert tema, under hver kategori. Jeg vet eksempelvis at 83 av 241 oppgaver kom under kategorien *hukommelse* i tema *statistikk & sannsynlighet* i Maximum. Det viser figur 3-1 i celle J20. Tallene sier derimot ingenting om hvilke av variablene LM, SIT, SUT og SUS akkurat disse oppgavene inneholder. Dette kommer fram i neste steg.

Neste steg av beregninger er basert på rad 16 (pluss celle N17) hvor jeg har gitt hver kategori en verdi. Basert på hvilke kategorier en oppgave fikk ble det regnet ut en oppgavesum som presenteres i kolonne S. Verdiene var slik at ingen forskjellige kombinasjoner av kategorier skulle kunne få samme sluttsum. Denne summen plasserte oppgavene under en av de 64 totale utfallene $(16\, formidlet * 4\, forventet)$. En oppgave kunne dermed få 64 forskjellige sluttsummer. Ved å gjøre dette fikk jeg en total oversikt over hvordan alle oppgavene lå plassert i tabellen under. Det samme systemet lagde jeg for alle de tre merkene i tillegg. På denne måten kunne jeg sammenligne alle variablene opp imot hverandre.

Tabell 3-2: Oversikt over totalfordelingen av alle oppgavene i undersøkelsen på de 64 mulige utfallene. Dette for å gi et innblikk i systemet i analysedokumentet, ikke for resultatene sin del.

	Ingen formidlet	LM	SIT	SUT	SUS	LM+SIT	LM+SUT	LM+SUS	SIT+SUT	SIT+SUS	SUT+SUS	SIT+SUT+LM	SIT+SUS+LM	SUT+SUS+LM	SIT+SUT+SUS	SIT+SUT+SUS+LM
H	58	160	22	21	42	372	4	142	0	4	3	3	79	5	0	0
PU	15	153	33	7	11	2627	14	66	3	25	10	172	663	10	2	41
PM	8	41	1	3	2	211	17	39	0	3	2	143	200	50	0	58
M	3	9	0	3	2	15	5	10	0	4	9	2	20	5	0	20

3.5.2 Analyseprosessen

Med systemet på plass kunne jeg starte arbeidet med å klassifisere hver enkelt oppgave. Denne prosessen fulgte bestemte steg som kommer fram gjennom de fem punktene under. Punktene fremstår i kronologisk rekkefølge, så man kan se på dem som en oppskrift jeg fulgte da jeg skulle analysere oppgavene. Dette, inspirert av metodebeskrivelsene til Bergqvist (2007). Å ha en slik oppskrift klart foran seg vil gjøre det lettere å behandle hver enkelt oppgave likt. Jeg fant det også helt nødvendig å holde seg til oppskriften for å kunne utføre analysene på en effektiv og nøyaktig måte. Oppskriften gjorde det også lettere å bestemme seg i tvilstilfeller, ved at jeg lettere kunne slå fast kategorier og gå videre, basert på beskrivelsene i oppskriften.

3.5.2.1 Oppskrift

1. Langsiktig mål (LM):
   Den horisontale analysen viste at hvert eneste kapittel i alle bøkene inneholdt langsiktige læringsmål, som kunne sammenlignes med kompetansemålene man finner i læreplanen. Hver oppgave hadde dermed et sett med tilhørende langsiktige mål, og settet kunne bestå av alt fra to til fire mål. Disse målene leste jeg nøye gjennom før jeg startet med

klassifiseringen. Mitt utgangspunkt var at alle oppgavene burde være formulert på en slik måte at å løse den ville hjelpe elevene å nå de langsiktige målene. Når jeg tok for meg en ny oppgave måtte jeg først løse oppgaven. Deretter måtte jeg se om det fantes andre nærliggende måter å løse den på. Hvis det var et langsiktig mål i seg selv å lære seg fremgangsmetoden(e) i oppgaven, så ble oppgaven kategorisert som LM. I tillegg ble den kategorisert som LM hvis man, ved å gjøre oppgaven, fikk kunnskap som ville være fordelaktig i elevenes søken mot å nå målene.

2. Sammenheng innenfor tema (SIT):

   Lærebøker har en tendens til å presentere teori, eksempler og oppgaver som henger sammen. SIT ble dermed en vurdering av hvorvidt oppgavene hadde sammenheng med eksemplene og teorien i forkant. På den måten ble det et mål på om oppgaven hørte hjemme der den sto, eller ikke. I tilfeller der bøkene brukte oppgaver til å presentere tema måtte jeg vurdere om oppgaven sto i stil med tekst og eksempler som fulgte etter. For å vurdere om oppgavene hadde SIT, ble igjen løsningen av oppgaven sentral. Vurderingen gjorde jeg ved å se tilbake på forrige (eventuelt neste, om oppgaven var starten på noe nytt i seg selv) gjennomgang av teori, inkludert eksempler, å lete etter framgangsmåten som løste oppgaven. En oppgave som på den måten passet inn med omgivelsene og hadde samme fremgangsmåte som tilhørende tekst og eksempler, fikk SIT.

   Bøkene hadde i tillegg bolker med oppgaver som kom etter teorikapitlene var slutt. Dette var supplerende oppgavesamlinger med forskjellig vanskelighetsgrad. For disse oppgavene ble premissene annerledes. For å avgjøre om de hadde SIT måtte jeg tilbake til teorikapittelet og se om jeg fant tilhørende teori og fremgangsmetode med samme oppbygning som i oppgaven. Hvis jeg kunne finne en slik "tilhørighet" ga jeg oppgaven SIT.

   Hvis oppgavene ikke hadde noen framgangsmåte i form av en prosedyre, gikk vurderingen over til å handle om hvorvidt begrepsforståelsen i oppgaven gjenspeilet det som var formidlet av teori og eksempler. Selv om oppgaven ikke hadde en prosedyre, måtte den fortsatt besvares. Om dette svaret kunne finnes i teoriformidlingen fikk oppgaven SIT.

3. Sammenheng utenfor tema (SUT):

   De fleste oppgavene handlet om det kapittelet de var en del av, men noen oppgaver hadde elementer som strakte seg utenfor eget tema. Den horisontale analysen ga god oversikt over de ulike temaene i bøkene. Når jeg skulle avgjøre om en oppgave hadde SUT hadde jeg nettopp avgjort om den hadde SIT. For å gå videre derifra vurderte jeg om man trengte noe *mer* enn bare SIT for å løse oppgaven. Da var jeg igjen tilbake til fremgangsmåten til oppgaven. Hvis en oppgave krevde **noe annet** eller **enda mer** enn det som ble formidlet gjennom tekst og eksempler innad i tema, var det et tegn på at oppgaven hadde SUT. Denne sammenhengen var til et annet tema eller til en overordnet matematisk ide som ikke var hovedfokus i teorien. Hvis en oppgave krevde **noe annet** enn SIT, fikk oppgaven ikke SIT, men SUT. Hvis enn oppgave krevde **enda mer** enn SIT, fikk oppgaven både SIT og SUT.

4. <u>Sammenhenger utenfor skolen (SUS):</u>

   Oppgavene i bøkene kan deles i to grupper, en hvor oppgavene er rene tall som skal manipuleres, og en annen hvor tallene som skal manipuleres hører til en hendelse, en person eller generelt en situasjon fra den virkelige verden. Man kan si at slike oppgaver har kontekst, og at konteksten er det aspektet i elevens verden hvor oppgavene er plassert. For å avgjøre om oppgavene hadde SUS lette jeg etter slike sitasjoner som man kunne relatere til, hendelser som kunne vært «ekte». Slike oppgaver ble dermed klassifisert som SUS.

5. <u>Kognitive krav:</u>

   Til nå har en oppgave kunnet inneholde alle de fire forrige variablene samtidig. Videre derimot, måtte jeg velge en av fire kognitive krav. Dermed måtte jeg vurdere hvorvidt oppgavene inneholdt *hukommelse, prosedyrer uten sammenheng, prosedyrer med sammenheng* **eller** *matematikk.* Gjennom denne vurderingen måtte jeg ta hensyn til tidligere teoriformidling, som Stein et al. (2000) skriver. The Mathematical Task Analysis Guide kan sees i sin helhet i vedlegg 1.

   - <u>Hukommelse (H):</u>

     Jeg startet med å vurdere H. Hvis det var forventet at elevene skulle huske svaret eller se svaret ut ifra teksten ble den kategorisert som H. Dette var oppgaver hvor det ikke skulle anvendes noen prosedyre, eller det ikke fantes noen prosedyre (Smith & Stein, 1998). Jeg lokaliserte slike oppgaver ved å se på hvordan fremgangsmåten i løsningen var. En fremgangsmåte hvor man går rett fra oppgave til svar uten noen matematiske regneoperasjoner er ingen fremgangsmåte i det hele tatt. Disse oppgavene kunne umulig havne under prosedyrer eller matematikk, og dermed ble de kategorisert som H. Hvis det derimot var en fremgangsmåte, fortsatte jeg til neste alternativ.

   - <u>Prosedyrer uten sammenheng (PU):</u>

     PU var oppgaver hvor man typisk skulle øve på prosedyrer, med fokus på å produsere rett svar framfor å utvikle matematisk forståelse. Disse prosedyrene var helt gitt ut ifra enten oppgaveteksten eller tidligere eksempler, eventuelt teori (Smith & Stein, 1998). Om fremgangsmetoden var gitt eller ikke kunne først og fremst oppgaveteksten avgjøre ved å si for eksempel *«regn ut ved skriftlige metoder»* (Tofteberg et al., 2013). Hvis ikke oppgaven spesifikt sa hvordan den skulle løses, kunne det bli helt tydelig ved at oppgaven i seg selv var helt likt formulert som et eksempel eller som teorien i forkant. Hvis oppgaven krevde en fremgangsmåte som var helt lik teorien eller eksemplene i forkant, og det ikke var noen tvil om hvordan man skulle gå fram, ble oppgaven dermed plassert på PU. Hvis ikke gikk jeg et steg videre.

- <u>Prosedyrer med sammenheng (PM):</u>

  PM var oppgaver hvor framgangsmåten i noen grad var foreslått, men at den ikke kunne følges uten å tenke seg godt om (Smith & Stein, 1998). Oppgavene lignet på SIT-oppgaver i den forstand at det fortsatt var prosedyrer man skulle jobbe med. I tillegg lignet de på M-oppgaver fordi prosedyrene var koblet til matematiske sammenhenger som skulle bidra til å øke elevenes relasjonelle forståelse. Dette betydde at prosedyren som øves på ikke var tilstrekkelig for å kunne svare på spørsmålet, men samtidig en sentral del av oppgaven. Om løsningsmetode var antydet (men ikke helt klar) gjennom oppgavetekst eller eksempler, og oppgaven krevde mer forståelse enn bare for prosedyren, så fikk oppgaven PM. Da gjensto bare ett alternativ.

- <u>Matematikk (M):</u>

  Det siste alternativet var M. Dette var oppgaver hvor fremgangsmetode ikke var gitt ut ifra sammenhengen oppgaven ble presentert innenfor. Det var typiske grubleoppgaver hvor elevene må analysere, vurdere, finne metoder og sjekke svar, og på den måten utvikle en annen type kompetanse enn de foregående kategoriene (Smith & Stein, 1998). Oppgavene var ofte gjenkjennelige ved at spørsmålene var stilt på en slik måte at det ikke var helt klart hva man skulle regne ut og hvorfor. Når man fant ut dette, og gjorde utregninger ved en prosedyre, måtte man i tillegg vurdere svaret før man kunne gi et tolkende og forklarende svar på oppgaven. Dette var ganske tydelige retningslinjer, og slike oppgaver skilte seg ofte ut. Oppgavene ble lokalisert ved at jeg selv måtte lete etter fremgangsmetode via oppgaveteksten eller fra teoriformidlingen. Hvis jeg ikke kunne finne den samme metoden brukt tidligere, var dette et tegn på at oppgaven var under kategorien M. Oppgavene var også gjenkjennelige ved at de ikke passet inn i de andre kategoriene.

Under vil jeg anvende analyseoppskriften på to oppgaver for å eksemplifisere hvordan analyseprosessen gikk for seg. Der vil jeg beskrive rent teknisk hvordan jeg gikk fram for å analysere de spesifikke oppgavene.

3.5.2.2 Eksempel 1 på anvendelse av oppskrift

Oppgave 5.16

Katten Tinka er t år gammel, og hunden Zeta er z år gammel. Lag en tekst til hvert av de algebraiske uttrykkene.

a z-3	**b** t+4	**c** z+t	**d** t+5
e z-t	**f** z-4	**g** z+t-2	**h** $\frac{z+t}{2}$

Figur 3-2: Oppgave 5.16 fra boken Maximum 8 (Tofteberg et al., 2013, s. 287)

1. Langsiktig mål (LM):
   Oppgaven kommer under tema 4, algebra & ligninger, og undertemaet er algebraiske uttrykk. På oppgave a vil svaret være *«Tre år mindre enn Zetas alder»*, oppgave b vil bli *«fire år mer enn Tinkas alder»*, osv. Et av målene for kapittelet er at elevene skal *«lære å uttrykke problemstillinger fra dagliglivet med bokstaver og tall»* (Tofteberg et al., 2013, s. 284). Tidligere oppgaver fra samme tema har gått fra tekst til uttrykk, slik det langsiktige målet tydelig formulerer, men denne oppgaven går motsatt vei. Det er likevel snakk om algebraiske uttrykk i kombinasjon med dagliglivet. Jeg vil påstå at å kunne gå motsatt vei er vel så viktig, med mål om å lære å uttrykke problemstillinger med algebraiske uttrykk. Ved å løse oppgaven fikk jeg dermed kunnskap om koblingen mellom algebraiske uttrykk og problemstillinger fra dagliglivet, noe som vil bidra til at jeg vil lære å uttrykke slike problemstillinger med bokstaver og tall, som det langsiktige målet sier. Dermed fikk alle deloppgavene kategorien LM.
2. Sammenheng innenfor tema (SIT):
   Oppgaven kommer rett etter et eksempel og en oppgave med nøyaktig samme vinkling. Man skal koble algebraiske uttrykk til tekst fra dagliglivet. Eksempelvis skal man i eksempel 5 på side 286 finne et uttrykk for (a) alderen sin om 5 år, (b) det dobbelte av

alderen sin, (c) alderen sin for 4 år siden og (g) det dobbelte av alderen sin for 2 år siden. Oppgave 5.16 vil her, i likhet med sammenlikningen mot de langsiktige målene, gå motsatt vei. Likevel er dette så nærliggende at oppgaven framstår som veldig passende, og ikke malplassert. Eksempelet lister også opp løsningsforslaget til de nevnte situasjonene fra dagliglivet; (a) $a+5$, (b) $2a$, (c) $a-4$ og (g) $2(a-2)$. Dette uten noen form for prosedyre mellom oppgave og svar. Siden det ikke er en spesiell prosedyre i oppgaven heller, gjelder det bare å se koblingen mellom uttrykk og situasjon, som både eksempler og teori har gått gjennom tidligere. Dermed kan man si at hele oppgave 5.16 har SIT.

3. Sammenheng utenfor tema (SUT):

   For å gå videre måtte jeg vurdere om oppgavene trengte noe mer enn sammenhengen innenfor tema som jeg har påvist. Oppgave a-f er forholdsvis like og krever ikke mer enn det elevene nettopp har lært. Oppgave g skiller seg litt ut med et ekstra ledd. Svaret på oppgaven må være *«to år mindre enn alderen til Tinka og Zeta til sammen»*. Her ser jeg likevel ingen kobling mot andre tema eller ideer. Oppgave h derimot skiller seg ut ved å ha en brøk i uttrykket. En brøk i seg selv er ikke kritisk, og vil ikke direkte medføre SUT. Dette fordi elevene har fått god innføring i begrepet i forbindelse med dette delkapittelet. Akkurat denne brøken representerer *«gjennomsnittsverdien mellom alderen til Tinka og Zeta»*, noe elevene kanskje husker fra forrige kapittel, statistikk. For å løse oppgaven slik den er tenkt er det derfor nødvendig å se sammenhengen utenfor temaet. Den siste deloppgaven blir dermed kategorisert som SUT.

4. Sammenheng utenfor skolen (SUS):

   Oppgave 5.16 er et eksempel på en oppgave befinner seg i grenseland mellom SUS og ikke-SUS. Den ser veldig ut som en ordinær øvingsoppgave med mange deloppgaver og oppramsede uttrykk. Når man leser teksten blir det klart at variablene t og z er knyttet til alderen til Tinka og Zeta, og dermed har oppgaven bevegd seg over til å inkludere daglige ting. Oppgaven må dermed kategoriseres som SUS, selv om inkluderingen er minimal i forhold til hva som kan aksepteres som en minimumsgrense. På den andre siden kan man tenke seg oppgaver som *ikke* inkluderer dagliglivet om samme tema. Disse kan for eksempel være: *«Skriv et uttrykk for (a) summen av x og 3, (b) differansen mellom x og 5, (c) 10 mer enn y …»,* og så videre (Faktor 8, s. 187). En slik oppgave vil likne veldig på oppgave 5.16 fra Maximum, men inneholder ingen kobling til den virkelige verden.

5. Kognitive krav:

   a) Hukommelse (H):

   Tabell 3-3: Utdrag av løsningsforslag til eksempel 5 i Maximum (Tofteberg et al., 2013, s. 286)

Alderen om 5 år	a + 5
Det dobbelte av alderen	2a
Alderen for 4 år siden	a – 4

   Det blir tydelig av løsningsforslaget at det ikke er en prosedyre å følge mellom situasjonen fra dagliglivet og det algebraiske uttrykket. Elevene må dermed gjenkjenne situasjoner og se svarene ut ifra teksten, noe som indikerer at oppgaven stiller det kognitive kravet *hukommelse.*

Totalt endte deloppgavene a – g opp med LM + SIT + SUS + H, mens deloppgave h fikk kombinasjonen LM + SIT + SUT + SUS + H.

3.5.2.3 Eksempel 2 på anvendelse av oppskrift

Oppgave 4.7

a Trill en terning fire ganger (Hvis du ikke har terninger, så bruk disse tallene: 6, 3, 1, 3). Skriv et regnestykke der dere multipliserer de to første verdiene og de to siste verdiene, og så adderer dere de to produktene. Regn ut uttrykket.

b Live gjorde denne oppgaven og fikk 5, 2, 4 og 2 på terningen. Hvilket svar fikk Live?

c Håkon sier han har fått de samme tallene som Live, men i en annen rekkefølge. Svaret til Håkon er et større tall enn svaret til Live. I hvilken rekkefølge kan Håkon ha fått tallene, og hvilket svar har han fått?

Figur 3-3: Oppgave 4.7 fra boken Nummer 8 (Hole et al., 2014, s. 259)

1. Langsiktig mål (LM):

   Denne oppgaven kommer også under tema 4, algebra & ligninger, og undertemaet her er regneregler. Oppgaven bygger på regelen om at man må multiplisere før man kan addere. Svaret på oppgave a vil bli $6 * 3 + 1 * 3 = 18 + 3 = 21$, mens svaret på b vil bli $5 * 2 + 4 * 2 = 10 + 8 = 18$. Oppgave c er litt spesiell, noe jeg skal komme tilbake til. Uansett handler den også om nøyaktig samme tema, nemlig regnerekkefølge med multiplikasjon og addisjon. De langsiktige målene sier at *«Etter dette delkapitlet skal du kunne; (a) forklare og bruke regler for hvordan vi regner hvis det er parenteser i et regneuttrykk og (b) forklare hvorfor vi bruker parenteser»* (Hole et al., 2014, s. 257). Siden parenteser verken er nevnt eller nødvendig i løsningsforslaget tolket jeg det dithen at oppgaven *ikke* kunne bidra til at elevene kunne nå disse målene. Likevel forklarer boken at «$2 + 3 * 5$ betyr $2 + (3 * 5)$» og at parantesene i dette tilfellet bare er tenkte. Det betyr at man kan sette inn tenkte parenteser i oppgave 4.7 i tillegg, men man kan like gjerne løse den med vanlig fokus på regnerekkefølge. Det hadde ikke vært uhyre vanskelig å inkludere begrepet regnerekkefølge i de langsiktige målene, og denne gangen mener jeg dermed at verken a, b eller c fortjener å bli kategorisert som LM. Dette fordi de langsiktige målene ikke var tilstrekkelige.

2. Sammenheng innenfor tema (SIT):

   Det at boken forklarer på det viset som jeg nettopp beskrev i punkt 1, og i tillegg forklarer generell regnerekkefølge rett i forkant av oppgaven betyr derimot at oppgavene kommer vel innenfor på kategorien SIT. Oppgaven rett i forkant av 4.7 handler forøvrig også om regnerekkefølge *uten* unødvendige parenteser, og hensikten med både oppgavene, eksemplene og forklaringene er å lære å multiplisere før man adderer. På den måten ble framgangsmåten lik, og dermed fikk alle deloppgavene SIT.

3. Sammenheng utenfor tema (SUT):

   Oppgave a og b krever nøyaktig hva man lærer rett i forkant og ikke noe mer. Oppgave c skiller seg som sagt mer ut. Her må elevene skjønne hva regnerekkefølgen betyr og hvilke utfall forskjellige tallplasseringer får for svaret. De grunnleggende tankene bak prosedyren og regnerekkefølge må på den måten forståes, og brukes for å maksimere utfallet med tallene som er gitt. Selv om dette er krevende vil ikke oppgaven bevege seg utenfor akkurat det temaet hvor oppgaven er presentert. Dermed vil ikke denne forholdsvis store forskjellen mellom deloppgave c og de andre få noe utslag på SUT. Det vil derimot bli en forskjell i kognitive krav, noe som jeg kommer tilbake til. Dermed fikk ingen av deloppgavene SUT, siden ingen av dem krever mer enn forståelse innad i akkurat det temaet de er en del av.

4. Sammenheng utenfor skolen (SUS):

   Gjennom oppgaven regner elevene på tall som kommer fra ekte hendelser, nemlig terningkastene til eleven selv, Live og Håkon. Dette indikerer at oppgaven har tilknytning til dagliglivet og situasjoner som er utenfor et typisk oppsatt skoleeksempel. Dermed fikk alle deloppgavene SUS. Denne oppgaven kunne lett vært laget uten SUS, og da hadde den sett slik ut:

a) $Regn\ ut\ 6 * 3 + 1 * 3.$
b) $Regn\ ut\ 5 * 2 + 4 * 2.$
c) $Hvordan\ kan\ man\ maksimere\ utfallet\ av\ (b)\ ved$ å $stokke\ om$ på $tallene$?

Ved å legge til SUS i oppgaven viser man elevene situasjoner hvor matematikken faktisk kan oppstå. Dette kan virke motiverende, da elevene får en forståelse av en reell situasjon hvor de kan anvende matematikken.

5. Kognitive krav
   - Hukommelse (H):

     Man kan ikke komme fram til svarene bare ved hjelp av hukommelsen. Det er heller ikke meningen at elevene skal se svarene ut ifra oppgaveteksten. Elevene må regne ut noe, som minst blir en prosedyre. Det fører oss ut av kategorien hukommelse.
   - Prosedyrer uten sammenheng (PU):

     Både deloppgave a og b skal løses ved prosedyrer. Uttrykkene skal settes opp og regnes ut på en slik måte som de nettopp har lært gjennom både teori og eksempler. De krever heller ingen større refleksjon rundt hvordan det gjøres og hvorfor det gjøres slik. Det fører til at deloppgave a og b ender som PU. Deloppgave c derimot har noe ekstra ved seg, som forklart under *sammenheng utenfor tema*.
   - Prosedyrer med sammenheng (PM):

     Som tidligere forklart vil deloppgave c by på noe ekstraordinært. Dette er selve tankegangen og ideen bak regnerekkefølge. De må forstå hvordan dette fungerer, og vurdere hvordan tallplasseringer i rekkefølgen vil påvirke sluttresultatet av prosedyren. Selve prosedyren er fortsatt i fokus ved at elevene må bruke den for å finne rett svar. Dermed vet elevene sånn høvelig hva de må gjøre, samtidig som de blir utfordret på et intellektuelt nivå. Oppgaven er likevel så nærliggende de to forrige og den antyder ganske enkelt en eneste endring som går an å gjøre (i og med at det er to like tall i uttrykket). Denne endringen vil føre til en maksimering av uttrykket. Dermed var oppgaven aldri aktuell for kategorien M.

Totalt endte deloppgavene a og b opp med SIT + SUS + PU, mens deloppgave c fikk kombinasjonen SIT + SUS + PM. Dette fullfører kapittel 3.5.2, som hadde som formål å forklare hvordan jeg gikk fram for å analysere oppgavene.

3.6 Kvalitativ tilleggsanalyse av formidlingen av prosentbegrepet

Til nå har jeg beskrevet den kvantitative analysen som tok for seg oppgavene i bøkene. Teoriformidlingen i bøkene har vært relevant i den forstand at den har blitt tatt hensyn til i forbindelse med kategorisering av oppgavene, men formidlingsevnen til bøkene i seg selv, har ikke vært i fokus. Derfor så jeg, i den kvalitative analysen, på hvordan bøkene generelt la til rette for problemfylt aktivitet, gjennom teoriformidlingen.

Som utvalg for den kvalitative tilleggsanalysen valgte jeg å se på *prosentbegrepet*, med påfølgende undertitler, og hvordan det blir framstilt og implementert i forklaringer, eksempler og oppgaver. Jeg valgte begrepet prosent, fordi jeg så at det ville kunne belyse store ulikheter mellom bøkene som ellers ikke kom godt nok fram i den vertikale analysen. Prosent er i tillegg et meget sentralt og mye brukt begrep i dagliglivet, og det er derfor interessant å se på hvordan bøkene formidler dette til elevene.

I kapittel 4.3 vil jeg presentere funn fra denne innholdsanalysen, som ble en blanding av deduktiv og induktiv. Der vil jeg sette ord på aspekter ved bøkene som ikke kommer fram i den kvantitative undersøkelsen. Alle forskjellige aspekter ved bøkene var relevante, fra langsiktige mål, introduksjoner og teori til eksempler, oppgaver og illustrasjoner. Alt som kunne ha en forbindelse med problemfylt aktivitet, ble vurdert kvalitativt der.

Først undersøkte jeg de langsiktige målene. Jeg sammenlignet dem mellom bøkene og opp imot kompetansemålene fra kunnskapsløftet. Metoden ble induktiv fordi jeg ville gå fra virkeligheten til å utvikle en teori (Cohen et al., 2007). Jeg så etter hva målene dekte, i forhold til innholdet i kapitlet, og jeg vurderte hvordan de var formulert. Disse målene ble også brukt i den vertikale analysen, uten at analysen gir noen som helst pekepinn på hvordan målene faktisk ser ut. Derfor er det relevant med et kvalitativt innblikk i hvordan målene faktisk utarter seg i bøkene, samt om de dekker innholdet i kapitelene.

Etter det så jeg på hvordan bøkene introduserte prosentbegrepet, samt hvordan de formidlet regning med prosent. Dette for å påpeke hvor fokuset til bøkene ligger. Videre ble overgangen mellom eksempler og oppgaver veldig relevant. Her hadde jeg en oppfatning på forhånd om at oppgavene ofte lignet på eksemplene. Denne delen av undersøkelsen ble dermed deduktiv, hvor jeg kvalitativt testet om dette var tilfelle. Oppgavenes variasjon i seg selv ble også testet. Først gjorde jeg en kvalitativ vurdering av variasjonen av oppgaver i bøkene, før jeg sammenlignet det med en kvantitativ tilnærming, med bakgrunn i kategoriseringen fra rammeverket. En bok som varierer lite vil kunne formidle problemfylt aktivitet i mindre grad enn en bok som varierer mye. Dette på grunn av at problemfylt aktivitet er avhengig av om fremgangsmetoder er kjent eller ikke.

Til slutt så jeg på hvordan illustrasjonene kunne bidra til å gi mening bak teorien. Illustrasjoner kan være fine hjelpemidler, og kan hjelpe elevene å knytte teori opp imot kjente fenomener. På den måten vil kombinasjonen mellom teori og illustrasjoner kunne føre til økt relasjonell forståelse. Med relasjonell forståelse kommer økte kognitive egenskaper inn i bildet, og man har dermed god bakgrunn for problemfylt aktivitet. Denne delen av undersøkelsen fikk også en induktiv tilnærming, hvor jeg prøvde å danne meg et bilde av bøkene, basert bare på reelle observasjoner.

3.7 Validitet og reliabilitet

Å oppnå total validitet og reliabilitet vil være umulig for et hvert forskningsprosjekt (LeCompte & Goetz, 1982). Under vil jeg beskrive begrepene validitet og reliabilitet nærmere, samt belyse grep jeg har gjort for å gi oppgaven et sterkere preg. Dette betyr at jeg også må diskutere svakheter med oppgaven på en kritisk måte.

3.7.1 Validitet

I kapittel 1.2 nevnte jeg at prøver blir invalide når lærere bruker strategien *teaching to the test*. I eksempelet jeg brukte ble det klart at testen ville gi for høye resultater i forhold til hva elevene virkelig kunne. På samme måte vil masteroppgaven bli invalid hvis den ikke måler det jeg sier at den skal måle. Validitet handler altså om hvor gyldig resultatene mine er. Dette er en litt gammeldags oppfatning av validitet, ifølge Cohen Manion, & Morrison (2007) som tilfører at kvantitative forskning alltid vil inneholde en standardfeil som teoretisk er lagt til grunn av sentralgrenseteoremet. Videre vil jeg ta for meg begrepene intern validitet, ekstern validitet, innholdsvaliditet og konstruktvaliditet.

LeCompte & Goetz (1982) definerer *intern validitet* som i hvilken grad andre forskere ville trukket samme slutninger som de originale forskerne, basert på samme teoretiske bakgrunn. I mitt tilfelle handler det om i hvilken grad andre forskere ville kategorisert oppgavene på samme måte som meg, gitt det rammeverket som jeg har lagt til grunn. For å forsikre meg om å oppnå god intern validitet, selv om jeg bare er én forsker, har jeg brukt *low-inference descriptors* (LeCompte & Goetz, 1982). Dette betyr at jeg har prøvd å være så deskriptiv som mulig, uten å la subjektive slutninger forstyrre det som faktisk har blitt observert og den dataen det har produsert. Ofte kommer nemlig feilene i form av subjektive meninger, så utfordringen har vært å la dem forbli usynlige gjennom forskningsprosessen. Datamaterialet, altså bøkene, har vært klare og tydelige og i liten grad åpen for forskjellige tolkninger. Et mål har vært å se datamaterialet gjennom en elevs øyne, noe som Cohen et al. (2007) trekker fram som et viktig punkt.

Min sammensatte metode hviler på rammeverket mitt, som igjen er godt begrunnet i didaktisk teori. Rammeverket er så spesifikt at det skal ta tak i alle detaljer som putter oppgaver i kategorier. Her mangler dog metoder for å finne ut i hvilken grad lærebøkene teoretisk sett legger til rette for problemfylt aktivitet. Dette blir likevel tatt tak i, i den kvalitative undersøkelsen. Gjennom metodekapittelet har jeg påpekt hver minste detalj i analysearbeidet slik at hele prosessen har blitt transparent. Dette skal bidra til at selve forskningsprosessen lett kan plukkes opp av andre og gi forholdsvis like tolkninger av samme bøker.

I ekstern sammenheng handler validitet om i hvilken grad man kan trekke gyldige slutninger ut ifra resultatene av undersøkelsen (Cohen et al., 2007). Det vil altså si at mangfold i utvalget og omfang av undersøkelsen her blir veldig sentralt. Utvalget mitt er representativt for gruppen jeg vil generalisere til, i og med at lærebøkene er de tre største på markedet, og er utgitt av de tre største forlagene. De er også de eneste bøkene som er skrevet etter Kunnskapsløftets reviderte plan trådde i kraft i 2013. Disse bøkene er både nåtiden og fremtiden. Jeg så dermed ingen grunn til å ta med andre bøker i undersøkelsen. På denne måten ble oppgaven avgrenset til en overkommelig størrelse.

Gjennom de tre bøkene har jeg analysert samtlige oppgaver. Dermed vil jeg argumentere for at resultatene fra undersøkelsen vil kunne bidra til å forstå hva en gjennomsnittselev på 8. trinn i Norge opplever av problemfylt aktivitet via lærebøkene i matematikk. Antagelsen vil bli mer korrekt over tid ettersom flere begynner å bruke bøkene. Dette vil gå til et punkt hvor nye bøker eller forbedrede utgaver av allerede eksisterende bøker tar over markedet. Resultatene kan derimot ikke generaliseres til verken andre fag eller andre land, selv om teorien har vist at trendene er slående i det vestlige samfunnet.

Selve datamaterialet i forskningen er innholdet i bøkene. Dermed er det essensielt å vurdere i hvilken grad hele innholdet er dekt eller representert i undersøkelsen. Dette målet kalles for *content validity,* eller *innholdsvaliditet*, og er nok kanskje den største svakheten med oppgaven.

Gjennom hele den vertikale analysen ser jeg hovedsakelig på oppgavene, og det er oppgavene som er enheten for analysen. Selv om langsiktige mål, forklaringer, teori og eksempler har blitt vurdert, har dette kun vært i det formål å kunne klassifisere oppgavene. Dette betyr at det som er formidlet til elevene gjennom annet enn oppgaver ikke er tilstrekkelig representert i den vertikale analysen. Det var en av grunnene til at jeg fant det nødvendig med en kvalitativ tilleggsanalyse av teoriformidlingen. Ikke veldig overraskende viste denne også store forskjeller, på samme linje som den kvantitative analysen. Funnene ble også sentrale i forståelsen av helheten til bøkene, som bidro til å kunne sette de kvantitative resultatene i perspektiv til slutt. Hvis jeg skulle startet på nytt med denne oppgaven, ville dette vært det punktet med størst forbedringspotensial i mine øyne. Da hadde første teoretiske utfordring blitt å sette sammen et konseptuelt rammeverk som hadde tatt for seg teoriformidlingen i mye større grad. Denne utfordringen hadde likevel kommet i skyggen av det rent praktiske problemet i tidsrammene ved prosjektet ved en forholdsvis "liten" masteroppgave.

Ut ifra forutsetningene kunne det vært aktuelt å endre problemstillingen til å spesifikt gå inn på hvordan *oppgaver* i lærebøker legger til rette for problemfylt aktivitet. Jeg velger likevel å la den stå slik som den er. Dette fordi det i stor grad er oppgavene som preger hva elevene faktisk gjør, og aktiviteten de vil utøve. Den helhetlige teoriformidlingen spiller likevel en rolle, og er spesielt sentral i form av formidlingen av målsetning og matematisk perspektiv. På den måten gir bøkene elevene et utgangspunkt for videre arbeid, uten at de nødvendigvis tenker over det. Den helhetlige formidlingen til bøkene får jeg innsikt i med den kvalitative undersøkelsen, selv om denne delen kanskje burde vært enda større.

Som et overordnet mål på validitet kommer konstruktvaliditet. Dette er en abstrakt type validitet som handler om at det forskeren uttaler også bør være den generelle oppfatningen av et fenomen, samt at det forskeren gjør faktisk egner seg i søken om informasjon om fenomenet (Cohen et al., 2007). Man må dermed spørre seg selv om man faktisk måler det man sier at man skal måle. I teoridelen påviste jeg en sterk link mellom intellektuelt behov og problemfylt aktivitet. Deretter satte jeg det sammen til et rammeverk, der jeg involverte og syntetiserte flere teorier. Til sammen argumenterer jeg for at de skal kunne svare på det jeg spør om i problemstillingen. Å kunne vise til en sammenheng mellom de to delene av rammeverket vil derfor bidra til å øke konstruktvaliditeten betraktelig. Dette vil bli tydelig som et av mine mål i diskusjonen som etterfølger resultatene av den vertikale analysen.

I tillegg har jeg tidligere nevnt at 63 % av forskning på lærebøker handler om innholdsanalyser hvor problemløsning og kreativitet er det mest populære temaet. Disse, med samme teoretiske grunnlag og ide som i min oppgave, nemlig at det fokuseres mye på øving og lite på tenking. Bakgrunnen min virker derfor å være en allmenn oppfatning som også støttes av tidligere forskning, som beskrevet i kapittel 2.4.1. Rammeverket mitt er også basert på blant annet denne forskningen, så oppgaven min har røtter som forankres godt.

3.7.2 Reliabilitet

Validitet kan ifølge Cohen et al. (2007) være en tilstrekkelig betingelse for reliabilitet, men likevel ikke nødvendig. På den andre siden mener de at reliabilitet er en nødvendig betingelse for validitet, men ikke tilstrekkelig. Det vil si at oppgaven ikke vil være gyldig (valid) før den også er pålitelig (reliable). På denne måten henger de to begrepene sammen. Dermed er reliabilitet vel så viktig som validitet. Hvis man ikke kan stole på at forskningen har blitt gjort på en troverdig og pålitelig måte vil oppgaven være verken pålitelig eller gyldig.

Reliabilitet kan sees på som stabiliteten til alt i undersøkelsen som kan føre til ujevne resultater (Cohen et al., 2007). I min undersøkelse vil det dermed handle om hvordan jeg kategoriserte oppgavene, både over tid og gjennom de forskjellige bøkene. For at hvert tema skulle bli behandlet mest mulig likt, analyserte jeg det samme temaet innenfor alle tre bøkene rett etter hverandre. På den måten var tankene fra forrige bok (samme tema) friskt i minnet når jeg gikk løs på en ny bok. Jeg passet også på å variere hvilken bok jeg startet med, slik at det på ingen måte skulle kunne oppleves som urettferdig. Når jeg oppdaget ting underveis på et tema som jeg tidligere hadde analysert under en annen bok, nølte jeg ikke med å gå tilbake og se over den forrige boken på nytt igjen.

For å forsikre meg om at kategoriseringen ble gjort på et vis som ikke fremmet mine egne subjektive meninger prøvde jeg alltid å støtte meg helt og holdent til rammeverket mitt og den teoretiske bakgrunnen. I tvilstilfeller prøvde jeg å sette meg inn i en elevs perspektiv, for å få en rettferdig kategorisering.

Reliabilitet deles ofte i to hovedtyper. Jeg har allerede nevnt stabilitet, og den andre formen for reliabilitet er ekvivalens. Dette handler om hvordan resultatene fra to ulike personer som bruker samme innsamlingsmetode bør samsvare. Siden jeg har jobbet alene med dette prosjektet vil ikke dette være noe å tenke på. Likevel har jeg samarbeidet og diskutert variabler og oppgaver med en medstudent, noe som førte til inter-rater reliabilitet (Cohen et al., 2007). Etter å ha analysert og diskutert 25 oppgaver var vi veldig enige på det aller meste. Under de 25 oppgavene var det 74 deloppgaver hvor vi ble enige om 4 tilfeller hvor vi kunne vurdert andre kategorier. Dette var i all hovedsak spørsmål om PU eller PM. I tillegg var det et tilfelle hvor vi vurderte SUT opp imot ikke-SUT. Totalt utgjør det uansett en inter-rater reliabilitet på $\frac{Antall\ enigheter}{Antall\ mulige\ enigheter} * 100 = \frac{70}{74} * 100 = 94{,}6\ \%$. Tvilstilfellene som ble avdekket, oppsto også når jeg gjorde analysene alene. På samme måte som i metodevalg var det ofte litt flytende overganger mellom spesielt PU og PM. Dermed måtte vi prøve å vurdere hvor stor mengde av disse kategoriene som var representert før vi kunne bestemme oss. Denne konstante vurderingen er den største svakheten i oppgaven.

3.8 Etiske tanker

Etikk forbindes ofte med store, tunge filosofiske spørsmål om liv og død. Likevel vil etikk dukke opp nesten over alt, og spesielt der det kan oppstå motstridende hensyn i arbeid. Pedagogisk forskning er absolutt et slikt felt, og etikken defineres som refleksjon over sin moral (Bjørndal, 2011). Forskningsetikken viser til verdier, normer og institusjonelle ordninger som bidrar til å regulere vitenskapelig virksomhet. Begrunnelsen ligger i vitenskapelig allmenmoral på samme måte som begrunnelsen til allmenn etikk ligger i allmennmoral (NESH, 2016).

Siden jeg skal gjøre en dokumentanalyse og derfor ikke være direkte involvert med andre mennesker vil jeg heldigvis unngå søvnløse netter grunnet etiske dilemma. Likevel vil det være noe å ta hensyn til. De nasjonale forskningsetiske komiteene har laget et dokument med 46 retningslinjer til forskningsetikk innenfor samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi (NESH, 2016). Av dem er det 13 punkter som jeg føler angår meg i mitt arbeid med denne oppgaven. Under presenterer jeg normene på en sammenfattet måte.

Det er, for det første, min plikt å følge de anerkjente forskningsetiske normene. Jeg må hele tiden ha i bakhodet at forskning skal være søken etter ny og bedre innsikt i fenomener. Målet er å finne sannheten, men forskning har aldri noen garanti siden de fleste konklusjoner på noen nivå ofte vil være begrenset i form av utvalg, innsikt eller tid (NESH, 2016). Det stilles høye krav til forskeres begrunnelse for valg av problemstilling, metoder og analyseverktøy. Kvaliteten på dokumentasjonen som blir lagt til grunn for diskusjon og slutninger er dermed viktig. På den måten vil ikke forutinntatte oppfatninger prege oppgaven for mye. Ansvarlig forskning må vurdere alle konsekvenser, også de uønskede (NESH, 2016).

For det andre må jeg være sikker på å beskytte og vedlikeholde menneskers verdighet (Caelli, Ray, & Mill, 2003). Jeg kommer til å ta for meg lærebøker som er skrevet under stramme retningslinjer med korte frister av dyktige matematikere og didaktikere. Disse vil være typiske tredjeparter, som ikke er direkte med i forskningen, men som likevel vil bli berørt. De har ikke mulighet til å gi samtykke til forskningen, noe som heller ikke kan kreves. Likevel må jeg være forsiktig med hvordan jeg uttaler meg slik at ingen føler seg nedverdiget. Dette er knyttet opp imot menneskeverd og individets ukrenkelighet og er lovfestet ved eksempelvis Grunnloven § 102 (NESH, 2016) og i tillegg nedfelt i FNs verdenserklæring for menneskerettigheter (De Forente Nasjoner [FN], 1948).

Gjennom hele oppgaven må jeg vise god henvisningsskikk, og være nøye når jeg siterer andre verk. Dette legger grunnlag for etterprøvbarhet og videre forskning, og fører også til kvalitetssikring (NESH, 2016). Videre er jeg forpliktet til å bidra til godt forskningsmiljø hvor åpenhet, saklighet og kritikk er viktige faktorer. Offentliggjøring og formidling innenfor forskningsmiljøet og utenfor forskningsmiljøet er påpekt som essensielt. Ved å ta forskningen utover de gruppene som vanligvis ville hørt eller lest om den, bidrar jeg til å tilfredsstille befolkningens intellektuelle behov (NESH, 2016). Dette vil skje via arbeid i fremtiden, og vil virke positivt på alle plan og gi større grunnlag for videre forskning og samfunnsvekst. Gjennom denne prosessen må jeg også opprettholde respekten utover forfatterne og imøtekomme større forhold som yrket og samfunnet (Bjørndal, 2011).

Plagiat er selvsagt uakseptabelt av åpenbare grunner. Jeg har ansvar for å forebygge og forhindre plagiat, da det bryter med vitenskapens sannhetsforpliktelse og kravet om originalitet og ydmykhet (NESH, 2016). På samme måte som at det ikke er lov til å stjele (plagiat) er det heller ikke lov til å lyge. Man har både rett og plikt til å publisere hele sannheten, på en forståelig måte som ikke kan virke misvisende. Sammen med plagiat er forfalsking det mest alvorlige i forskningsetikk (Forskningsetikkloven, 2006, § 5).

4 Resultater

Kapittel 4 vil presentere funnene fra både den horisontale analysen og den vertikale analysen, samt den kvalitative analysen av teoriformidlingen. Hovedfokuset i oppgaven er den vertikale analysen, som bygger på den horisontale analysen i forkant. I tillegg vil den kvalitative analysen kunne sette den vertikale analysen i perspektiv til slutt.

4.1 Horisontale, strukturelle funn

Den horisontale analysen resulterte i en oppbygging bestående av 6 hovedtema, presentert i tabell 4-1. Videre resultater vil være basert på denne inndelingen.

Tabell 4-1: Presentasjon av temainndelingen, basert på min horisontale analyse av utvalget.

1.	**Tall & tallregning**	Tallsystemet, positive og negative tall, heltall og desimaltall, regneuttrykk og parenteser, delelighet og faktorisering, potenser
2.	**Brøk & prosent**	Brøk, desimaltall (kobling), prosent, promille
3.	**Geometri**	Geometriske byggesteiner, konstruksjon, symmetri
4.	**Algebra & ligninger**	Algebraiske uttrykk, ligninger, formler
5.	**Statistikk & sannsynlighet**	Frekvens, diagrammer, analyser og beregninger, sannsynlighet
6.	**Måling**	Lengde, enheter, målestokk, areal, volum, vei/fart/tid

Tabell 4-2 viser en oversikt over antall oppgaver som hver enkelt bok inneholder under hvert tema, og hvor stor prosentdel de oppgavene utgjør innad i bøkene. Eksempelvis inneholder Maximum 584 oppgaver under *tall & tallregning*. Det utgjør 27 % av oppgavene i Maximum. Oppgaver er også summert både innad i tema, innad i bøkene og totalt. Totalt antall oppgaver er uthevet i grønt.

Tema 1 inneholder flest oppgaver. Videre er tema 2 og 4, og 3 og 5 ganske like på antall oppgaver, mens tema 6 inneholder forholdsvis få oppgaver. Maximum har ingen oppgaver under tema 6. Til tross for at Faktor har flest kapitler (7, mot 5 i Maximum og Nummer), inneholder den færrest sider (240). Likevel har den størst oppgavetetthet på 6,69 oppgaver pr. side. Maximum følger tett bak med oppgavetetthet på 6,62 med 90 sider ekstra, mens Nummer skiller seg litt ut med en oppgavetetthet på 5,44 over 392 sider.

Tabell 4-2: Strukturell oversikt over fordeling av oppgaver, både i tema og bøker, i tillegg til totalt antall sider og oppgavetetthet.

			Maximum	Faktor	Nummer	Sum
1.	**Tall & tallregning**	#	584	403	722	1709
		%	27 %	25 %	34 %	29 %
2.	**Brøk & prosent**	#	527	435	233	1195
		%	24 %	27 %	11 %	20 %
3.	**Geometri**	#	345	225	161	731
		%	16 %	14 %	8 %	12 %
4.	**Algebra & ligninger**	#	487	198	393	1078
		%	22 %	12 %	18 %	18 %
5.	**Statistikk & sannsynlighet**	#	241	98	369	708
		%	11 %	6 %	17 %	12 %
6.	**Måling**	#		247	253	500
		%		15 %	12 %	8 %
	Sum	#	2184	1606	2131	5921
		%	37 %	27 %	36 %	100 %
	Totalt antall sider		330	240	392	962
	Oppgavetetthet		6,62	6,69	5,44	6,15

Alle bøkene har til felles at de inneholder langsiktige læringsmål før hvert kapittel. Det er dermed knyttet langsiktige mål til hver oppgave. Disse målene la grunnlaget for kategorien *langsiktige mål* i den vertikale analysen. I tillegg hadde alle bøkene spesifikt merkede oppgaver, og oppgaver som kommer for seg selv i forskjellige bolker. Merkene er presentert i tabell 4-3 og er plassert slik at de kan sammenlignes på tvers av bøkene. *Bli bedre* fra Maximum kan sammenliknes med både *Prøv deg selv* fra Faktor og *Hva kan du nå?* fra Nummer. I kapittel 4.2.4 blir det presentert resultater som spesifikt angår bare disse merkene, for å se om oppgavene skiller seg ut ifra majoriteten.

Tabell 4-3: Oversikt over merker i de tre lærebøkene

Merke nr.	Samlebetegnelse	Maximum	Faktor	Nummer
Merke 1	Øvingsoppgaver	Bli bedre	Prøv deg selv	Hva kan du nå?
Merke 2	Utfordringer		Utfordrende oppgaver	Utfordring
Merke 3	Grubleoppgaver	Tren tanken	Noe å lure på	

4.2 Vertikal analyse

Den vertikale analysen er oppgavens hovedfokus. Jeg vil starte med å presentere den totale fordelingen av alle oppgavene på en måte som setter alle variablene i sammenheng med hverandre. Deretter vil jeg se isolert på *Formidlet til elevene*, *Forventet av elevene*, *Merker* og til slutt påvise dypere sammenhenger mellom den vertikale analysens to hoveddeler.

4.2.1 Total fordeling

Med de variablene som ble fastsatt i rammeverket ble alle oppgavene plassert på et av 64 utfall (se figur 3-2) i steg to av beregninger i det grunnleggende analysesystemet. Av de 64 utfallene var det 8 utfall som ikke fikk tildelt en eneste oppgave. I Faktor, Maximum og Nummer var det henholdsvis 24, 17 og 13 utfall som sto tomme.

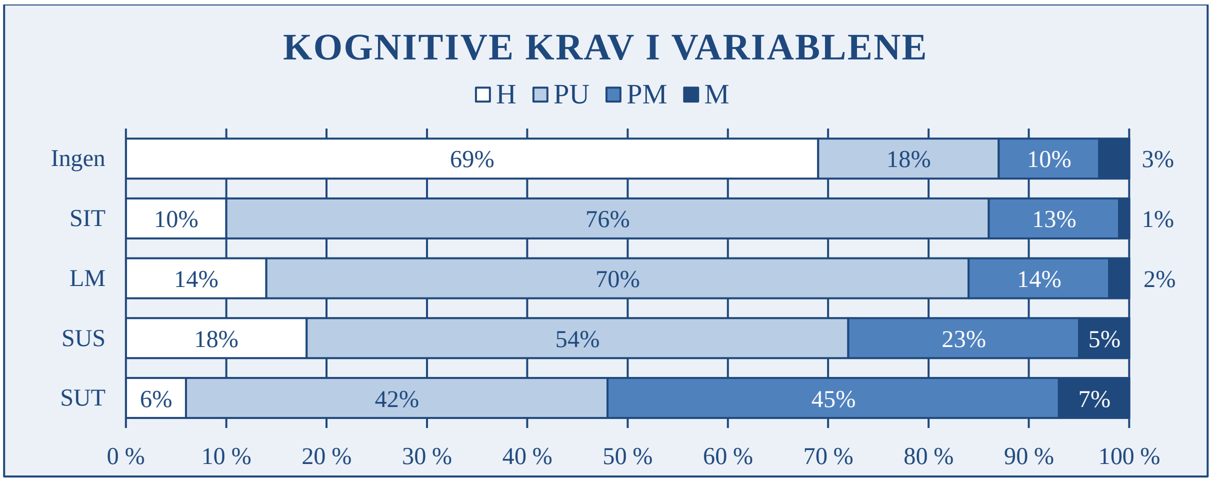
Tabell 4-4 viser den totale fordelingen i utfallene prosentvis. Alle forskjellige sammensetninger av LM, SIT, SUT og SUS er listet horisontalt, mens kognitive krav er listet vertikalt. Fargekodene er der for å lettere kunne se hvilke kategorier som inneholder forholdsvis mange og få oppgaver. I den trefargede skalaen betyr grønn mange oppgaver, gul betyr middels, mens rød betyr få oppgaver. Det mest populære utfallet var LM+SIT+PU som inneholdt hele 46,5 % av oppgavene. Deretter fulgte LM+SIT+SUS+PU som inneholdt 12 % av oppgavene, og LM+SIT+H som inneholdt 6,6 % av oppgavene.

Tabell 4-4: Total prosentvis oversikt over fordelingen i alle utfall i den vertikale analysen.

	Ingen forventet	LM	SIT	SUT	SUS	LM+SIT	LM+SUT	LM+SUS	SIT+SUT	SIT+SUS	SUT+SUS	SIT+SUT+LM	SIT+SUS+LM	SUT+SUS+LM	SIT+SUT+SUS	SIT+SUT+SUS+LM	SUM
H	1	2,8	0,4	0,4	0,7	6,58	0,1	2,5	0	0,1	0,1	0,1	1,4	0,1	0	0	16,2
PU	0,3	2,7	0,6	0,1	0,2	46,5	0,2	1,2	0,1	0,4	0,2	3	12	0,2	0	0,7	68,2
PM	0,1	0,7	0	0,1	0	3,73	0,3	0,7	0	0,1	0	2,5	3,5	0,9	0	1	13,8
M	0,1	0,2	0	0,1	0	0,27	0,1	0,2	0	0,1	0,2	0	0,4	0,1	0	0,4	1,89
SUM	1,5	6,4	1	0,6	1	57,1	0,7	4,5	0,1	0,6	0,4	5,7	17	1,2	0	2,1	100

Der tabell 4-4 viser fordelingen av kognitive krav blant alle forskjellige kombinasjoner av variabler, trekker figur 4-1 sammen variablene og ser på dem isolert. På et sammenfattet vis forteller derfor figur 4-1 hvordan kognitive krav fordeler seg i variablene LM, SIT, SUT og SUS (samt ingen av dem). Av alle oppgavene som var kategorisert som SIT var for eksempel

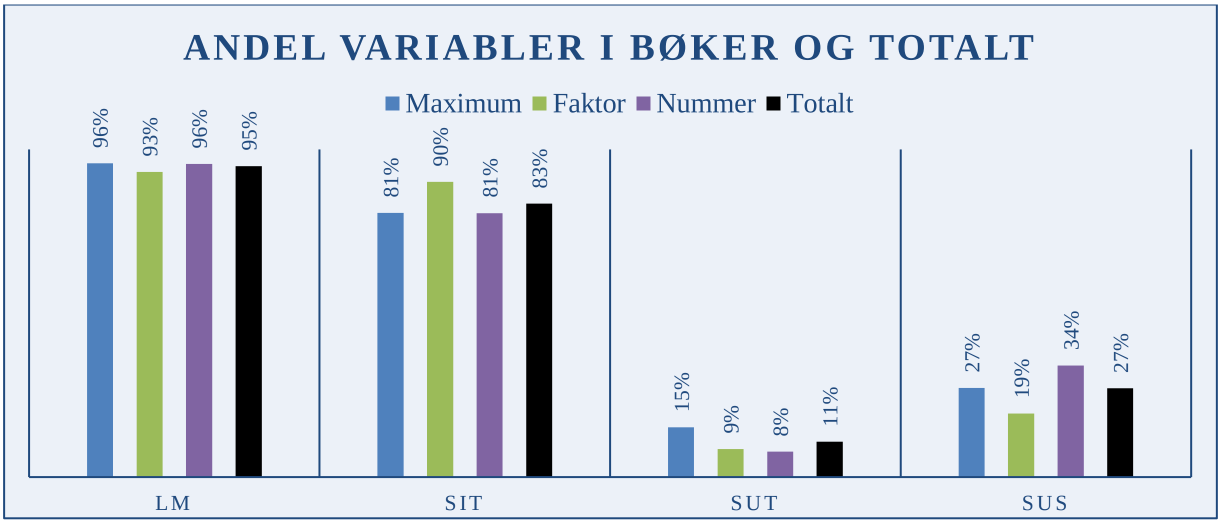
10 % kategorisert som H, 76 % som PU, 13 % som PM og 1 % som M. Det var for øvrig henholdsvis 84, 4723, 5356, 1527 og 612 oppgaver kategorisert som Ingen, SIT, LM, SUS og SUT, som ble organisert slik at den variabelen med størst andel høye kognitive krav kom sist.



Figur 4-1: Fordelingen av kognitive krav i variablene Ingen, SIT, LM, SUS og SUT.

4.2.2 Formidlet til elevene

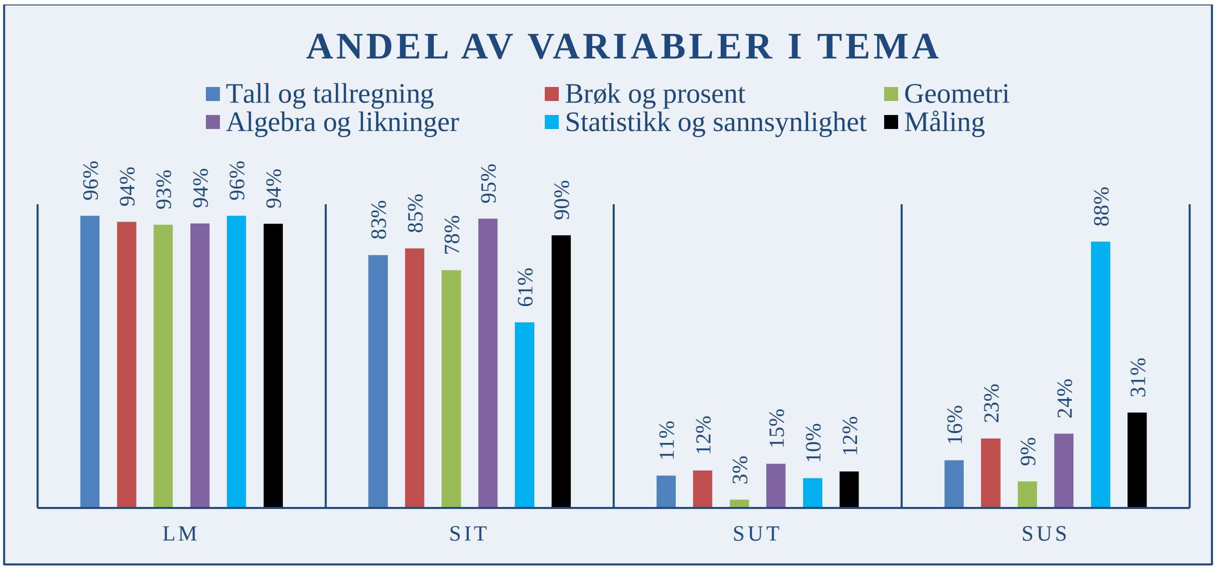
Denne delen bygger på elevenes intellektuelle behov som er knyttet tett til problemfylt aktivitet i teoridelen. I figur 4-1 ser du andelen av variablene *langsiktig mål (LM), sammenheng innenfor tema (SIT), sammenheng utenfor tema (SUT) og sammenheng utenfor skolen (SUS)*, først fordelt etter de tre lærebøkene med fargede søyler, så totalt i svart.



Figur 4-2: Andel av variablene LM, SIT, SUT og SUS i lærebøkene og totalt

Figuren viser at 95 % av alle oppgavene hadde LM, 83 % hadde SIT, 11 % hadde SUT og 27 % hadde SUS. Det er tydelige trender i alle variablene og ut ifra diagrammet er det tre ting som er interessante å notere seg; (1) Faktor scorer best på SIT, (2) Maximum scorer best på SUT og (3) Nummer scorer best på SUS. Utover det er LM rimelig lik i alle tre bøkene.

En ting er hvordan variablene fordeler seg i bøkene, en annen ting er hvordan de fordeler seg i tema. I Figur 4-2 ser du en oversikt som legger til rette for sammenligning av alle temaenes score på de forskjellige variablene. Her blir det tydelig at variabelen LM er den mest stabile. På de andre variablene er det noen verdier som skiller seg ut. Det er liten andel SIT under *statistikk & sannsynlighet*, liten andel SUT og SUS under *geometri*, og til slutt stor andel SUS på temaene *statistikk & sannsynlighet* og *måling*. Den store andelen av SUS under *statistikk & sannsynlighet* utgjør likevel ikke mer enn at den totale scoren til SUS blir 27 % som kan sees i figur 4-1. Dette fordi antall oppgaver under *statistikk & sannsynlighet* er få i forhold til totat antall oppgaver.

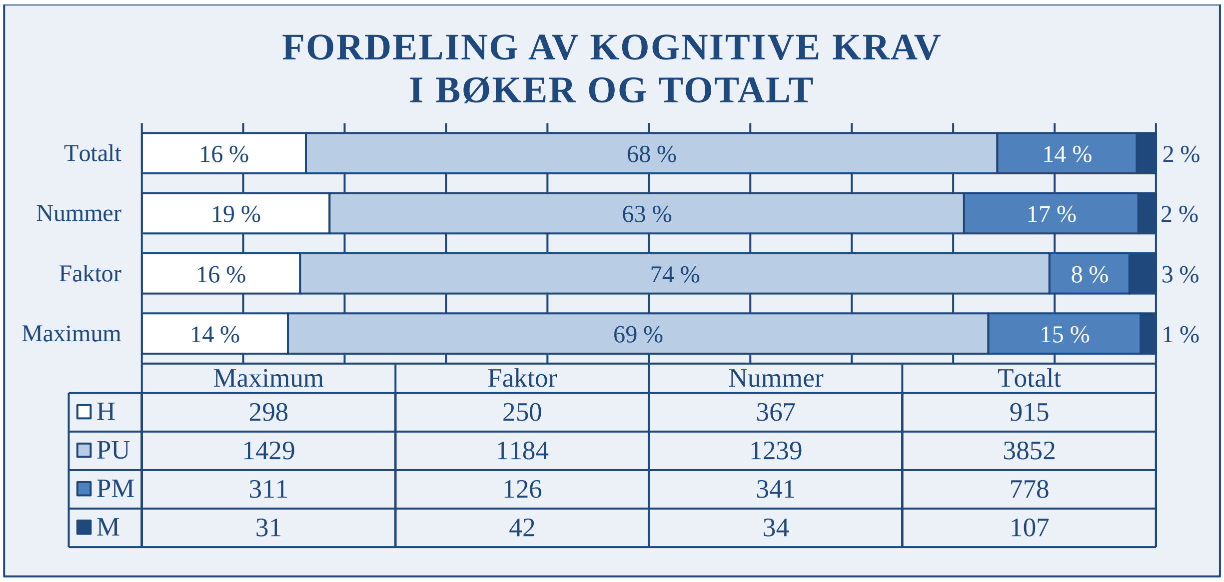


Figur 4-3: Andel av variablene LM, SIT, SUT og SUS i tema.

4.2.3 Forventet av elevene

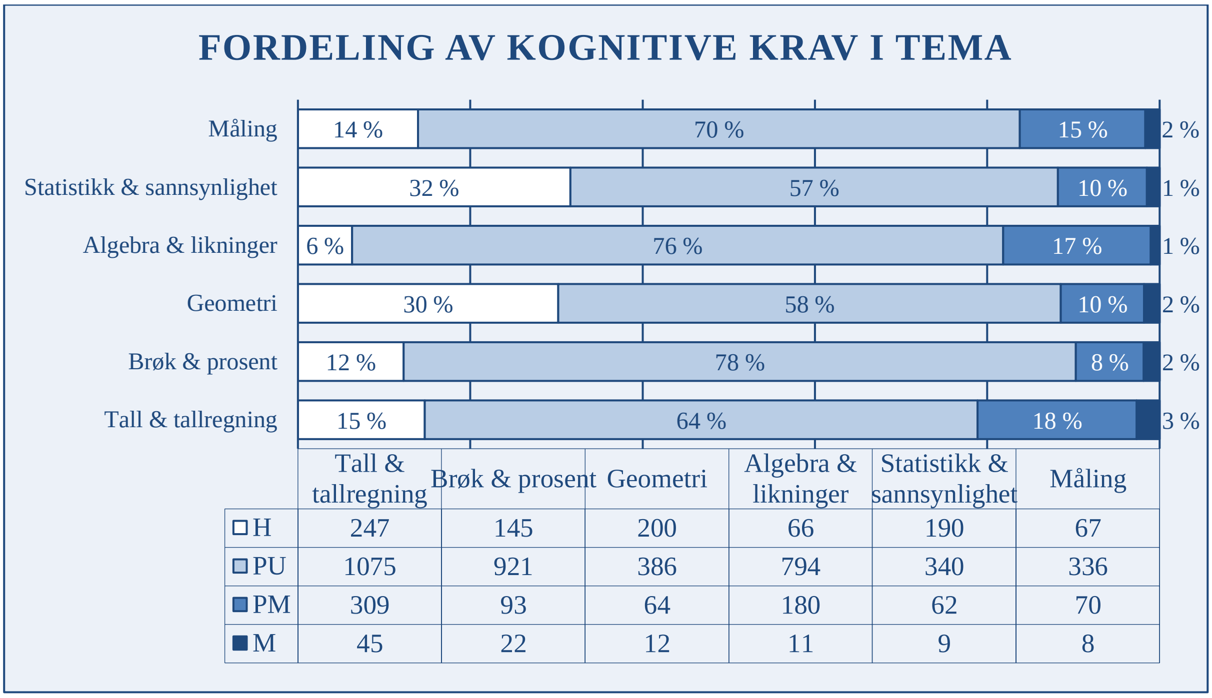
Jeg målte hva som var forventet av elevene ved å se på hvilke kognitive krav oppgavene stilte til elevene. Mellom kategoriene *hukommelse (H)*, *prosedyrer uten sammenheng (PU)*, *prosedyrer med sammenheng (PM)* og *matematikk (M)* var fordelingen i bøkene fordelt som vist i figur 4-3. Resultatene for de tre lærebøkene er ganske like. Boken som skiller seg mest ut er Faktor som har større andel PU, mindre andel PM og litt større andel M enn de andre.

Der fordelingen i bøkene er nogen lunde stabil er derimot fordelingen i tema ikke like stabil. Figur 4-4 framstiller fordelingen av kognitive krav innenfor hvert tema. Her ser man at oppgavetypene varierer mye fra tema til tema. Det som utmerker seg er at *geometri* og *statistikk & sannsynlighet* har veldig mye større andel H enn de andre temaene. I tillegg har *tall & tallregning*, *algebra & ligninger* og *måling* større andel PM enn resten.



	Maximum	Faktor	Nummer	Totalt
H	298	250	367	915
PU	1429	1184	1239	3852
PM	311	126	341	778
M	31	42	34	107

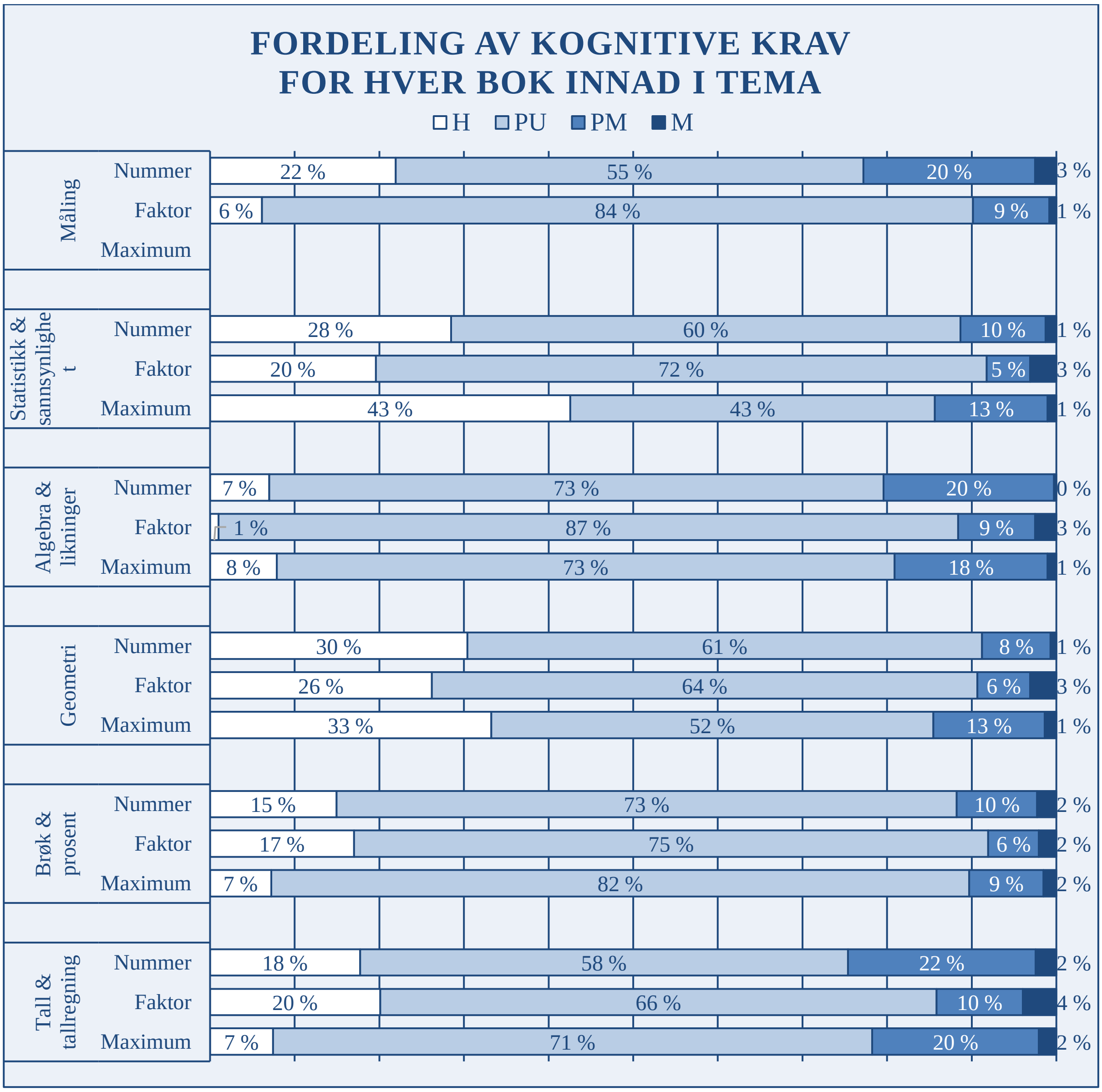
Figur 4-4: Total fordeling av kognitive krav i de tre lærebøkene, Maximum, Faktor og Nummer.



	Tall & tallregning	Brøk & prosent	Geometri	Algebra & likninger	Statistikk & sannsynlighet	Måling
H	247	145	200	66	190	67
PU	1075	921	386	794	340	336
PM	309	93	64	180	62	70
M	45	22	12	11	9	8

Figur 4-5: Total fordeling av kognitive krav i hvert tema.

Nå som fordelingen i bøker og tema er vist hver for seg vil jeg vise ulikhetene mellom bøkene under hvert tema i figur 4-5. Her vil det være mange varierende verdier, så man må vite hva man skal se etter. Diagrammet viser at det er tydelige trender blant bøkene innenfor hvert tema, selv om verdiene varierer forholdsvis mye. Andelen av H er eksempelvis lav blant alle bøkene i *algebra & ligninger*, middels i *tall & tallregning* og *brøk & prosent*, og ganske høy i *geometri* og *statistikk & sannsynlighet*. På samme måte er andelen av PM forholdsvis høy i *tall & tallregning* og *algebra & ligninger*, mens resten holder seg på det jevne. Unntaket er Faktor som jevnt over holder andelen av PM på rundt halvparten av Maximum og Nummer.



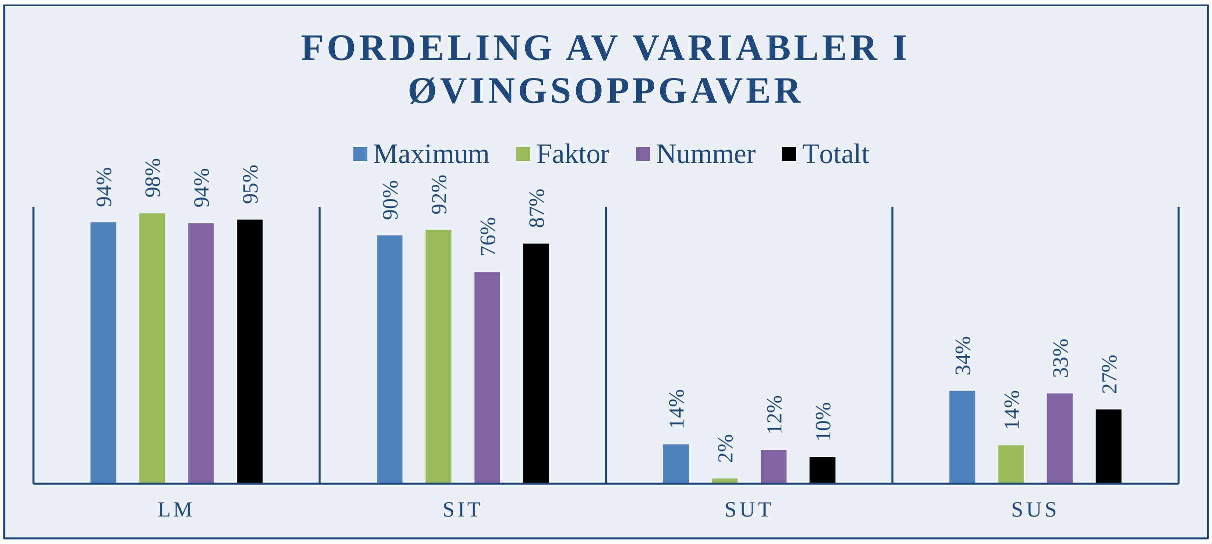
Figur 4-6: Fordeling av kognitive krav inndelt i tema og bøker.

Så langt har andelen av PU vært totalt dominerende med snitt på 69 % av alle oppgavene jeg har analysert. Det eneste lille unntaket jeg kan vise til er fra Maximum i temaet *statistikk & sannsynlighet*, hvor PU bare utgjør 43 %.

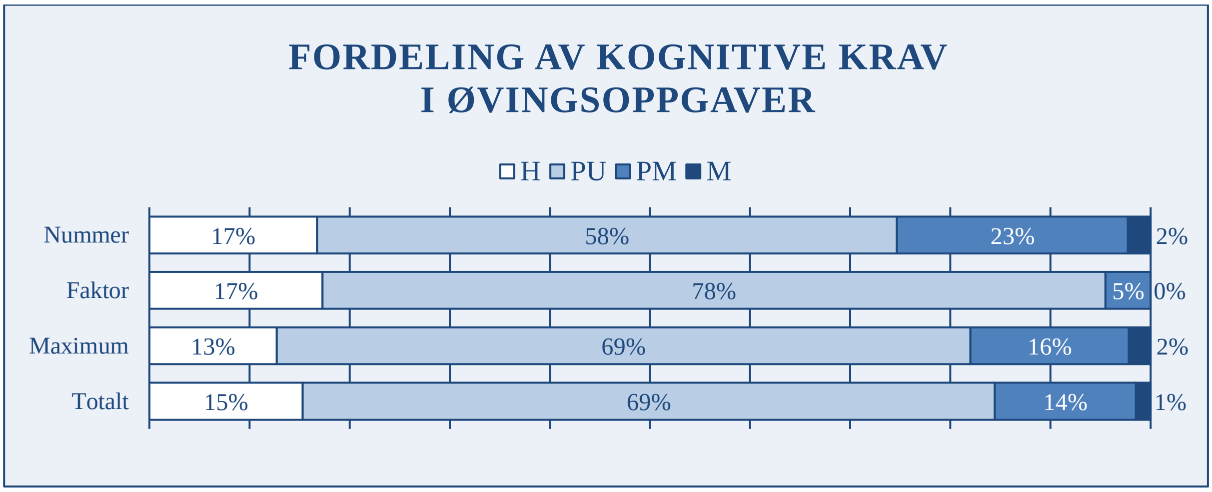
4.2.4 Merker

Her vil jeg presentere funnene fra analysen av de tre merkene presentert i tabell 4-3. Dette for å se om de spesielt merkede oppgavene krever det som forventes ut ifra oppgavetypene.

4.2.4.1 Merke 1: Øvingsoppgaver



Figur 4-7: Andel av variablene LM, SIT, SUT og SUS i merkede øvingsoppgaver fra Maximum, Faktor og Nummer



Figur 4-8: Fordeling av kognitive krav i merkede øvingsoppgaver fra Maximum, Faktor og Nummer

Som vi kan se fra figur 4-6 og 4-7 viser resultatene ingen stor forskjell mellom øvingsoppgaver og totalen fra figur 4-1 og 4-3. Figur 4-1 viser at totalfordelingen av variablene var 95 %, 83 %, 11 % og 27 %, på henholdsvis LM, SIT, SUT og SUS, mens figur 4-6 viser totalverdiene 95 %, 87 %, 10 % og 27 % for samme variabler på øvingsoppgaver. Figur 4-3 viser til en totalfordeling av kognitive krav på 16 %, 68 %, 14 % og 2 % på henholdsvis H, PU, PM og M, mens figur 4-7 viser 15 %, 69 %, 14 % og 1 % på øvingsoppgaver. Utover dette er det noen ting som bør nevnes angående øvingsoppgaver. For det første scorer Faktor lavt på SUT og SUS, mens Nummer scorer lavt på SIT. For det andre scorer Faktor lavt på PM og M mens Nummer scorer høyt på PM. Maximum scorer jevnt over ganske gjennomsnittlig på det meste. Det største funnet her er at øvingsoppgaver ser ut til å være mer avhengig av SIT enn totalen.

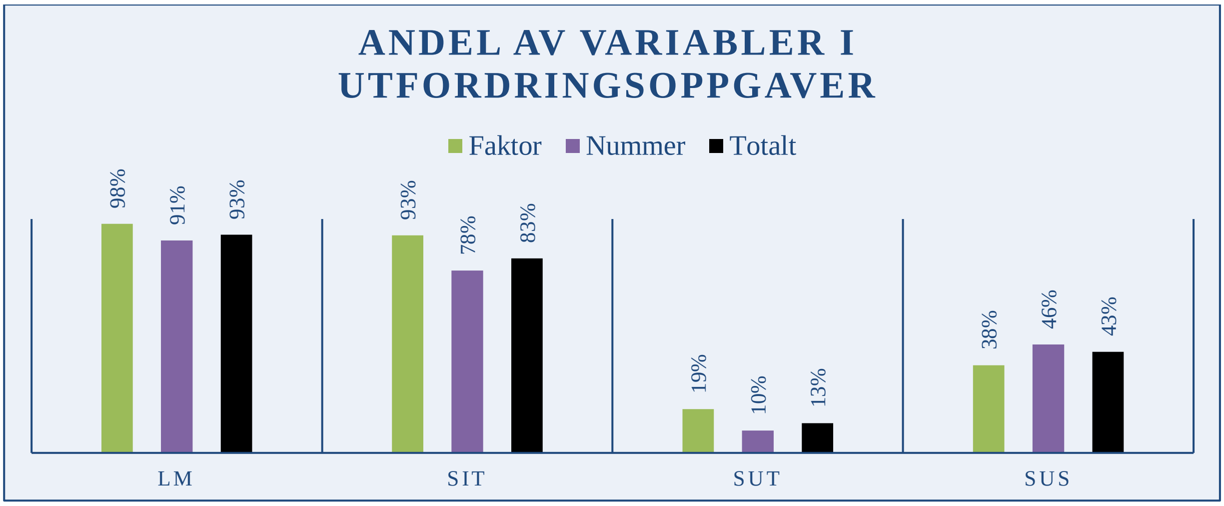
Under øvingsoppgaver kommer både *Bli bedre* fra Maximum, *Prøv deg selv* fra Faktor og *Hva kan du nå?* Fra Nummer. *Bli bedre* skal ifølge Maximum 8 – Lærerens bok (Alseth, Stedøy-Johansen, Tangen, & Tofteberg, 2013) ha som hensikt å brukes til repetisjon og overlæring. Det er dermed ikke meningen at elevene skal lære seg ny kunnskap her, men derimot bare øve på allerede kjent kunnskap. Til dette formålet passer lave kognitive krav godt (Stein & Smith, 1998). Det er derfor bemerkelsesverdig at Maximum har en prosent større andel i både *prosedyrer med sammenheng* og *matematikk*, i forhold til den totale mengden oppgaver i boken.

Prøv deg selv skal ifølge nettsidene til Faktor (Cappelen Damm, 2016) fungere som en test etter hvert kapittel. Av figur 4-8 blir det klart at de bare har fokus på lave kognitive krav i testene, noe som gjenspeiler trenden i vurderingsformene (Leer, 2009).

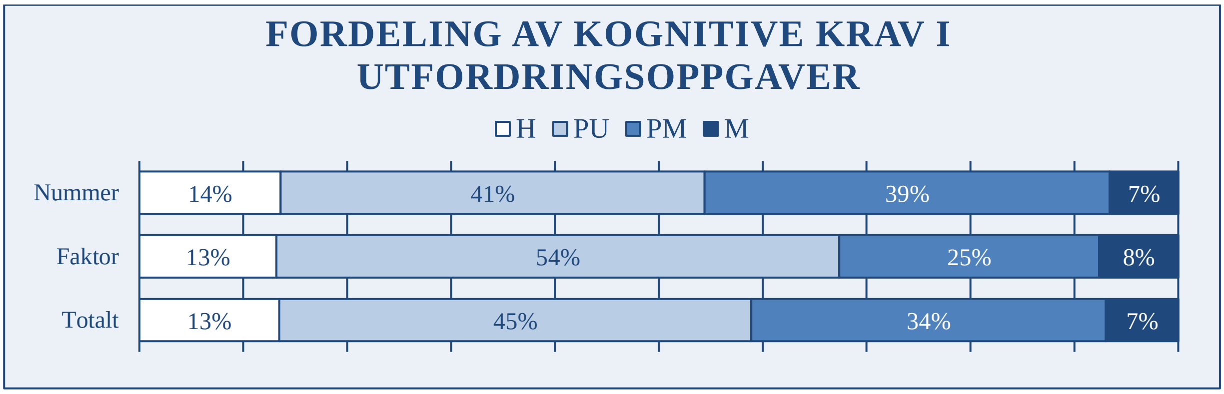
Hva kan du nå? Fungerer også som en test (Hole et al., 2014) som det er meningen at elevene skal gjennom etter endt tema. Testen skal avdekke om det er noe elevene trenger å jobbe litt ekstra med før de går videre. Testene i Nummer har økt andel oppgaver under *prosedyrer med sammenheng* til 23 %, der den totale mengden oppgaver i Nummer har 17 %.

4.2.4.2 Merke 2: Utfordringer

I utfordringsoppgaver inngår oppgaver fra Faktor og Nummer. Fra figur 4-8 ser man at LM og SIT fortsatt er ganske stabile i forhold til totalen fra figur 4-1. SUT går opp 2 %, mens SUS går opp 16 % fra totalen til utfordringsoppgaver. Her bidrar Faktor til økning i SUT, mens Nummer bidrar til økning i SUS. Den største forskjellen er kanskje likevel i fordelingen av kognitive krav hvor H og PU har sunket med henholdsvis 1 og 24 %, mens PM og M har økt med henholdsvis 19 og 5 % (Noen avrundinger, gjort av Microsoft Office Word, gjør at summen av kognitive krav noen ganger framstilles som 99 % når visningen ikke har desimaler). Figur 4-9 viser til samsvar mellom utfordringene i Nummer og Faktor, hvor Nummer scorer bedre på PM enn Faktor, mens Faktor dermed har flere oppgaver under PU.



Figur 4-9: Andel av variablene LM, SIT, SUT og SUS i merkede utfordringsoppgaver fra Faktor og Nummer.

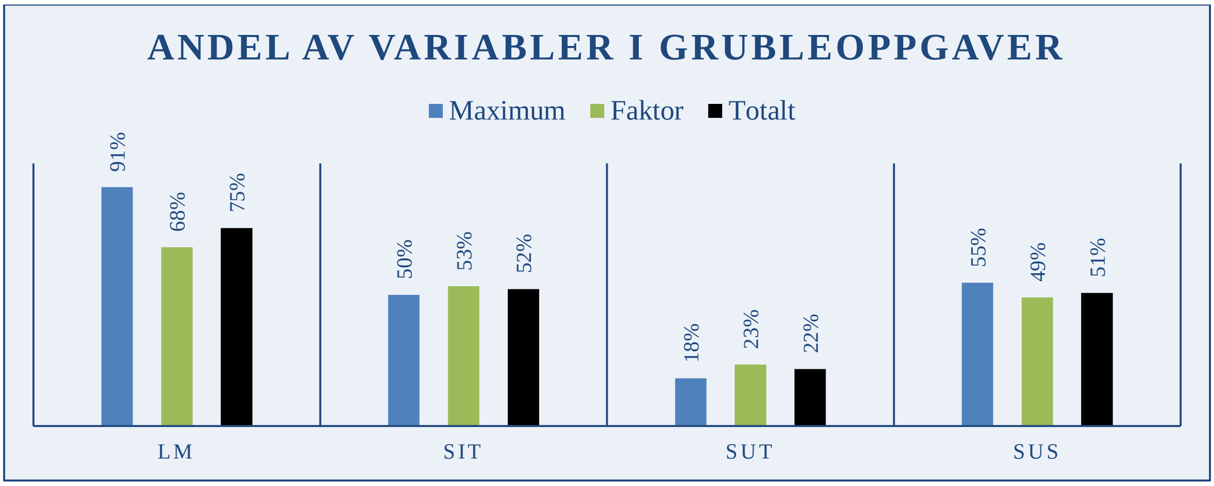


Figur 4-10: Fordeling av kognitive krav i merkede utfordringsoppgaver fra Faktor og Nummer.

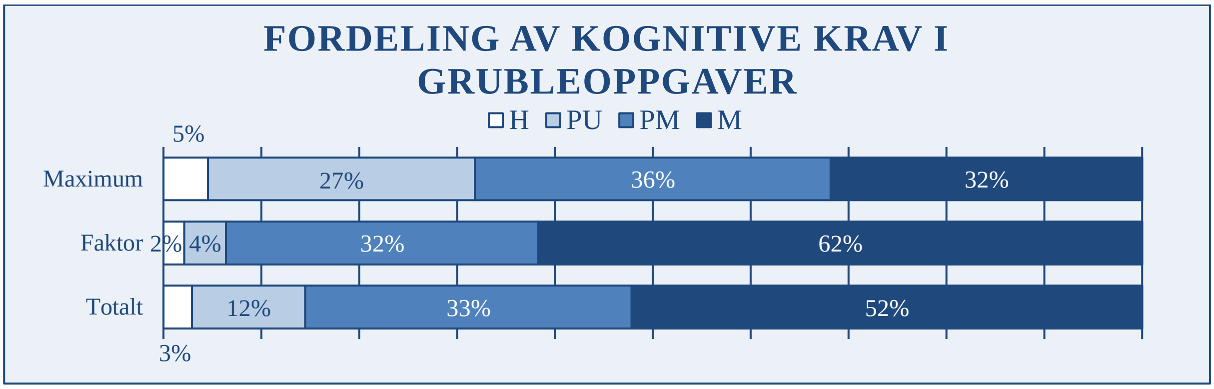
Det er meningen at de *utfordrende oppgavene* fra Faktor skal virke forløsende for tankene til elevene (Hjardar & Pedersen, 2014). Rundt en tredel av oppgavene vil kunne fungere på de via høye kognitive krav, mens rundt to tredeler fortsatt har store preg av øving og lite preg av forløsende tanker.

Utfordringene fra Nummer har som formål å invitere til gode ideer. De skal gi elevene muligheten til å «*bruke det de har jobbet med i oppgaver som vil gjøre dem bedre i faget*» (Hole et al., 2014). Formuleringen av forrige setning virker litt utydelig, men jeg regner med at hensikten er at oppgavene i noen grad skal være problemfylte. Tallene fra figur 4-10 viser at nesten halvparten av oppgavene stiller høye kognitive krav hvor dette blir mulig, mens den andre halvparten fortsatt stiller lave kognitive krav. Dette er uansett et stort steg opp ifra oppgavene merket som øvingsoppgaver.

4.2.4.3 Merke 3: Grubleoppgaver



Figur 4-11: Fordeling av variablene LM, SIT, SUT og SUS i merkede grubleoppgaver fra Maximum og Faktor.



Figur 4-12: Fordeling av kognitive krav i merkede grubleoppgaver fra Maximum og Faktor.

Grubleoppgavene fra Maximum og Faktor var de oppgavene som gruppert sett skilte seg mest ut. Andelen LM og SIT har gått mye ned, mens andelen SUT og SUS har gått mye opp. Igjen er disse variablene fordelt ganske likt i de to forskjellige bøkene, som illustrert i figur 4-10. Figur 4-11 viser også at grubleoppgaver skiller seg veldig ut fra totalen. Faktisk er totalt sett over halvparten av oppgavene kategorisert som M og en tredel som PM. Det er Faktor som er mest ekstrem på dette punktet, som har redusert oppgaver hvor lave kognitive ferdigheter kreves til totalt 6 %. Andelen PM på grubleoppgavene er forholdsvis lik mellom de to bøkene, mens Faktor har nesten dobbelt så stor andel av oppgaver under M. Jeg har tidligere sagt at man kunne forvente en stor dominans av kategorien M på slike grubleoppgaver. Slik sett er det bare Faktor som svarer til forventingene. Totalt finner jeg 36 av totalt 107 oppgaver som er kategorisert som M, i slike grubleoppgaver. Andelen av M under grubleoppgaver utgjør dermed

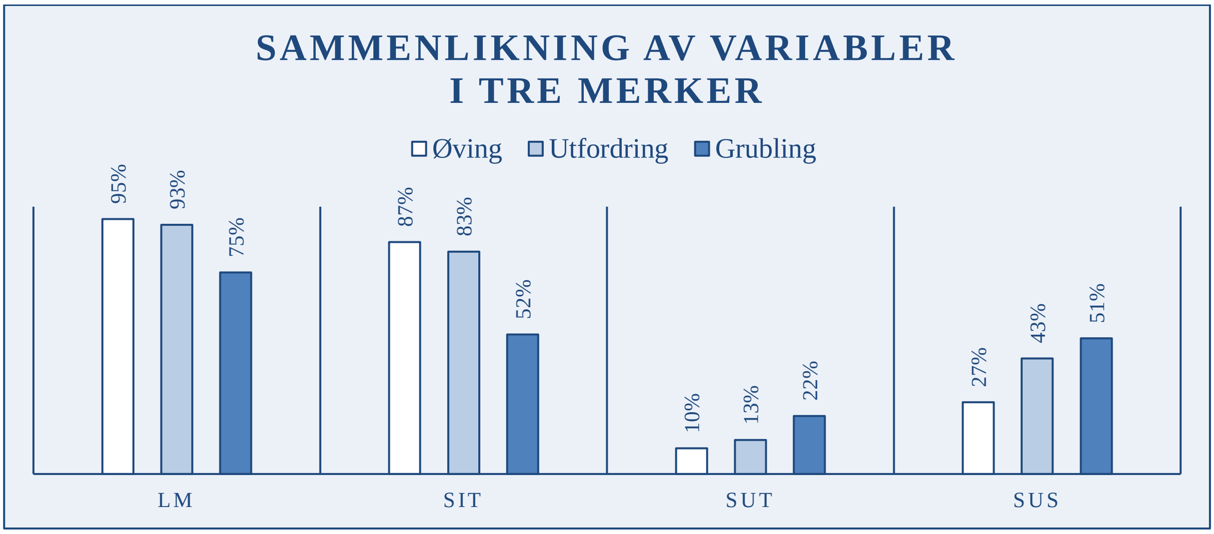
34 % av alle oppgavene som ble kategorisert som M. Dette til tross for at bare litt over 1 % av den totale mengden oppgaver er grubleoppgaver.

Noe å lure på fra Faktor skal ifølge Cappelen Damm (2016) være problemløsningsoppgaver. Problemløsningsoppgaver er bare oppgaver under kategori *matematikk*, og fra figur 4-12 ser man at 62 % av oppgavene er under denne kategorien i Faktor. Nesten alle de resterende oppgavene kommer under *prosedyrer med sammenheng*, som ikke helt vil være problemløsningsoppgaver, men fortsatt problemfylt. Her oppfyller Faktor sine egne målsetninger ganske bra.

Maximums *tren tanken* skal ifølge Lærerens bok (Alseth et al., 2013) være *«varierte problemløsningsoppgaver der elevene i større grad må vise sammensatt kompetanse og kreativitet»*. Fra figur 4-12 ser man at rundt en tredel av oppgavene er problemløsningsoppgaver, en tredel av oppgavene er problemfylte under kategorien *prosedyrer med sammenheng*, mens den siste tredelen stiller lave kognitive krav. Det vil si at elevene i mye større grad enn i vanlige oppgaver, må vise sammensatt kompetanse, selv om det gjenstår 32 % hvor elevene ikke får det Maximum påstår.

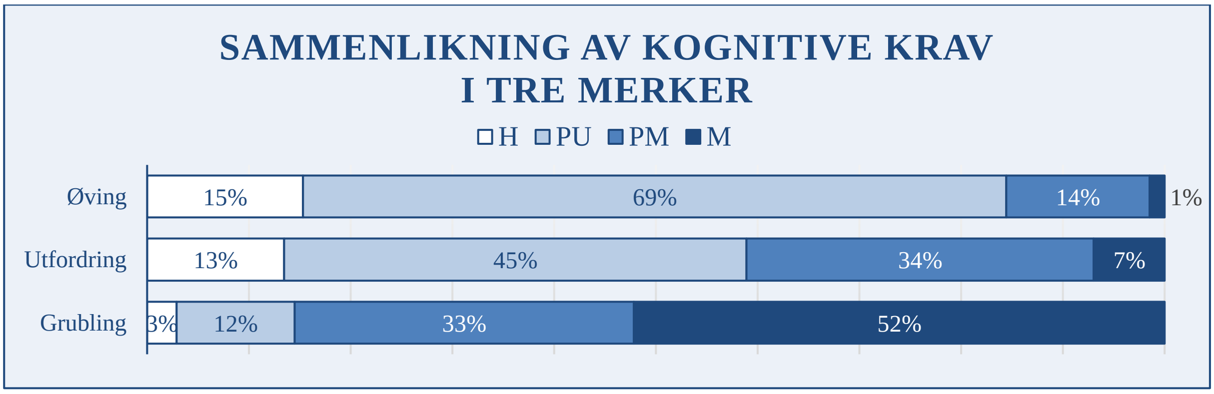
4.2.4.4 Sammendrag av merker

Figur 4-13 viser at når oppgavene blir mer krevende, formidler de en lavere andel av LM og SIT. Størst er overgangen fra utfordring til grubling. I tillegg går andelen SUT og SUS oppover når man får mer krevende oppgaver.



Figur 4-13: Sammenligning av variablene LM, SIT, SUT og SUS i de tre merkene; øvingsoppgaver, utfordringer og grubleoppgaver.

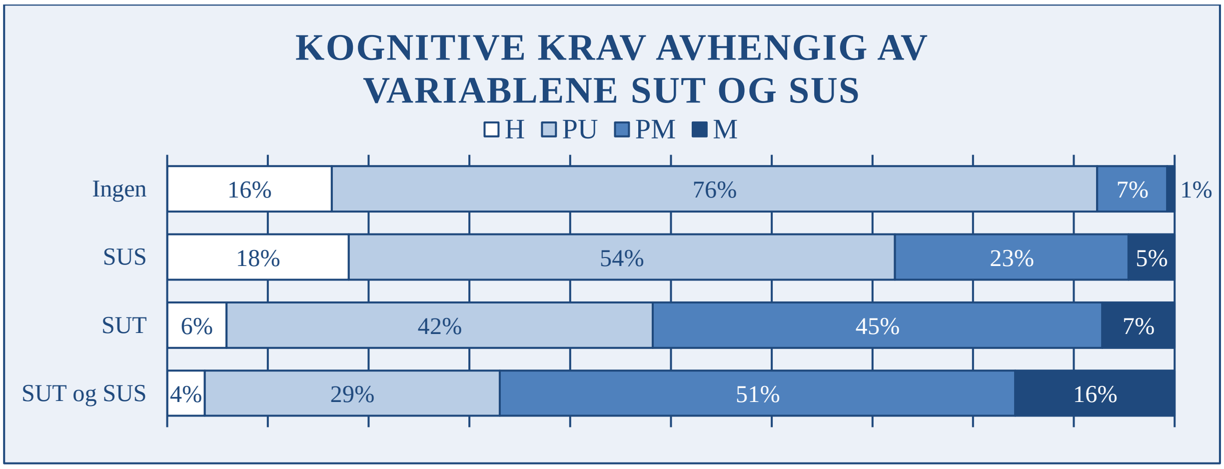
Figur 4-14 viser at både H og PU først synker en god del fra øving til utfordring, så litt mer fra utfordring til grubling. Der fordelingen av variablene LM, SIT, SUT og SUS utviklet seg kontrollert fra øving til grubling, var det mer drastiske endringer i kognitive krav, spesielt fra utfordring til grubling på kognitive krav.



Figur 4-14: Sammenligning av kognitive krav i de tre merkene; øvingsoppgaver, utfordringer og grubleoppgaver.

4.2.5 Kognitive krav ved gitte variabler.

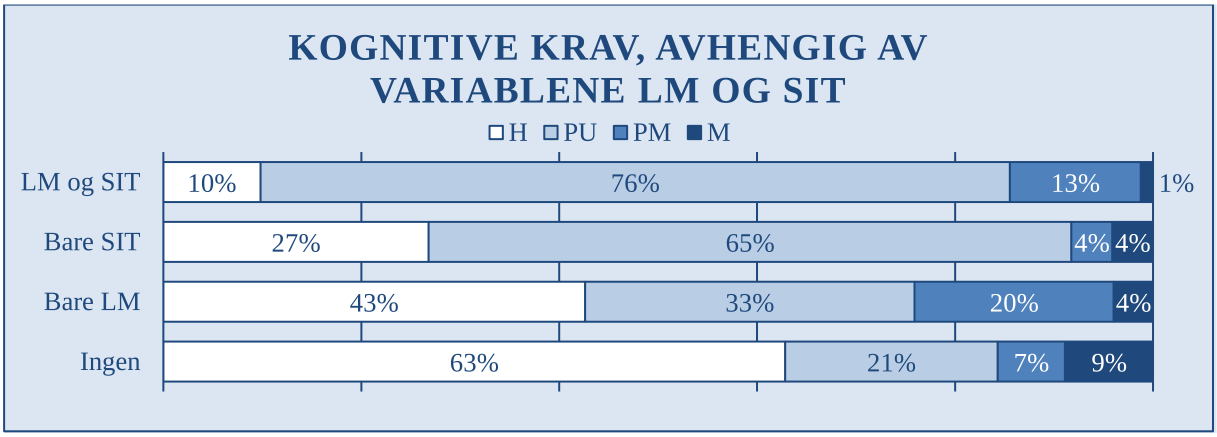
Det er nå tydelig at LM og SIT er dominerende variabler gjennom hele analysen. De er til stede i majoriteten av oppgavene, uansett oppgavetype. Dette til tross for at de avtar litt når oppgavene blir mer krevende. SUT og SUS derimot er ikke dominerende men øker betraktelig når oppgavene blir mer krevende. Her vil jeg vise hvordan Kognitive krav utvikler seg, først når SUT og SUS øker, så når LM og SIT minker. Jeg starter med å vise sammenhengen mellom kognitive krav i oppgaver som inneholder SUT, SUS, både SUT og SUS og ingen av delene.



Figur 4-15: Kognitive krav i variablene SUT, SUS, både SUT og SUS og uten SUT og SUS.

Figur 4-15 viser hvordan kognitive krav fordeler seg i det totale utvalget av oppgaver som er kategorisert som SUS, SUT, både SUT og SUS og verken SUT eller SUS. Totalt inneholdt de henholdsvis 1527, 620, 215 og 3720 oppgaver. Av figuren får vi at hvis ikke SUT eller SUS er representert så er det 92 % sjanse for at oppgaven kan løses med lite bruk av kognitive ferdigheter. Inneholder den SUS, er det 72 % sjanse for samme utfall. SUT scorer ganske mye bedre, og man kan se ut ifra figuren at sjansen for lave kognitive krav da er 48 %. Aller best scorer oppgaver som både har SUT og SUS, med bare 33 % sjanse for lave kognitive krav.

Det siste diagrammet i figur 4-16 framstiller kognitive krav når LM og SIT minker. Siden LM og SIT er så dominerende og inngår i så mange oppgaver valgte jeg her å se på kategoriene Bare LM, Bare SIT, LM og SIT og ingen av delene. Det som er forskjellig fra diagrammet over er at oppgaver i Bare LM ikke kan ha SIT, og oppgaver i Bare SIT ikke kan ha LM, mens oppgaver fra SUT også kunne ha SUS og motsatt.



Figur 4-16: Kognitive krav i variablene Bare LM, Bare SIT, LM og SIT og uten LM og SIT

Her blir ikke økningen i høye kognitive krav tydelig på lik linje med forrige diagram. Likevel ser vi at andelen M øker og ender på 9 %, noe som er høyere enn eksempelvis utfordringsoppgavene. I tillegg øker andelen H når LM og SIT avtar. De fire kategoriene LM og SIT, Bare SIT, Bare LM og ingen av delene inneholder for øvrig 4626, 97, 730 og 191 oppgaver.

4.3 Kvalitativ tilleggsanalyse av prosentbegrepet

Dette kapittelet vil presentere funnene av den induktive tilleggsanalysen, som er ment å kunne forklare og illustrere dypere sammenhenger blant funnene fra den vertikale analysen. Aller først vil jeg i tabell 4-5 gi en kvantitativ oversikt over antall sider, eksempler og oppgaver under prosentbegrepet i de tre bøkene.

Tabell 4-5: Oversikt over antall sider, eksempler og oppgaver omhandlende prosent.

	Maximum	**Faktor**	**Nummer**
Sider	12	16	10
Eksempler	9	4	4
Oppgaver	34 (82)	44 (127)	19 (39)
Oppgaver/side	6,8	7,9	3,9
Oppgaver/eksempel	9,1	31,8	9,8

Bøkene har ganske varierende mengder med sider, eksempler og oppgaver. Man kan se fra tallene som er uthevet i grønt, at det er to verdier som skiller seg særskilt ut. Nummer har halvparten så mange oppgaver per side som de andre bøkene, og Faktor har tre ganger så mange oppgaver per eksempel som de to andre. Kapittelet vil videre bestå av tre deler; (1) langsiktig mål og struktur, (2) eksempler og oppgaver, og (3) progresjon og illustrasjoner.

4.3.1 Langsiktig mål og struktur

De langsiktige målene i de tre bøkene varierte i stor grad. Tabell 4-6 viser en oversikt over alle målene omhandlende prosent i lærebøkene, samt strukturen gjennom kapittelet om prosent. Læreplanen legger tydelig vekt på sammenhengen mellom brøk, prosent, desimaltall og promille. Det er for øvrig bare Nummer som introduserer promille i 8. klasse. Videre har læreplanen fokus på at elevene skal kunne *vurdere* når bruken av brøk, prosent eller desimaltall er formålstjenlig. Ingen av bøkene nevner noe om dette i målene sine. De har heller ikke en eneste oppgave hvor det blir nevnt at de bør vurdere hvilket tallformat som egner seg. Maximum skriver for øvrig at *«Når du regner med prosent, er det viktig å se på tallene for å finne den enkleste måten å regne på. ...» s. 197*. Her sikter de til sammenhengen mellom brøk, prosent og desimaltall. Dette kommer rett før tre sammenhengende eksempler og syv oppgaver, før enda et eksempel legger grunnlag for åtte nye oppgaver som alle handler om å finne prosentandelen av tall. Jeg mistenker at den siterte setningen fort blir glemt og at den gjør like mye nytte som de fraværende setningene om samme tema i Faktor og Nummer.

Tabell 4-6: Langsiktige mål for opplæringen i Prosent fra Læreplanen, Maximum, Faktor og Nummer.

	Langsiktig mål	Struktur
Læreplanen	Mål for opplæringa er at eleven skal *kunne* - **Sammenligne** og **regne om** mellom desimaler, brøker, prosent og promille, samt **vurdere** i hvilke situasjoner ulike representasjoner er formålstjenlige.	
Maximum	Her skal du *lære å* - Regne med prosent - Gjøre brøk og desimaltall om til prosent og omvendt - Bruke prosentregning i noen situasjoner fra dagliglivet	1. Finn prosentandel 2. Finn prosentsats 3. Figurforståelse 4. Brøk, prosent og desimaltall 5. Finn prosentandel
Faktor	I dette kapittelet skal du få *lære om* - Prosentbegrepet - Regning med prosent - Sammenhengen mellom desimaltall, brøk og prosent - Hvordan vi finner prosenten	1. Introduksjon 2. Figurforståelse 3. Finn motsatt prosent 4. Brøk, prosent og desimaltall 5. Finn prosentandel 6. Finn prosentsats
Nummer	Etter dette delkapittelet skal du *kunne* - Forklare begrepene prosent og promille - Regne med prosent og promille	1. Introduksjon 2. Finn prosentandel 3. Brøk, prosent og desimaltall 4. Promille

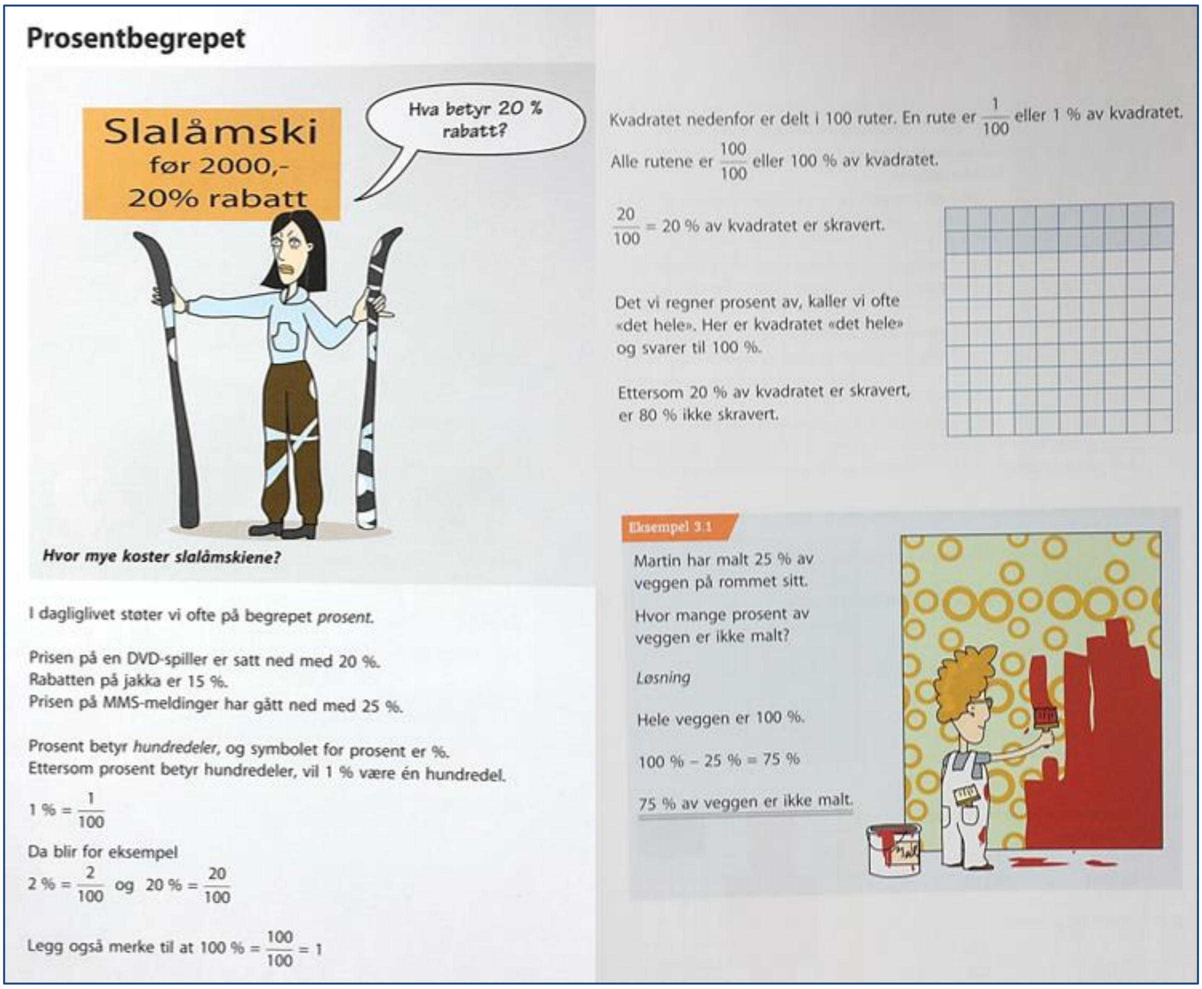
Kompetansemålet er for øvrig formulert slik at elevene skal *kunne* målene etter endt opplæring i 10 klasse. Det er bare Nummer som formulerer sine langsiktige mål på denne måten. Maximum og Faktor skriver henholdsvis at elevene skal *lære å*, og *lære om*. Det vil si at Kunnskapsløftet og Nummer har fokus på at elevene skal kunne ting etter endt opplæring, mens Maximum og Faktor har fokus på at elevene skal lære ting underveis i opplæringen. Om en elev får høy måloppnåelse på et mål om å *lære om prosentbegrepet*, betyr det ikke nødvendigvis at eleven kan stoffet til slutt. Om en elev derimot får høy måloppnåelse på et mål om å *kunne* *forklare begrepet prosent*, er det gitt at eleven kan stoffet etter endt opplæring. Dette framstiller et stort skille mellom Nummer og de andre bøkene.

Maximum og Faktor nevner sammenhengen mellom brøk, prosent og desimaltall i de langsiktige målene, mens Nummer har fokus på prosent og promille. Likevel kommer koblingen til brøk og desimaltall fram i strukturen på alle tre bøkene. Faktor og Nummer nevner spesifikt prosentbegrepet i de langsiktige målene, noe Maximum ikke gjør. Maximum utelot også en grundig introduksjon av begrepet, mens Faktor og Nummer bruker mer plass på å forklare begrepet. Det er dermed en viss sammenheng mellom målene og strukturen.

Maximums introduksjon til prosentbegrepet er på kun én linje og sier at *«prosent betyr hundredel eller del av hundre, og skrives med symbolet %.* $1\% = \frac{1}{100}$» (Tofteberg et al., 2013, s. 190). Deretter følger to eksempler som viser hvordan man finner henholdsvis 1 og 20 % av en mengde, før de skriver at «$100\% = \frac{100}{100} = 1$ *og dermed at 100 % av noe er alt!*» (Tofteberg et al., 2013, s. 191). De går derifra rett på regning med prosent, som de langsiktige målene sier. Etter å ha arbeidet med å finne prosentandel (typisk: finn 10 % av 500) og å finne prosentsats (typisk: hvor mange prosent er 3 av 20?), gjør Maximum en kobling mellom brøk og prosent, hvor et rutenett på 10 x 10 og en del påfølgende figurer blir sentrale. Dette rutenettet kunne gjerne blitt vist litt tidligere for å gi elevene en billedlig forståelse av prosentbegrepet.

På lik linje med rutenettet i figur 2.7 av Smith & Stein (1998) vil dette rutenettet kunne binde kunnskapen om prosent til noe annet enn bare en prosedyre. Det viser prosentbegrepet mer figurativt, på en måte hvor elevene lettere kan se hva prosent betyr.

Faktor på den andre siden har en ganske mye grundigere introduksjon enn Maximum, illustrert i figur 4-17. Til sammen bruker de en side på introduksjonen. Deretter følger en del figurer, hvor meningen er å få en enkel forståelse for prosent gjennom rutenett og etter hvert andre figurer.



Prosentbegrepet

Slalåmski
før 2000,-
20% rabatt

Hva betyr 20 % rabatt?

Hvor mye koster slalåmskiene?

I dagliglivet støter vi ofte på begrepet *prosent.*

Prisen på en DVD-spiller er satt ned med 20 %.
Rabatten på jakka er 15 %.
Prisen på MMS-meldinger har gått ned med 25 %.

Prosent betyr *hundredeler*, og symbolet for prosent er %.
Ettersom prosent betyr hundredeler, vil 1 % være én hundredel.

$1\ \% = \frac{1}{100}$

Da blir for eksempel

$2\ \% = \frac{2}{100}$ og $20\ \% = \frac{20}{100}$

Legg også merke til at $100\ \% = \frac{100}{100} = 1$

Kvadratet nedenfor er delt i 100 ruter. En rute er $\frac{1}{100}$ eller 1 % av kvadratet.

Alle rutene er $\frac{100}{100}$ eller 100 % av kvadratet.

$\frac{20}{100} = 20\ \%$ av kvadratet er skravert.

Det vi regner prosent av, kaller vi ofte «det hele». Her er kvadratet «det hele» og svarer til 100 %.

Ettersom 20 % av kvadratet er skravert, er 80 % ikke skravert.

Eksempel 3.1

Martin har malt 25 % av veggen på rommet sitt.

Hvor mange prosent av veggen er ikke malt?

Løsning

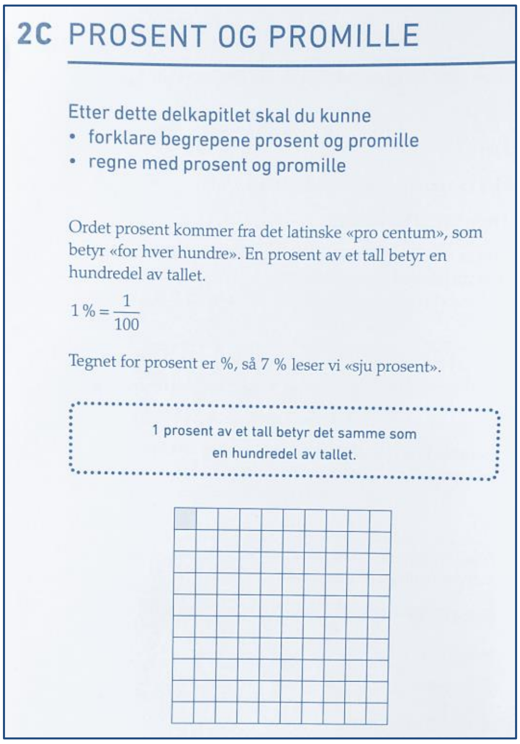
Hele veggen er 100 %.

100 % − 25 % = 75 %

75 % av veggen er ikke malt.

Figur 4-17: Introduksjon til prosentbegrepet i Faktor 8 (Hjardar & Pedersen, 2014, ss. 86-87)

Figur 4-18 viser at introduksjonen til Nummer er rimelig kort, samtidig som den har med det viktigste. Felles med Faktor har den rutenettet til illustrasjon. Dette blir dog ikke brukt *videre* til å bygge på forståelsen for prosentbegrepet, slik som i Faktor. I stedet går de rett videre til å finne prosentandelen og prosentsatsen av tall, og bruker ikke lengre rutenettet. Det tar ni sider før Nummer igjen viser en figur som skal bidra til å knytte forståelsen mellom prosent og areal. Dette er dumt, siden prosent er et begrep som lett lar seg illustrere ved figurer og rutenett.



2C PROSENT OG PROMILLE

Etter dette delkapitlet skal du kunne
- forklare begrepene prosent og promille
- regne med prosent og promille

Ordet prosent kommer fra det latinske «pro centum», som betyr «for hver hundre». En prosent av et tall betyr en hundredel av tallet.

$1\,\% = \frac{1}{100}$

Tegnet for prosent er %, så 7 % leser vi «sju prosent».

1 prosent av et tall betyr det samme som en hundredel av tallet.

Figur 4-18: Introduksjon til prosentbegrepet i Nummer 8 (Hole et al., 2014, s. 118)

4.3.2 Eksempler og oppgaver

I to av lærebøkene har jeg observert at oppgavene i stor grad er knyttet til tidligere eksempler. De fleste oppgavene kan løses bare ved hjelp av å anvende nøyaktig samme prosedyre som eksemplene. Figur 4-19 og 4-20 viser et eksempel og en påfølgende oppgave fra både Maximum og Faktor som illustrerer likheten.

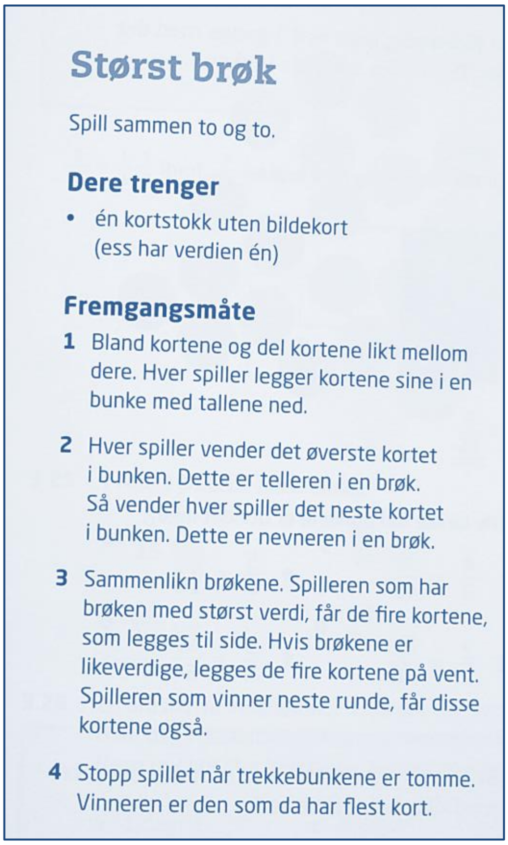
Maximum: eksempel 34	**Maximum: oppgave 3.116**
Ola har en månedslønn på 24 000 kr. Han betaler 28 % i skatt. Hvor mye betaler Ola i skatt? *Løsning:* Vi kan tenke på prosent som hundredeler: $\frac{24\,000 * 28}{100} = 6720$ Ola betaler 6720 kr i skatt.	Bilen til Gunnhild har gått 120 000 km. Da hun kjøpte bilen, hadde den gått 8 % av 120 000 km. Hvor langt hadde bilen gått da Gunnhild kjøpte den?

Figur 4-19: Eksempel og oppgave fra Maximum, hvor nøyaktig samme prosedyre kreves (Tofteberg et al., 2013, ss. 197-199).

Faktor: eksempel 3.4	Faktor: oppgave 3.42
Hvor mange prosent er 180 av 1500? *Løsning:* $\frac{180}{1500} = 0{,}12$ Ettersom $0{,}12 = \frac{12}{100}$ så er $0{,}12 = 12\ \%$. <u>180 er 12 % av 1500.</u>	Martin fikk 2500 kr i overskudd fra et loppemarked. Han vil gi 2000 kr av pengene til TV-aksjonen. Hvor mange prosent av overskuddet er det?

Figur 4-20: Eksempel og oppgave fra Faktor, hvor nøyaktig samme prosedyre kreves (Hjardar & Pedersen, 2014, ss. 100-101).

Maximum skiller ut fra de andre bøkene ved at de har innfør noe som de kaller for aktiviteter. Læreverket legger særlig vekt på *«å arbeide praktisk, utforskende og kreativt gjennom varierte aktiviteter»* (Alseth et al., 2013). Noen aktiviteter egner seg til å utforske matematiske emner, mens andre aktiviteter gir mengdetrening på en alternativ måte (Alseth et al., 2013). Ved å gi en alternativ innfallsvinkel til fagstoffet, skal de motivere og inspirere elevene.



Størst brøk

Spill sammen to og to.

Dere trenger

- én kortstokk uten bildekort (ess har verdien én)

Fremgangsmåte

1. Bland kortene og del kortene likt mellom dere. Hver spiller legger kortene sine i en bunke med tallene ned.
2. Hver spiller vender det øverste kortet i bunken. Dette er telleren i en brøk. Så vender hver spiller det neste kortet i bunken. Dette er nevneren i en brøk.
3. Sammenlikn brøkene. Spilleren som har brøken med størst verdi, får de fire kortene, som legges til side. Hvis brøkene er likeverdige, legges de fire kortene på vent. Spilleren som vinner neste runde, får disse kortene også.
4. Stopp spillet når trekkebunkene er tomme. Vinneren er den som da har flest kort.

Figur 4-21: Eksempel på aktivitet fra Maximum (Tofteberg et al., 2013)

Det er ingen aktiviteter under delkapittelet om prosent, så jeg illustrerer med en aktivitet fra delkapittelet om brøk. Aktiviteten i figur 4-21 vil gi elevene mengdetrening på å sette sammen brøker i en virkelighetsrelatert situasjon. Deretter får de øving i å vurdere størrelsene på brøkene opp imot hverandre. Samtidig blir disse matematiske prosedyrene implementert i en konkurranse, som kanskje gir elevene en ekstra drivkraft. Det kan tenkes at aktivitetene bidrar godt til å gi elevene et behov for å lære matematikken, selv om behovet i denne omgang ikke er intellektuelt. Uansett framstår aktivitetene som fine avbrekk i arbeidet med matematikken.

Nummer lar oftere elevene tenke litt mer selv, og forklarer ikke alt i sine eksempler. Dette blir illustrert i figuren 4-22. Elevene har ingen gitt framgangsmåte for å løse oppgave 2.62, så den krever betraktelig mer enn oppgavene fra Maximum og Faktor. Oppgaven er listet som en utfordring, og er et godt eksempel på problemfylt aktivitet i min forstand.

Nummer: eksempel 11	**Nummer: oppgave 2.62**
Vi skal finne 4 % av 800 kr. *Løsning:* $1\ \%\ av\ 800\ er\ \frac{800}{100} = 8.$ Det blir 8 kr. Så multipliserer vi med 4 for å finne 4 % av 800. Det blir 8*4=32. <u>Svaret blir 32 kr.</u>	2 % av et tall er 40. Hvor stort er tallet?

Figur 4-22: Eksempel og oppgave fra Nummer 8, hvor samme prosedyre ikke kan anvendes (Hole et al., 2014, ss. 120-122).

Jeg merket for øvrig at tre av fire eksempler omhandlende prosent i Faktor var kontekstløse (se figur 4-20), to av fire eksempler i Nummer var kontekstløse (se figur 4-22), mens alle eksemplene unntatt ett inneholdt kontekst i Maximum (se figur 4-19). Dette gjenspeiler Maximums mål om at elevene skal lære å bruke prosent i situasjoner fra dagliglivet.

I alle bøkene blir det brukt desidert flest sider, oppgaver, og eksempler på å finne prosentandelen av et tall. Dermed er det bemerkelsesverdig at bøkene introduserer tre forskjellige måter å gjøre dette på. Man ser av figur 4-23 at Maximum går via brøk når de skal finne prosentandelen av et tall. Ved å si at $20\ \% = \frac{20}{100}$ hevder de at $15 * 20\ \% = 15 * \frac{20}{100} = 3$. Jeg må innrømme at jeg finner det litt forstyrrende når de skriver $15 * 20\ \%$ på den måten. Det hadde vært noe annet å si at $20\ \%\ av\ 15 = 15 * \frac{20}{100} = 3$. Da framstår metoden som helt fin.

Faktor, på den andre siden, går via desimaltall når de skal finne prosentandelen av et tall. De legger til grunn at $35\ \% = 0{,}35$ og dermed får de at $0{,}35 * 1400\ kr = 490\ kr$. Samtidig unngår de skrivemåten som Maximum på forstyrrende vis brukte i sitt eksempel. Likevel ser det ut til at boken legger det opp på en slik måte at elevene mest sannsynlig vil velge å bruke kalkulator i utregningen, selv med enklere tall.

Til slutt viser Nummer hvordan man finner 4 % av 800. De går veien om én prosent, som skal bidra til at elevene skjønner overgangene til enhver tid. På et vis vil den framstå som en mer oppstykket måte å gjøre prosedyren fra Maximum på. Jeg regner med at progresjonen i lærebokserien vil komme til $\frac{800 * 4}{100} = 32$, etter hvert.

Maximum: eksempel 30	**Faktor: eksempel 3.3**	**Nummer: eksempel 11**
20 % av jentene i klasse 8C har kort hår. Det er 15 jenter i klassen. Hvor mange av jentene har kort hår? *Løsning:* Du må finne $\frac{20}{100}\ av$ 15. Det kan du gjøre slik: $15 * 20\ \% = 15 * \frac{20}{100}$ $= \frac{15 * \overbrace{\cancel{20}}^{1}}{\underbrace{\cancel{100}}_{5}} = 3$ <u>3 jenter i klasse 8c har kort hår.</u>	Regn ut 35 % av 1400 kr. *Løsning:* $35\ \% = 0{,}35$ $0{,}35 * 1400\ kr = 149\ kr$. <u>35 % av 1400 kr er 490 kr.</u>	Vi skal finne 4 % av 800 kr. *Løsning:* $1\ \%\ av\ 800\ er\ \frac{800}{100} = 8$. Det blir 8 kr. Så multipliserer vi med 4 for å finne 4 % av 800. Det blir 8 * 4 = 32. <u>Svaret blir 32 kr.</u>

Figur 4-23: Tre eksempler som tar for seg tre forskjellige måter å regne ut prosentandelen av et tall (Tofteberg et al., 2013, s. 191; Hjardar & Pedersen, 2014, s. 96; Hole et al., 2014, s. 120).

4.3.3 Progresjon og illustrasjoner

Maximum og Faktor legger ofte opp til en gjennomgående progresjon i arbeidet. Likevel var ikke progresjonen like tydelig som jeg forventet. For å vise dette vil jeg ta for meg tre oppgaver fra hver av bøkene.

Etter Maximum introduserte hvordan man finner prosentandelen av et tall kommer 12 oppgaver hvor man skal øve på dette. Først uten SUS, så med SUS, og oppgavene ser ut til å bli vanskeligere og vanskeligere. Det som egentlig skjer er at tallene blir større og større, samtidig som at spørsmålstillingen blir litt annerledes og konteksten endrer seg. Dette kan i noen tilfeller stille høyere kognitive krav til elevene, men i figur 4-24 viser jeg tre av disse 12 oppgavene, med formål om å belyse hvor like de faktisk er. Under vil jeg forklare hvorfor alle tre havner under lave kognitive krav.

3.97	Regn ut. **c** 2 % av 50
3.103	Sofie jogger 12 km. Petters joggerunde er 40 % av Sofies runde. Hvor langt jogger Petter?
3.107	Amir tjener 412 000 kr per år. Marie tjener 80 % av det Amir tjener. Hvor mye tjener Amir og Marie til sammen?

Figur 4-24: Tre oppgaver fra Maximum som viser variasjon innen PU (Tofteberg et al., 2013, ss. 192-193).

I alle tre oppgavene er det opplagt hva som må gjøres. Elevene må finne 2 % av 50, 40 % av 12 og 80 % av 412 000. De to øverste er praktisk talt helt like, mens den siste krever at man er obs på hvordan spørsmålet er formulert. Det er likevel ingen problem å regne ut Maries lønn, for så å addere den sammen med Amirs. Kjent fremgangsmåte og ingen kobling til noen større forståelse tyder på en ting. Disse blir dermed øvingsoppgaver, hvor de to siste i tillegg inneholder sammenheng utenfor skolen. I tillegg utvikler oppgavene seg på det viset at det først er prat om mengder (uten kontekst), så antall, lengder, kilo, areal og til slutt kroner per år. Det vil likevel ikke være mer problematisk å regne ut de siste oppgavene enn de første. Dette viser et bredt spekter av oppgaver som alle havnet under kategorien PU.

Faktor avslutter kapittelet om prosent med tre sider som omhandler å finne prosentsatsen. En hel side går på forklaring, oppfulgt av et eksempel og deretter oppgaver. Oppgavene ser med første øyekast ut til å gå fra helt grunnleggende til ganske utfordrende. Likevel byr de aller fleste oppgavene på det samme som foreliggende eksempel gjør. Figur 4.25 viser varierende oppgaver fra Faktor som også her havner under PU.

Alle disse oppgavene, og flere til, øver på nøyaktig den samme prosedyren, nemlig å finne ut hvor mange prosent 4 er av 25, hvor mange prosent 12 er av 20 og hvor mange prosent 50 er av 80. Oppgave 3.41 har en vri hvor elevene må koble at 'prosentsatsen hunner' er 100 minus 'prosentsatsen hanner' i deloppgave b. Dette er for øvrig ikke noe nytt, og introduseres allerede i introduksjonen til kapittelet (se figur 4-16). Oppgave 3.43 ser også ut til å spørre om mer enn de andre oppgavene, men igjen blir man lurt. Boka legger nemlig til rette for at utregningen skal gå via brøk, så oppgave a er bare et steg på veien for å finne svaret på b. Dermed tilfaller alle oppgavene kategori PU, også her.

3.39 Hvor mange prosent er (…)

b 4 av 25

3.41 Lotte har et akvarium med 20 fisker. Av disse er 12 hanner.

Hvor mange prosent av fiskene er

a hanner? **b** hunner?

3.43 Hermann og Lotte skal sykle til hytta. Det er 80 km. Etter 50 km vil de ha en pause.

a Hvor stor brøkdel av veien vil de sykle før pausen?

b Hvor mange prosent er det?

Figur 4-25: Tre oppgaver fra Faktor som viser variasjon innen PU (Hjardar & Pedersen, 2014, ss. 100-101)

Man må helt til den siste oppgaven i kapittelet for å finne noe som skiller seg ut. I figur 4.26 må man forstå metersystemet og omforme noen tall før man kan anvende samme prosedyre som i de andre oppgavene. I tillegg må man tolke spørsmålet (oppgave b) før man vet hva man skal regne ut, for så å gi et tolkende svar etterpå. Ordet *forhold* blir også introdusert, noe som var både passende og på tide.

3.44 En struts kan bli 3 meter lang. Den legger egg som er 15 cm lange.
En kolibri kan bli 6 cm lang. Den legger egg som er 12 mm lange.

a Hvor mange prosent er lengden av strutseegget i forhold til lengden på strutsen?

b Hvilken av fuglene legger det lengste egget i forhold til kroppslengden?

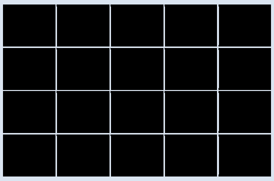
Figur 4-26: En oppgave fra Faktor som skiller seg ut fra de andre (Hjardar & Pedersen, 2014, ss. 101)

Nummer fungerer litt annerledes enn de andre bøkene, da oppgavetypene varierer mer, og det sjeldent kommer to like oppgaver etter hverandre. Dette illustrerer jeg med tre oppgaver fra delkapittelet om brøk, prosent og desimaltall i figur 4-27.

2.71 Skriv tallene i stigende rekkefølge

$10\ \%$ $\quad \frac{2}{5}$ $\quad \frac{3}{4}$ $\quad 0{,}30$ $\quad 25\ \%$ $\quad 0{,}80$ $\quad 90\ \%$ $\quad \frac{7}{4}$ $\quad 200\ \%$

2.73 Simen har bakt sjokoladekake og delt den opp slik som du ser på bildet.



Hvor stor del av kaka er

a en kolonne? Skriv svaret som brøk, desimaltall og prosent.

b en rad? Skriv svaret som brøk, desimaltall og prosent.

c et kakestykke? Skriv svaret som brøk, desimaltall og prosent.
Hvor mange kakestykker er 50 % av kaka?

2.74 a Forklar hva ordet prosent betyr.

b Forklar sammenhengen mellom brøk, desimaltall og prosent.
Gi minst to eksempler.

Figur 4-27: Tre oppgaver fra Nummer som viser god variasjon av oppgaver (Hole et al., 2014, ss. 124-125)

Oppgavene likner ikke på hverandre i det hele tatt, og illustrerer et mangfold av variasjon som verken Maximum eller Faktor har. I Nummer er dette er en typisk måte å framstille oppgaver på, hvor alle bygger forståelse for prosentbegrepet og koblingen til brøk og desimaltall. Faktisk er slike oppgaver fraværende i de andre bøkene (under prosent). Nummer blir dermed ganske ulik de to andre bøkene når det kommer til kreativitet i oppgaveformuleringen. Det merket jeg godt gjennom analyseprosessen, hvor analysen av Nummer tok rimelig mye lengre tid enn de andre bøkene.

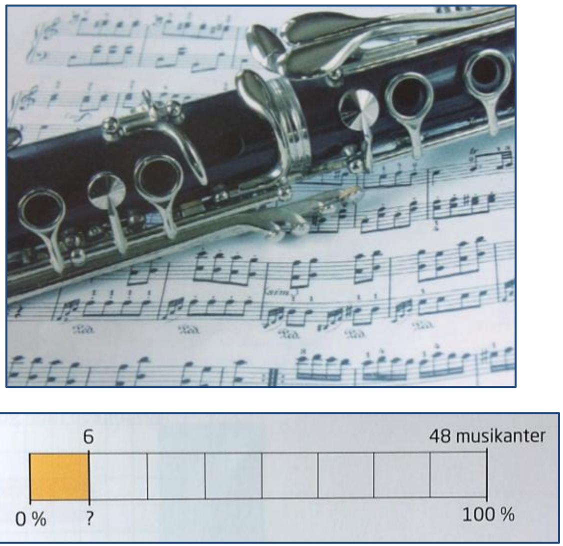
Ikke bare varierer Nummer mer enn de andre bøkene, men spørremåten er ofte ganske forskjellig i tillegg. Nummer har større andel oppgaver hvor spørsmålet krever en tolkning og refleksjon rundt noe. Først må man tolke ut ifra spørsmålet hva man må regne ut, deretter regne det ut, for så å gi et reflekterende svar. Slike spørsmål vil uten tvil sette tankene i sving på en annen måte enn ordinære oppgaver, som er illustrert i figur 4-24 og 4-25. Figur 4-28 viser to eksempler på slike oppgaver. I kapittelet om prosent inneholdt Maximum, Faktor og Nummer henholdsvis 2, 1 og 5 oppgaver med slike formuleringer. Det utgjør 2%, 1 % og 13 % av alle oppgavene i hver av bøkene.

2.60 Du kan velge mellom to tilbud. Du kan få 15 % avslag av 1000 kr,
eller du kan få 30 % avslag av 500 kr.
Hvilket av tilbudene vil du velge? Hvorfor?

2.64 En jakke koster 1000 kr. Prisen på jakka økes med 10 % etter nyttår. (…)
På salget i mars gir butikken 10 % avslag på jakka. (…)
c Er prisen den samme som før nyttår? Begrunn svaret.

Figur 4-28: To oppgaver fra Nummer som viser en spesiell type spørsmålstilling som krever både tolking, utregning og refleksjon (Hole et al., 2014, ss. 121 og 123).

Figurer og illustrasjoner kan ofte bidra til forståelse, samt å se sammenhenger. Dette er et punkt hvor alle bøkene har mye å gå på. 5 av totalt 15 bilder i Maximum er illustrasjoner som skal bidra til å hjelpe på forståelsen. Faktor har 9 av 30, mens Nummer har 1 av 3. Dette utgjør henholdsvis 33 %, 30 % og 33 %. Resten av bildene viser ganske enkelt kontekst til oppgaver, noe som i utgangspunktet bare ser ut til å fylle ut tomrom på sidene. Disse bildene spiller nok likevel en rolle, da jeg ser for meg at det er lettere å arbeide i en bok med fine bilder, enn en kjedelig bok i svarthvitt. Faktor og Nummer skiller seg som vanlig ut. Denne gangen med henholdsvis flest og færrest bilder. Figur 4-29 viser eksempel på en illustrasjon som skal bidra til økt forståelse, og et bilde som viser konteksten til eksempelet.



Figur 4-29: Eksempel på bilde som viser kontekst og illustrasjon som skal bidra til økt forståelse fra Maximum 8 (Tofteberg et al., 2013, s. 195)

5 Diskusjon

Studien min har hatt som mål å finne ut i hvilken grad lærebøker på 8. trinn legger til rette for problemfylt aktivitet. For å belyse dette, har jeg tatt for meg de tre mest brukte bøkene, og satt sammen et konseptuelt rammeverk som bakgrunn for en horisontal og en vertikal analyse. Den vertikale analysen har vært hovedtyngden i oppgaven, og har gitt resultatene som gjør det mulig å trekke slutninger rundt problemstillingen. I tillegg gjennomførte jeg en kvalitativ tilleggsanalyse for å ta tak i en del ting som ikke ble plukket opp i den kvantitative undersøkelsen.

Det store spørsmålet som enda ikke er svart på er i hvilken grad oppgavene i den vertikale analysen er problemfylt eller ikke. Dette kommer ikke direkte fram som et resultat i resultatdelen, men vil heller framstå som en tolkning av resultatene, via verdiene som ligger til grunn for mitt konseptuelle rammeverk. I dette kapittelet vil jeg aller først oppsummere resultatene fra den vertikale analysen, og sammenligne dem med resultater fra tidligere forskning. Deretter vil jeg bruke resultatene fra undersøkelsen til å diskutere i hvilken grad oppgavene legger til rette for problemfylt aktivitet. Til slutt vil jeg formulere et helhetsinntrykk av bøkene, basert på hele undersøkelsen, før jeg diskuterer eventuelle konsekvenser dette vil få for skolen og elevene.

5.1 Oppsummering av resultater

Av totalt 5921 oppgaver fant studien at 95 % av oppgavene hadde en kobling til et *langsiktig mål*, mens 83 % hadde *sammenheng innenfor tema*, 11 % hadde *sammenheng utenfor tema* og 27 % hadde *sammenheng utenfor skolen*. De kognitive kravene fordelte seg med 16 % *hukommelse*, 68 % *prosedyrer uten sammenheng*, 14 % *prosedyrer med sammenheng* og 2 % *matematikk*. Totalt sett betyr det en fordeling på 84 % lave kognitive ferdigheter og 16 % høye kognitive ferdigheter.

Innad i bøkene var den isolerte fordelingen som vist i tabell 5-1. Jeg har uthevet noen verdier med grønt for å påpeke tilsynelatende gode verdier. Alle bøkene har en variabel under *formidlet til elevene* hvor de utmerker seg positivt i forhold til de andre bøkene. Faktor har størst andel SIT, Maximum har størst andel SUT og Nummer har størst andel SUS. Figur 4-13 og 4-14 illustrerte hvordan store andeler SUT og SUS gir høyere kognitive krav. Den høye andelen i SUT og SUS er dermed en fordel i henholdsvis Maximum og Faktor. I tillegg viste samme illustrasjoner hvordan lave andeler LM og SIT gir høyere kognitive krav. Dermed gir den høye verdien på SIT i Faktor et negativt preg i form av kognitive krav. Det er likevel ikke negativt med høy andel SIT, men heller en svak side med høyt kognitivt krevende oppgaver at de ikke greier å koble oppgavene innad i tema.

Tabell 5-1:oversikt over de isolerte resultatene fra alle kategoriene innad i bøkene.

	Formidlet til elevene				Forventet av elevene			
	LM	SIT	SUT	SUS	H	PU	PM	M
Faktor	93 %	90 %	9 %	19 %	16 %	74 %	8 %	2,6 %
Maximum	96 %	81 %	15 %	27 %	14 %	69 %	15 %	1,5 %
Nummer	96 %	81 %	8 %	34 %	19 %	63 %	17 %	1,7 %

Funnene av kognitive krav passer godt overens med hva Charalambous et al. (2010) fant i sine studier i lærebøkene fra Kypros og Irland der rundt 85% av oppgavene hadde lave kognitive krav. Studien til Brändström (2005) viser varierende verdier i de tre svenske bøkene, men som regel lå verdien på lave kognitive krav mellom 80 og 90 %. Jones & Tarr (2007) rapporterte også om liknende resultater fra amerikanske lærebøker i tidsrommet 1952-2004, hvor de populære lærebøkene lå mellom 83 og 100 % lave kognitive krav gjennom fire matematiske tidsepoker.

I tidligere studier av norske lærebøker har funnene vært ganske like, og alle viser til stor overvekt av kategorien *prosedyrer uten sammenheng*. Johnsen & Storaas (2015) fant 82 % *prosedyrer uten sammenheng* i den litt eldre lærebokserien til Cappelen Damm (Faktor 1, 2 og 3 for ungdomstrinnet). Til sammenligning fant jeg 74 % i den nyere boken for 8. trinn (Faktor 8 for ungdomstrinnet). Dette var litt over snittet, som lå på 68 % i min studie. Enda større sammenligningsgrunnlag er det mellom studien min og studien til Jopperud (2015). Hun fant 86 % *prosedyrer uten sammenheng* i Faktor 8 under temaet algebra. Figur 4-5 viser at jeg fant 87 % *prosedyrer uten sammenheng* i samme bok og samme tema.

Det er helt tydelig at de norske lærebøkene har en sterk link til lærebøkene fra Sverige, USA, Kypros og Irland, mens andre land som eksempelvis Taiwan skiller seg ut. Dette er ikke overraskende med tanke på hvor vestlig fokusert vi er i Norden. Mayer et al. (1995) og Zhu &

Fan (2006) fant også resultater som tyder på at bøker fra Asia, nærmere bestemt Kina og Japan, også skiller seg ut fra den vestlige kulturen med å anvende mer krevende oppgaver i større grad.

Sammenligningen av de tre merkene i min studie, øvingsoppgaver, utfordringer og grubleoppgaver, viste at merkene stemte godt overens på tvers av bøkene. Gjennom utviklingen (i nevnt rekkefølge) sank LM og SIT gradvis mens SUT og SUT økte gradvis. Utviklingen gikk fra 15 prosent høye kognitive krav på øvingsoppgaver til 85 % høye kognitive krav på grubleoppgaver. Denne sammenhengen var overførbar til totalen av oppgaver i tillegg. Figur 4-15 og 4-16 viser at en økning i SUT og SUS førte til en stor økning i PM og M. På den andre siden så førte en nedgang i LM og SIT til en økning i H og M.

De nevnte sammenhengene var tydelig, noe som viser til at rammeverket er godt satt sammen og at de ulike delene faktisk relaterer til hverandre på et fornuftig vis. Dette styrker reliabiliteten i oppgaven.

5.2 Problemfylt aktivitet i lærebøkene

I en mailutveksling med en representant for Cappelen Damm, forlaget bak læreverket Faktor (Hjardar & Pedersen, 2014), lærte jeg at den største grunnen til at lærere foretrekker Faktor som læreverk er fordi boken «*forbereder elevene veldig godt til eksamen*»[1]. Det får meg til å tenke – hvis Faktor forbereder elever til en problemfri eksamen, kan boken da reflektere en problemfylt læreplan?

Tidlig i kapittel 2 skrev jeg at Schoenfeld (1993) hadde to kriterier for at en oppgave skal være et problem. Disse kriteriene var at (1) elevene måtte være interessert og ønske å finne en løsning, og at (2) elevene ikke hadde noen umiddelbar løsningsmetode. Under den delen av rammeverket som er *forventet av elevene* har jeg likevel innført kategorier som rettferdiggjør bruken av oppgaver der ikke alle kriteriene til Schoenfeld er til stede, men som likevel vil stille høye nok kognitive krav til elevene. Da sikter jeg spesifikt til *prosedyrer med sammenheng*, hvor man finner breie retningslinjer til framgangsmåte, men likevel må tenke godt over hvordan man går fram. I tillegg viser disse oppgavene til viktige sammenhenger som vil føre til økt matematisk forståelse og større kognitive ferdigheter. Dermed har jeg sagt at alle oppgaver som

[1] Mailkorrespondanse 27.2.2017 med Hilde Margrethe Bjørklund, Markedsansvarlig i realfag, Cappelen Damm Undervisning.

kommer under de to kategoriene *prosedyrer med sammenheng* og *matematikk* i utgangspunktet vil føre til problemfylt aktivitet. På den måten er mine krav for problemfylt aktivitet i form av kognitive krav litt mildere enn Schoenfelds (1993) definisjon av problemløsningsoppgaver. Det framstår også naturlig, at en problemfylt oppgave ikke nødvendigvis må være problemløsning.

I tillegg har jeg tatt hensyn til den andre delen av rammeverket som går på hva som er formidlet til elevene. Fuller et als. (2011) 1. punkt sier at oppgavene må ha både langsiktig mål og aktivitetsmål. Jeg definerte aktivitetsmål til å handle om sammenhenger, og viste til tre tydelig avgrensede sammenhenger en oppgave kan vise til. Disse er *sammenheng innenfor tema*, *sammenheng utenfor tema* og *sammenheng utenfor skolen*. Derfor må alle oppgaver som skal kunne godtas under problemfylt aktivitet, inneholde langsiktig mål og aktivitetsmål. Sistnevnte blir da forstått som *minst en av variablene SIT, SUT og SUS*. Dette er nødvendige variabler for å tilfredsstille et intellektuelt behov, men som ikke er tilstrekkelig i seg selv for at en oppgave skal være problemfylt.

Tabell 5-2: Oversikt over oppgaver som havner under problemfylt aktivitet fra den prosentvise totalfordelingen.

	Ingen formidlet	LM	SIT	SUT	SUS	LM+SIT	LM+SUT	LM+SUS	SIT+SUT	SIT+SUS	SUT+SUS	SIT+SUT+LM	SIT+SUS+LM	SUT+SUS+LM	SIT+SUT+SUS	SIT+SUT+SUS+LM
H	1	2,8	0,4	0,4	0,7	6,6	0,1	2,5	0	0,1	0,1	0,1	1,4	0,1	0	0
PU	0,3	2,7	0,6	0,1	0,2	46,5	0,2	1,2	0,1	0,4	0,2	3	12	0,2	0	0,7
PM	0,1	0,7	0	0,1	0	3,7	0,3	0,7	0	0,1	0	2,5	3,5	0,9	0	1
M	0,1	0,2	0	0,1	0	0,3	0,1	0,2	0	0,1	0,2	0	0,4	0,1	0	0,4

Sammen vil de to delene oppfylle kravene for at en oppgave skal være problemfylt. I tabell 5-2 er det de mørkeblå rutene som kommer innenfor problemfylt aktivitet, mens resten kommer utenfor. **Til sammen utgjør disse oppgavene 14,1 % av alle oppgavene jeg har analysert.** Det vil si at 14,1 % av oppgavene i de tre bøkene vil gi elevene problemfylt aktivitet. Totalt faller 84,4 % av oppgavene utenfor det mørkeblå feltet fordi de har for lave kognitive krav, mens 1,5 % faller utenfor på grunn av mangel på langsiktig mål og sammenheng.

Det er tydelig at det er den kognitive delen av rammeverket som er mest avgjørende for utfallet. Som tidligere nevnt holder Maximum seg rundt gjennomsnittet og internt kommer 14,8 % av oppgavene i Maximum under problemfylt aktivitet. Faktor ligger langt under snittet på 8,9 %, mens Nummer som vanlig er hakket over Maximum på 17,4 %.

Rene øvingsoppgaver (i Schoenfelds forstand), hvor man er bedt om å huske noe, repetere noe eller øve på prosedyrer, vil være oppgaver under H og PU, som unngår variablene SUT og SUS. Disse oppgavene har ingen kontekst, viser ikke til noen sammenheng utenfor tema, de har forutsigbar framgangsmåte og løses enkelt ved å anvende prosedyrer man tidligere har sett eller øvd på. Totalt utgjør dette 60,9 % av alle oppgavene jeg har analysert, og de vises i tabell 5-2 med rød bakgrunn. Dette vil si at rundt 40 % av alle oppgavene har noe mer kreativt med seg enn øvingsoppgavene. Det vil si at han hadde rett i sin påstand om at flertallet av oppgaver er slike øvingsoppgaver. Maximum var som vanlig nærmest snittet på 58 %, mens Faktor hadde svimlende 72 % og Nummer hadde 55 %. Med disse tallene kan jeg godt tro på markedsansvarlig for realfag ved Cappelen Damm Undervisning, som sa at Faktor forbereder elevene veldig godt til eksamen, om eksamen på lik linje er problemfri. Det boken for øvrig ikke klarer er å formidle en problemfylt læreplan samtidig.

Oppgavene som ikke havner under verken problemfylt aktivitet eller øvingsoppgaver vil være i en gråsone som består av oppgaver som enten er kognitivt krevende uten å gi intellektuelt behov, eller oppgaver som gir SUT eller SUS men som ikke er kognitivt krevende. Flesteparten er bare øvingsoppgaver som er knyttet opp imot sammenhenger utenfor skolen.

5.3 Totalinntrykk av bøkene

Resultatet av den kvalitative tilleggsanalysen førte til en grundigere forståelse av variasjonen mellom bøkene. Maximum holdt seg ofte nøytral og skilte seg sjeldent ut fra de andre bøkene. Faktor og Nummer skilte seg derimot mer ut, og slik som jeg ser det, representerer de to ytterpunkter på hver sin side av Maximum.

Det som kjennetegner Faktor er at den er kortere enn de andre, inneholder færre oppgaver, men oppgavetettheten er størst. Den har få eksempler men mange illustrasjoner. Illustrasjonene viser dog som regel mest kontekst, noe som er typisk for alle bøkene. Oppgavene er ofte veldig sterkt knyttet til eksemplene og progresjonen er liten. Den varierer mye i kontekst, men dette fører sjeldent til høyere kognitive krav. Boken vektlegger meningen bak problemer i svært liten grad, noe som støttes opp av den vertikale analysen som sier at Faktor inneholdt rundt halvparten så stor prosentandel oppgaver under *prosedyrer med sammenheng* som de to andre bøkene. Likevel hadde Faktor litt større andel oppgaver under *matematikk* enn de to andre. Disse oppgavene kom i stor grad fra merket, *Noe å lure på,* som kom etter hvert kapittel, men de klarte ofte ikke å koble oppgavene mot kapittelet de skulle være en del av eller et spesifikt langsiktig mål. Dette førte til at mange av de kognitivt vanskelige oppgavene mistet intellektuelt behov. Faktisk hele 43 % av oppgavene som var kategorisert som *matematikk* ble ikke sett på som problemfylt av denne grunnen. Gjennom 2,7 % oppgaver under *matematikk* vil dermed Faktor bare inneholde 1,4 % problemfylt aktivitet med utgangspunkt i den kategorien. Den eneste store fordelen med Faktor ble dermed borte, da Maximum og Nummer begge havnet på 1,3 %. Faktor var lett å analysere i forhold til Maximum og Nummer, og det tar jeg som et tegn på at den jevnt over ikke holdt oppgavene på samme nivå som de andre bøkene. Gjennom boken har cirka 1/5 av oppgavene sammenheng utenfor skolen. Sammenlignet med Maximum på rundt 1/4 og Nummer på rundt 1/3 blir det litt lite.

Nummer, på den andre siden, er den lengste boken, men har desidert minst oppgavetetthet. Dette fordi de ofte bruker litt store oppgaver til å introdusere tema eller sette nye ideer og tanker i perspektiv. Boken har forholdsvis få eksempler, men oppgavene er veldig godt variert og vil gi elevene mye større utfordringer enn gjennom boken Faktor. Ofte gir boken elevene mulighet til å tenke selv, før de introduserer algoritmer og prosedyrer. Spørsmålene er i mye større grad enn i de andre bøkene formulert på en slik måte at elevene må tolke spørsmålet, selv finne ut hva som må regnes ut (og hvordan), for så å tolke utfallet og gi et svar som reflekterer forståelse av problemet. Boken inneholdt færrest illustrasjoner, så den framstår kanskje som litt kjedelig på den måten. Gjennomgående har de et stort fokus på at elevene etter endt opplæring skal *kunne forklare* fenomener. Dette i sterk kontrast til de andre bøkene, da spesielt Faktor. Derfor framstår Nummer på en helhetlig måte som ganske nyskapende og annerledes. Boka har størst andel *prosedyrer med sammenheng*, men også størst andel *hukommelse*. En stor andel *hukommelse* er ikke så bra, men i Nummer var disse oppgavene ofte formulert på en slik måte at elevene måtte forklare fenomener. Dette er helt særegent for Nummer, da oppgavene under *hukommelse* i de andre bøkene i mye større grad handler om å huske et tallsvar. I tillegg scorer boken best på *sammenheng utenfor skolen*, noe som gir elevene en god kobling mellom teoretisk matematikk og matematikk i dagliglivet.

Maximum framstår som en god blanding mellom de to andre bøkene. Den er litt kortere enn Nummer, men har større oppgavetetthet. Derfor ender Maximum opp med flest oppgaver av alle bøkene. Oppgavene er for øvrig fordelt slik at Maximum har mindre *prosedyrer uten sammenheng* enn Faktor og mindre *prosedyrer med sammenheng* enn Nummer. Samtidig har faktisk Maximum minst andel av både *hukommelse* og *matematikk*. Boken har relativt få oppgaver per eksempel, på lik linje med Nummer, men har flere illustrasjoner enn Nummer.

Likevel er illustrasjonsbruken til Faktor enda større. I likhet med Faktor, er oppgavene ofte sterkt knyttet til eksemplene. Variasjonen i kontekst er stor, uten at oppgavene blir mer krevende av den grunn. I motsetning til Nummer, har Maximum i liten grad spørsmål som krever en tolkning av teksten. Likevel er de til stede, i motsetning til Faktor, hvor slike formuleringer er veldig sjeldne. På samme måte som i Faktor, varierer oppgavetypene mindre enn i Nummer, men Maximum skiller seg ut ved å være den boken som er best til å knytte sammenhenger til andre tema. Helhetsbildet gjør at Maximum virker trygg og tradisjonell, samtidig som den utfordrer elevene til å tenke litt mer selvstendig. Bortsett fra liten variasjon i oppgavetyper, virker boken god på de fleste punkt. Når det gjelder variasjon i oppgavetyper har både Maximum og Faktor mye å lære av Nummer.

Basert på følelsen av at Nummer hadde større variasjon enn de andre, så kodet jeg Excel-arkene mine til å regne ut hvor mange oppgaver som ikke liknet på oppgaven rett foran. Med det fikk jeg et mål som viser i hvor stor grad de ulike bøkene varierte. Med så mange kriterier som fins i rammeverket var det lite som skulle til for å få en endring. Likevel endte jeg opp med at Faktor bare varierte i 25 % av oppgavene, mens Maximum varierte i 40 % og Nummer varierte i 45 %. Det vil si at 75 % av oppgavene i Faktor hadde samme utgangspunkt som oppgaven i forkant, bare med andre tall. Tallene viser hvor enfoldig Faktor faktisk er i forhold til Maximum og Nummer.

5.4 Mulige konsekvenser på ungdomstrinnet

Målet for opplæringen er som nevnt at elever skal utvikle matematisk kompetanse, som Niss (2007) definerer som evnen til å forstå, vurdere, utføre og bruke matematikk i matematiske situasjoner. Slik som fordelingen av problemfylt aktivitet er i bøkene jeg har analysert, vil det være en stor skeivfordeling blant disse evnene. Forståelse og vurdering kommer under problemfylt aktivitet som er å finne i under 15 % av oppgavene, mens utførelse og bruk er godt implementert i over 85% av oppgavene. I storparten av bøkene vil elevene derfor lære adskilte grunnsteiner for videre læring, mens bare en liten del vil fokusere på konseptuell forståelse som kan binde grunnsteinene sammen. Dette kan etterlate store hull i elevenes kompetanse. Elevene vil kanskje likevel føle at de jobber effektivt og godt, i den forstand at de kan lære og utføre matematikken presist og kjapt. Dette uten at oppgavene innebærer en dypere mening og forståelse. Så stor overvekt av lave kognitive krav og da spesielt *prosedyrer uten sammenheng* vil påvirke elevenes læringsmuligheter negativt.

Kilpatrick, Swafford & Findell (2001) har formulert det de kaller for *mathematical proficiency* (matematisk kompetanse) gjennom fem punkter.

1) *Conceptual understanding* handler om forståelsen for både fakta og metoder, samt sammenhengen mellom dem.
2) *Procedural fluency* handler om forståelsen for valg av passende prosedyrer i gitte situasjoner, samt å bruke dem på en effektiv måte.
3) *Strategic competence* handler om evnen til å representere problemer matematisk, samt å kunne løse matematiske problemer.
4) *Adaptive reasonning* handler om evnen til å kunne drøfte og tenke logisk i forskjellige situasjoner, samt å kunne forklare og bevise sin fremgangsmetode.
5) *Productive disposition* handler om hvordan man klarer å se nytten i matematikken, og kobler dette til teorien som ligger bak.

Elever med *conceptual understanding* må kunne sammenhengen mellom fakta og metoder, altså mer enn bare fakta og metoder isolert sett. De to lave kognitive kravene, *hukommelse* og *prosedyrer uten sammenheng,* gir nettopp isolerte fakta og metoder, og bidrar dermed ikke til konseptuell forståelse. I så måte vil de tre lærebøkene gi elevene få muligheter til å oppnå konseptuell forståelse, da 84 % av oppgavene er under lave kognitive krav.

Procedural fluency vil i noen grad kunne kobles til *prosedyrer uten sammenheng*. Dette på grunn av kategoriens mulighet til å lære å utføre prosedyrer effektivt og på korrekt måte. Likevel vil *prosedyrer med sammenheng* passe bedre, med tanke på å kunne finne og bruke prosedyrer, samt gi forståelse for konseptene bak prosedyrene. *Prosedyrer med sammenheng* passer også med Kilpatrick et als. (2001) tanker om *strategic competence,* sammen med det høyeste nivåkravet *matematikk*. Oppgaver som krever kjente prosedyrer eller ingen prosedyrer kan umulig kreve strategiske valg av framgangsmåte.

Adaptive reasonning vil i hovedsak omhandle oppgaver kategorisert som *matematikk*, som krever at man drøfter, begrunner, forklarer og beviser sine metoder. Dette kommer ikke fram i noen andre kategorier, bortsett fra ett lite unntak som jeg tidligere har påpekt. Nummer hadde en del oppgaver under *hukommelse* som også handler om å forklare fenomener. Disse oppgavene vil i noen grad kunne komme under *adaptive reasonning*.

Productive disposition handler om at man må se nytten i matematikken, men det er vanskelig å se nytten i oppgaver som handler om øving. Det er hele grunnen til at intellektuelt behov er nødvendig for at en oppgave skal bli problemfylt, samt Schoenfelds (1993) første krav for at en oppgave skal være et problem. Elevene må se nytten i matematikken de gjør. Jeg har påpekt nytten av variablene *sammenheng utenfor tema* og *sammenheng utenfor skolen*, men faktumet er at 66 % av oppgavene mangler begge disse variablene. Dette kan være en faktor som gjør det vanskelig å se nytten i matematikken, som blir en øvingsarena for basale ferdigheter, i stedet for allmennyttig og generaliserbar (Kilpatrick et al., 2001). Spesielt vil oppgaver med SUS gi et stort løft på dette området. SUS utgjør dessverre bare 27 % av alle oppgavene.

En kort oppsummering avslører at elevene har muligheter til å oppnå Kilpatrick et als. (2001) *conceptual understanding* i liten grad, *procedural fluency* i litt større grad, *strategic competence* i liten grad, *adaptive reasonning* i svært liten grad og *productive disposition* i liten grad. Dette vil ikke være tilstrekkelig til å gi elevene mulighet til å danne en matematisk helhet som gjør at de kan sees på som kompetent innen faget (Kilpatrick et al., 2001).

De fire kognitive kravene kan deles i høye- og lave kognitive krav, og på den måten relateres tett til instrumentell og relasjonell matematisk forståelse (Skemp, 1974). *Hukommelse* og *prosedyrer uten sammenheng* kan knyttes til instrumentell forståelse på grunn av formålet med å reprodusere fakta og å øve på prosedyrer uten forståelse. *Prosedyrer med sammenheng* og *matematikk* kan knyttes til relasjonell forståelse på grunn av forståelsen som kreves i arbeidet med oppgavene. Resultatene fra den vertikale analysen viser store mengder med oppgaver under lave kognitive krav, og lave mengder oppgaver under høye kognitive krav. Det kan medføre at elevene ikke får tilstrekkelig grunnlag for å bygge opp en relasjonell matematisk forståelse, men i stedet får mye instrumentell øving. Instrumentell forståelse er ikke bare negativt, da den er lettere å forstå, produserer kjappe og effektive svar og dermed også god selvfølelse og mestringsfølelse (Skemp, 1974). Dette er viktige komponenter, men på et visst nivå må man begynne å se både de små og store sammenhengene. Det er der relasjonell forståelse kommer inn og bidrar positivt på den måten at man lettere kan generalisere framgangsmåter, bygge videre på kjent kunnskap og tenke seg fram til glemte regler (Skemp, 1974). Denne typen kunnskap vil være god å ha, i og med at den er mer varig i forhold til regler og algoritmer man pugger før prøver, og glemmer etterpå.

5.5 Implikasjoner for høyere utdanning

Hellan (2013) undersøkte overgangen fra læreverket Sigma (1T, R1 og R2) fra den videregående opplæringen, til boken Kalkulus, som representerer starten på en matematisk utdannelse på universitetsnivå. Han anvendte blant annet Lithners (2008) rammeverk omhandlende imitativ og kreativ resonnering, som på mange måter kan kobles mot *The Mathematical Task Framework*. De ligner på hverandre i den forstand at begge undersøker hvordan oppgaver byr på aktivitet som fremmer relasjonell- og instrumentell forståelse. Imitative reasoning (IR) kobles mot mine kategorier *hukommelse og prosedyrer uten sammenheng,* mens lokal og global creative reasoning til sammen, kobles mot *prosedyrer med sammenheng* og *matematikk*.

Hellan fant en *«betydelig større andel oppgaver som krever lokal- og global CMR»* i Kalkulus enn i Sigma (Hellan, 2013, s. 111). I Sigma var fordelingen av IR, lokal CMR og global CMR henholdsvis 79 %, 15 % og 6 %, noe som kan minne ganske mye om resultatene i min undersøkelse. 79 % imitativ reasoning krever lave kognitive krav, på lik linje med 84 % av oppgavene i min undersøkelse. Utover det, har Sigma større andel oppgaver på det høyeste nivået i undersøkelsen til Hellan, i forhold til Maximum, Faktor og Nummer i min undersøkelse. Kalkulus derimot, opererte med 43 % IR, 30 % lokal CMR og 27 % global CMR, ifølge Hellan (2013). Uten å sammenligne rammeverket til Lithner mer opp imot mitt, så ser man at forskjellene er store.

På samme måte som min analyse av bøkene Maximum og Faktor, fant Hellan (2013) at i Sigma var bygd opp slik at oppgavene var svært lik eksemplene i forkant. Sigma er for øvrig utgitt av Gyldendal, forlaget bak Maximum, og har et stort fokus på regneteknikk (Hellan, 2013). Kalkulus har ikke den samme oppbygningen, og bruker ofte eksempler for å vise problemløsning, bevis eller spesialtilfeller, i stedet for generelle oppskrifter. Kalkulus beviser nesten alle matematiske setninger, i motsetning til Sigma som beviser veldig få. Maximum, Faktor og Nummer har ikke et eneste bevis. En økende grad av bevisføring er for øvrig naturlig, ettersom man blir mer i stand til å følge matematiske bevis med tiden.

Analysene til Hellan (2013) viser at få oppgaver i Sigma krever problemløsningskompetanse, modelleringskompetanse og resonneringskompetanse, noe som gjenspeiler funnene fra mine analyser. I Kalkulus ble disse kompetansene essensielle, og oppgavene krevde ofte anvendelse av flere kompetanser samtidig.

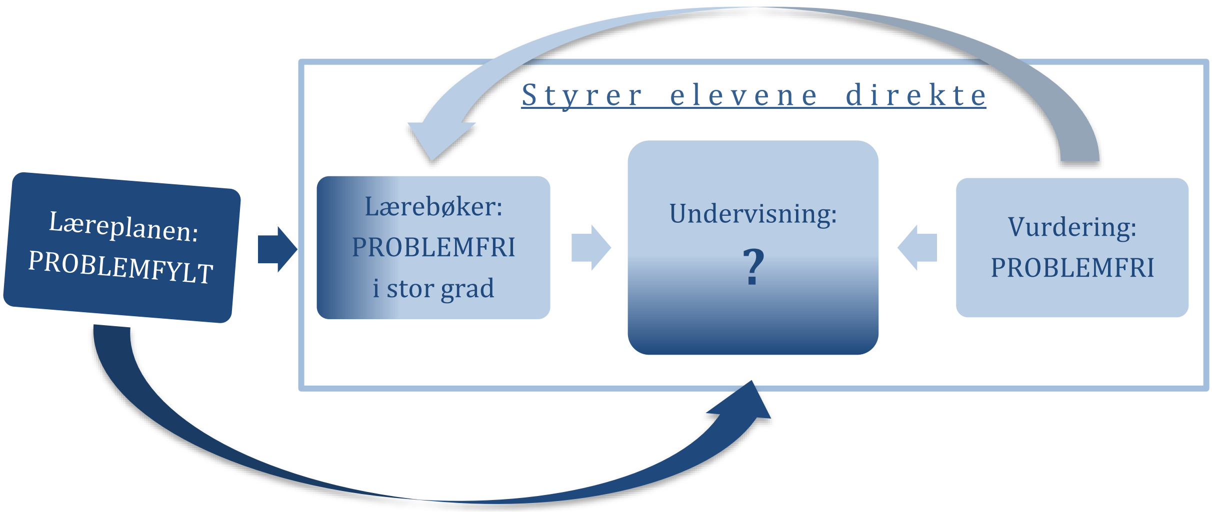
Derfor kan overgangen fra lavere utdanning til høyere utdanning virke stor. Elever som i liten grad har blitt eksponert for problemfylt aktivitet vil dermed ha vanskeligere for å omstille seg fra den matematikken de er vant med, til matematikken som kreves på høyere nivå. Det er mange grunner til at problemfylt aktivitet i stor grad blir nedprioritert på lavere nivå. Det faktum at lærere generelt har dårlig tro på at gjennomsnittselevens mulighet til å forstå matematikk på et slikt nivå framstår som et stort problem (Schoenfeld, 1993). Tidsrammer og vurderingsformer hjelper heller ikke. Konsekvensen blir ofte at elevene for matematikkundervisning som fokuserer på instrumentell forståelse (Lithner, Boesen, & Palm, 2010). Forskerne selv, har likevel ikke mistet troen på at elever kan tilegne seg problemløsende egenskaper (Schoenfeld, 1993; Lithner et al., 2010; Zeitz, 1999).

Man kan også se lignende innvirkninger på høyere utdanning i Norge. Hellan (2013) skriver av kun 10-12 % av studentene som tar Kalkulus 1 ved UiT er matematikere/fysikere. Denne gruppen vil trenge et høyt nivå av matematisk kompetanse for videre studier, mens den resterende mengden studenter ikke er avhengige av dybden i samme grad. Et stort fokus på problemløsning i en gruppe hvor flesteparten ikke er motiverte for den type matematikk vil føre til dårlige resultater. På den måten vil universitetet måtte legge opp faget på en slik måte at hele gruppen med studenter blir tatt hensyn til. Dette påvirker både innhodet i kursert, og eksamen (Hellan, 2013). Til tross for denne nedjusteringen av kompetansekrav vil overgangen kunne virke stor for de fleste.

5.6 Refleksjoner rundt læreplanen på ungdomstrinnet

Læreplanen påpeker at opplæringen mellom 8. og 10. trinn, skal veksle mellom utforskende, lekende, kreative og problemløsende aktiviteter og ferdighetstrening. Alle de fire første aktivitetene kommer under problemfylt aktivitet, mens ferdighetstrening dekker minst 61 % av oppgavene i bøkene. Ferdighetstrening har vært under kritikk for å ta stor plass i innledningen av denne oppgaven, og det viser seg at dette er tilfellet.

I figur 2-4 presenterte jeg en modell for hvordan både problemfri og problemfylt aktivitet flyter mellom læreplanen, lærebøker, undervisning og vurdering. Der sto læreplanen som problemfylt, lærebøkene som ukjent, vurdering som problemfri og undervisning som blandet. Dette var en ganske overfladisk modell, basert på Jensens (2007) vurdering av eksamener og prøver, mitt inntrykk av Kunnskapsløftet og mitt ønske om å forstå lærebøker og koblingen mot undervisning. Etter endt studie sitter jeg igjen med en følelse av at modellen er rimelig mye mer komplisert. For det første har jeg lært at vurdering også former lærebøker. Representanter for Faktor sier at denne boken forbereder elevene godt til eksamen, og Nummer har oppgaver som er spesifikt merket som eksamensoppgaver. Dette er oppgaver som har vært brukt på eksamener tidligere, og man finner dem i hele bokserien fra 8. til 10. trinn. I tillegg føler jeg at læreplanen står litt på siden og formaner om problemfylt aktivitet via lærebøker og lærere, men ikke helt når fram til elevene. Bøkene er ikke i nærheten av å likne på de problemfylte formuleringene fra læreplanen. Figur 5-1 presenterer et helhetlig bilde av inntrykket jeg sitter igjen med etter undersøkelsen av lærebøker.



Figur 5-1: Flytskjema over hvordan den problemfylte læreplanen og den problemfrie vurderingen påvirker undervisningen

Jeg kan fortsatt si lite om den faktiske undervisningspraksisen, som naturligvis vil være et slags neste steg i forskningsprosessen. Matematikkundervisningen er heldigvis mer enn bare lærebøker, og kanskje vil lærerne bidra til å tilføre mye av det som bøkene mangler. Lærerne er formidlerne av lærebøkene, og dermed har de gode muligheter til å veilede elevene på en måte som vil føre til økt kompetanse og relasjonell forståelse. Dette kan eksempelvis gjøres ved å ha fokus på Fuller et als. (2011) fire punkter om undervisning med intellektuelt behov og problemfylt aktivitet.

6 Avslutning

For å runde av oppgaven vil jeg peke tilbake på hva jeg har gjort, hvilke resultater jeg har fått, og bruke det til å svare på problemstillingen min. I tillegg vil jeg foreslå hvordan man kan gå fram for å få enda bedre innsikt i det store spørsmålet, som er i hvilken grad elever blir utsatt for problemfylt aktivitet generelt, ikke bare via bøker.

6.1 Tilbakeblikk

Jeg har gjennomført en mixed methods studie av lærebøker. De kvantitative analysene jeg gjorde var på bakgrunn av et konseptuelt rammeverk, basert på teori omhandlende problemfylt aktivitet og intellektuelt behov. Den kvalitative tilleggsanalysen ble brukt til å forklare fenomener som jeg så ble forbigått i den vertikale analyseprosessen.

Jeg har hovedsakelig sett på oppgaver, i lys av foreliggende forklaringer og eksempler, og gjennom variablene i rammeverket, avgjort om aktiviteten ble problemfylt eller problemfri. I den kvantitative analysen viste bøkene tydelig trender i samtlige tema og merker. Samtidig bidro den kvalitative analysen til å belyse på hvilken måte bøkene skilte seg fra hverandre. På nesten alle tenkelige måter kan bøkene rangeres i rekkefølgen (1) Nummer, (2) Maximum, og (3) Faktor, når det kommer til aktivitet som vil fremme kognitive prosesser, relasjonell forståelse og matematisk kompetanse.

6.2 Konklusjon

Så, *i hvilken grad legger lærebøker i matematikk på 8. trinn til rette for problemfylt aktivitet?* Jevnt over har jeg sett at 14,1 % av oppgavene i bøkene Nummer, Maximum, Faktor legger til rette for problemfylt aktivitet. Dette gjør de ved å stille høye kognitive krav til elevene, samt å gi dem et intellektuelt behov via et langsiktig mål og minst ett aktivitetsmål. Disse oppgavene er kognitivt krevende, og knytter sammenhenger innad i tema, mellom tema og utenfor skolen. På den måten vil arbeid med oppgavene føre til at den matematiske kompetansen blir så fyldig som mulig.

Problemfylt aktivitet i de ulike bøkene fordeler seg med 17,4 % i Nummer, 14,8 % i Maximum og 8,9 % i Faktor. Tallene viser at bøkene i varierende grad legger til rette for problemfylt aktivitet, og understreker også helheten i undersøkelsen. Gjennomgående ligger Faktor langt etter de to andre bøkene, mens Maximum ligger som en god nummer to bak Nummer. Samtidig vil jeg understreke at prosentandelene ikke er spesielt store. Dette fører til at elevene får mye øving på prosedyrer, og lite grubling på sammensatte oppgaver som skal fremme forståelse av fenomener.

Faktor og Maximum legger ofte opp til en slags progresjon, men som jeg har påpekt, så er denne progresjonen lite synlig i form av kognitive krav. Oppgavetypene blir veldig like og enfoldige med tanke på algoritmer og framgangsmåte. Elevene får dermed en følelse av at økt kunnskap, mens de egentlig bare anvender samme teknikk i andre åpenbare kontekster.

Nummer derimot, varierer oppgavetypene i større grad, og har ikke det "vanlige" fokuset på progresjon. Gjennomgående har de fokus på at elevene skal kunne forklare fenomener, og formuleringene i både mål og oppgaver minner om kompetansemålene fra Kunnskapsløftet. Boken utelater unødvendige bilder i forhold til de andre bøkene og bytter det ut med forklarende tekst, eksempler og spesielt fyldige oppgaver. Ofte introduserer Nummer tanker og prinsipper ved hjelp av oppgaver, noe som jeg ikke har sett i de to andre bøkene. Dette gir elevene mulighet til å tenke selv og konstruere sin egen kunnskap, i stedet for at tankene og ideene blir plassert i hodene deres. Tallene fra den vertikale analysen blir her for beskjedne til å belyse helheten med boken, som virker mye større.

Med et konstruktivistisk syn, hvor tankegangen til Piaget er sentral, vil jeg påstå at Nummer er ganske unik og legger til rette for problemfylt aktivitet på en helt annen måte enn de to andre bøkene. Maximum klarer seg bra, men på en tradisjonell måte, mens Faktor henger etter. Jeg må innrømme at jeg er positivt overrasket over Nummer, mens Maximum og Faktor framstår på samme måte som matematikkbøker som jeg har kjennskap til fra før. Jeg kunne sett at bøkene i enda større grad la til rette for problemfylt aktivitet, slik at elevene utfordres til å bygge opp forståelse for relasjoner på lik linje som prosedyrer. Dette ville ført bedre hukommelse, og større fokus på den dypere meningen bak problemer.

Bøkene i utvalget er de mest brukte på ungdomskolen, og når skoler skal kjøpe nye er det disse det velges mellom[2]. Dermed vil jeg påstå at resultatene kan generaliseres til å si noe om hva mesteparten av norske elever på 8. trinn får av problemfylt aktivitet gjennom lærebøker i matematikk i dag. I tillegg vil denne generaliseringssikkerheten bli større ettersom tiden går og flere skoler begynner å bruke disse bøkene. Med bare 14,1 % problemfylt aktivitet kan elevene

[2] Mailkorrespondanse 27.2.2017 med Grete Sandrød Owesen, redaktør i Gyldendal Undervisning.

få vanskeligheter med å tilegne seg en ønsket matematisk kompetanse. På den måten kan overgangen fra lavere utdanning til høyere utdanning virke vanskelig.

Studien viser at oppgaver med *sammenheng utenfor tema* og *sammenheng utenfor skolen* hadde større mulighet til å kreve høye kognitive krav enn resten av oppgavene, og dermed danne grunnlag for problemfylt aktivitet. Derfor vil jeg anbefale å øke antallet slike oppgaver, slik at elevene i størst mulig grad får mulighet til å lære å forstå matematikk relasjonelt, og ikke bare instrumentelt. Mitt håp er at en ny tidsalder for lærebøker vil tre fram i lyset av undersøkelser som denne, og teorien som ligger til grunn. En slik nytenking kunne tatt utgangspunkt i Nummer, som allerede viser tegn på noe som er ganske unikt.

6.3 Videre forskning

Som nevnt i slutten av kapittel 5.4 kan jeg fortsatt si lite om undervisningspraksisen på ungdomstrinnet, og hvordan oppgavene fra bøkene faktisk påvirker elevene. Som formidlet gjennom figur 2.6 er oppgaver avhengige av flere faser før de til slutt har en innvirkning på elevenes læring (Sten & Smith, 1998). Igjennom studien har jeg bare tatt hensyn til fase 1, hvordan oppgavene er framstilt i bøkene. Fase 2 og 3 er vel så viktige, og handler om hvordan læreren legger fram problemet, og sammen med elevene utvikler en måte å tenke på som former deres videre arbeid. Ved å gå gjennom disse tre fasene vil oppgaver kunne legge et best mulig grunnlag for læringsutbytte, ifølge *The Mathematical Task Framwork.*

Via analysene mine har jeg fastsatt lærebøkenes tilrettelegging via oppgavene til å være 14,1 %. Videre vil lærernes presentasjon og implementering av oppgavene kunne bidra til å løfte læringsutbyttet til et helt annet nivå enn lærebøkene klarer å gjøre på egen hånd. Dermed kan prosentsatsen på 14,1 % økes betraktelig via fase 2 og 3 i modellen til Stein & Smith (1998). Jeg har vært ganske kritisk til lærebøkene gjennom denne studien. Kanskje kan det hende at lærebøkene, med hjelp fra steg to og tre i modellen fra figur 2-6, faktisk legger til rette for mer problemfylt aktivitet enn mine analyser antyder. Dette fordi analysene mine ikke tar forbehold om hvordan oppgavene bearbeides i klasserommet.

Dette er interessant å tenke på, med sikte på videre og utvidet forskning. Jeg kunne tenkt meg å følge en klasse gjennom arbeid med noen tema fra bøkene, for å se om oppgaver kan utvikle seg på den måten som Stein & Smith (1998) tenker. Da ville jeg hatt fokus på hva som faktisk skjer i klasserommene og i hvilken grad lærerne klarer å maksimere potensialet i oppgavene. Jeg har nå dannet meg et utgangspunkt i resultatene fra denne analysen, men bare gjennom videre forskning kan jeg forstå hvordan dette faktisk påvirker elevene. På denne måten kunne jeg fått et veldig godt bilde av hvordan elever reelt sett blir utsatt for problemfylt aktivitet, på et annet vis enn jeg har fått via denne undersøkelsen.

6.4 Avsluttende refleksjon

Til slutt vil jeg avslutte med en påminnelse til alle som nå drømmer seg bort i rusen av problemfylt aktivitet. Selv om problemfylt aktivitet er ønskelig i søken mot relasjonell forståelse, er det viktig å påpeke at en stor del av matematikken også bør være øving på prosedyrer, nettopp for å kunne regne presist og kjapt nok i alle situasjoner. Elevene trenger en todeling for å få alle brikkene til å falle på rett plass og utvikle matematisk kompetanse på høyest mulig nivå. Når det er sagt kan mye av prosedyrene som øves på, samtidig knyttes opp imot dypere sammenhenger. På den måten får man den øvingen man trenger, samtidig som man bygger en dypere relasjonell forståelse. Det vil derfor være fordelaktig om norske lærebøker i framtiden økte andelen oppgaver under kategorien *prosedyrer med sammenheng*, på bekostning av oppgaver under kategorien *prosedyrer uten sammenheng.*

Et halvt år med intenst arbeid er over, og jeg gleder meg til å komme ut i skolen til høsten og bruke den kunnskapen jeg nå sitter inne med. Det som er fint er at jeg allerede da får muligheten til å anvende metodene, anbefalt i denne masteroppgaven, i egen praksis. Forhåpentligvis vil det bidra til at jeg forstår prinsippene rundt problemfylt aktivitet som læringskilde enda bedre. I tillegg får jeg muligheten til å se hvordan oppgaver påvirker elevene direkte i klasserommet. Dette vil være lærerikt og kan hjelpe meg å forstå hvordan modellen til Stein & Smith (1998) fungerer i praksis.

7 Referanser

Alseth, B., Stedøy-Johansen, M., Tangen, J., & Tofteberg, G. (2013). *Maximum 8, lærerens bok. Matematikk for ungdomstrinnet.* Oslo: Gyldendal Undervisning.

Bergqvist, E. (2007). Types of reasoning required in university exams in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(4), ss. 348-370. Hentet mai 15., 2017 fra http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S073231230700048X

Bjørndal, C. P. (2011). *Det vurderende øye - Observasjon, vurdering og utveksling i undervisning og veiledning, 2. utgave.* Oslo: Gyldendal Akademisk.

Bryman, A. (2006). Integrating quantitative and qualitative research: how is it done? *Qalitative research*, *6*(1), ss. 97-113. doi:10.1177/1468794106058877

Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks [Master thesis]*. Luleå University of Technology. Hentet april 25., 2017 fra https://pdfs.semanticscholar.org/32f8/11f9825da19e9bf7469758f7d3a225d35c9b.pdf

Caelli, K., Ray, L., & Mill, J. (2003). Clear as mud: Toward a greater cleairity in generic qualitative research. *International Journal of Qualitative Methods, 2*(2). Hentet november 25, 2016 fra https://sites.ualberta.ca/~iiqm/backissues/2_2/pdf/caellietal.pdf

Cappelen Damm. (2016). *Faktor 8-10*. Hentet mai 29., 2017 fra Om Faktor 8: http://faktor.cappelendamm.no/lt/seksjon.html?tid=1995275&sek=1924394

Charalambous, C., Delaney, S., Hsu, H., & Mesa, V. (2010). A Comparative Analysis of the Addition and Subtraction of Fractions in Textbooks from Three Countries. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(2), ss. 117-151. doi:10.1080/10986060903460070

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education. 6th ed.* London: Routledge.

Creswell, J. W. (2014). *Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches (4. utgave).* Los Angeles: SAGE Publications inc.

Creswell, J., & Plano Clark, V. (2011). *Designing and Conducting Mixed Methods Research (2. utgave).* Thousand Oaks: Sage Publications.

De Forente Nasjoner. (1948). *FNs verdenserklæring om menneskerettigheter.* Hentet 03 02, 2017 fra FN-sambandet. United nations association of Norway: http://www.fn.no/FN-informasjon/Avtaler/Menneskerettigheter/FNs-verdenserklaering-om-menneskerettigheter

Eliasson, A. (2006). *Kvantitativ metod från början.* Lund: Studentlitteratur AB.

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education, 45*, ss. 633-646. doi:10.1007/s11858-013-0539-x

Fan, Z. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education, 45*, ss. 765-777. doi:10.1007/s11858-013-0530-6

Forskningsetikkloven. (u.d.). Lov 30.06.2006 nr. 56 om behandling av etikk og redelighet i forskning. Hentet 03 02, 2017 fra https://lovdata.no/dokument/NL/lov/2006-06-30-56?q=forskningsetikkloven

Fuller, E., Rabin, J. M., & Harel, G. (2011). *Intellectual Need and Problem-Free Activity in the Mathematics Classroom.* University of California. Hentet januar 17., 2017 fra http://math.ucsd.edu/~jrabin/publications/ProblemFreeActivity.pdf

Glaser, B., & Strauss, A. (1967). *The discovery og grounded theory.* New Brunswick: Aldine Tranaction.

Greene, J., Caracelli, V., & Graham, W. (1989). Toward a Conceptual Framework for Mixed-Method Evaluation Designs. *Educational Evaluation and Polizy Analysis, 11*(3), ss. 255-274. Hentet Mars 29., 2017 fra http://www.jstor.org/stable/1163620

Grunnloven. (1814). Lov 17.05.1814 om menneskerettigheter § 102. Hentet februar 03., 2017 fra https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1814-05-17?q=grunnloven

Grønmo, L. (2013). Algebra og tall er motoren i matematikken - derfor går matematikkfaget i Norden for halv fart. *Bedre skole, 2013*(1), ss. 17-22. Hentet mai 25., 2017 fra https://www.utdanningsnytt.no/globalassets/filer/pdf-av-bedre-skole/2013/bedre-skole-1-2013.pdf

Grønmo, S. (1996). Forholdet mellom kvalitative og kvantitative tilnærminger i samfunnsforskningen. I H. Holter, & R. Knalleberg, *Kvalitative metoder i samfunnsforskning.* Oslo: Universitetsforlaget.

Harel, G. (2007). The DNR System as a Conceptual Framework for Curriculum Development and Instruction. I R. Lesh, J. Kaput, & E. Hamilton (Eds.), *Foundations for the Future in Mathematics Education* (ss. 263-280). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. Hentet januar 17., 2017 fra http://math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/DNRleshBook.pdf

Harel, G. (2008a). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part 1: focus on proving. *ZDM Mathematics Educaton, 40*, ss. 487-500. doi:10.1007/s11858-008-0104-1

Harel, G. (2008b). DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction, Part II: with reference to teacher's knowledge base. *ZDM Mathematics Education, 40,* ss. 893-907. doi:10.1007/s11858-008-0146-4

Harel, G. (2013). Intellectual need. I K. Leatham, *Vital Directions for Mathematics Education Research* (ss. 119-151). New York: Springer Science + Business Media New York. doi:10.1007/978-1-4614-6977-3_6

Hellan, S. (2013). *En læreverkstudie av overgangen fra skolematematikk til universitetsmatematikk [masteroppgave].* Tromsø: Universitetet i Tromsø. Hentet mai 31., 2017 fra http://munin.uit.no/bitstream/handle/10037/5293/thesis.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCMT Standards. I J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter, *A research companion to principles and standards for school mathematics* (ss. 5-26). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hiebert, J., & Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. I F. K. Lester, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (ss. 371-404). Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.

Hiebert, J., Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., . . . Human, P. (1997). *Making Sense: Teaching and learning mathematics with understanding.* Portsmouth: Heinemann.

Hjardar, E., & Pedersen, J.-E. (2014). *Faktor 8.* Oslo: Cappeen Damm.

Hole, A., Jensen, R., Tellefsen, H., & Wallace, A. (2014). *Nummer 8. Matematikk for ungdomstrinnet.* Oslo: Aschehoug.

Hookway, C. (2008). *Pragmatism*. Hentet Mars 28., 2017 fra Stanford encyclopedia of philosophy: http://plato.stanford.edu/entries/pragmatism

Huntley, M., & Terrell, M. (2014). One-step and multi-step linear equations: a content analysis of five textbook series. *ZDM, 46*(5), ss. 751-766. doi:10.1007/s11858-014-0627-6

Imsen, G. (2009). *Lærerens verden. Innføring i generell didaktikk.* Oslo: Universitetsforlaget.

Jensen, T. H. (2007). *Udvikling av matematisk modelleringskompetence som matematikkundervisningens omdrejningspunkt - hvorfor ikke? [Doktoravhandling]*. Roskilde: Roskilde Universitet. Hentet mars 11., 2017 fra http://pure.au.dk/portal/files/227/THJ07-phd-dissertation.pdf

Johnsen, M., & Storaas, A. (2015). *En komparativ studie av matematikkoppgaver i et norsk og et fins læreverk [masteroppgave]*. Tromsø: UiT, Norges Arktiske Uniersitet. Hentet mai 12., 2017 fra http://munin.uit.no/handle/10037/8119

Johnsson, B., Norquist, M., Liljekvist, Y., & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative. *The Journal of Mathematical Behavior, 36,* ss. 20-32. Hentet fra http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.08.003

Jones, D., & Tarr, J. (2007). An examination of the levels of cognitive demand required by probability tasks in middle grades mathematic textbooks. *Statistics Education Research Journal, 6*(2), ss. 4-27. Hentet april 25., 2017 fra https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ6(2)_Jones_Tarr.pdf

Jopperud, R. (2015). *To læreverks presentasjon av algebra på 8. trinn [masteroppgave]*. Kristiansand: Universitetet i Agder. Hentet mai 12., 2017 fra http://docplayer.me/11697133-To-laereverks-presentasjon-av-algebra-pa-8-trinn.html

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Kunnskapsdepartementet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04).* Oslo: Utdanningsdirektoratet. Hentet februar 28., 2017 fra Utdanningsdirektoratet: https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

LeCompte, M., & Goetz, J. (1982). Problems of Reliability and Validity in Ethnographic Research. *Review of Educational Research*, *52*(1), ss. 31-60. Hentet april 19., 2017 fra http://www.colorado.edu/education/sites/default/files/attached-files/LeCompte_Goetz_Problems_of_Reliability_Validity_in_Ed_Re.pdf

Leer, G. L. (2009). *Vurdering av matematisk problemløsning [Mastergrad].* Trondheim: NTNU. Hentet mars 23., 2017 fra http://www.matematikksenteret.no/multimedia/3007/Lene-Groterud-Leer-Problemlosing.pdf

Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for research in mathematics education, 25*(6), ss. 660-675. Hentet mai 11., 2017 fra https://www.researchgate.net/publication/269478954_Musings_about_Mathematical_Problem-Solving_Research_1970-1994

Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM, 37*(6), ss. 457-467. Hentet mai 12., 2017 fra https://www.math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/Frank.pdf

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*, ss. 255-276. doi:10.1007/s10649-007-9104-2

Lithner, J., Boesen, T., & Palm, T. (2010). The relationship between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics, 75*, ss. 89-105.

Lorentzen, L. (2013). *Hva er matematikk.* Oslo: Universitetsforlaget.

Mayer, K., Sims, V., & Tajika, H. (1995). A comparison of how textbooks teach mathematical problem splving in Japan and the United States. *American Educational Research Journal, 32*(2), ss. 443-460.

McLeod, S. (2015). *Jean Piaget*. Hentet april 28., 2017 fra Simply Psychology: https://www.simplypsychology.org/piaget.html

Mullis, I., Martin, M., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics.* Boston: International Association for the Evaluation og Education.

NESH. (2016). *Forskningsetiske retningslinjer for sammfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi.* Hentet mars 2., 2017 fra file:///C:/Users/robin/OneDrive/Documents/2017/etiske%20retningslinjer.pdf

Niss, M. (2003). Mål for matematikkundervisningen. I I. Grevholm, *Matematikk for skolen* (ss. 288-332). Bergen: Fagbokforlaget.

Niss, M. (2007). Reactions on the state and trends in research on mathematics teaching and learning. From here to Utopia. I F. K. Lester Jr, *2nd handbook of research on mathematics teaching and learning* (ss. 1293-1312). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Niss, M., & Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematikklæring.* København: Undervisningsministeriets forlag.

Piaget, J. (1960). *The psychology of intelligence.* Totowa, NJ: Littlefield, Adams & Co.

Piaget, J. (1970). Piagets theory. I P. Mussen, *Carmichael's Manual of Child Psycholog.* New York: Wiley.

Popham, W. (2001). Teaching to the test? *Educational Leadership, 58*(6), ss. 16-20. Hentet mai 11., 2017 fra http://www.ascd.org/publications/educational-leadership/mar01/vol58/num06/Teaching-to-the-Test%C2%A2.aspx

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* San Diego: Academic press Inc.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. I G. D. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (ss. 334-370). New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. (2002). Making Mathematics Work for All Children: Issues of Standards,Testing, and Equity. *Educational Researcher, 31*(1), ss. 13-25. Hentet april

11., 2017 fra https://gse.berkeley.edu/sites/default/files/users/alan-h.-schoenfeld/Schoenfeld_2002%20Making%20Math%20Work%20ER.pdf

Schoenfeld, A. H. (1993). Teaching mathematical thinking and problem solving. Oslo: Norges forskningsråd.

Schoenfeld, A., & the Teaching for Robust Understanding Project. (2016). *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework.* Berkeley, CA: Graduate School of Education. Hentet januar 18., 2017 fra An introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework: http://map.mathshell.org/trumath/intro_to_tru_20161223.pdf

Skemp, R. (1971). *The psychology of learning mathematics.* Middlesex: Penguin Education.

Skemp, R. (1974). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*, ss. 22-26. Hentet april 27., 2017 fra https://alearningplace.com.au/wp-content/uploads/2016/01/Skemp-paper1.pdf

Smith, M., & Stein, M. (1998). REFLECTIONS on Practice: Selecting and Creating mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), ss. 344-350. doi:129.242.243.74

Stein, M. K., Smith, M., Henningsen, M., & Silver, E. (2000). *Implementing standards-based mathematic instruction: A casebook for professional development* (Vol. 3). New York: Teachers College Press.

Stein, M., & Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, ss. 268-275. Hentet januar 16., 2017 fra http://eucc2011.wikispaces.com/file/view/Math+Tasks+as+Framework+for+Reflection

Stylanides, A., & Stylanides, G. (2007). "Learning Mathematics with Understanding: A Critical Consideration of the Learning Principle in the Principles and Standards for School Mathematics. *The Mathematics Enthusiast, 4*(1), ss. 103-114. Hentet mai 11., 2017 fra http://scholarworks.umt.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1063&context=tme

Teppo, A. R. (2015). Grounded Theory Methods. I A. e. Bikner-Ahsbahs, *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education, Advances in Mathematics Education* (ss. 3-21). Dordrecht: Springer Science+Business Media. doi:10.1007/978-94-017-9186-6_1

Tofteberg, G., Stedøy-Johansen, I., Alseth, B., & Tangen, J. (2013). *Maximum 8. Matematikk for ungdomsskolen.* Oslo: Gyldendal.

Ubuz, B., Erbas, A., Cetinkaya, B., & Özgeldi, M. (2010). Exploring the quality of the mathematical tasks in the new turkish elementary school mathematics curriculum guidebook. *ZDM, 42*(5), ss. 483-491. Hentet april 25., 2017 fra https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-010-0258-5

Utdanningsdirektoratet. (2016). *Å forstå kompetanse*. Hentet februar 28, 2016 fra Utdanningsdirektoratet: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/forsta-kompetanse/

Valverde, G., Bianchi, L., Wolfe, R., Schmidt, W., & Houang, R. (2002). *According to the Book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks.* Drodrecht: Kluwer Academic Publishers.

Winter, G. (2000). A comparative discussion of the notion of 'validity' in qualitative and quantitative research. *The Qualitative Report, 4*(3). Hentet april 19., 2017 fra http://nsuworks.nova.edu/tqr/vol4/iss3/4/

Zeitz, P. (1999). *The Art and Craft of Problem Solving.* New York: John Wiley & Sons.

Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*(4), ss. 609-626.

8 Vedlegg

Vedlegg 1: The Mathematical Task Analysis Guide av Smith & Stein (1998).

Levels of Demands

Lower-level demands (memorization):

- Involve either reproducing previously learned facts, rules, formulas, or definitions or committing facts, rules, formulas or definitions to memory
- Cannot be solved using procedures because a procedure does not exist or because the time frame in which the task is being completed is too short to use a procedure
- Are not ambiguous. Such tasks involve the exact reproduction of previously seen material, and what is to be reproduced is clearly and directly stated.
- Have no connection to the concepts or meaning that underlie the facts, rules, formulas, or definitions being learned or reproduced

Lower-level demands (procedures without connections):

- Are algorithmic. Use of the procedure either is specifically called for or is evident from prior instruction, experience, or placement of the task.
- Require limited cognitive demand for successful completion. Little ambiguity exists about what needs to be done and how to do it.
- Have no connection to the concepts or meaning that underlie the procedure being used
- Are focused on producing correct answers instead of on developing mathematical understanding
- Require no explanations or explanations that focus solely on describing the procedure that was used

Higher-level demands (procedures with connections):

- Focus students' attention on the use of procedures for the purpose of developing deeper levels of understanding of mathematical concepts and ideas
- Suggest explicitly or implicitly pathways to follow that are broad general procedures that have close connections to underlying conceptual ideas as opposed to narrow algorithms that are opaque with respect to underlying concepts
- Usually are represented in multiple ways, such as visual diagrams, manipulatives, symbols, and problem situations. Making connections among multiple representations helps develop meaning.
- Require some degree of cognitive effort. Although general procedures may be followed, they cannot be followed mindlessly. Students need to engage with conceptual ideas that underlie the procedures to complete the task successfully and that develop understanding.

Higher-level demands (doing mathematics):

- Require complex and nonalgorithmic thinking—a predictable, well-rehearsed approach or pathway is not explicitly suggested by the task, task instructions, or a worked-out example.
- Require students to explore and understand the nature of mathematical concepts, processes, or relationships
- Demand self-monitoring or self-regulation of one's own cognitive processes
- Require students to access relevant knowledge and experiences and make appropriate use of them in working through the task
- Require students to analyze the task and actively examine task constraints that may limit possible solution strategies and solutions
- Require considerable cognitive effort and may involve some level of anxiety for the student because of the unpredictable nature of the solution process required

These characteristics are derived from the work of Doyle on academic tasks (1988) and Resnick on high-level-thinking skills (1987), the Professional Standards for Teaching Mathematics (NCTM 1991), and the examination and categorization of hundreds of tasks used in QUASAR classrooms (Stein, Grover, and Henningsen 1996; Stein, Lane, and Silver 1996).