Fakultet for naturvitenskap og teknologi
Institutt for matematikk og statistikk

En komparativ studie av tre lærebøkers presentasjoner av matematisk innhold og deres krav til elevene

—

Sunniva Stoltz Nordli

MAT-3906 Masteroppgave i matematikk – lærerutdanning

Juni 2017

Forord

Med denne masteroppgaven setter jeg punktum for et 5-åring utdanningsløp for å bli lektor i realfag. Å jobbe med denne oppgaven har vært både lærerikt og interessant, men det har også vært krevende.

Jeg ønsker å takke veileder Per Øystein Haavold ved Institutt for lærerutdanning og pedagogikk for gode råd og gode tilbakemeldinger som har vært til stor hjelp på veien mot det endelige resultatet. Takk også til biveilder Ragnar Soleng ved Institutt for matematikk og statistikk.

Jeg ønsker også å rette en takk til familie og venner som har vært støttende gjennom denne perioden med masterskriving. Samboeren min, Rudi, fortjener også en stor takk som har gitt meg mye støtte og vært forståelsesfull gjennom hele studietiden.

En spesiell takk til mine medstudenter. Studietiden ville ikke vært den samme uten dere.

En siste takk til dere som lånte meg deres R1-lærebøker.

Tromsø, mai 2017

Sunniva Stoltz Nordli

Sammendrag

Denne mastergradsoppgaven er en komparative studie av tre norske lærebøker ved R1-matematikk. Bakgrunnen for oppgaven er hvordan de forskjellige lærebøkene velger å fremstille deres matematiske teori og deres oppgaver til elevene. Oppgaven begrenser seg til å se på områdene algebra og funksjoner.

Problemstillingen med forskningsspørsmål er:

- Hvilke forskjeller og likheter er det mellom tre ulike lærebøkers presentasjon av matematisk innhold og krav til elevene i emnene algebra og funksjoner for R1-matematikk?
    - Hvordan strukturerer lærebøkene deres presentasjoner av ulike temaer?
    - Hvordan presenterer lærebøkene deres eksempler?
    - Hvordan fordeler presentasjonen av teori seg, i form av deduktive begrunnelser, empiriske begrunnelser, ingen begrunnelser eller begrunnelser som ikke er fullført, mellom de ulike lærebøkene?
    - På hvilke måter gir lærebøkenes oppgaver elevene kognitive utfordringer?
    - Finnes det sammenhenger mellom innholdet som presenteres og situasjoner fra dagliglivet eller matematikk som er tidligere lært, og hvordan blir disse fordelt mellom lærebøkene?

Problemstillingen blir besvart ved å ta utgangspunkt i et konseptuelt rammeverk bestående av ulike rammeverk som på hver sin måte er med på å besvare problemstillingen. Oppgaven baserer seg på en concurrent mixed methods, noe som vil si at jeg har tatt i bruk både kvalitative og kvantitative data for å kunne gjøre analyser av problemstillingen. Datamaterialet for den kvantitative tilnærmingen ble samlet inn på bakgrunn av den kvalitative analysen. Dermed var valget med å bruke concurrent mixed methods et naturlig valg.

Ved å trekke fram noen av det viktigste ved oppgavens resultater, viste at lærebøkene hadde likheter og forskjeller. For forskjellene skilte Matematikk R1 seg ut ved å inneholde flest unike temaer, Sigma R1 hadde flest beviseksempler og eksempler knyttet til en

dagligdagskontekst, Sinus R1 hadde flest tilfeller hvor teorien ble presentert med enten en deduktiv begrunnelse eller en empirisk begrunnelse. For lærebøkenes oppgaver hadde Sigma R1 og Sinus R1 den største andelen av deres oppgaver som kreativ resonnering for *algebra*, mens Matematikk R1 fulgte en motsatt tendens ved å ha sin største andel kreativ resonnering for *funksjoner*.

Ved å knytte disse funnene mot Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) sine fem matematiske kompetanser og elevenes mulighet for læring gjennom disse lærebøkene, fant jeg ut at lærebøkene vil ha ulike styrker og svakheter når det gjelder å gi elevene mulighet for å oppnå disse kompetansene. Noen lærebøker vil inneholde momenter som styrker muligheten for å oppnå en eller flere kompetanser, men de vil også inneholde momenter som påvirker disse mulighetene negativt igjen. Dette viser at måten de ulike lærebøkene velger å presentere deres matematiske innhold og hvilke krav de velger å gi elevene gjennom oppgavene deres, vil påvirke hvilke muligheter de gir for læring for elevene.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for oppgaven

I mine år på skolebenken har jeg alltid vært engasjert i matematikk. Det å løse matematikkoppgaver og ende opp med riktige svar, vil gi de aller fleste mestringsfølelse. Selv kjente jeg på denne mestringsfølelsen, da spesielt på barne- og ungdomsskolen. Når jeg etter endt grunnskolelæring, startet på videregående med 1T-R1-R2-matematikk forsvant noe av den tidligere erfarte mestringsfølelsen. Jeg forstod i større grad at det å klare og løse matematikkoppgaver ikke nødvendigvis betød at du var klar over hva du gjorde. I mange tilfeller holdt det i massevis å følge prosedyrene tidligere eksempler i læreboka presenterte. Slike situasjoner som skildret her, er i stor grad starten på utviklingen av denne mastergradsoppgaven.

Det å kunne løse matematikkoppgaver ved å kun følge eksemplers prosedyrer fører oppgavene og deres løsningsmetoder mot å være algoritmiske. Ved å sjelden måtte ta i bruk helt nye og godt begrunnede løsningsmetoder som elevene selv må tenke ut, førte meg inn på rammeverket for imitativ og kreativ resonnering utarbeidet av Lithner (2008), hvor sistnevnte scenario faller under kreativ resonnering, mens de typiske algoritmiske oppgavene kategoriseres som imitativ resonnering. Kreativ resonnering henger sammen med *productive struggle,* en notasjon som beskriver den anstrengelsen som må til for å løse en oppgave man ikke umiddelbart ved løsningen på (Schoenfeld, 2016) . Ved å sjeldnere engasjeres i *productive struggle*, jo sjeldnere møter eleven på kognitive utfordringer. Ved å møte på kognitive utfordringer, får elevene større muligheter til å utvikle deres matematiske forståelse.

Ved å ta utgangspunkt i lærebøkenes oppgaver og deres krav for resonnering, kom interessen for hva som faktisk skiller ulike lærebøker i matematikk fra samme trinn fra hverandre. Er noen lærebøker rett og slett bedre enn andre, og hvordan vet man det? Hva kan man si om hver enkelt lærebok, hvilke slutninger kan man trekke? Gir noen lærebøker større muligheter for læring? Det at det finnes flere lærebøker for hvert trinn fra ulike forlag og med ulike forfattere, gir også hver enkelt lærebok sine unike egenskaper. Hver lærebok vil ha sin egne måte å presentere det matematiske innholdet på, en egen måte stille og forme de matematiske oppgavene på, og en egen måte å strukturere innholdet på. På bakgrunn av dette vil denne mastergradsoppgaven være en komparativ lærebokstudie basert på tre ulike lærebøker, fra tre ulike forlag tilhørende samme matematikretning, R1- matematikk for videregående skole.

Selv om lærebøkenes oppgaver er en stor del av deres innhold, er det likevel mer enn bare oppgavene som gjør hver lærebok unik. Hvordan hver lærebok velger å presentere deres matematiske innhold, og hvordan struktur de velger å bruke er momenter som kan vise ulikheter mellom de. Rammeverket til Charalambous, Delaney, Hsu og Mesa (2010) bestående av en horisontal analyse, som undersøker lærebøkene som helhet, og en vertikal analyse, som undersøker lærebøkenes innhold, gir muligheter til å undersøke de områdene man ønsker å undersøke. Lærebøkenes oppgaver kan være et av disse områdene. Det samme er bøkenes eksempler, deres framstilling av matematiske teori, deres struktur, og hvilke rekkefølger ulike emner representeres. Dette vil gi sammenligningsgrunnlag for hver enkelt lærebok.

R1 ble valgt da dette er en del av matematikk som programfag ved studiespesialiserende i retningen realfag (Utdanningsdirektoratet, 2013b). Utdanningsdirektoratet (2013b) poengterer i *Læreplan i matematikk for realfag,* at formålet til programfaget henger sammen med det raskt-utviklede høyteknologisamfunnet vi lever i dag, nemlig å skaffe elever den kunnskapen som trengs for å kunne fortsette å utvikle og ikke minst bevare dette samfunnet. Matematikk som programfag består både av matematikk R1 for elever ved andre trinn og matematikk R2 for elever ved tredje og siste trinn ved studiespesialiserende utdanningsprogram. Når elever starter ved 2.trinn på den videregående skolen, må de velge om de ønsker å fordype seg i samfunnsfaglig eller realfaglig retning. R1 er dermed et interessant matematikkfag, da det er det første selvvalgte fordypningsfaget elevene møter i realfaglig matematikk. For mange universitetsstudier er R1 en del av opptakskravet, noe som også gjør at faget for mange er starten på en mulig framtidig karriere.

Lærebokanalysen vil bestå av tre ulike lærebøker. På bakgrunn av dette og mastergradsoppgavens omfang, var det nødvendig med noen avgrensninger. Avgrensningene ble gjort i sammenheng med R1-matematikks hovedområder. Disse er geometri, algebra, funksjoner, og kombinatorikk og sannsynlighet (Utdanningsdirektoratet, 2013a). TIMSS Advanced-rapporten for 2015 viste at området *algebra* er det området elever, som da gikk ved tredje trinn på videregående skole, hadde den svakeste prestasjonen i matematikk sammenlignet med TIMSS egendefinerte områder *kalkulus* og *geometri* (L. S. Grønmo & Hole, 2016). Selv om TIMSS Advanced-undersøkelsen ikke omhandlet R1, skriver L. S. Grønmo og Hole (2016) at det blir naturlig å tro at de matematiske prestasjonene og kunnskapen som tilegnes ved tidligere år må kunne sees i sammenheng med de resultatene som kommer fram i rapporten. Kjapt konkludert vil det si at arbeidet som gjøres i blant annet R1, spesielt i emnet algebra, ikke er godt nok. Hvilke faktorer som spiller inn på disse resultatene, skal jeg ikke spekulere i, men med dette oppsummert fant jeg ut at området algebra hadde en interessant bakgrunn, og dermed ble algebra ett av to hovedområder jeg havnet på. Det andre hovedområdet jeg har valgt er *funksjoner*. Utdanningsdirektoratet (2013a) skriver om hovedområdene for matematikk R1 i *læreplan i matematikk for realfag* at området *funksjoner* blant annet handler om å kunne bruke og gjenkjenne størrelser lært i algebra for å studere dette nærmere ved hjelp av grafer og funksjoner. Funksjoner ble dermed en naturlig fortsettelse av algebra, da begge områder består av variabler som brukes på ulike måter. Valget på å inkludere funksjoner i oppgaven ble gjort på bakgrunn av dette.

1.2 Oppgavens problemstilling

Oppgaven skal bestå av en komparativ lærebokanalyse utført på tre ulike lærebøker tilhørende R1. Dette førte til følgende problemstilling:

- Hvilke forskjeller og likheter er det mellom tre ulike lærebøkers presentasjon av matematisk innhold og krav til elevene i emnene algebra og funksjoner for R1-matematikk?
    - Hvordan strukturerer lærebøkene deres presentasjoner av ulike temaer?
    - Hvordan presenterer lærebøkene deres eksempler?
    - Hvordan fordeler presentasjonen av teori seg, i form av deduktive begrunnelser, empiriske begrunnelser, ingen begrunnelser eller begrunnelser som ikke er fullført, mellom de ulike lærebøkene?
    - På hvilke måter gir lærebøkenes oppgaver elevene kognitive utfordringer?
    - Finnes det sammenhenger mellom innholdet som presenteres og situasjoner fra dagliglivet eller matematikk som er tidligere lært, og hvordan blir disse fordelt mellom lærebøkene?

Jeg velger å dele problemstillingen i flere forskningsspørsmål. Dette er fordi problemstillingen i seg selv er relativt vid, og mulighetene for å ikke klare å svare på den ville vært tilstede. Disse spørsmålene er ganske konkrete, og de kan jeg bruke for å tilslutt kunne svare på den egentlige problemstillingen. Forskningsspørsmålene vil dermed være til hjelp ved å systematisere det datamaterialet som ble samlet inn. Besvarelsen av problemstillingen skal gjøres ved å ta utgangspunkt i et konseptuelt rammeverk. Lester (2005) forklarer konseptuelle rammeverk som rammeverk hvor de konseptene som er hensiktsmessige og relevante for forskningen blir inkludert. Dette konseptuelle rammeverket vil bestå av flere ulike rammeverk, som alle har sin relevans til forskningsspørsmålene, og til slutt for selve problemstillingen.

Før jeg forklarer hvert forskningsspørsmål nærmere, vil jeg nevne det rammeverket som kommer til å bli mest brukt, og som oppgavens struktur og forskningsspørsmål vil bygge på. Dette er det nevnte rammeverket utviklet av Charalambous et al. (2010) bestående av en horisontal analyse og en vertikal analyse. Den horisontale analysen ser på lærebøkenes *bakgrunnsinformasjon* og *overordnede struktur*, mens det vertikale analysen ser på hvordan det matematiske innholdet *presenteres til elevene*, hva de *krever av elevene*, og hvilke *sammenhenger* det matematiske innholdet har til dagliglivet eller matematikk som de tidligere har lært. Disse ulike analysedelene vil oppgaven og oppgavens forskningsspørsmål struktureres etter, og dermed blir også dette rammeverket, det rammeverket oppgavens konseptuelle rammeverk vil ta utgangspunkt i.

For det første forskningsspørsmålet vil jeg undersøke hvordan lærebøkene strukturerer deres presentasjoner av ulike temaer. Her vil jeg se på hvilke rekkefølger de ulike lærebøkene velger å presentere matematisk innhold for samme matematiske område og om det er temaer noen lærebøker velger å ta med som de andre ikke velger å ta med, og dermed kunne se likheter og forskjeller mellom de. Dette faller under det Charalambous et al. (2010) kaller for lærebøkenes *overordnede struktur* for den horisontale analysen.

For det andre forskningsspørsmålet vil jeg undersøke hvordan lærebøkene presenterer deres eksempler. Denne havner under *presentert for elevene* for Charalambous et al. (2010) sin vertikale analyse. Her vil jeg følge samme analyseprosedyre som Charalambous et al. (2010) selv brukte. Denne analyseprosedyren undersøker da hvilke prosedyrer de viser, hvilke representasjoner og hvilken type algebra de inneholder, om de fullfører eksemplet, om eksemplet inneholder kontekst eller grafiske bilder, og om eksemplet viser flere ulike løsningsmetoder.

For det tredje forskningsspørsmålet ønsker jeg å undersøke hvordan lærebøkene velger å presentere deres teori, basert på rammeverk utarbeidet av Thompson, Senk og Johnson (2012) og Otten, Gilbertson, Males og Clark (2014). Her er fokuset om lærebøkene presenterer deres matematiske teori med deduktiv begrunnelse, empirisk begrunnelse, ingen begrunnelse, eller om det er teori som elevene selv må fullføre og begrunne. Som for lærebøkenes eksempler, vil også denne analysedelen falle under det som *presenteres til elevene* for den vertikale analysen.

For det fjerde forskningsspørsmålet ønsker jeg å undersøke hvilke kognitive utfordringer lærebøkenes oppgaver gir elevene. Rammeverket jeg har valgt å ta i bruk for dette, er det nevnte rammeverket til Lithner (2008) for imitativ og kreativ resonnering. Oppgaver der krever imitativ resonnering baserer seg på å enten memorere oppgavene eller følge kjente algoritmer. Dette er gjerne oppgaver og algoritmer elevene har gjort flere gang, slik at de blir imiterende. Oppgaver der krever kreativ resonnering består av resonnering hvor elevene for å nå en løsning må tenke nytt, og argumentere for hvorfor konklusjonen er sanne. Disse argumentene og konklusjonen skal være grunnet i indre matematiske egenskaper. For rammeverket til Charalambous et al. (2010) faller dette under det som *kreves av elevene* for rammeverkets vertikale analyse.

Det siste forskningsspørsmålet er rettet mot hvilke sammenhenger lærebøkenes matematiske innhold har. Dette kan være teori som har en sammenheng eller kobling mellom situasjoner i dagliglivet, eller det kan være teori med sammenhenger til matematikk elevene tidligere har lært, enten ved tidligere årstrinn eller tidligere i læreboka. For denne analysen, brukes kun rammeverket til Charalambous et al. (2010). Denne analysen faller under *sammenhenger* for den vertikale analysen.

2 Teori

2.1 Forskning på lærebøker

Lærebøker finnes og brukes i de aller fleste fag i skolen. De er viktige virkemidler til skolens undervisning og elevenes læring, og har på bakgrunn av dette blitt forsket internasjonalt i lang tid. Når det gjelder lærebøker i matematikk, har de i de siste par tiårene fått større internasjonal oppmerksomhet med tanke på forskning. Men selv om forskning på matematiske lærebøker har fått mer internasjonal oppmerksomhet de siste par tiårene, er dette fortsatt et forskningsfelt i tidligere utviklingsfase sammenlignet med andre forskningsfelt i matematikkdidaktikk (Fan, 2013).

Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt og Houang (2002) bruker en modell for å forklare de matematiske og vitenskapelige utdanningsmulighetene. Modellen, kalt *The International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA), er en tredelt fremstilling av læreplanen. Tredelingen av læreplanen viser ulikheten mellom læreplanen som et overordnet mål og intensjon, læreplanen som en veileder til ulike øvelser, aktiviteter og metoder, og til slutt, læreplanen som viser hva elevene skal gjennomføre. Disse delene kalles henholdsvis for *tiltenkt*, *implementert* og *oppnådd* (Valverde et al., 2002). Valverde et al. (2002) utvider midlertid denne tredelingen til å også inkludere lærebøker. De beskriver lærebøker som et intermediat, et mellomledd, noe som ligger mellom den *tiltenkte* delen og den *implementerte* delen. Dette begrunnes ved at innholdet i lærebøker er lagt opp til pedagogiske situasjoner ved bruk at forklaringer, oppgaver og eksempler. Dette bruker lærere som maler eller inspirasjon til deres eget undervisningsopplegg for å fremme best mulig utdanningsmulighet. Dermed er lærebøker et ledd mellom det *tiltenkte* målet og det som *implementeres* (Valverde et al., 2002). Mesa (2004) skriver også at lærebøker er en kilde til potensiell læring. Dette begrunnes ved at det lærebøkene lærer elevene, samt den praktiske tilnærmingen ved læring, skjer gjennom blant annet læreren, klassekamerater og oppgaver.

Det at lærebøkene lærer elevene matematikk, blant annet gjennom læreren, kan ses i sammenheng med det Jones og Tarr (2007) skriver om lærebøkenes plass i klasserommet og matematikkundervisningen. Jones og Tarr (2007) skriver videre at fordi lærebøkene har en så stor plass og innflytelse i undervisningen og hva som læres i ulike klasserom, er det da nødvendig å undersøke disse verktøyene lærerne bruker, som blant annet lærebøker vil være en del av, og hvordan disse verktøyene påvirker elevenes muligheter til å lære seg matematikk. Li, Chen og An (2009) skriver at lærebøkene hjelper lærerne til å spesifisere de generelle intensjonene i læreplanen, altså den *tiltenkte* delen av læreplanen. Lærebøker inneholder i tillegg hele innholdet av læreplanen som lærerne skal legge opp undervisningen etter. Lærebøker kan dermed sees på som en bro mellom den tiltenkte læreplanen og den implementerte læreplanen, slik som Valverde et al. (2002) som nevnt også mente. En analyse av lærebøker vil vise hva som faktisk læres av elevene i undervisningen, men på en annen og klarere måte enn det den *tiltenkte* læreplanen viser, nettopp på grunn av lærebøkenes kobling med det som faktisk skjer klasserommet (Li et al., 2009).

2.1.1 Tidligere lærebokforskning

Fan, Zhu og Miao (2013) har i sin studie sett nærmere tidligere utgitte tidsskrifter og andre utgivelser som tar for seg forskning av matematiske lærebøker. Ved å bruke deres rammeverk for å klassifisere de forskjellige forskningsartiklene, ble artiklene delt i fire ulike kategorier: lærebøkenes rolle, lærebokanalyse og sammenligning av lærebøker, bruken av lærebøker, og andre områder. Lærebokanalyse og sammenlikning av lærebøker, er i følge Fan et al. (2013) sin studie det området det blir forsket mest på innenfor forskning av matematiske lærebøker, og da det er dette området denne masteroppgaven havner under, velger jeg å kun se nærmere på denne kategorien. Denne typen forskning deles i to forskjellige måter å analysere på. Den ene måten er å analysere en enkelt bok eller en serie av bøker, hvor fokuset ofte blir hvordan temaer i bøkene blir tatt opp. Den andre måten er å analysere ulike lærebokserier. Dette kan enten være serier fra samme land eller fra ulike land. Disse to måtene å analysere lærebøker illustrerer at den første måten er en typisk lærebokanalyse, mens den andre måten dreier seg om en sammenligning. Det som er viktig å påpeke er at bak den sammenligningen, ligger det en lærebokanalyse av hver enkelt bok (Fan et al., 2013).

De aller fleste lærebokstudier hvor lærebøkenes matematiske innhold og temaer blir analysert, fokuserer, i følge (Fan et al., 2013), på hvordan det matematiske innholdet og temaene blir omhandlet i de ulike lærebøkene. Blant annet fokuserte Stacey og Vincent (2009) i deres studie på lærebøkenes presentasjon av resonnering. Denne studien ble utført på ni ulike lærebøker ved 8.trinn i Australia, og studiens bakgrunn var at elevers matematikkforståelse ikke kun består av en mengde formler og regler som må brukes, men at de også trenger matematisk resonnering. Ved å analysere lærebøkenes deler hvor nye matematiske regler og sammenhenger ble introdusert, klarte de klassifisere de i syv ulike typer resonnering. Funnet i studien var at de fleste lærebøkene har forklaringer til de fleste temaene, istedenfor å kun introduseres regler uten at det presenteres noen grunn til det. Det de likevel fant ut var at disse forklaringene for det meste kun ble utledet for å forberede elevene til lærebokas øvingsoppgaver, i stedet for at de kunne blitt et redskap elevene kunne tatt med seg til senere oppgaver eller problemer (Stacey & Vincent, 2009).

En annen lærebokstudie som også fokuserte på lærebøkenes innhold, men som i motsetning til Stacey og Vincent (2009) også valgte å blant annet konsentrere seg om lærebøkenes oppgaver, er Charalambous et al. (2010) sin studie. De valgte å se hva som krevdes av elevene ved oppgaveløsning, i form av hvilke kognitive utfordringer oppgavene ga de. Deres studie sammenlignet addisjon og subtraksjon av brøk i lærebøker fra Irland, Taiwan og Kypros, og som utgangspunkt til å analysere lærebøkenes oppgaver valgte de å bruke Stein, Smith, Henningsen og Silver (2000) *the Mathematical Task Framework* for å avgjøre oppgavenes kognitive utfordringer. Funnene de fant var at lærebøkene fra Taiwan skilte seg fra de to andre ved at oppgaver som gir større kognitive utfordringer dominerte i en betydelig større grad enn for de to andre landene (Charalambous et al., 2010).

Både Stacey og Vincent (2009) og Charalambous et al. (2010) valgte i deres studier å sammenligne flere ulike lærebøker. Dette kalles komparative lærebokstudier, og i følge Fan et al. (2013) er 29% av forskning på lærebøker, gjort mellom ulike lærebøker. Komparative lærebokstudier kan både gjennomføres internasjonalt, slik som Charalambous et al. (2010) gjorde i sin undersøkelse, men også nasjonalt. Nevnte Stacey og Vincent (2009) valgte å gjennomføre en komparativ lærebokstudie innad i landet. En annen komparative studie innad i landet utførte Thompson et al. (2012) hvor de ønsket å undersøke mulighetene for å lære resonnering og bevis for 20 lærebøker i matematikk ved high school. Bakgrunnen for studien var forskning som viste at mange elever ikke kan utføre bevis eller har vanskeligheter med å forstå bevis. De valgte dermed å analysere både lærebøkenes oppgaver og lærebøkenes teoridel for polynomer, eksponenter og logaritmer. Et av funnene deres var at mindre enn 6% av oppgavene for alle lærebøkene involverte bevisrelatert resonnering (Thompson et al., 2012)

Utfra disse tidligere lærebokstudiene, ser man at det er vanlig å undersøke flere enn kun én lærebok. Alle de nevnte forskningene er komparative, så en slik tilnærming ved lærebokanalyse er klart realistisk å utføre. Ser også av disse tidligere forskningene at både det å analysere lærebøkenes presentasjoner av det matematiske innholdet, og lærebøkenes oppgaver er mulig å analysere, og det er blitt utført tidligere. Li (2000) anbefaler i midlertid å kombinere disse to måtene å utføre lærebokanalyse. Begrunnelsen bak dette er at ved å kun analysere enten lærebøkenes oppgaver eller det resterende innholdet, vil man uansett miste en viktig del av hvordan elevene opplever å lære matematikk i skolen, da både det å løse oppgaver og det å ta for seg lærebøkenes teori og eksempler vil være måter elevene lærer matematikk (Li, 2000). Dette vil også være relevant for denne oppgaven hvor både lærebøkenes presentasjoner og oppgaver blir analysert.

2.2 Kognitive utfordringer

Stein et al. (2000) definerer *cognitive demand* etter hvilken type eller hvilket nivå av tenkning som kreves av elevene for å klare å engasjere seg i en matematisk situasjon eller i en matematisk oppgave. *Cognitive demand* blir i denne oppgaven brukt som et generelt begrep for de kognitive utfordringer elever møter i matematikk. Schoenfeld (2016) og the Teaching for Robust Understandig Project sitt rammeverk TRU (Teaching for Robust Understanding) viser til andre forskere når de beskriver kognitive utfordringer som utfordringer i forhold til hva elevene allerede kan. For å forklare hva som menes med det, trekkes notasjonen *producitve struggle* fram, og viktigheten av at elevene får muligheten til å engasjeres med slike utfordringer for å utvikle deres matematiske forståelse (Schoenfeld, 2016; Schoenfeld & Floden, 2014). Hiebert og Grouws (2007) definerer *productive struggle* som anstrengelsen en har for å løse noe/finne ut noe som ikke umiddelbart er klart. De understreker at *struggle* i denne settingen vil være å løse oppgaver som er innenfor elevenes rekkevidde når det gjelder nivå, samt at de tar opp matematiske ideer som er forståelige for elevene, men kanskje ikke er like enkle å ta i bruk. *Productive struggle* gir elevene mulighet til å forstå det matematiske innholdet på et enda dypere nivå som kan føre de til å klare og løse mer utfordrende og komplekse oppgaver senere (Schoenfeld, 2016).

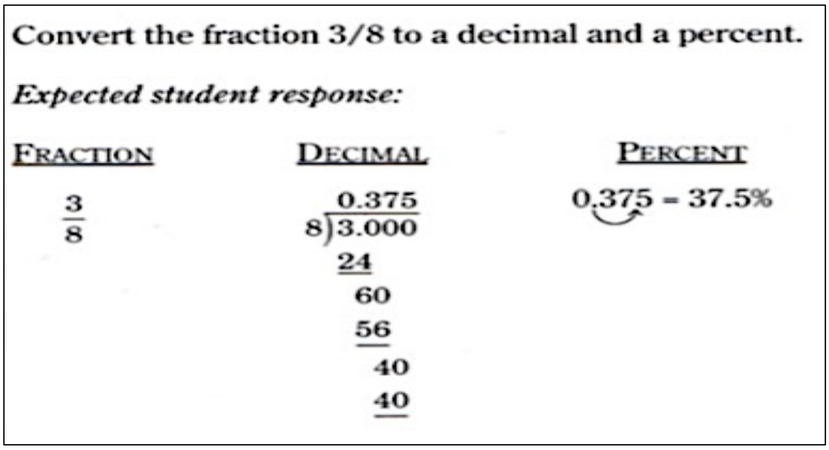
Jonsson, Norqvist, Liljekvist og Lithner (2014) presiserer at det må være en balanse slik at disse *struggles* ikke blir så krevende at de blir til hinder for elevene, men at de heller fremmer læring. Hvordan *productive struggle* kan fremme læring, kan ses i sammenheng med at det kobles til matematisk forståelse (Hiebert & Grouws, 2007). Hiebert og Grouws (2007) definerer matematisk forståelse som den mentale sammenhengen mellom matematiske ideer, faktaopplysninger og prosedyrer. Koblingen mellom *productive struggle* og den matematiske forståelsen er at *productive struggle* blir prosessen som, når elevene møter ny matematisk informasjon de ikke klarer å forstå ved den matematiske forståelsen de allerede innehar, omformer denne allerede kjente kunnskapen til en ny forståelse hvor den nye informasjonen får sin plass. Forholdet mellom det elevene kan fra før må omgjøres når disse ikke er tilstrekkelige til å gi ny informasjon mening. Det er denne prosessen som gir elevene mulighet til å lære matematikk på et enda dypere nivå (Hiebert & Grouws, 2007). Da alle elever er ulike, vil også hver enkeltes anstrengelse for å finne ut noe som ikke er klart umiddelbart være ulik. *Productive struggle* vil da være et mål på hvilken type tenkning elevene møter, og vil da også være et mål på passende nivå til de kognitive utfordringene. En elev vil altså møte *productive struggle* ved utfordringer som en annen elev ikke vil, da denne eleven kan være på et annet matematisk nivå og vil møte *productive struggle* ved andre matematiske situasjoner.

Et rammeverk jeg vil trekke fram i defineringen av kognitive utfordringer er TIMSS 2015 Mathematics Framework, som ble utarbeidet av TIMSS i forbindelse med deres trendstudie i 2015. Dette rammeverket blir delt i tre underrammeverk: TIMSS Mathematics Fourth Grade, TIMSS Numeracy, og TIMSS Mathematics Eighth Grade. Hver av disse vurderingsrammeverkene blir delt i to dimensjoner, innholdsdimensjonen og den kognitive dimensjonen. Den kognitive dimensjonen spesifiserer hvilke tankeprosesser som testes og vurderes i TIMSS-studien. For å svare korrekt på de utfordringer man møter på i studien er det ikke bare nødvendig å være kjent med det matematiske innholdet (content), man må også sitte på et spekter av kognitive ferdigheter. De kognitive ferdighetene deles inn i *å kunne*, *å anvende* og *å resonnere. Å kunne* består av å kunne fakta, begreper og prosedyrer elevene behøver. *Å anvende* fokuserer på elevenes muligheter til å løse og svare på matematiske oppgaver ved å anvende deres kunnskap og konseptuelle forståelse. Elevene skal kunne implementere løsningsstrategier og matematiske operasjoner for å løse oppgaver og problemer som involverer kjente matematiske prosedyrer og begreper. *Å resonnere* fokuserer på å kunne tenke logisk og systematisk. Det å kunne evaluere alternative strategivalg, kunne trekke gyldige slutninger på bakgrunn av gitt informasjon, samt det å kunne generalisere en matematisk situasjon og kunne begrunne valg av strategi og løsning, vil være å resonnere (L. S. Grønmo, Lindquist, Arora & Mullis, 2013). Her vil de forskjellige kognitive ferdighetene kreve ulike typer tenkning og ulikt nivå av tenkning. Matematiske situasjoner der det kreves at elevene kan og gjenkjenner matematiske formler og begreper, vil kreve en annen type tenkning og en tenkning på et lavere nivå enn ved situasjoner der elevene må analysere og begrunne strategien og løsningen sin. Situasjoner der elevene må resonnere vil kreve mer av eleven, og da være mer kognitivt utfordrende enn både det *å kunne* og *å anvende*. Tenkning på høyere nivå, og tenkning som krever mer av elevene gir også større muligheter for å oppnå *productive struggle* som er viktig for utviklingen av elevenes matematiske forståelse.

Som allerede nevnt, definerer Stein et al. (2000) *cognitive demand* etter hvilken type tenkning og hvilket nivå av tenkning som kreves av elevene for engasjeres i matematiske oppgaver. De situasjonene som krever at elevene utfører en memorert prosedyre vil gi andre muligheter for matematisk tenking enn det situasjonene som får de til å lage meningsfulle sammenhenger eller relevante matematiske ideer vil gi (Stein et al., 2000). Stein et al. (2000) forklarer viktigheten til de kognitive utfordringene, ved at det er hvilket nivå og hvilken type tenkning, altså hvilket nivå av kognitive utfordringer, elevene gjør som avgjør hva de lærer. Disse nivåene kaller Stein og Smith (1998) for lavere eller høyere kognitivt nivå. Ved å se dette i sammenheng med TIMSS´ kognitive ferdigheter vil oppgaver som krever *å kunne* faller under et annen kognitivt nivå enn det oppgaver som krever *å resonnere*.

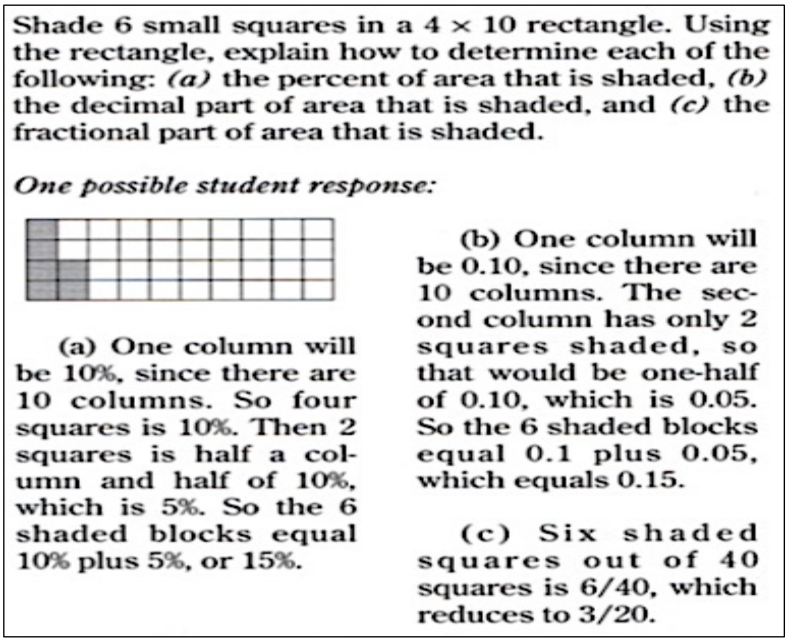
Hvilke typer oppgaver elevene løser avgjør hva de lærer. Det er hvilken type tenkning og hvilket nivå som viser hvor kognitivt utfordrende oppgavene er for elevene. På bakgrunn av analysene til QUSAR-prosjektet, ledet av Edward A. Silver, ble rammeverket The Mathematical Task Framework utviklet (Stein & Smith, 1998; Stein et al., 2000). Rammeverket beskriver tre faser matematikkoppgaver gjennomgår i undervisningen. Den første fasen beskriver hvordan oppgaver blir presentert gjennom læreplaner og lærebøker, den andre fasen beskriver hvordan læreren legger fram og presenterer oppgaver, men den siste fasen viser til hvordan elevene løser oppgavene. Ved at oppgavene gjennomgår disse fasene, vil dette føre til utvikling av elevenes læring i matematikk (Stein & Smith, 1998).

Stein et al. (2000) tar utgangspunkt i rammeverkets første fase, hvordan oppgaver blir presentert i læreplanen eller lærebøker, når de i sin studie skal analysere de kognitive nivåene til forskjellige matematikkoppgaver. Oppgavene blir enten klassifisert som oppgaver som tilhører lavere kognitivt nivå eller høyere kognitivt nivå. For å skille disse nivåene utviklet de en guide, *The Task Analyse Guide*, som identifiserer ulike karakteristtrekk ved oppgavene som typisk tilhører lavere kognitivt nivå eller høyere kognitivt nivå (Stein et al., 2000). Om oppgavene elevene løser for eksempel ber de om å huske (memorere) likhetene mellom spesifikke brøk, desimaltall og prosent, vil dette kreve matematisk tenkning på lavere nivå av elevene. I tillegg vil oppgaver som typisk ber elevene reprodusere tidligere lærte fakta, regler, formler eller definisjoner, og oppgaver der det ikke er noen sammenheng mellom konseptene eller meningen som ligger bak disse også tilhørere lavere kognitivt nivå. Det samme gjør oppgaver som er algoritmiske, gjerne ved bruk av spesifiserte algoritmer, enten ved det som tidligere er presentert og erfart eller ved plasseringen til oppgavene i læreboka (Stein et al., 2000). Figur 2.1 viser en typisk oppgave som ikke gir elevene de store kognitive utfordringene, og dermed en oppgave som vil passe under lavere kognitivt nivå.



Figur 2.1: Viser eksempler på oppgaver tilhørende lavere kognitivt nivå. Hentet fra Stein og Smith (1998).

Oppgaver som krever høyere kognitivt nivå er blant annet oppgaver hvor oppgavenes prosedyrer blir brukt på en slik måte at de legger til rette for bruk og gjenkjenning av sammenhenger mellom underliggende matematiske meninger og konsepter. Det samme gjelder oppgaver som får elevene til å utvikle en dypere forståelse av matematiske konsepter og ideer. Tilslutt vil oppgaver som krever kompleks og ikke-algoritmisk tenkning, hvor det ikke er en forutsigbar, vell-øvd tilnærming foreslått i oppgaven eller i tidligere eksempler, oppgaver der elevene må finne fram relevant kunnskap og erfaringer og bruke de på riktig måte når de jobber seg gjennom oppgaven, også tilhøre høyere kognitivt nivå. De kognitive utfordringene vil være større for oppgavetyper som faller under det høyere kognitive nivået enn de som ikke gjør det (Stein et al., 2000). Figur 2.2 viser en typisk oppgave som gir elevene større kognitive utfordringer, hvor elevene ved bruk av et kvadrat bestående av 4x10 ruter bedt om å bestemme hvilken prosent, desimaltall og brøk de rutene som er skravert tilsvarer.



Shade 6 small squares in a 4 × 10 rectangle. Using the rectangle, explain how to determine each of the following: *(a)* the percent of area that is shaded, *(b)* the decimal part of area that is shaded, and *(c)* the fractional part of area that is shaded.

One possible student response:

(a) One column will be 10%, since there are 10 columns. So four squares is 10%. Then 2 squares is half a column and half of 10%, which is 5%. So the 6 shaded blocks equal 10% plus 5%, or 15%.

(b) One column will be 0.10, since there are 10 columns. The second column has only 2 squares shaded, so that would be one-half of 0.10, which is 0.05. So the 6 shaded blocks equal 0.1 plus 0.05, which equals 0.15.

(c) Six shaded squares out of 40 squares is 6/40, which reduces to 3/20.

Figur 2.2: Viser kompleks og ikke-aritmetisk oppgave tilhørende høyere kognitivt nivå. Hentet fra Stein og Smith (1998).

De kognitive utfordringene blir altså definert etter hvilken type tenkning som kreves for å løse oppgaver, eller hvilket nivå av tenkning som kreves. Fra det som allerede er skrevet i denne oppgaven om kognitive utfordringer, kan man si at ulike typer oppgaver, krever ulike typer kognitive ferdigheter. Uavhengig om man ser på TIMSS´ rammeverk (L. S. Grønmo et al., 2013) eller Smith et al. (2000) sitt rammeverk kan man se noen likheter på oppgaver som passer ulike kognitive utfordringer. Oppgaver som typisk ber elevene om å memorere eller forventer at elevene skal kunne ulike typer fakta og begreper er oppgaver som vil gi elevene mindre kognitive utfordringer, mens oppgaver hvor elevene skal se underliggende matematiske sammenhenger og meninger, hvor de altså må tenke på en annen måte, vil gi høyere kognitive utfordringer. *Productive struggle* ble definert som prosessen elevene må gjennom for å kunne ta ny informasjon i bruk sammen med den tidligere kunnskapen slik at dette gir mening. De oppgavene som gir elevene større *productive struggle* vil også være mer kognitivt utfordrende, og jo mer *productive struggle* de gir, jo større vil de kognitive utfordringene bli. Oppsummert blir kognitive utfordringer for denne oppgaven definert som de ulike typer tenking de ulike oppgavetypene krever av elevene.

2.3 Teoretisk rammeverk

Rammeverket denne oppgaven har som utgangspunkt er et konseptuelt rammeverk som er satt sammen av og inkluderer flere ulike rammeverk. På bakgrunn av masteroppgavens problemstilling og forskningsspørsmål og muligheten til å undersøke disse, var det mest hensiktsmessig å ta i bruk et slikt rammeverk. Det konseptuelle rammeverket oppgaven bygger på tar som nevnt utgangspunkt i rammeverket til Charalambous et al. (2010). Deres rammeverk består av ulike analysedeler som er svært gunstige for denne oppgavens problemstilling og forskningsspørsmål, noe som vil begrunnes i løpet av dette delkapitlet.

Studien til Charalambous et al. (2010) begrenset seg til å se på addisjon og subtraksjon av brøk i lærebøker fra tre forskjellige land ved å se på ulike momenter fra forskjellige områder i lærebøkene. Deres analyse består av å finne likheter og forskjeller i deres presentasjoner av addisjon og subtraksjon av brøk i læreverk fra Irland, Kypros og Taiwan, samt se på hva som forventes av elevene i lærebøkenes oppgaver under samme tema. De velger blant annet å se på hvordan eksemplene ble lagt opp, og hvilke kognitive nivå som ble forventet av elevene når de løste oppgavene. I deres forskningsartikkel består analyseverktøyet ev et to-dimensjonalt rammeverk, bestående av en *horisontal analyse* og en *vertikal analyse*. Disse to dimensjonene kombineres da det kan avsløre karakteristikk til lærebøkene som ikke ville blitt observert ved å kun ta i bruk en av dimensjonene. Dette vil styrke analysen (Charalambous et al., 2010).

Den *horisontale analysen* ser på lærebøkene som en helhet, og går inn på hver enkelt lærebok karakteristikk. Dette kan blant annet være bokas tittel, forfattere, antall sider, samt en oversikt over bokas kapitler og hvordan disse er strukturert (Charalambous et al., 2010). Den horisontale analysen vil ikke gi noe detaljert informasjon om hva forfatterne *egentlig* vil med boka, bokas innhold. Dette er derimot noe den *vertikale analysen* vil dekke (Hong & Choi, 2014). For hvis den horisontale analysen analyserer bøkene mer i bredden, vil den vertikale analysen analysere mer i dybden. Hovedoppgaven til den *vertikale analysen* er å undersøke hvordan lærebøkene tar for seg hvert enkelt matematisk konsept. Den vertikale analysen ser på det matematiske innholdet, og en kan da analysere hvordan bøkene har lagt fram bestemte matematiske konsepter og i hvor stor grad de har gjort det. I den *vertikale analysen* kan man også analysere lærebøkenes oppgaver og hva som kreves av elevene for å kunne løse oppgavene (Charalambous et al., 2010).

Charalambous et al. (2010) har delt både den *horisontale analysen* og den *vertikale analysen* i flere kategorier. Den *horisontale analysen* deles inn i to kategorier, der den ene kategorien innholder lærerbøkenes *bakgrunnsinformasjon*, mens den andre tar for seg lærebøkenes helhetlige *struktur*. *Bakgrunnsinformasjon* er en beskrivende oversikt av læreboka og dens produksjon. Dette kan være bokas tittel, forfattere, antall sider, utgiver og om det finnes noe tilhørende tilleggsmaterialet til boken (Charalambous et al., 2010). Den *helhetlige strukturen* går mer inn på hvilke emner læreboka inneholder, og på hvilken måte disse emnene er plassert i forhold til hverandre. Den *vertikale analysen* blir delt inn i tre kategorier. Den første kategorien ser på hvordan matematikken i læreboka blir formidlet til elevene, kalt *presentert til elevene*. Dette tar for seg både lærebøkenes matematiske innhold, lærebøkenes praktiske presentasjoner som blant annet lærebøkenes eksempler, og lærebøkenes holdninger. Den andre kategorien ser mer på hva som kreves av elevene. Dette gjelder hva som kreves av elevene i forhold til oppgaveløsning, kalt *kreves av elevene.* Charalambous et al. (2010) har for undersøkelsen av lærebøkenes oppgaver valgt å ta utgangspunkt i Stein et al. (2000) sitt rammeverk The Mathematical Task Framework og deres analyseguide for å klassifisere hvilke kognitive ferdigheter lærebøkenes oppgaver krevde av elevene. Den tredje og siste kategorien, kalt *sammenhenger*, ser på hvordan læreboka lager forbindelser mellom det læreboka presenterer og matematikk elevene har lært tidligere, eller til hverdagslige situasjoner utenfor klasserommet og skolen (Charalambous et al., 2010). Figur 2.3 viser en oversikt over rammeverket.

HORIZONTAL ANALYSIS OF THE TEXTBOOK

Background Information	**Overall Structure**
• Title • Number of books • Pages (Number and Density) • Profile of authors and advisory committee • Publisher and year of publication • Accompanying materials (e.g., teachers' guides, resource materials)	• Number of units/lessons and average number of pages per unit/lesson • Structure of units/lessons • Topics covered • Sequencing of topics

VERTICAL ANALYSIS OF THE TEXTBOOK

Communicated to Students	**Required of Students**	**Connections**
Mathematical Content • Topic-specific construct, structure etc. (e.g. part-whole, ratio, operator, quotient, measure fraction constructs) • Definitions, rules, conventions • Illustrations-representations (irrelevant, relevant to the context but not to the mathematics, supporting the mathematics) *Mathematical Practices* • Worked examples • Modeling thinking *Attitudes* • Equity • View of mathematics	• Potential Cognitive Demands (memorization, procedures with connections, procedures without connections, doing mathematics) • Type of Response (answer only, answer and mathematical sentence, explanation, justification)	• Connecting within and between strands • Classroom instruction - textbook connections • Connecting to situations outside of school

Figur 2.3: Viser en oversikt over det teoretiske rammeverket. Hentet fra Charalambous et al. (2010).

Grunnen til at Charalambous et al. (2010) sitt rammeverk blir valgt som utgangspunkt for det konseptuelle rammeverket denne oppgaven baseres på, er fordi deres rammeverk omfavner oppgavens problemstilling og alle forskningsspørsmål på en slik måte at det blir hensiktsmessig å bruke. Her vil lærebøkenes struktur og valg av de ulike temaenes rekkefølge dekkes av *overordnet struktur* for den horisontale analysen. Hvordan lærebøkenes eksempler presenteres, og hvilken type begrunnelse de legger til grunn for deres presentasjon av det matematiske innholdet, faller under kategorien *presentert til elevene* for den vertikale analysen. Hvilke kognitive utfordringer lærebøkenes oppgaver gir elevene, vil falle under kategorien *kreves av elevene*. På samme måte vil oppgavens siste forskningsspørsmål omhandle eventuelle sammenhenger mellom matematikken lærebøkene presenterer og dagliglivet, eller om det henger sammen med matematikk som elevene tidligere har lært, falle under Charalambous et al. (2010) sin kategori *sammenhenger*.

Figur 2.3 som viser en oversikt over Charalambous et al. (2010) sitt rammeverk, viser flere aspekter ved lærebøkene som kan undersøkes enn de denne oppgaven bruker. Som problemstillingen og forskningsspørsmålene tilsier vil jeg ikke ta i bruk alle måtene figuren viser. Jeg kommer tillegg, for enkelte deler, å bruke andre rammeverk og annen, ny teori for å tilnærme meg forskningsspørsmålene på den måten jeg ønsker. For *presentert til elevene* velger jeg å begrense meg til presentasjonen av lærebøkenes eksempler, samt undersøke lærebøkenes matematiske innhold ved å se på hvilke begrunnelser de legger til grunn for sine matematiske presentasjoner, basert på rammeverk av Thompson et al. (2012) og Otten et al. (2014). For lærebøkenes eksempler kommer jeg til å følge Charalambous et al. (2010) sine kategorier og fremgangsmåte, men for en av disse eksempelkategoriene, *type algebra*, kommer jeg imidlertid til å trekke inn ny teori basert på Usiskin (1988) sin definisjon av type algebra. Hvilke holdninger lærebøkene presenterer, som inneholdes i *presentert til elevene,* utelukkes dermed i denne oppgaven. For *kreves av elevene*, vil Lithner (2008) sitt rammeverk for imitativ og kreativ resonnering brukes, i motsetning til Charalambous et al. (2010) valg av Stein et al. (2000) sitt rammeverk. Rammeverket for hvilke begrunnelser lærebøkene bruker ved presentasjon av nytt innhold basert på rammeverket brukt av Thompson et al. (2012) og Otten et al. (2014), Usiskin (1988) sin definisjon av typer algebra, samt Lithner (2008) sitt rammeverk for imitativ og kreativ resonnering vil presenteres nærmere i neste punkt, 2.4 *Teori relatert til den vertikale analysen.*

2.4 Teori relatert til den vertikale analysen

For den vertikale analysen er det en del viktig teori som er helt nødvendig å presentere. Dette er hvilken *type algebra*, lærebøkenes *fremstilling av teori,* og *rammeverk for imitativ og kreativ resonnering.*

2.4.1 Type algebra

Ved analyseringen av lærebøkenes eksempler er et av momentene å definere hvilke type algebra de viser. Usiskin (1988) definerer ulike typer algebra etter hvilken hensikt variabelen har. Da både algebraiske uttrykk, likninger og funksjoner alle har variabler av ulike hensikter, vil det å bestemme *hvilken* type algebra det gjelder være lurt. Usiskin (1988) starter avklaringen av de ulike typene algebra ved å definere det han kaller skolealgebra og variabelbruk. Det første han er opptatt av å avklare er hva skolealgebra er. Den algebra som praktiseres på grunnskolen og den videregående skolen har store forskjeller med den som undervises i på universitetsnivå. For å avklare hva skolealgebra er tar Usiskin (1988) utgangspunkt i et avsnitt hentet fra Lane og Birkhoffs *Algebra*, hvor han da får konstatert at skolealgebra har noe med å forstå *bokstaver* og deres operasjoner. Bokstaver eller *variabler,* som de kalles innenfor matematikken, har flere ulike måter de brukes på. Noen ganger vil variabelen være en ukjent, andre ganger kan det være flere variabler som danner en formel. Dermed vil *det å forstå bokstaver og deres operasjoner* være nødvendig å spesifiseres nærmere. Usiskin (1988) har definert fire ulike typer knyttet til algebra. Disse typene av algebra skal gjenspeile hvilken hensikt variablene som brukes har.

Type 1) *Algebra som generaliserende aritmetikk*

I denne typen algebra, kan en tenke at variablene generaliserer ulike sammensetninger eller mønstre. Slik som 3 + 5.7 = 5.7 + 3 kan generaliseres som a + b = b + a (Usiskin, 1988). En kan en tenke seg at det eleven må gjøre er å *oversette* og *generalisere.* Regelen for multiplikasjon av brøk skrives med ord slik: ”Multipliser tellerne til brøkene for å få telleren til produktet, deretter multipliseres nevnerne til brøkene for å få nevneren til produktet”. Oversettes og generaliseres dette til algebra, vil man få nøyaktig den samme brøkmultiplikasjonen som ved forklaringen, nemlig: $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (Usiskin, 1995).

Type 2) *Algebra som prosedyrer for å løse problemer*

Usiskin (1988) viser til denne oppgaven når algebratype 2 skal introduseres: ”når 3 er blitt lagt til tallet 5 ganget med et visst tall, da er summen lik 40. Finn tallet”. Dette oversatt til algebra blir: 5x + 3 = 40. Poenget med hele oppgaven er å finne *tallet,* altså variabelen x. Tallet som skal finnes er ukjent for den som løser oppgaven, så variablene i denne typen algebra kalles ofte for *ukjente*. For den første typen algebra måtte elevene oversette og generalisere, mens de for denne typen må *forenkle* og *løse* **Ugyldig kilde er angitt.**. Typiske eksempler som havner under denne typen er eksemplene hvor det løses likninger, da likninger inneholder en ukjent variabel man ønsker å finne.

Type 3) *Algebra som forhold mellom mengder.*

Formelen for arealet til en firkant, A=lb, beskriver forholdet mellom tre forskjellige mengder, hvor arealet er et produkt av firkantens lengde og bredde. Om en sammenligner med algebratype 2, ser en her at det ikke er noen ukjente variabler som skal finnes. Dette er fordi formelen *ikke* skal løses. Den beskriver kun hva arealet til en firkant er i sammenheng med firkantens bredde og lengde (Usiskin, 1988). Usiskin (1988) ser nærmere på spørsmålet: ”Hva skjer med verdien av 1/x når x blir større?”. x er ikke en ukjent variable siden det ikke spørres om å finne en verdi for x. Variabelen her kan også variere. Det er heller ingen mønster som skal generaliseres.

Det at en mengde avhenger av andre mengder slik det gjør her, danner grunnlaget for funksjoner. Spørsmål som ”hva vil det koste å produsere en type klær hvis flere blir laget på fabrikk eller om det brukes annet materiale?” eller ”hvordan vil budsjettet påvirkes hvis man endrer kjøpevanene sine?” er typiske spørsmål som kan forklares ved funksjoner. Vi bruker ofte funksjoner når vi ønsker å finne ut hva som skjer med en mengde over lengre tid. Vil det minke, øker eller holde seg stabilt? Funksjoner brukes også når en vil finne den høyeste og laveste verdien til en mengde (Usiskin, 1995). Funksjoner kan dermed i mange tilfeller bli klassifisert som denne algebratypen.

Type 4) *Algebra som strukturer*

Usiskin (1988) bruker oppgaven ”faktoriser $3x^2 + 4ax – 132a^2$” for å illustrere hva som menes med algebra som strukturer. Uttrykket kan faktoriseres til $(3x + 22a)(x – 6a)$, som vil være en annen måte å uttrykke det første uttrykket. For å konkretisere dette enda mer viser Usiskin (1988) til oppgaver hvor elevene blir bedt om å utlede for eksempel trigonometriske identiteter som $2\sin^2 x – 1 = \sin^4 x – \cos^4 x$. Her er det ikke meningen at elevene skal tenke på sinus og cosinus som spesifikke verdier, og egentlig ikke tenke på sinus-og cosinusfunksjoner i det hele tatt. Det som er poenget er at elevene skal kunne manipulere *sin x* og *cos x* til en annen form. Det samme gjelder også for faktoriseringen av $3x^2 + 4ax – 132a^2$. Poenget til Usiskin (1988) er at man kan utlede en formel eller et utrykk fra et annen. Algebra hjelper oss til å ikke trenge å huske alle formlene vi trenger, fordi vi kan klare å utlede de fra andre. Ved å sammenligne variabelen for denne algebratypen med variablene for de foregående typene, kan en se at variabelen her verken er en ukjent eller en mengde. Det er heller ikke noe mønster som skal generaliseres (Usiskin, 1988).

2.4.2 Framstilling av teori

Til å bestemme hvordan lærebøkene har valgt å fremstille deres teoridel, har jeg valgt å ta utgangspunkt i en sammensetning av rammeverket Thompson et al. (2012) brukte i deres studie om elevers muligheter til å lære resonnering og bevis i 20 ulike matematikklærebøker ved high school i USA, samt rammeverket Otten et al. (2014) brukte i deres studie, som allerede er mye inspirert av Thompson et al. (2012) sitt rammeverk. Jeg velger å bruke en sammensetning av disse rammeverkene, da de tar for seg de ulike måtene lærebøkers teori ofte blir presentert, og i tillegg til at disse ulike måtene kan vise hvordan hver lærebok typisk har valgt å presentere innholdet sitt på, noe som vil vise likhetene og forskjellene til lærebøkene. Thompson et al. (2012) sin studie gikk i hovedsak ut på å undersøke hvordan de ulike lærebøkene hadde lagt fram muligheter for resonnering og bevis i deres bøker og om det fantes variasjoner mellom de ulike lærebøkene fra forskjellige lærebokserier, dette gjaldt både lærebøkenes teoridel og oppgavedel. Rammeverket deres ble utviklet på bakgrunn av NCTMs rammeverk *The Reasoning and Proof Standard in Principles and Standards for School Mathematics* og rammeverket for pensumanalyse utviklet av TIMSS (the Third International Mathematics and Science Study), samt deres egne antagelser til det nye rammeverket. Den delen av min analyse hvor dette er aktuelt, faller under kategorien *presentert til elevene* under den vertikale analysen. På bakgrunn av dette vil jeg for denne delen av analysen, dermed kun fokusere på den delen av deres rammeverk som fokuserer på lærebøkenes teoridel, og ikke lærebøkenes oppgaver.

Otten et al. (2014) har også utført en lignende studie om lærebøkenes tilretteleggelse av resonnering og bevis, med utgangspunkt i rammeverket Thompson et al. (2012) utviklet. Otten et al. (2014) beskriver teoridelen til lærebøkene for *textbook exposition*, og beskriver at dette er de delene av lærebøkene som inneholder forklarende tekst, samt bokser som inneholder definisjoner, formler, teorem og andre nødvendige formuleringer. I tillegg kommer lærebøkenes eksempler og deres forklaringer. Beskrevet på en annen måte gjelder det de delene av lærebøkene der det presenteres ny informasjon eller nye ideer som skal brukes videre av elevene (Otten et al., 2014) .Jeg kommer fra nå av til å kalle denne delen av læreboka for *teori* eller *teoridel*, med mindre det blir nødvendig å spesifisere nærmere.

Som allerede nevnt er Otten et al. (2014) sitt brukte rammeverk sterkt inspirert av at det Thompson et al. (2012) utviklet. De skriver selv at de inkluderer koder fra Thompson et al. (2012) med minimale endringen, som blant annet navneendring på to av kategoriene. Grunnen til at jeg velger å bruke begge er for det første fordi de begge tar utgangspunkt i det jeg selv ønsker å analysere, hvordan teorien presenteres for elevene. Den andre grunnen er at deres forklaringen for hver teorikategori, utfyller hverandre. Ved å ta utgangspunkt i begge studiene, blir hver kategori til en helhet jeg kanskje ikke ville klart å få ved bruk av kun en av de.

Videre velger jeg på bakgrunn av Otten et al. (2014) og Thompson et al. (2012) å dele denne kategoriseringen i fire ulike deler. Disse fire delene ser på lærebøkenes teori og identifiserer om teorien har en deduktiv begrunnelse, en empirisk begrunnelse, om det noen plasser legges opp til at elevene selv skal fullføre teorien, eller om noen teorideler ikke har noen begrunnelse i det hele tatt.

Deduktiv begrunnelse vil i denne oppgaven være logiske argumenter eller forklaringer som bygger på lærebøkenes teori, eller teori som tidligere er blitt vist. Dette er for å støtte eller bevise matematiske påstander (Otten et al., 2014; Thompson et al., 2012). På bakgrunn av dette er den teorien som klassifiseres innenfor denne kategorien teorideler hvor matematiske påstander blir forklart på en generell måte. De vises som en allmenngyldig påstand som gjelder for enhver situasjon. Thompson et al. (2012) viser til en teoridel hvor multiplikasjon av potenser blir vist. Her vil $(ab)^n$ være lik $a^n \cdot b^n$ uansett hva a og b velges å være. Se figur 2.4.

In general, any positive integer power of a product can be rewritten using repeated multiplication.

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\cdots\cdot(ab)}_{n \text{ factors}}$$

$$= \underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n \text{ factors}}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}_{n \text{ factors}}$$

$$= a^n \cdot b^n$$

Figur 2.4: Figuren viser eksempel på deduktiv begrunnelse. Hentet fra Thompson et al. (2012).

Empirisk begrunnelse vil være teori der lærebøkene viser et bekreftende og spesifikt eksempel til en matematisk påstand for å vise at påstanden stemmer (Otten et al., 2014). Figur 2.5 viser hvordan en spesifikk begrunnelse kan være lagt opp. Figuren utleder den generelle regelen for multiplikasjon av to potenser med samme grunntall ved hjelp av tre spesifikke situasjoner som tilslutt leder til den generelle formen. Thompson et al. (2012) presiserer at de tre spesifikke situasjonene vist, viser kun utledningene for de tre situasjonene, men de viser likevel de trinnene som trengs for å klare og generalisere det.

… some products of powers can be simplified using the repeated multiplication model of x^n. Notice the patterns in the products below.

$$2^4 \cdot 2^3 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\text{4 factors}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\text{3 factors}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{7 factors}} = 2^7$$

$$10^2 \cdot 10^3 = \underbrace{(10 \cdot 10)}_{\text{2 factors}} \cdot \underbrace{(10 \cdot 10 \cdot 10)}_{\text{3 factors}} = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}_{\text{5 factors}} = 10^5$$

$$x^2 \cdot x^5 = \underbrace{(x \cdot x)}_{\text{2 factors}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x)}_{\text{5 factors}} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{\text{7 factors}} = x^7$$

In each case, when we multiplied two powers with the same base, the product was also a power of that base.…

Product of Powers Property: For all m and n, and all nonzero b, $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$.

Figur 2.5: Figuren viser eksempel på empirisk begrunnelse. hentet fra Thompson et al. (2012)

Teori som elevene må fullføre er teori som ikke viser den fullstendige begrunnelsen, men heller forventer at elevene skal fullføre den, eller at det er lagt opp til at den kan fullføres i kommende oppgaver. Denne delen kan både være deduktivt og empirisk (Otten et al., 2014; Thompson et al., 2012). Jeg har i tillegg til Thompson et al. (2012) og Otten et al. (2014) beskrivelse, valgt å legge til deler av teorien der lærebøkene spør elevene som spørsmål som må begrunnes eller argumenteres for, som har sammenheng med presentasjoner eller utledninger som nettopp er blitt presentert.

Ingen begrunnelse er teori der matematiske påstander ikke blir begrunnet. Det vil kun bli skrevet opp, enten som en definisjon eller formel etc., uten at det verken ligger en deduktiv eller empirisk begrunnelse bak (Otten et al., 2014).

2.4.3 Rammeverk for imitativ og kreativ resonnering

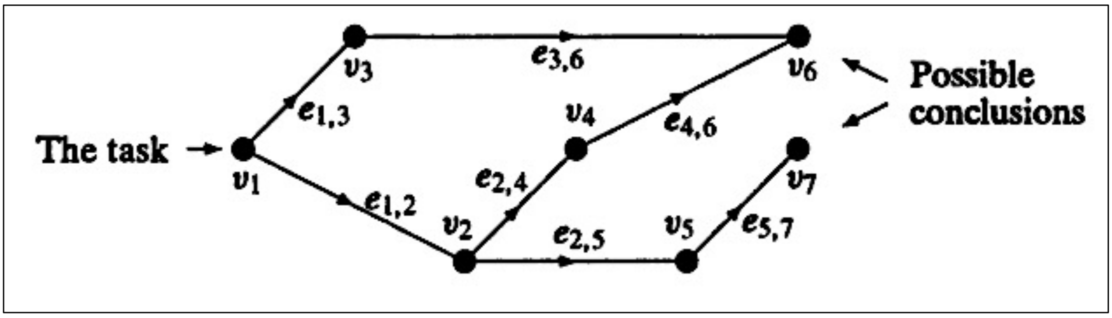
For å analysere de kognitive utfordringene elevene møter på når de løser oppgaver i de tre ulike læreverkene, brukes et rammeverk om imitativ og kreativ resonnering utarbeidet av Johan Lithner (2008). Jeg velger å bruke dette rammeverket fremfor de andre rammeverkene jeg tidligere har presentert i denne oppgaven (TIMSS og The Mathematical Task Framework) blant annet fordi dette rammeverket ble utarbeidet senere enn de andre nevnte. Det er altså et nyere rammeverk. En annen forskjell, som også ble hovedgrunnen at valget falt på dette rammeverket, er at Lithner (2008) fokuserer på det kreative i hver oppgave og det å resonnere seg fram til mulige løsninger, i motsetning til Stein et al. (2000) som fokuserer på ulike nivå av matematisk tenkning. Da det er den kreative resonneringen og elevenes mulighet for kreativ resonering, og ikke hvilke kognitive nivå oppgavene krever er det jeg ønsket å finne ut av, var Lithner (2008) sitt rammeverk mer interessant å bruke enn det Stein et al. (2000) sitt var. Oppgaver som krever imitativ resonnering er, kort forklart, oppgaver hvor man kommer fram til svaret kun ved memorering eller ved å bruke velkjente algoritmer, mens kreativ resonnering rett og slett er det motsatte (Lithner, 2008).

Lithner (2008) definerer i sin studie resonnering som den tankegangen som gjøres for å produsere påstander og for å komme fram til konklusjoner ved oppgaveløsning. Resonnering behøver ikke være basert på formell logikk slik som matematiske bevis. Resonneringen kan til og med være feil, så lenge det, for den som resonnerer, ligger gode grunner bak som støtter resonneringen (Lithner, 2008). Lithner (2008) ser på resonnering som et produkt bestående av flere sekvenser av resonnering, hvor resonneringen starter med en oppgave og ender opp i et svar eller løsning. Denne sekvenseringen av resonnering deles i fire steg:

1) En (del)oppgave presenteres for oppgaveløseren. Dette kalles en *problematisk situasjon* hvis det ikke er klart for oppgaveløseren hvordan den skal løses.
2) Det å velge strategi. Det å velge blir definert som alt fra å huske, undersøke, gjette og velge. En kan spørre seg: ”*Hvorfor* vil disse strategiene løse oppgaven”. Dette støttes av prediktiv argumentasjon.
3) Det å bruke strategien, strategiimplementeringen. En kan spørre seg: ”*Hvorfor* klarte denne strategien å løse oppgaven?”. Dette støttes av verifiserende argumentasjon.
4) I det siste steget kommer selve *svaret* fram.

(Lithner, 2008)

Figur 2.6 skisserer et bilde av denne resonneringssekvensen. De ulike punktene v_n ($n \in \mathbb{N}$) skal representere den kunnskapen elevene innehar, samt at den representerer hvor man er i oppgaven. Stiene $e_{n,m}$ ($n,m \in \mathbb{N}$) representerer strategivalgene som gjøres for å gå fra et punkt *v* til et annet. Det hele ender til slutt opp i mulige konklusjoner på oppgaven (Lithner, 2008).



Figur 2.6: Viser mulige resonneringssekvenser. Hentet fra Lithner (2008).

Videre skal jeg presentere de ulike resonneringstypene Lithner (2008) utviklet i sitt rammeverk.

2.4.3.1 Imitativ resonnering

Det å løse oppgaver ved å kopiere løsninger for å kunne gi en løsning, enten ved å huske bestemte algoritmer som leder til riktig svar, eller ved å rett og slett huske svaret, kalles imitativ resonnering (Bergqvist, 2007).Ved å ta utgangspunkt i resonneringssekvensen i figur 2.6, kan man ved imitativ resonnering se for seg at veien til en mulig konklusjon, oppgavens svar, er kjent fra starten. Elevene imiterer, eller repeterer, oppgavens løsningsprosedyre fra læreboka (Lithner, 2008). Lithner (2008) sitt rammeverk skiller mellom to hovedtyper imitativ resonnering: memorerende resonnering og algoritmisk resonnering.

2.4.3.1.1 Memorerende resonnering

For at en resonneringssekvens skal klassifiseres som *memorerende resonnering* (MR), må den oppfylle følgende kriterier:

1) Valg av strategi for å løse oppgaven baserer seg på å huske eller å minnes et fullstendig svar.
2) Strategiimplementeringen består av å kun skrive svaret ned.

En slik type resonnering kommer mest naturlig ved oppgaver der det spørres om fakta, definisjoner eller bevis. Eksempler på de førstnevnte er å spørre om hvor mange cm^3 en liter er, eller å spørre hva et polynom er (Lithner, 2008). Lithner (2008) viser til en universitetseksamen hvor en av eksamensoppgavene var "State and prove the Fundamental Theorem of Calculus" (Lithner, 2008, s. 258). Over halvparten av de som fikk full uttelling på oppgaven hadde rett og slett kopiert hele beviset fra kursets lærebok. Feilene elevene gjorde var for det meste at beviset manglet enkelte deler eller at de ble plassert på feil plass i beviset. Ved en test gjennomført etter eksamen ble studentene spurt om å forklare en sekvens tilhørende dette beviset fra eksamen. Resultatene fra denne testen viste at de fleste studentene kun klarte å forklare deler av sekvensen, og at de egentlig ikke forstod det beviset de tidligere hadde memorert (Bergqvist, 2007; Lithner, 2008).

2.4.3.1.2 Algoritmisk resonnering

Den andre typen imitativ resonnering, kalles *algoritmisk resonnering* (AR). Algoritmisk resonnering vil være en resonneringstype der algoritmen til løsninga blir husket i stedet for selve svaret (Bergqvist, 2007). En algoritme blir definert av Lithner (2008) til å være alle tidligere presenterte prosedyrer. Algoritmisk resonnering oppfyller følgende betingelser:

1) Valg av strategi er å huske løsningsalgoritmer.
2) Strategiimplementeringen er rett fram for den som løser oppgaven. Det som kan hindre en fra å komme fram til et svar, er slurvete feil som blir gjort under implementeringen.

Ved oppgaver der den som resonnerer er kjent med og har brukt algoritmen flere ganger, for eksempel der en skal løse flere oppgaver ved bruk av samme algoritme, er AR en pålitelig resonneringstype. Det å bruke denne type resonnering sparer tid ved utregning, samtidig som den minimerer muligheter for feilberegning. En konsekvens ved AR er imidlertid at det er fullt mulig å løse en oppgave uten å ha forståelse for den indre matematikken (Bergqvist, 2007). Bergqvist (2007) forklarer også forskjellen mellom memorerende resonnering og algoritmisk resonnering ved at oppgaver der elevene bruker memorerende resonnering har de memorert hele løsninga, mens ved algoritmiske resonnering husker elevene de krevende stegene ved løsningsmetoden, mens de mindre krevende stegene klarer de å utføre selv.
Algoritmisk resonnering blir delt i tre ulike måter for å finne den mest passende algoritmen. Disse forskjellige versjonene kalles *familiar AR (FAR)*, *delimiting AR (DAR)* og *guided AR (GAR)* (Lithner, 2008).

- Familiar AR

En oppgave blir sett på som kjent når det hører til et sett av oppgaver der alle oppgavene blir løst med den samme kjente algoritmen, eller elevens erfaringer av enkelte ord, grafer og/eller symboler som kobles til algoritmer (Lithner, 2008). I følge rammeverket til Lithner (2008) må resonneringen ved oppgaveløsing oppfylle disse kriteriene for å kunne klassifiseres som familiar AR:

1) Om oppgaven er av en kjent type og løses ved en kjent algoritme, er det dette som ligger til grunn for valg av strategi.
2) Algoritmen blir implementert.

Bergqvist (2007) presiserer at om oppgaven som skal løses tilhører et sett av oppgaver løst ved samme algoritme, vil dette havne under FAR. Andre situasjoner hvor FAR kan oppstå, er når elever leter etter nøkkelord i oppgaven og velger strategi utfra det. Bergqvist (2007) viser til et eksempel hvor flere oppgaver består av enten "flere" eller "færre" hvor elevene blir bedt om å velge om de vil bruke addisjon eller subtraksjon. Hvilken løsning de velger er mye basert på hvilken av "flere" eller "færre" tidligere like oppgaver bestod av (Bergqvist, 2007). Lithner (2008) viser til en elev som skulle løse en oppgavetype der han ble bedt om å finne den største verdien til funksjonen. Han koblet dette sammen med derivering, uten å tenke over hva som egentlig mentes med derivering. For han var *derivering* noe kjent ved å finne den *største verdien* til en funksjon (Lithner, 2008).

- Delimiting AR

Denne resonneringstypen går ut på at eleven som løser oppgaven velger løsningsalgoritmen blant algoritmer som allerede er valgt og avgrenset som mulige korrekte algoritmer. Denne mengden av algoritmer velges i hovedsak ut fra overfladiske egenskaper til oppgaven som skal løses. DAR defineres i følge Lithner (2008) av følgende kriterier:

1) En algoritme er valgt fra en mengde algoritmer som er avgrenset av oppgaveløseren gjennom algoritmenes overflaterelasjoner til oppgaven. Resultatet kan ikke forutsies.
2) Hvis implementeringen ikke gir en rimelig konklusjon for den som løser oppgave, blir den avsluttet uten at det reflekteres noe mer over det. Det velges heller en ny algoritme fra den avgrensede mengden for å prøve igjen. Den verifiserende argumentasjonen baseres på overflatefaktorer som relateres kun til personen som løser oppgavens forventninger til løsningen eller svaret.

Denne type resonnering, er en resonnering som avgjøres av den som resonnerer. Det er den som løser oppgavene som avgrenser mengden algoritmer, og som prøver og forkaster algoritmer underveis i prosessen (Lithner, 2008). Både Lithner (2008) og Bergqvist (2007) trekker fram en situasjon hvor en elev skulle løse en oppgave. Oppgaven ba eleven om å finne den største og minste verdien til $y = 7 + 3x - x^2$ innenfor intervallet [-1,5]. Det første eleven valgt å gjøre var å derivere y, og løse for $y'(x) = 0$ for å finne den største og minste verdien til y. Hun finner at y=1.5 og sjekker $y(1.5) = 9.25$. Hun kommenterer deretter at hun burde fått to verdier, en maksimumsverdi og en minimumsverdi. På grunn av dette, velger hun å gi opp denne løsningsmetoden, uten å tenke over hvorfor algoritmen kun ga henne én verdi. Neste metode hun velger å forsøke seg på er å tegne grafen inn på kalkulatoren, men skjønner fortsatt ikke hvorfor hun kun klarer å se et maksimumspunkt. Denne metoden gis også opp. Hun forsøker så å bruke kalkulatorens tabellfunksjon, som også forkastes, før hun tilslutt velger å løse likningen $y= 7 + 3x - x^2$. Ved hjelp av denne finner hun x_1=4.54 og x_2=-1.54. Disse løsningene velger hun å beholde, fordi hun fikk to ulike løsninger. Alle disse løsningsmetodene eleven har vært innom deler overfladiske egenskaper med oppgaven. Når en algoritme ikke fungerer, velges en ny algoritme fra den avgrensede mengden, uten å reflektere over utfallene (Bergqvist, 2007; Lithner, 2008).

- Text-Guided AR

Denne resonneringstypen tas typisk i bruk når verken FAR eller DAR fungerer. Strategien kan for mange da bli å lete i for eksempel læreboka etter noe som ligner på oppgaven. I følge Lithner (2008) må disse kriterier være oppfylt:

1) Valg av strategi er å identifisere overfladiske likheter mellom oppgaven og eksempel, definisjon, teorem, regel eller noen andre situasjoner i en tekstkilde.
2) Algoritmen implementeres uten noe verifiserende argumentasjon.

I Lithners tidligere forskning (2004) kom det fram at 70% av lærebokoppgavene i lærebøkene i kalkulus i USA kan utføres ved GAR. Lithner (2008) trekker fram oppgaven elevene måtte løse under DAR, hvor den kunne blitt løst ved å kopiere et eksempel fra læreboka som viste prosedyren for ”å finne maksimumsverdien og minimumsverdien til $f(x) = x^2 + 4x + 1$ hvis $x \in [-1, 0]$”.

2.4.3.2 Kreativ resonnering

Kreativ resonnering (CR) kjennetegnes ved at det etableres nye og godt begrunnede løsninger på oppgaver. Kreativ resonnering må oppfylle alle følgende kriterier:

1) *Novelty*. For den som resonnerer, blir enten en ny resonnementssekvens skapt, eller så blir en glemt sekvens gjenskapt.
2) *Plausibility.* Valg av strategi og selve strategiimplementeringen støttes av argumenter som motiverer for hvorfor konklusjonene er sanne og sannsynlig.

3) *Mathematical foundation.* Argumentene er forankret i de indre matematiske egenskapene til de komponenter som er involvert i resonneringen.

CR behøver ikke å være utfordrende, i motsetning til problemløsning (Lithner, 2008).Ved kreativ resonnering vil blant annet ikke oppgavene gi en umiddelbar løsning. De vil også skille seg fra de algoritmiske, rutinepregede oppgavene, og på de måten bli sett på som mer kognitivt utfordrende enn det den imitative resonneringer vil være.

Hvor kognitivt utfordrende en kreativ oppgave er, avhenger av mengden kreativ resonnering som behøves. Bergqvist (2007) laget i sin analyse et skille etter hvor stor del av en kreativ oppgave som bestod av imitativ resonnering. En oppgave som i stor grad er løselig ved å bruke IR, men trenger lokale elementer av CR, krever lokal kreativ resonnering (LCR). I motsetning vil oppgaver der en ikke klarer å nå en løsning ved bruk av IR alene, men som krever CR gjennom nesten hele oppgaven, kreve global kreativ resonnering (GCR). Det kan likevel være rom for små deler av IR i gjennomføring av oppgaven. GCR-oppgaver vil da kreve mer av elevene enn en LCR-oppgave. Bergqvist (2007) tar for seg to oppgaver som viser forskjellen mellom LCR og GCR:

- LCR: "La $f(x)=(x^2-1)^{2/3}$ og tegn grafen til funksjonen f". Hvis en student klarer den algoritmen som går ut på å tegne grafen, men som ikke tidligere har brukt algoritmen på en funksjon som er definert i et punkt hvor den deriverte ikke er definert, må da bruke noe CR for å håndtere denne nye situasjonen.
- GCR: "Gi et eksempel på en funksjon *f* som er kontinuerlig fra høyre, men ikke fra venstre, i x=3. Om studenten aldri tidligere har møtt på oppgaver der det kreves å gi et eksempel til en funksjon med visse kontinuitetsegenskaper, vil dette kreve GCR for å kunne løse den.

3 Metode

Her kommer jeg til å beskriver oppgavens forskningsdesign og hvilke metoder jeg har brukt. Jeg kommer også til å gå gjennom selve gjennomføringen av analysen, før jeg tilslutt ser på studiens kvalitet, i form av validitet og reliabilitet.

3.1 Kvalitative og kvantitative metoder

Thagaard (2009) beskriver forskjellen mellom kvalitative og kvantitative metoder ved at man i kvalitative metoder forsøker å gå mer i dybden og er opptatt av betydningen til analysen, mens det som kjennetegner kvantitative metoder er at det heller fokuseres på antall og rekkevidde. Thagaard (2009) oppsummerer at i en kvantitativ tilnærming er det først og fremst tall som er datamaterialet til forskeren, mens en forsker som arbeider med kvalitative tilnærminger primært har å gjøre med tekster. Det er dermed ikke sagt at presentasjonen av kvalitative data kun behøver å bestå av tekst. Kvalitative studier kan også ha, i tillegg til tekst, resultater som utfylles med tall. Det samme gjelder også for presentasjoner av kvantitative data, hvor tekst kan knyttes i tillegg til talldata.

Forskning der det både brukes kvalitative og kvantitative metoder faller under det Creswell (2009) definerer som *mixed methods*. Forskeren som utfører en mixed methods må blant annet samle inn og analysere både kvalitative og kvantitative data, i tillegg å blande de samtidig ved å kombinere de, enten ved at de bygger på hverandre eller ved at den ene er innebygd i den andre. Forskeren kan også velge å prioritere den ene formen fremfor den andre, eller velge å bruke begge formene omtrent like mye. Dette avhenger av hva oppgaven skal legge vekt på (Creswell & Clark, 2011). I denne masteroppgaven har jeg valgt å samle inn datamaterialet både ved kvalitative og kvantitative tilnærminger. Her vil analyseringen av både lærebøkenes oppgaver og teoriinnhold, som ble gjort kvalitativt, presenteres i kvantitativ form som i antall, andeler og med forklarende diagrammer. Dette vil være oppgavens kvantitative del. Den kvalitative delen blir bestående av fremstillinger av enkelte deler for de ulike analyseringskategoriene fra Charalambous et al. (2010) sitt rammeverk. Dermed vil jeg her se mer kvalitativt på både lærebøkenes oppgaver og teoriinnhold. Den kvantitative fremstillingen av funnene ville gitt for lite informasjon i forhold til hva problemstillingen min er. Dermed velges også den kvalitative tilnærming hvor jeg går dypere inn på enkelte deler av datamaterialet, for å få fram de lærebøkenes egenskaper som rettes mot forskningsspørsmålene. På bakgrunn av dette blir forskningsdesignet for denne masteroppgaven *mixed methods*.

Det at jeg velger å både bruke kvalitative tilnærminger og kvantitative tilnærminger, gjør jeg fordi jeg ønsker å besvare problemstillingen på en best mulig måte. Creswell (2009) skriver at forskere som forbereder forskning, må tydeliggjøre for seg selv hvilke filosofiske ideer de har. Dette kan forklare hvorfor det velges mellom tilnærminger for kvalitative, kvantitative eller mixed methods i forskningen. Creswell (2009) kaller dette for paradigmer eller kunnskapssyn. Denne oppgaven har basert seg på en pragmatisk kunnskapssyn, noe som begrunnes med at for dette kunnskapssynet vil forskningens metode og design velges på bakgrunn av problemstillingen som skal besvares. Et pragmatisk kunnskapssyn gir forskeren mulighet til å fritt velge blant de metoder og prosedyrer som vil svare på problemstillingen på den beste måten (Creswell, 2009). Hvilke metoder og design denne oppgaven baserer seg på, ble valgt utelukkende på grunn av oppgavens problemstilling.

Det finnes flere ulike former for mixed methods. Tilnærmingen som passer denne masteroppgaven best, er det Creswell (2009) kaller for *cuncurrent mixed methods*. Begrunnelsen for hvorfor oppgaven havner under denne formen for mixed methods, er fordi concurrent mixed methods er når forskeren bruker både kvalitative og kvantitative data for å kunne gjennomføre omfattende analyser av forskningsspørsmålet (Creswell, 2009; Creswell & Clark, 2011). Det spesielle med *concurrent mixed methods* er at både det kvalitative og det kvantitative datamaterialet blir samlet inn samtidig, før informasjonen integreres som tolkningen av resultatene. Som allerede nevnt, ble de kvalitative og kvantitative data samlet inn på samme tid. Dette grunner i at det kvantitative datamaterialet ble samlet inn på bakgrunn av en kvalitativ analyse. En kvantitativ fremstilling for denne oppgaven ville derfor ikke vært mulig om det ikke lå en kvalitativ tilnærming bak.

3.1.2 Dokumentanalyse

I følge Scott (1990) er dokumenter skriftlige tekster, og lærebøker vil da gjelde som dokumenter. Dokumenter er en kildetype som kan brukes får å finne relevant og viktig informasjon om det en ønsker å studere nærmere (S. Grønmo, 2016). Thagaard (2009) beskriver dokumentanalyse som en studie av dokumenter. Bakgrunn for valg av dokumentanalyse må ses i sammenheng med oppgavenes problemstilling som baserer seg på hvordan ulike lærebøker presenterer deres matematiske innhold og deres krav til elevene. Lærebøkene blir dokumentene, dermed faller denne oppgaven under dokumentanalyse. Når det gjelder dokumentets innhold varierer dette fra dokument til dokument (S. Grønmo, 2004). S. Grønmo (2004) skiller mellom to ulike måter innholdet kan være presentert på. Den ene måten er at dokumentets innhold består av meningsytringer, eller inneholder forfatternes meninger og synspunkt om det dokumentet omhandler. Den andre måten dokumentinnholdet kan presenteres på er som faktainformasjon. Denne delen av dokumentets innhold vil ikke være påvirket av forfatterne og deres oppfatninger om innholdet. Lærebøker vil typisk havne under sistnevnte type.

3.1.2.1 Innholdsanalyse av dokumenter

S. Grønmo (2016) skriver at hvis man gjennomfører en systematisk undersøkelse av dokumenters innhold, kalles denne undersøkelsen for innholdsanalyse. Silvermann (2010) definerer innholdsanalyse som en analyse hvor man etablerer kategorier og systematiserer koblinger mellom de. Deretter telles antall tilfeller av hver kategori, slik at de kan tolkes som resultater (Silvermann, 2010). På bakgrunn av S. Grønmo (2016) og Silvermann (2010) sine definisjoner vil denne oppgaven være en innholdsanalyse. Det var nødvendig å gjennomføre en slik analyse, da det utfra problemstillingen er nødvendig å analysere lærebøkenes innhold for å klare å belyse den. Innholdsanalyser som baserer seg på Silvermann (2010) sin definisjon av innholdsanalyse, er en kvantitativ innholdsanalyse. Til gjengjeld blir innholdsanalysene hvor en ser på dataenes egenskaper, rettet mot en mer kvalitativ innholdsanalyse (Krumsvik, 2014). S. Grønmo (2004) poengterer at analysen gjøres på bakgrunn av datamaterialet som samles inn.

Innholdsanalyse kan altså deles i både kvalitativ innholdsanalyse og kvantitativ innholdsanalyse. og begge disse formene baseres på en detaljert og grundig gjennomgang av dokumentets innhold. De to analyseformene skilles imidlertid fra hverandre på flere områder. Den første forskjellen er at den kvantitative innholdsanalysen evaluerer dokumentets tekstinnhold basert på et systematisk skjema, et såkalt kodeskjema. Ved hjelp av dette kodeskjemaet blir data samlet inn ved å merke av for hvilke kategorier de passer best til i skjemaet. En mulig del av dataanalysen vil da naturlig bestå av å ta utgangspunkt i det antallet hver kategori innehar. Kategoriene blir bearbeidet og systematisert før innsamlingen starter (S. Grønmo, 2004). Når det gjelder den kvantitative innholdsanalysen som er utført til denne masteroppgaven ble den utført på samme måte som her beskrevet. Ved analyseringen av lærebøkenes oppgaver ble de markert i kodeskjemaet mitt for hvilken type resonnering jeg kom fram til at de fremmet. Kodeskjemaet jeg brukte ble utviklet i Excel, hvor jeg valgte å ha oppgavene i rader nedover arket, mens de forskjellige resonneringstypene ble skrevet i kolonnen vedsiden av de oppgavene de tilhørte. Deretter kunne jeg bare summere opp antallet for hver resonneringstype. Kategoriene i denne delen av analysen bestod av de ulike resonneringstypene basert på Lithner (2008) sitt rammeverk, og disse var gjort rede for før selve analyseringen startet. Til analyseringen av lærebøkenes teori, valgte jeg også her å utvikle kodeskjemaer til de ulike måtene jeg ønsket å analysere denne delen på. Det vil si at analyseringen av lærebøkenes eksempler, hvilke begrunnelser teorien ble presentert med, og eventuelle sammenhenger fikk hvert sitt kodeskjema. I tillegg valgte jeg å dele hver av disse i to ulike skjemaer, slik at kapitlene tilhørende *algebra* og kapitlene tilhørende *funksjoner* ble skilt hva hverandre i to egne kodeskjemaer. Her kunne jeg, som ved analyseringen av oppgavene, notere hvilken kategori som passet best ved hver situasjon, og deretter summere opp antallet tilslutt.

Innsamlingen av data og analysen av data vil i en kvalitativ innholdsanalyse, skje parallelt. Når det gjelder min oppgaves kvalitative analyse vil dette blant annet være den analyseringen jeg gjorde som avgjorde om en oppgave krevde imitativ resonnering eller kreativ resonnering, eller hvordan lærebøkenes teoridel ble presentert for elevene. Både analyseringen av oppgavene og teorien ble kategorisert på bakgrunn av rammeverk tilhørende de ulike analyseringsdelene. Her lagde jeg meg fremgangsmåter og kategorier etter tidlige forskningsartikler utfra hvilken analysering det gjaldt. Dette ble gjort både induktivt og deduktivt. En induktiv kvalitativ innholdsanalyse er en analyse hvor man selv lager analysekategoriene. Dette gjøres på bakgrunn av hvilken informasjon datamaterialet gir (Patton, 2002). For en deduktiv kvalitativ innholdsanalyse blir datamaterialet analysert av et allerede eksisterende rammeverk. Dette er altså analysering hvor kategoriene blir hentet fra rammeverk og hvor analyseringen forgår slik rammeverket beskriver (Patton, 2002). Her vil blant annet kategoriseringen av lærebøkenes oppgaver følge Lithner (2008) sitt rammeverk for imitativ og kreativ resonnering, og dette vil da være en deduktiv analyse siden analyseringen og analyseringskategoriene følger dette rammeverket. På samme måte vil kategoriseringen av lærebøkenes struktur og rekkefølge av temaer følge en induktiv analyse, da jeg selv velger hvordan dette skal kategoriseres. For de resterende analysene kommer jeg til å kommentere om de analyseres induktiv eller deduktiv.

Som en oppklaring så består masteroppgaven både av en kvalitativ innholdsanalyse og en kvantitativ innholdsanalyse. Den kvalitative innholdsanalysen er selve avgjørelsen for kategoriseringen jeg gjør av de ulike elementene jeg har valgt å analysere. Den kvantitative analysen blir derimot en opptelling og systematisering av de data som ble analysert ved den kvalitative tilnærmingen. Altså vil analyseringen av lærebøkenes oppgaver, antall og andel imitative og kreative oppgaver i hvert kapittel eller lærebok være den kvantitative tilnærmingen, mens *hvilke* oppgaver som er imitativ eller kreativ ble bestemt på bakgrunn av den kvalitative analysen.

3.1.3 Komparativ analyse

Denne studien har ikke kun tatt for seg innholdet i hvert enkelt dokument, men det er også blitt utført det Tveit (2011) kaller en komparativ studie. I en komparativ studie blir det som forskes på sammenlignet med hverandre. I denne oppgaven vil sammenligningen være mellom de tre lærebøkene. Grønmo (2004) kaller det som skal sammenlignes for enheter. Han skriver videre at få enheter er vanlig i en komparativ studie, da hver enhet er omfattende og mangfoldig. For at en komparativ studie skal kunne gjennomføres kreves det minst to enheter som sammenlignes (S. Grønmo, 2004). Bakgrunnen for valg av komparativ analyse, kommer direkte fra problemstillingen, hvor det spørres om likheter og forskjeller mellom de tre lærebøkene. En komparativ analyse er helt avgjørende for at dette skal være mulig å undersøke.

3.2 Utvalg

For å i det hele tatt kunne utføre en lærebokanalyse behøvde jeg, naturlig nok, lærebøker. Da dette også er en komparativ lærebokanalyse valgte jeg lærebøker fra tre ulike forlag. Utvalget for analysen omfatter da de valgte lærebøkene. Begrunnelse for valg av matematisk tema og årstrinn er allerede gjort i oppgavens innledning. Jeg velger derfor å ikke ta det opp her.

Ved valg av lærebøkene undersøkte jeg hvilke lærebøker som fantes for R1. Etter flere søk klarte jeg å finne tre lærebokserier tilhørende tre ulike forlag. Siden jeg, etter flere søk, kun klarte å finne disse tre lærebøkene for R1 valgte jeg å ta alle med i undersøkelsen. Begrunnelsen for det er at jeg har mulighet til å gjennomføre en lærebokanalyse som inkluderer alle, per dags dato, mulige valg skolene kan gjøre når de velger hvilke lærebøker de ønsker å bruke i undervisningen. Ut i fra mine søk vil det ikke være lærebøker tilhørende

R1 som utelates i analysen. En annen grunn for å velge alle tre lærebøkene, er for å få et best mulig sammenligningsgrunnlag, da dette faktisk er en komparativ lærebokanalyse. Ved flere lærebøker, vil jeg få mer å sammenligne, som kan føre til andre funn jeg ikke ville oppdaget om jeg kun valgte å bruke to av bøkene i undersøkelsen. Tabell 3.1 viser grunnleggende informasjon om de utvalgte lærebøkene.

Tabell 3.1
Informasjon om de utvalgte lærebøker

Tittel	Forfattere	Forlag	Utgitt
Sigma R1	Stein Øgrim Tone Bakken Bjørnar Pedersen Knut Skrindo Wenche Dypbukt Silja Mustaparta Anne Thorstensen Runar Thorstensen	Gyldendal	2012
Matematikk R1	Odd Heir John Engeseth Håvard Moe Ørnulf Borgan	Aschehoug	2015
Sinus matematikk R1	Tore Oldervoll Odd Orskaug Audhild Vaaje Otto Svorstøl Sigbjørn Hals	Cappelen Damm	2013

Tabell 3.1 viser hvilke tre lærebøker jeg har valgt å inkludere i analysen, samt grunnleggende informasjon til hver bok. I hver bok har jeg valgt å analysere fire kapitler. For alle tre lærebøkene vil to av kapitlene tilhøre *algebra*, mens de andre to *funksjoner*. Totalt antall kapitler analysert er dermed 12 kapitler.

3.3 Gjennomføring av analysen

Som tidligere nevnt baserer analysen seg på et to-dimensjonalt analyserammeverk utarbeidet av Charalambous et al. (2010). Jeg velger å gjennomføre både den vertikale analysen og den horisontale analysen. For den horisontale analysen har jeg valgt å fokusere mest på hvordan delkapitlene og deres innhold i hver bok er plassert i forhold til hverandre og om det er innhold noen lærebøker har med og andre ikke, og på den måten se om det er store likheter eller forskjeller mellom bøkene. Når det gjelder den vertikale analysen har jeg gjennomført analyser for alle de tre underkategoriene presentert for den vertikale analysen i Charalambous et al. (2010) studie: *presentert til elevene*, *kreves av elevene* og *sammenhenger*. For *presentert til elevene* har jeg valgt å se på lærebøkenes eksempler i tillegg til hvordan de legger opp teori i form av hvilken begrunnelse som ligger bak. For underkategorien *kreves av elevene* valgte jeg å se på lærebøkenes oppgaver mot Lithner (2008) sitt rammeverk for imitativ og kreativ resonnering. I realiteten kan man si at lærebøkenes oppgaver også implisitt kan gå under det som presenteres til elevene. For denne oppgaven blir det dermed nødvendig å poengtere at jeg for kategorien *presentert til elevene* mener det som *eksplisitt* presenteres til elevene. Dermed blir det som går under *kreves av elevene* kun lærebøkenes oppgaver, og for *presentert til elevene* kun lærebøkenes teori og eksempler, altså eksklusiv oppgavene. For den siste underkategorien, *sammenhenger*, valgte jeg å både se om lærebøkene hadde sammenhenger eller koblinger med det virkelige liv, og om det var koblinger med matematikk som elevene har lært tidligere, da enten i de samme lærebøkene eller ved tidligere trinn.

3.3.1 Horisontal analyse

Den horisontale analysen valgte jeg å dele i to ulike kategorier slik Charalambous et al. (2010) også gjorde, hvor den ene tar for seg lærebøkenes *bakgrunnsinformasjon* slik som bøkenes tittel, antall sider, om det finnes eventuelle tilleggsmaterialer, samt deres forfattere og forlag, mens den andre delen, tar for seg lærebøkenes *helhetlige struktur.* For lærebøkenes helhetlige struktur valgte jeg se på de ulike temaene hver av lærebøkene tok opp i form av deres egne delkapitler, og lagde felles områder som passet for alle lærebøkene. Deretter så jeg nærmere på når de viktigste momentene ble presentert i hver lærebok for hvert område, og hvilke momenter hver lærebok hadde valgt å presentere for hver av disse områdene.

Algebra og funksjoner er to av fire hovedområder skrevet i læreplanen for programfaget Matematikk R1 (Utdanningsdirektoratet, 2013b). Da læreplanen har valgt å skille disse som hvert sitt hovedområde, valgte jeg å gjøre det samme. Dette støttes også av det jeg tidligere har skrevet om Usiskin (1988) sin definisjon av ulike typer algebra, basert på variablenes hensikt. En type algebra Usiskin (1988) definerte baserte seg på forhold mellom mengder, og hvordan disse avhenger av hverandre. Dette dannet grunnlaget for funksjoner og hensikten til funksjonenes variabler. Det at funksjoner ble definert som en type algebra, fører til at oppdelingen av masteroppgavens to hovedområder, algebra og funksjoner, ble en helt naturlig oppdeling. Da algebra og funksjoner er store og omfattende områder, ble det laget tilhørende underområder som nevnt i forrige avsnitt. Underområdene ble laget for å få en bedre oversikt over innholdet til de to hovedområdene i hver av lærebøkene, og jeg utviklet de på bakgrunn av innholdet til lærebøkenes delkapitler. Det var viktig at all innholdet til hvert delkapittel som tilhørte de ulike underområdene faktisk inneholdt det underområdet tilsa. Ingen delkapitler ble splittet eller delt mellom to eller flere underområder, fordi dette kunne gjort kategoriseringen av underområdene mindre strukturert og muligheten for å glemme å analysere enkelte deler eller å analysere de dobbelt opp hadde vært til stedet i større grad. En slik oppdeling og kategorisering som beskrevet her er typisk en induktiv analyse, hvor kategoriene blir utviklet på bakgrunn av informasjonen fra datamaterialet.

Hovedområdet *algebra* delte jeg i disse seks ulike underområdene: (1) *Implikasjon og ekvivalens*, (2) *bevis,* (3) *faktorisering og polynomdivisjon*, (4) *likninger og ulikheter av polynomer*, (5) *logaritmedefinisjoner og logaritmesetningene*, og (6) *logaritme- og eksponentiallikninger og ulikheter.* Valget for disse områdene falt seg naturlig med hvordan delkapitlene i hver lærebok allerede var inndelt. Inndelingen er hensiktsmessig, da blant annet *bevis* ikke ville passet sammen med for eksempel *faktorisering polynomdivisjon*. På samme måte fant jeg det mest hensiktsmessig å skille kapitlene med logaritmer i to egne områder, rett og slett fordi deres definisjoner, regler og utregninger skiller seg fra det som er inkludert i området *algebra*.

Hovedområdet *funksjoner* delte jeg i disse tre underområdene: (1) *Grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet*, (2) *derivasjon og funksjonsdrøfting*, og (3) *asymptoter*. Derivasjon og funksjonsdrøfting var i utgangspunktet planlagt å splitte i to underområder: derivasjon og funksjonsdrøfting. Dette gikk seg ikke til fordi delkapittelinndelingen til lærebøkene ikke hadde splittet derivasjon og funksjonsdrøfting i ulike delkapitlene. Disse to ble dermed slått sammen. Sammenslåingen var uansett hensiktsmessig, da derivasjon ligger til grunn for funksjonsdrøfting. Oppdelingen av underområdene (1) *grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet*, og (3) *asymptoter*, ble gjort med inspirasjon fra to av kompetansemålene fra læreplanen til programfag matematikk R1:

- *"gjøre rede for begrepene grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet, og gi eksempler på funksjoner som ikke er kontinuerlige eller deriverbare*
- *finne likningen for horisontale og vertikale asymptoter til rasjonale funksjoner og tegne asymptotene"*

(Utdanningsdirektoratet, 2013b)

Ved utgangspunkt i disse til sammen 9 underkategoriene, lagde jeg meg en oversikt over når de ulike lærebøkene hadde valgt å presentere viktig innhold og kunne dermed også se om det var temaer noen lærebøker hadde tatt med som andre ikke hadde gjort.

3.3.2 Vertikal analyse

For den vertikale analysen har jeg valgt å dele den i de tre underkategoriene Charalambous et al. (2010) presenterte i deres studie: *presentert for elevene*, *kreves av elevene* og *sammenhenger*.

3.3.2.1 Presentert til elevene

Underkategorien *presentert for elevene* tar for seg hvordan lærebøkene formidler deres matematiske innhold til elevene. På bakgrunn av dette vil de delene av lærebøkene som ikke er oppgaver falle under denne kategorien. Dette vil være alt fra eksempler, forklaringer, definisjoner for å nevne noe. Da denne delen av læreboken inneholder så mange momenter, velger jeg å dele denne i to deler. For mange lærebøker er eksempler helt essensielt innhold, og spesielt innenfor matematikk. Lærebøkenes eksempler blir dermed én av disse delene. Den andre delen vil gjelde presentasjonen av lærebøkenes matematiske innhold sett bort fra deres oppgaver og eksempler. Charalambous et al. (2010) har også delt *presentert for elevene*-kategorien i ulike deler, og begrunner det med at å lære matematikk omfatter flere måter å tilnærme seg innholdet på.

3.3.2.1.1 Lærebøkenes eksempler

Ved analyseringen av lærebøkenes eksempler fulgte jeg den analyseringen Charalambous et al. (2010) gjorde. Analyseringen gikk ut å identifisere syv gitte komponenter matematikkeksempler kan inneholde, og disse er *prosedyre*, *type algebra*, *representasjoner*, om eksemplet *fullføres*, *kontekst*, *grafiske bilder*, og *antall løsningsmetoder*. Disse komponentene vil alle kunne vise hvilke likheter og forskjeller de ulike lærebøkene har, og kan med dette se om noen av lærebøkene har noen *typiske* måter å vise eksempler på. Charalambous et al. (2010) brukte til å definere hva eksempler er Watson og Mason (2005) sin eksempeldefinisjon. Jeg velger å gjøre det samme, så dermed blir eksempler i denne oppgaven definert som de delene av lærebøkene som demonstrerer bruken av spesifikke teknikker (Watson & Mason, 2005). Alle tre lærebøker jeg har analysert viser tydelig hva som er eksempler i deres bøker ved at de rammer de inn i farger, samt har ”eksempel x” som overskrift, og jeg har dermed valgt å begrense hva som er eksempler til de eksemplene som er innrammet slik. Jeg skal nå beskrive de syv komponentene for lærebøkenes eksempler.

- Prosedyre

Prosedyreidentifiseringen gjennomførte jeg i to omganger. Den første gangen noterte jeg hvilke prosedyrer eksemplene viste. Dette ga meg mulighet til å få en oversikt over prosedyrene. Oversikten brukte jeg videre til å bestemme hvilke prosedyrer jeg kunne skille som ulike prosedyrer, og hvilke prosedyrer jeg som ville være mest hensiktsmessig å kategorisere som samme prosedyre. Blant annet ble det å løse likninger kategorisert etter hvilken type likninger det gjaldt, dermed ble "løs likningen" kategorisert etter om det gjaldt likninger av polynomer, logaritmelikninger eller eksponentiallikninger. Motsatt ble eksemplene som ba om å finne funksjonenes toppunkt slått sammen med eksemplene som ba om å finne bunnpunkt eller ekstremalpunktene, da dette i stor grad vil gjelde den samme prosedyren som for toppunktet. Slike vurderinger som jeg gjorde for disse nevnte situasjonene, gjorde jeg for alle prosedyrene jeg den første gangen hadde notert. Den andre gjennomgangen brukte jeg i hovedsak til å faktisk kode hvilke prosedyrer hvert eksempel viste, slik at jeg deretter kunne summere opp tilslutt. Det at jeg selv laget disse kategoriene på bakgrunn av ulike vurderinger, blir denne analyseringen en induktiv analysering. Jeg valgte å gjøre det på denne måten da jeg i starten ikke visste hvor detaljert jeg ville at prosedyrene skulle være. Det å gjennomføre analyseringen på denne måten, i to omganger, hjalp meg også i større grad å vite hva jeg faktisk skulle se etter den andre gangen, da jeg under den første omgangen hadde mulighet til å legge merke til hva jeg spesifikt kunne se etter neste gang.

- Type algebra

Hva som menes med hvilken type algebra eksemplene inneholder er hentet fra (Usiskin, 1988, 1995) sin definering av algebratyper, som tar for seg bruken av variabler i algebra på en god måte. Definisjonen får med de viktigste delene av skolealgebraen, da både det å finne den ukjente, det å faktorisere, det å skrive matematikk generelt, samt hvordan variabelen fungerer slik at også funksjoner blir en del av algebra. Usiskin (1988, 1995) sin definisjon av algebratyper passer dermed godt inn i denne masteroppgaven, da jeg også har tatt med funksjoner på bakgrunn av sammenhengen med algebra. Ved analyseringen av type algebra, tok jeg utgangspunkt i det som allerede er skrevet om disse algebratypene. På bakgrunn av dette blir analyseringen av hvilken type algebra en deduktiv analyse.

Eksempler klassifisert som type 1 er eksempler der det bes om å skrive matematikk på en generalisert måte. Som algebratype 2 er eksempler hvor det bes om å finne en ukjent. Dette er typisk for likninger, hvor variablene har posisjon som en ukjent som man ønsker å finne. Eksempler kategorisert som algebratype 3, var eksempler hvor mengder var avhengig av hverandre. Variablene for denne typen algebra var ikke ukjente variabler som skulle finnes, men de beskrev heller hvordan de påvirket hverandre. Blant annet vil en grenseverdi påvirkes av hvilken verdi x nærmes mot, eller hvor høyt treet er ved et viss tidspunkt påvirkes av treets funksjon for høyden mot tid. Jeg valgte også å definere eksempler som kun viste derivasjonsutregning for denne typen, da derivasjonsuttrykk ofte brukes til å si noe om en funksjons oppførsel, og funksjoners oppførsel vil kategoriseres som denne algebratypen. Algebratype 4 viste hvordan man kan klare å manipulere eller utlede ulike matematiske uttrykk til andre uttrykk. Her valgte jeg å klassifisere jeg de eksempler som ba om å forkorte eller faktorisere funksjoner eller uttrykk. Dette gjaldt ikke bare de eksemplene som ba ordrett om å faktorisere eller forkorte. Jeg valgte også å klassifisere eksempler som inneholdt polynomdivisjon som algebra av denne typen, da polynomdivisjon i seg selv er å forkorte, uten at det nødvendigvis ordrett bes om det.

- Representasjoner

Som representasjoner menes ulike måter eksemplene representeres på. Dette kan være representasjoner som figur av grafer, diagrammer, tabeller, geometriske figurer.

- Om eksemplet fullføres

Dette er om eksemplet fullføres, eller om det etterlates deler som elevene selv skal fullføre.

- Kontekst

Eksempler med kontekst ble klassifisert etter om de hadde en matematisk sammenheng eller om de var fremstilt som situasjoner fra dagliglivet.

- Grafiske bilder

Dette er bilder som ikke viser matematiske representasjoner som tabeller, grafer, diagrammer etc.. Charalambous et al. (2010) fant i sin analyse tegneseriestriper av elever med snakkebobler fra munnene deres, som forklarte prosedyren til eksemplet. Andre grafiske bilder de fant var små tavler med tekst, som enten skulle illustrere hva en lærer ville skrevet på tavla under undervisning, eller hva som kunne være lurt av elevene å skrive i sin egen skrivebok. Andre grafiske bilder de fant var bilder som tilhørte eksemplene med kontekst fra dagliglivet. Jeg valgte å klassifisere hva som var grafiske bilder på samme måte som Charalambous et al. (2010) gjorde. Om det ved et eksempel med kontekst også var plassert et bilde eller en illustrasjon som passet til konteksten til eksemplet, ville dette bli klassifisert som et grafisk bilde.

- Antall løsningsmetoder

Det som legges i antall løsningsmetoder, er om eksemplet viste flere ulike metoder for den samme prosedyren. Dette kunne for eksempel være, som Charalambous et al. (2010) trekker fram, flere måter å vise addering av to blanda tall på. De skriver videre at de eksemplene som viste flere enn kun én løsningsmetode gir elevene flere muligheter for å gjøre seg kjente med hver tolkning av brøker og samtidig oppfordrer de til å bygge forbindelser mellom de ulike metodene.

3.3.2.1.2 Framstilling av teori

Til å bestemme hvordan lærebøkene har valgt å fremstille deres teoridel, har jeg valgt å bruke en sammensetning av rammeverket Thompson et al. (2012) og Otten et al. (2014) brukte i deres respektive studier. Denne analyseringen er en deduktiv analyse fordi kategoriseringen ble gjort basert på deres rammeverk og allerede utviklede kategorier (Otten et al., 2014; Thompson et al., 2012). Videre vil jeg beskrive hvordan jeg har valgt å kategorisere lærebøkenes på bakgrunn av en kombinasjon av disse rammeverkene.

Teori fremstilt som *deduktiv begrunnelse* er hvor matematiske påstander blir forklart på en generell måte. Her plasserte jeg teori som altså ble utledet helt generelt. Dette er logiske argumenter og forklaringer for å støtte matematiske påstander. Disse skal være allmenngyldige og gjelde for enhver situasjon. Det viktige her er at det faktisk lå en utledning eller begrunnelse bak teorien som ble presentert, og at denne var generell.

Teori hvor matematiske påstander blir forklart med spesifikke og bekreftende utledninger eller eksempler, falt under kategorien *empirisk begrunnelse*. Altså klassifiserte jeg all teori hvor matematiske formler eller setninger enten ble utledet eller forklart ved bruk av tall eller ble satt opp mot andre spesifikke eksempler, under denne kategorien. I likhet med teori som falt under deduktiv begrunnelse, er det for empirisk begrunnelse også viktig at det ligger en utledning eller begrunnelse bak, og at denne, i motsetning til deduktiv begrunnelse, er spesifikk.

For *teori som elevene selv må fullføre* valgte jeg å klassifisere den teorien hvor utledningen eller begrunnelsen ikke ble gjort ferdig og hvor elevene ble bedt om å fullføre utledningen. Jeg valgte også å klassifisere teori hvor elevene ble bedt om å forklare hvorfor ulike påstander var sant eller ikke, eller forklare andre definisjoner eller matematiske forhold på bakgrunn av teori som nettopp var blitt presentert.

Jeg kategoriserte teori under *ingen begrunnelse* hvis det rett og slett ikke lå noen utledning eller forklaring bak. Formelen eller setningen er kun blitt plassert i boka av den grunn at de enten brukes i eksemplene eller at elevene må bruke de under oppgaveløsingen.

3.3.2.2 Hva som kreves av elevene

Denne delen omhandler lærebøkenes oppgaver. Kategoriseringen av oppgavene gjøres på bakgrunn av Lithner (2008) rammeverk om imitativ og kreativ resonnering. Til selve kategoriseringen av oppgavene, henter jeg inspirasjon fra Bergqvist (2007) artikkel *Types of reasoning required in university exams in mathematics,* der hun så på hvilken type resonnering som trengtes for å løse oppgaver ved en universitetseksamen i matematikk. På bakgrunn av rammeverket til Lithner (2007) klassifiseres oppgavene etter resonneringstypene *memorerende resonnering* (MR), *algoritmisk resonnering* (AR), *lokal kreativ resonnering* (LCR) eller *global kreativ resonnering* (GCR). Da jeg bruker kategorier til et allerede eksisterende rammeverk, blir dette en deduktiv analyse.

Bergqvists (2007) oppgavekategorisering tar utgangspunkt i et klassifiseringsverktøy basert på klassifiseringsverktøyet Torulf Palm, Boesen og Lithner (2006) brukte i deres studie *The Requirements of Mathematical Reasoning in Upper secondary Level Assessments*, der de så på hvilken matematisk resonnering som krevdes for å løse oppgaver tilhørende videregående skole-nivå i Sverige. Dette verktøyet består i hovedsak av en prosedyre som følges for å bestemme hvilken type resonnering som kreves ved oppgaveløsing. Et viktig moment er at om én elev løser en oppgave ved AR, betyr ikke det at en annen elev løser oppgaven ved samme resonneringstype. Om denne eleven er noe ukjent med løsningsalgoritmen kan det hende at denne elevene må bruke noe kreativ resonnering (Palm, Boesen & Lithner, 2006;

Bergqvist 2007). Dette fører til at det ikke er mulig å analysere elevers fullstendige læringserfaringer, og det begrenses da til å kun fokusere på lærerbøkene som brukes (Palm et.al, 2006). For å skille mellom MR, AR og CR, skriver Bergqvist (2007) at analyseringsprosedyren hjelper en å finne ut hvor *kjent* oppgavene er for elevene.

For å kunne finne ut hvor kjent en oppgave er for elevene, må først notasjonen *hendelser* defineres. Bergqvist (2007) bruker *hendelser* som en fellesbetegnelse for eksempler eller andre oppgaver med lik løsning som den oppgaven som analyseres. En hendelse kan også være teoritekst som deler nok overfladiske egenskaper med oppgaven slik at elevene kan se en sammenheng mellom de og dermed klare å finne den riktige løsningen. Etter å ha identifisert alle hendelsene til oppgaven er det mulig å si noe om hvor *kjent* oppgaven er for elevene. Oppgaver blir sett på som kjente for elevene hvis læreboka inneholder minst tre hendelser som hver deler nok karaktertrekk med oppgaven som gjør det mulig for elevene å finne en passende algoritme. Når jeg har avgjort hvor kjent oppgavene er, har jeg kun tatt utgangspunkt i de kapitlene jeg har valgt å analysere for hver bok. Jeg har også tatt utgangspunkt i en kronologisk rekkefølge av kapitlene når jeg har analysert.

Måten denne analyseringsprosedyren skiller mellom MR, AR og CR er som nevnt etter hvor *kjent* oppgaven er for elevene. Hvis det finnes minst tre hendelser i oppgavens lærebok vil oppgaven bli sett på som kjent nok for eleven, og dermed klassifisert som AR **Ugyldig kilde er angitt.**. Hvorfor antallet like hendelser ble satt til å være tre er noe vilkårlig valgt. Likevel baserer det seg på tanken om at elever behøver å arbeide med eller se noen relativt like oppgaver før de klarer å huske de og bruke de selv (Palm et.al, 2006). Boesen, Lithner og Palm (2006) brukte i deres studie videoopptak, hvor de ba elevene tenke høyt, for å bestemme hvilke resonneringstyper de brukte når de løste oppgaver gitt ved en nasjonal prøve. Å be elevene tenke høyt gjorde også Lithner (2000) i sin studie.. Da både Lithner (2000) og Boesen et.al (2006) ba elever tenke høyt under oppgaveløsningen, har de hatt mulighet til å klassifisere AR i enten FAR, DAR eller GAR. Da DAR er en resonneringstype der eleven prøver og feiler en rekke avgrensede algoritmer som er valgt på bakgrunn av hva eleven selv tror, er dette en resonneringstype som blir vanskelig å definere når det kun er lærebokas oppgaver som skal analyseres. GAR blir definert som en resonneringstype som ofte brukes hvis DAR eller FAR ikke passer (Lithner, 2007). Da jeg ikke kan bestemme hvilke oppgaver som er DAR, vil dette også gjelde GAR. Dermed vil oppgaver som krever algoritmisk resonnering kun bli klassifisert som AR.

Oppgaver definert som MR er oppgaver der hele løsningen på oppgaven enten er beskrevet i et eksempel eller i teoriteksten. Å utlede bevis eller å forklare hva et polynom er, er eksempler på MR hvis hele utledningen eller beskrivelsen er å finne i læreboka. Oppgaver som krever algoritmisk resonnering må ha tre relativt like hendelser i læreboka, enten som eksempler eller andre oppgaver. Kreativ resonnering (CR) er tidligere definert som oppgaver der resonneringssekvensen er ny for eleven. Det er likevel nødvendig å dele denne resonneringstypen i to deler, avhengig av hvor mye CR som trengs. Oppgaver der store deler av løsningen er kjent for eleven, altså at de finnes i eksempler eller andre oppgaver, og kun en mindre del av løsningen ikke er kjent for eleven, vil kun behøve en liten del kreativ resonnering. Slike oppgaver blir dermed klassifisert som LCR. Da jeg allerede har avklart at oppgaver klassifiseres som AR om de kan kobles til minst tre hendelser, valgte jeg å klassifisere oppgaver som LCR om de kunne kobles til én eller to hendelser. Et annet kriteria for AR var at *hele* prosedyren måtte være kjent. Om det fantes steg i løsningsprosedyren som ikke kunne kobles til minst *tre* hendelser, ble den da altså klassifisert som LCR. Oppgavene derimot hvor store deler av løsningen ikke kunne finnes ved å se på eksempler eller andre oppgaver, vil kreve en større del kreativ resonnering. Slike oppgaver klassifiserte jeg som GCR.

Prosedyren som må gjennomføres for å kunne klassifisere oppgavene er hentet både fra Bergqvist (2007) og Palm et.al (2006). Det vil likevel være noen forskjeller fra begge to, da Bergqvists (2007) analyse gikk ut på å analysere hvilken resonneringstype det krevdes av studentene for å løse eksamensoppgaver på universitetsnivå, mens Palm et. al (2006) fokuserte på å analysere hvilken resonnering som krevdes for å klare å løse matematikkoppgaver elevene fikk på prøver. Klassifiseringen vil foregå etter disse stegene:

1) Å analysere oppgaven i læreboka: Her brukes fire variabler for å beskrive oppgaven:
    a. Løsningen: Løsningen til oppgaven vil enten være et svar eller en algoritme som løser oppgaven. Dette kan for eksempel være algoritmen som brukes for å finne minimumspunktet for en andregradsfunksjon.
    b. Kontekst: Dette vil være situasjoner fra dagliglivet. Elever kan se sammenhenger mellom oppgaven og dagliglivet som kan hjelpe de å løse en matematisk oppgave, selv om de kun deler overfladiske egenskaper med

hverandre. Ordet ”bankinnskudd” kan kanskje hjelpe noen mot en algoritme som har med eksponential vekst å gjøre.

   c. Eksplisitt informasjon om oppgavesituasjonen: Dette er informasjonen som sier noe om matematikken i oppgaven, for eksempel selve funksjonsuttrykket.
   d. Andre viktige kjennetegn: Dette kan være ord, fraser eller hint som er relevant til lærebokas *hendelser*. Dette kan være ”grenser”, ”minimum” eller ”vis at”.

2) Analysere læreboka: Ser etter mulige *hendelser* som kan hjelpe oppgaveløsningen. For å avgjøre om en hendelse deler nok overfladiske egenskaper med oppgaven og løsningen slik at det er mulig for elevene å løse den, brukes variablene fra steg 1).
   a. Like hendelser i lærebokas eksempler: Dette vil være antall eksempler som deler nok overfladiske egenskaper med oppgaven
   b. Hendelser i teoriteksten: Dette vil være antall hendelser i lærebokas teoritekst (formler, definisjoner, bevis osv.) som deler nok overfladiske egenskaper med oppgaven.
   c. Antall like oppgaver: Dette er oppgaver som deler nok egenskaper eller løsning med oppgaven som løses.
3) Argumentasjon og konklusjon: Hvilken resonneringstype man tilslutt lander på, skal i dette steget argumenteres for. Argumentasjonen gjøres på bakgrunn av den informasjonen som er samlet i steg 1) og 2). Etter argumentasjonen, konkluderes det med den bestemte resonneringstypen.
4) Andre kommentarer: Kommentarer til oppgaven eller resonneringstypen.

Eksempel på klassifisering

1. Analyse av oppgaven:
   Løs dobbeltulikheten

$$\frac{1}{x} < 4 \leq \frac{1+x}{x}$$

   a. Løsning:

Løser dobbelulikheten ved å dele ulikheten i to separable ulikheter, slik som:

$$\frac{1}{x} < 4 \qquad \text{og} \qquad 4 \leq \frac{1+x}{x} \qquad , \qquad x \neq 0$$

Løser ulikhetene hver for seg på vanlig måte:

$1<4x$	og	$4x \leq 1+x$
$x>\frac{1}{4}$	og	$3x \leq 1$
		$x \leq \frac{1}{3}$

Løsninga på dobbeltulikheten er $\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3}$

b. Kontekst: Ingen

c. Eksplisitt informasjon om situasjonen: $\frac{1}{x} < 4 \leq \frac{1+x}{x}$

d. Annen informasjon: (dobbel)ulikhet

1. Analyse av teksten i læreboka
    a. Like hendelser i eksempler: Ingen eksempler som viser håndtering av dobbeltulikheter. Men ordinære brøkulikheter vises i to eksempler.
    b. Hendelser i annen teoritekst: Ingen
    c. Like oppgaver: Én annen oppgave som tar for seg dobbelulikheter (begge med brøk) av lik vanskegrad.
2. Argumentasjon og konklusjon:
    b. Argumentasjon for type resonnering: Algoritmen for å løse ordinær ulikhet er elevene kjent med før denne oppgaven. Det eneste steget som ikke er kjent for elevene fra læreboka, er hvordan de skal håndtere dobbeltulikheten slik at den kan løses.
    c. Konklusjon: LCR
3. Kommentar: Delen der CR brukes er en viktig del av oppgaven, men den er ikke den største delen. Derfor klassifiseres den som LCR og ikke GCR.

3.3.2.3 Sammenhenger

Når det gjelder lærebøkenes sammenhenger, har jeg valgt å dele dette i to forskjellige typer sammenhenger. Den ene sammenhengen handler om lærebøkenes sammenheng og kobling med det virkelige liv. Dette vil typisk være teori hvor de tar for seg dagligdagse situasjoner for å løse et matematisk problem eller introduserer nytt matematisk innhold. Da jeg allerede under analyseringen av lærebøkenes eksempler har avgjort dette i form av kontekst, har jeg for denne kategorien valgt å ekskludere eksemplene. Det viktigste kriteriet er at det faktisk kan relateres til dagliglivet. De delene av lærebøkene som hadde illustrasjoner av elever hvor de med tenkebobler hadde skrevet matematiske setninger eller utledninger, ble ikke klassifisert som sammenhenger med dagliglivet, da disse setningene og utledningene hadde hatt samme betydning om de ikke ble plassert i disse tenkeboblene.

Den andre sammenhengen er matematikk som har sammenheng eller kobles med matematikk de tidligere har lært. Her har jeg både valgt å inkludere matematikk de har lært ved tidligere årstrinn, og matematikk de tidligere har lært i samme lærebok. For matematikk de har lært ved tidligere årstrinn, valgte jeg å plassere matematikk hvor forfatterne selv poengterte at dette var noe de burde kunne fra før. Setninger som ”Som vi lærte i 1T…”, ”Fra vg1 lærte vi at..”, ”Vi repeterer..” ble naturlig klassifisert som sammenhenger. For matematikk som de har lært tidligere i læreboka, ble dette begrenset til de delkapitlene inneholdt i de definerte delene *algebra* og *funksjoner*. Dette for å holde analyseringen relevant for problemstillingen. Dette var situasjoner hvor lærebøkene tok i bruk regler eller formler som de tidligere hadde presentert. Her ble de delene hvor forfatterne hadde poengtert at ”som vi lærte i kapittel...” tatt med, men også de delene som ikke poengterte det slik, men hvor det likevel var behov for disse reglene eller formlene for å i det heletatt kunne fullføre det de ville presentere. Et eksempel er situasjoner der fokuset var på derivering av logaritmer ved hjelp av produktregelen, hvor derivering av logaritmer tidligere var blitt presentert samme lærebok.

3.4 Studiens kvalitet

Her vil jeg gå nærmere inn på studiens kvalitet. Det som avgjør studiens kvalitet, er kvaliteten på den data som må samles inn til oppgaven og dens problemstilling. Dette kan være av varierende kvalitet. Det å ha datamateriale av god kvalitet er helt avgjørende for at resultatene av analysen skal være så gode som mulig (S. Grønmo, 2004). Det blir her naturlig å se på begrepene reliabilitet og validitet, som i følge S. Grønmo (2004) er de to viktigste kriteriene som brukes når kvalitet av datamaterialet skal vurderes.

3.4.1 Validitet

Validitet sier noe om man i sin studie og ved valgt metode, faktisk undersøker det som er meningen å undersøker (Postholm, 2010). S. Grønmo (2004) skriver at validitet gir en informasjon om den data du har samlet inn er gyldig for de problemstillingene en har satt seg. Om metoden en velger å bruke, gir godt materialet til problemstillingen, er validiteten høy (S.

Grønmo, 2016). Cohen, Manion og Morrison (2011) skriver at forskning ikke har noen verdi, om forskningen ikke er valid. Videre skriver de at validitet er viktig både for kvantitativ forskning og kvalitativ forskning. Cohen et al. (2011) beskriver at validiteten av kvalitativ data kan fremmes gjennom ærlighet, dataens dybde, og forskerens objektivitet. Validiteten av kvantitativ data økes gjennom bruken av passende verktøy, nøye innsamling, og en passende statistisk fremstilling av datamaterialet (Cohen et al., 2011).

Cohen et al. (2011) skiller mellom flere typer validitet. Jeg velger å se nærmere på tre av disse, da de har større relevans for oppgaven. Dette er *ekstern validitet*, *innholdsvaliditet og konstruktvaliditet*

I hvilken grad forskningsresultatene kan generaliseres til andre og sammenlignbare situasjoner, er relatert til *ekstern validitet* (Cohen et al., 2011). Skrevet på en annen måte, er ekstern validitet i hvor stor grad man kan *overføre* undersøkelsens resultater til andre situasjoner i generalisert form (Thagaard, 2009). S. Grønmo (2016) beskriver ekstern validitet som at de resultatene og konklusjonene en får fra denne gitte forskningssituasjonen, også kan gjelde for andre reelle situasjoner.

Jeg har valgt å analysere tre ulike lærebøker for R1. Det å velge tre lærebøker for samme matematikkfag, gir større rom for å kunne generalisere resultatene enn det en analysering med færre bøker ville kunne gjort. Da disse tre lærebøkene i tillegg er de eneste som finnes for R1, forsterker det denne muligheten for generalisering. Det som er verdt å merke seg, er at jeg kun har sett på fire kapitler fra hver lærebok. For to av lærebøkene tilsvarer dette halvparten av deres totale antall kapitler, mens for den siste læreboka tilsvarer dette noe over halvparten. Resultatene vil dermed ikke i stor grad være representativ for generalisering av lærebøkenes fullstendige innhold for R1. Hadde jeg valgt å kun analysere to av disse tre lærebøkene, kunne jeg til en viss grad generalisert disse resultatene og overført dem til lærebok nummer tre. Om resultatene kan generaliseres til andre matematikkfag (for eksempel S1 som også tilhører vg2, eller R2 som er en fortsettelse av R1), tror jeg avhenger av hva deres læreplanmål, og dermed lærebøkenes innhold, er. En kan dermed ikke generalisere resultatene fra analyseringen av algebrakapitlene med eventuelle algebradeler for andre matematikkfag.

Innholdsvaliditet defineres av Cohen et al. (2011) etter at analyseredskapene må vise at de er omfattende og rettferdig samtidig som det dekker det området det er ment å dekke. Noe som øker innholdsvaliditeten er å samle inn datamaterialet ved nøyaktighet. Dette vil i større grad vise om resultatene er representative for undersøkelsen eller ikke.

For å relatere dette til denne oppgavens innholdsvaliditet, velger jeg å gjenta oppgavens problemstilling:

- Hvilke forskjeller og likheter er det mellom tre ulike lærebøkers presentasjon av matematisk innhold og krav til elevene i emnene algebra og funksjoner for R1-matematikk?
    - Hvordan strukturerer lærebøkene deres presentasjoner av ulike temaer?
    - Hvordan presenterer lærebøkene deres eksempler?
    - Hvordan fordeler presentasjonen av teori seg, i form av deduktive begrunnelser, empiriske begrunnelser, ingen begrunnelser eller begrunnelser som ikke er fullført, mellom de ulike lærebøkene?
    - På hvilke måter gir lærebøkenes oppgaver elevene kognitive utfordringer?
    - Finnes det sammenhenger mellom innholdet som presenteres og situasjoner fra dagliglivet eller matematikk som er tidligere lært, og hvordan blir disse fordelt mellom lærebøkene?

Ved å dele problemstillingen inn i flere forskningsspørsmål som tar for seg hvert sitt konkrete område for oppgaven, er med på å øke innholdsvaliditeten. Siden oppgaven tar utgangspunkt i Charalambous et al. (2010) rammeverk for horisontal og vertikal analyse, var det flere ulike aspekter ved lærebøkene jeg skulle analysere. Både lærebøkenes framleggelse av teori, eksempler, oppgaver og eventuelle sammenhenger, blir i denne oppgaven analysert. Ved å ikke ha disse konkrete forskningsspørsmålene kunne det kanskje ha vært større muligheter for at jeg ikke ville finne analysemetoder som var omfattende og dekkende nok til at det ville dekt det det var ment å dekke. Disse spørsmålene førte automatisk til større muligheter til å finne analyseverktøy som var gode nok.

Disse analyseverktøyene vil være de ulike rammeverkene og den teorien som blir brukt for å gjøre disse analyseringene. Som nevnt vil disse forskningsspørsmålene lede meg til rammeverk og teori som vil være mer nyttig og hensiktsmessig for akkurat de spørsmålene. Jeg har også utviklet et konseptuelt rammeverk bestående av disse rammeverkene og teorien spesifisert mot sitt område, fordi hver del som analyseres skal bli dekket av analysemetodene på best mulig måte. Jeg hadde blant annet ikke inkludert Charalambous et al. (2010) sin prosedyre for analyseringen av lærebøkenes eksempler om jeg ikke ønsket å undersøke akkurat dette nærmere. I tillegg valgte jeg å legge til Usiskin (1988) sin definisjon av ulike typer algebra, da dette var aspekter ved eksemplene som jeg ønsket å undersøke på bakgrunn av valget med å analysere deler av lærebøkene om både algebra og funksjoner. Slike vurderinger er gjort for alle forskningsspørsmålene og de analyseredskapene som ble valgt ut fra disse.

Konstruktvaliditet er om det er enighet og samsvar mellom forskerens forståelse av forskningens forestillinger og begreper, og de operasjonaliserte formene av disse forestillingene og begrepene, altså disse slik de generelt er akseptert å være (Cohen et al., 2011; Kleven, 2011). Creswell og Clark (2011) beskriver det som hvorvidt forskeren faktisk undersøker det de har ment å undersøke. Cohen et al. (2011) skildrer en tenkt situasjon for å eksemplifisere dette. De ser for seg en forsker som ønsker å fastsette barns intelligens, og velger å beskrive intelligens som ferdigheten man har til å spisse blyanter. Man kan da spørre seg om dette er en akseptabel forestilling om intelligens. Er det denne beskrivelsen generelt akseptert av andre enn forskeren (Cohen et al., 2011)?

I forhold til denne oppgaven vil dette gjelde mine analyseringer. Slik jeg har tolket den teorien og de rammeverkene jeg har brukt, vil disse tolkningene være generelt akseptert av andre enn meg? Det å ha gode kilder og rammeverk å forholde seg til vil være viktig for en slik studie. Disse vil hjelpe meg til å tolke de viktige begrepene og forestillingene på den måten de er ment å tolkes som. Creswell og Clark (2011) trekker fram konstruktvaliditet etter hvorvidt forskeren faktisk forsker på det som var planlagt. Dette vil jeg spesielt knytte til valg av Lithner (2008) sitt rammeverk for bestemmelsen av om lærebøkenes oppgaver ga elevene kognitive utfordringer. Det var viktig for meg å knytte dette med kognitive utfordringer og *productive struggle* mot dette rammeverket, slik at rammeverket faktisk hjalp meg å undersøke det jeg ønsket å undersøke.

3.4.2 Reliabilitet

Reliabilitet forklarer om det datamaterialet som er samlet inn er pålitelig. Høy reliabilitet tilsvarer høy pålitelighet (Cohen et al., 2011). S. Grønmo (2004) skriver at om en får de samme resultatene ved bruk av samme prosedyre for analysering av andre materialer, i dette tilfelle andre lærebøker, vil analysen være av høy reliabilitet. Reliabiliteten er avhengig av hvordan analyseprosedyren er utformet og hvordan selve innsamlingen av data blir gjort. Om analyseprosedyren er utformet på en slik måte at den i liten grad kan misoppfattes, og at innsamlingen av data forgår under grundige og systematiske forhold, gir dette store muligheter for høy reliabilitet (Grønmo, 2004)

Cohen et al. (2011) skiller mellom tre ulike typer reliabilitet. Den første typen kalles for *stabilitet*. Denne typen reliabilitet viser om de samme data vil gjelde om de var blitt samlet inn med samme analyseringsredskap, men på forskjellige tidspunkter. For å sette dette litt i perspektiv, beskriver Cohen et al. (2011) at dette betyr at om en analysering ble gjort to ganger, men med et tidsrom mellom seg, så vil høy reliabilitet gi de samme resultatene, gitt at det er det samme om analyseres med samme analyseringsredskap. Alle analyseringene som er blitt utført for denne oppgaven baserer seg på rammeverk og tilhørende teori, som har gitt systematiske analyseringsprosedyre. Dette øker mulighetene for å få så likt resultat som mulig om samme analyseringen også skulle blitt gjort i ettertid.

Den andre reliabilitetstypen kalles *ekvivalens*. I motsetning til stabilitet, knyttes denne reliabilitetstypen til samsvar mellom resultatene som to personer har utført med samme analyseringsmetode for samme utvalg (S. Grønmo, 2016). Dette fører meg inn på det Cohen et al. (2011), under ekvivalens, kaller for *inter-rater reliability*. Når flere forskere er deltakende i samme forskning, er det alltid muligheter for at ikke alle er like enige på hver analysering. Får å gi god reliabilitet er det viktig at alle er enige om hvordan analyseringen skal foregå. Dette kan man ta med seg i analyseringssituasjoner der man er alene, noe som passer min situasjon. For å forsterke analyseringens reliabilitet, samarbeidet jeg med en medstudent som utfører en liknende oppgave, hvor vi plukket en mengde fra hverandres materiale og deretter gjennomførte analyseringen for denne mengden med deres tilhørende rammeverk og teori. Etter endt analysering ble resultatene sammenlignet med det vi selv allerede hadde funnet for vår egen analyse. Eventuelle ulikheter ble deretter diskutert og vurdert om andre kategorier kanskje var mer passende. I dette tilfellet var det en liten del som ga uenigheter. Av 23 oppgaver med tilhørende 68 deloppgaver, var det for totalt 6 av disse deloppgavene uenigheten oppstod. Ved å gjøre det på denne måten, har jeg fått styrket oppgavens reliabilitet ved å la en annen utføre samme analysering for det samme materialet.

4 Resultater

I denne delen skal jeg presentere og kommentere de resultatene den horisontale- og den vertikale lærebokanalysen har gitt meg. Resultatene kommer til å bli presentert for hvert av oppgavens forskningsspørsmål.

4.1 Resultater fra den horisontale analysen

Jeg velger først å se på funnene knyttet til den horisontale analysen. Denne analysen ble splittet i to ulike kategorier: lærebøkenes bakgrunnsinformasjon og lærebøkenes helhetlige struktur.

4.1.1 Lærebøkenes bakgrunnsinformasjon

De tre valgte lærebøkene representerer tre ulike forlag. Her har Gyldendal gitt ut Sigma R1, Aschehoug Matematikk R1, mens Cappelen Damm har utgitt Sinus R1. Tabell 4.1 viser at Sigma R1 skiller seg ut fra de to andre når det gjelder antall sider. Sigma R1 består av betydelig færre sider enn det Matematikk R1 og Sinus R1, med 336 sider mot henholdsvis 448 sider og 500 sider. Selv om Sigma R1 inneholder godt over 100 færre sider enn de andre, har den fortsatt like mange kapitler som Matematikk R1, og nesten like mange kapitler som Sinus R1.

Tabell 4.1

Bakgrunnsinformasjon for alle lærebøkene.

	Sigma R1	Matematikk R1	Sinus R1
Forfattere	Stein Øgrim Tone Bakken Bjørnar Pedersen Knut Skrindo Wenche Dypbukt Silja Mustaparta Anne Thorstensen Runar Thorstensen	Odd Heir John Engeseth Håvard Moe Ørnulf Borgan	Tore Oldervoll Odd Orskaug Audhild Vaaje Otto Svorstøl Sigbjørn Hals
Forlag	Gyldendal	Aschehoug	Cappelen Damm
Utgitt	2012	2015	2013
Utgave	2.utg	2.utg	2.utg
Antall sider	336	448	500
Antall kapitler	7	7	8
Gjennomsnittssider per kapittel	22,28 sider	50,7 sider	40.13 sider
Tilleggsmateriale	Elevsider (nettsted) Lærersider (nettsted)	Digitale elevressurser Digitale lærerressurser	Nettsted

4.1.2 Lærebøkenes helhetlige struktur

Ved å se på lærebøkenes helhetlige struktur, kommer jeg til å se nærmere på lærebøkenes kapitler, delkapitler, hvilket innhold hver lærebok har valgt å presentere for algebra og funksjoner, og i hvilken rekkefølge dette blir presentert. Tabell 4.2 viser hvordan kapitlene er navngitt og plassert i forhold til hverandre for hver lærebok. Ser at Matematikk R1 og Sinus R1 har valgt lik strategi ved at algebra er det første som introduseres før logaritmer. Ser også at Sigma R1 ikke har eget logaritmekapittel. Dette grunner i at Sigma R1 kombinerer presentasjonen av logaritmer i kapitlet Algebra. Ser også at Sigma R1 er den eneste læreboka som har valgt å ha bevis og bevisføring som et eget kapittel. Både Matematikk R1 og Sinus R1 har denne delen inkludert som ett delkapittel i sine algebrakapitler.

Tabell 4.2

Hver lærebokss kapittelinndeling.

Sigma R1	Matematikk R1	Sinus R1
1 Kombinatorikk og sannsynlighet	1 Algebra	1 Algebra
2 Bevis og bevisføring	2 Logaritmer	2 Logaritmer
3 Vektorer	3 Funksjoner	3 Sannsynlighetsberegning
4 Algebra	4 Funksjonsdrøfting	4 Geometri
5 Grenseverdier og derivasjon	5 Geometri	5 Vektorer
6 Funksjonsdrøfting	6 Vektorer	6 Vektorregning
7 Geometri	7 Sannsynlighet	7 Funksjonslære
		8 Derivasjonsregler og vektorfunksjoner

Jeg vil videre kun fokusere på områdene *algebra* og *funksjoner*, da det er dette som er utgangspunktet for oppgaven min. Tabell 4.3 viser hvilke kapitler jeg har identifisert som algebra og funksjoner, og tabellen viser at både algebra og funksjoner inneholder to kapitler hver fra hver lærebok.

Tabell 4.3

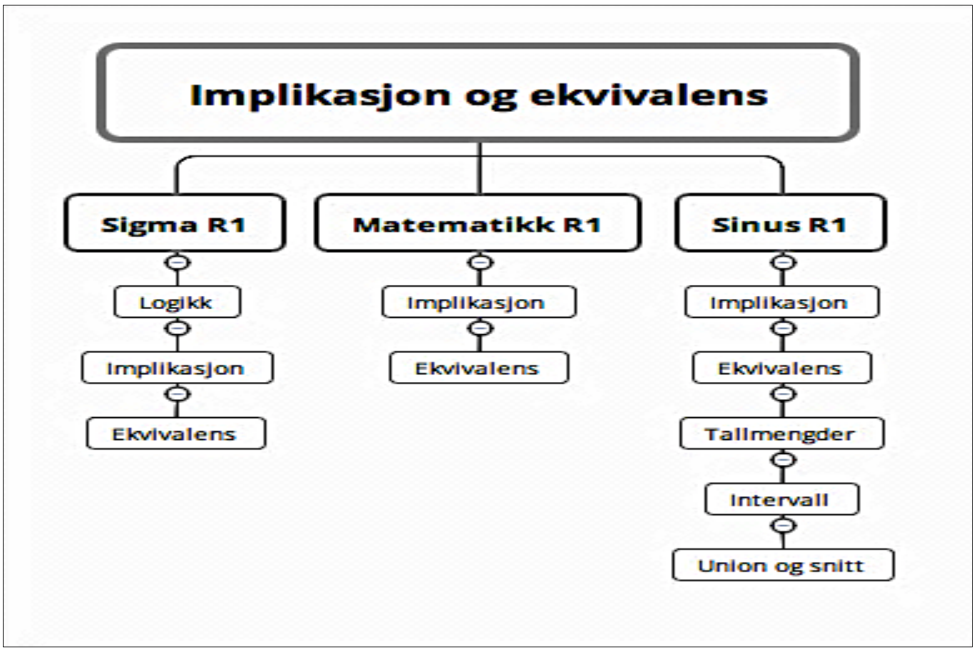
Lærebøkenes kapitler for algebra og funksjoner.

	Sigma R1	Matematikk R1	Sinus R1
Algebra	2 Bevis og bevisføring	1 Algebra	1 Algebra
	4 Algebra	2 Logaritmer	2 Logaritmer
Funksjoner	5 Grenseverdier og derivasjon	3 Funksjoner	7 Funksjonslære
	6 Funksjonsdrøfting	4 Funksjonsdrøfting	8 Derivasjonsregler og vektorfunksjoner

For å kunne studere hver av disse to områdene på et dypere nivå, valgte jeg å lage egne begrensede underområder. Underområdene er dermed satt sammen av delkapitler fra alle lærebøkene som omhandler de samme temaene. For algebra ble disse underområdene delt slik: (1) *Implikasjon og ekvivalens*, (2) *bevis,* (3) *faktorisering og polynomdivisjon*, (4) *likninger og ulikheter av polynomer*, (5) *logaritmedefinisjoner og logaritmesetningene*, og (6) *logaritme- og eksponentiallikninger og ulikheter,* mens funksjoner ble delt i disse tre*:* (1) *Grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet*, (2) *derivasjon og funksjonsdrøfting*, og (3) *asymptoter*. Hvilke delkapitler fra hver lærebok som hører til hvert underområde, vises i vedlegg 1 og vedlegg 2.

Med utgangspunkt i hver av disse selvlagde underområdene, har jeg valgt å se hva de enkelte lærebøkene presenterer under hvert område, samt i hvilken rekkefølge de har valgt å presentere de i. Det blir da mulig å kommentere eventuelle forskjeller og likheter mellom de, i tillegg til å se hvilken rekkefølge de har valgt. Siden jeg velger å gjøre dette får jeg større muligheter til å gå mer i detalj på hvert område. Videre vil jeg vise hvordan hvert enkelt underområde er satt sammen fra hver lærebok, og jeg kommer til å presentere alle disse avgrensede områdene med en oversikt over hva som tas opp i hver lærebok.

Jeg starter med de avgrensede områdene tilhørende *algebra*. Figur 4.1 viser hvordan lærebøkene har valgt å presentere *implikasjon og ekvivalens.*

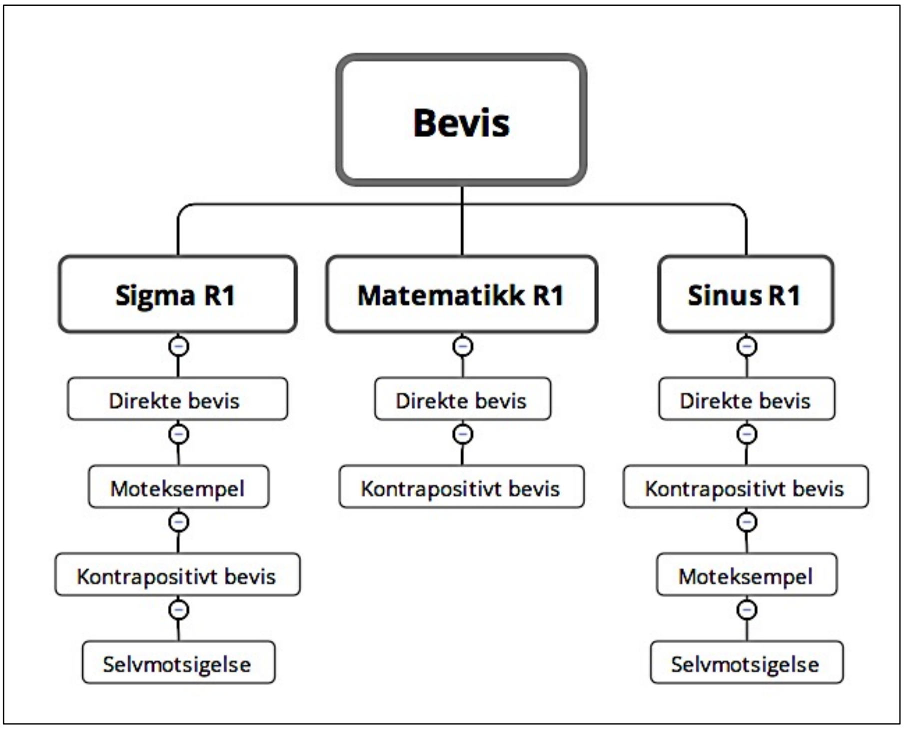


,

Figur 4.1: Oversikt over området *implikasjon og ekvivalens.*

Ser her at Matematikk R1 kun presenterer implikasjon og ekvivalens, i den nevnte rekkefølgen. Sigma R1 har i tillegg til dette en del de kaller logikk som legges fram før deres presentasjon av implikasjon og ekvivalens. Logikk i Sigma R1 inneholder presentasjoner av blant annet hva åpne utsagn, grunnmengde og løsningsmengde er. Sinus R1 har valgt å presentere implikasjon og ekvivalens som det første. I tillegg tar de for seg tallmengder med forklaringer og/eller eksempler på alle. Sigma R1 på sin side valgt å kun nevne at "mengden av alle tall skriver vi $\mathbb{R}$". Sinus R1 valgte tilslutt å repetere fra vg1 hva lukket og åpent intervall er, samt hva union og snitt er.

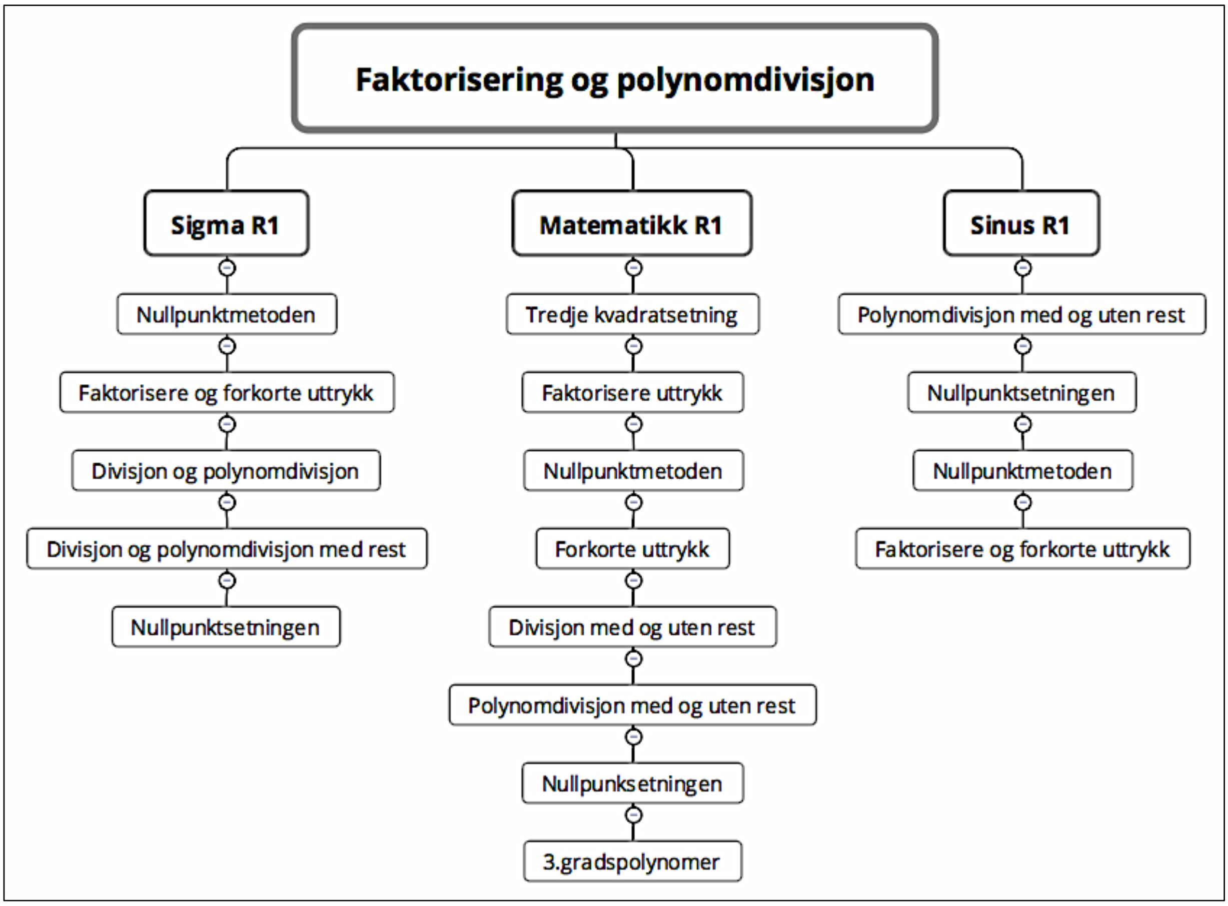
Figur 4.2 viser underområdet *bevis*.



Figur 4.2: Oversikt over området *bevis*.

Felles for alle lærebøkene er at de har presentert direkte bevis og kontrapositive bevis, og i tillegg valgt å presentere direkte bevis først. Ellers har Sigma R1 og Sinus R1 også valgt å inkludere moteksempel og selvmotsigelser. Matematikk R1 har valgt å kun presentere direkte bevis og kontrapositivt bevis.

Ser videre på oversikten for området *faktorisering og polynomdivisjon*. Se figur 4.3.

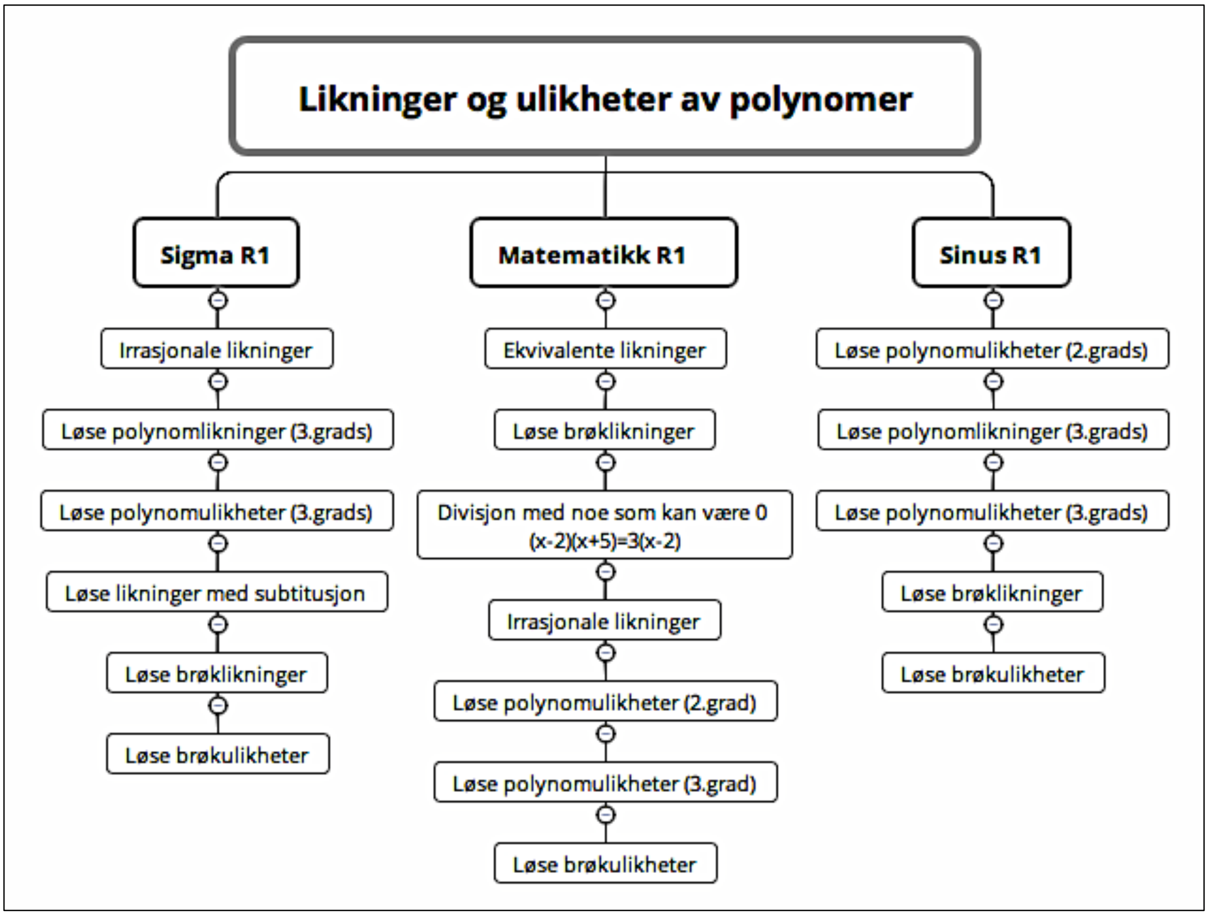


Figur 4.3: Oversikt over området *faktorisering og polynomdivisjon*.

For *faktorisering og polynomdivisjon* viser figuren at alle lærebøkene har valgt å presentere nullpunktmetoden, ulike faktorisering- og forkortingsmetoder, polynomdivisjon med og uten rest, og tilslutt nullpunktsetningen. Dette var også det eneste jeg identifiserte for Sinus R1. Eneste forskjellen i hva som presenteres i Sigma R1, er at de i tillegg har valgt å presentere vanlig divisjon med og uten rest som en introduksjon til polynomdivisjon. Innholdet til Matematikk R1 er noe mer. De har i tillegg valgt å nevne, både med formel, eksempler og oppgaver, tredjekvadratsetning, i tillegg til tredjegradspolynomer.

Hvis man studerer hvilken rekkefølge de ulike lærebøkene har valgt å presentere dette i, ser man at det eneste alle lærebøkene har felles er at de velger å introdusere polynomdivisjon før nullpunktsetningen. Foruten om det er det ingen trend for dette delområdet som ser ut til å gå igjen hos lærebøkene.

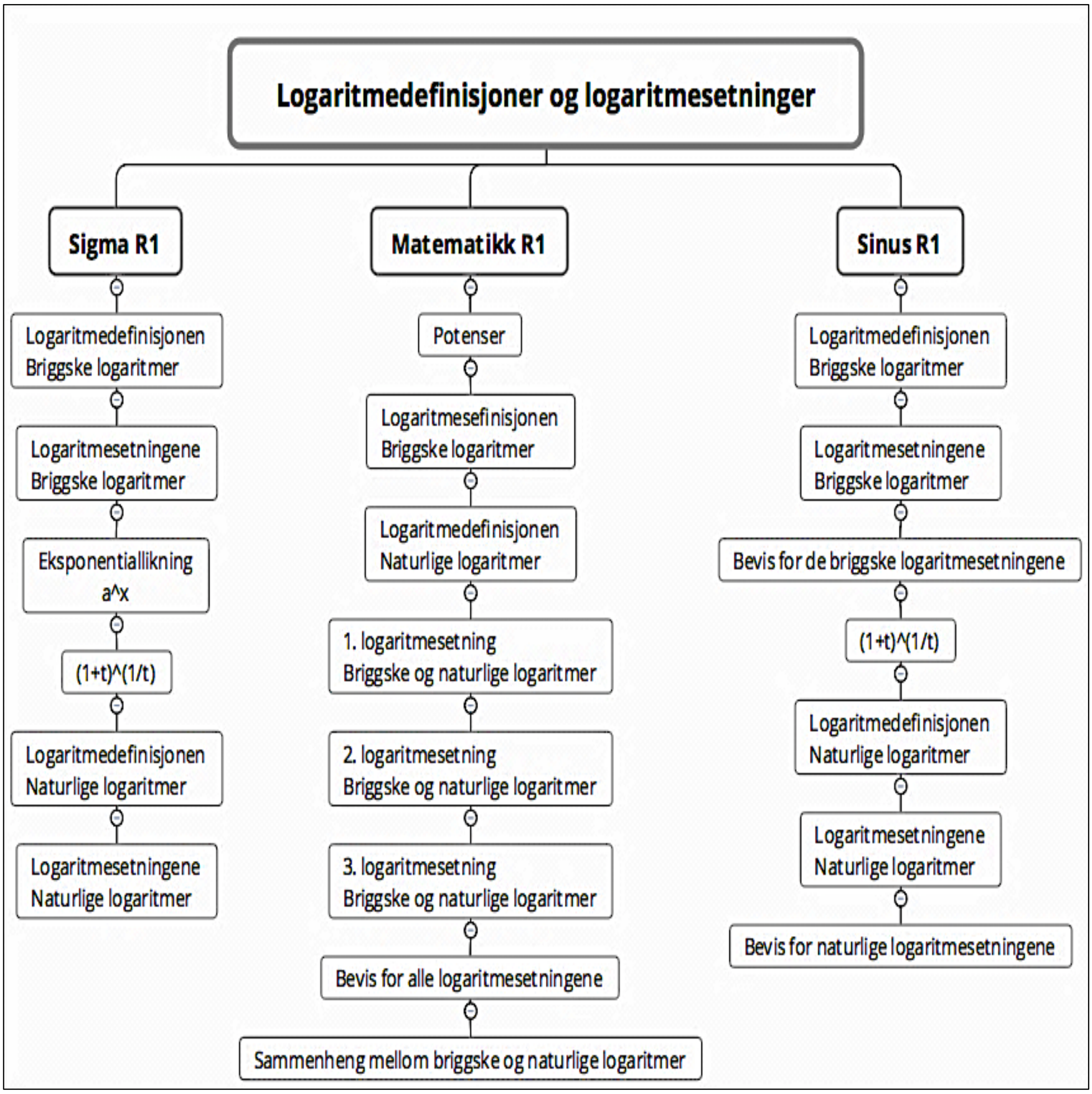
Figur 4.4 viser underområdet *likninger og ulikheter av polynomer*.



Figur 4.4: Oversikt over området *likninger og ulikheter av polynomer*.

For *likninger og ulikheter av polynomer* er det som går igjen hos alle lærebøkene å løse brøklikninger og brøkulikheter (også kalt rasjonale likninger og rasjonale ulikheter i noen lærebøker). Alle lærebøkene viser hvordan man løse polynomulikheter, hvor Sinus R1 og Matematikk R1 viser løsning av polynomulikheter av 2. og 3.grad. Sigma R1 velger å kun vise for 3.grad. Både Sigma R1 og Sinus R1 viser hvordan løse 3.gradspolynomulikheter som en følge av løsningene fra 3.grads polynomlikningene. Sinus R1 er eneste læreboka som ikke tar opp irrasjonale likninger, mens Matematikk R1 er eneste læreboka som presiserer ekvivalente likninger, samt tar opp den spesifikke situasjonen hvor man kan risikere å dividere med noe som er 0.

De to siste delemnene fra hovedområdet algebra, omhandler logaritmer. Figur 4.5 viser det første underområdet *logaritmedefinisjoner og logaritmesetninger*.

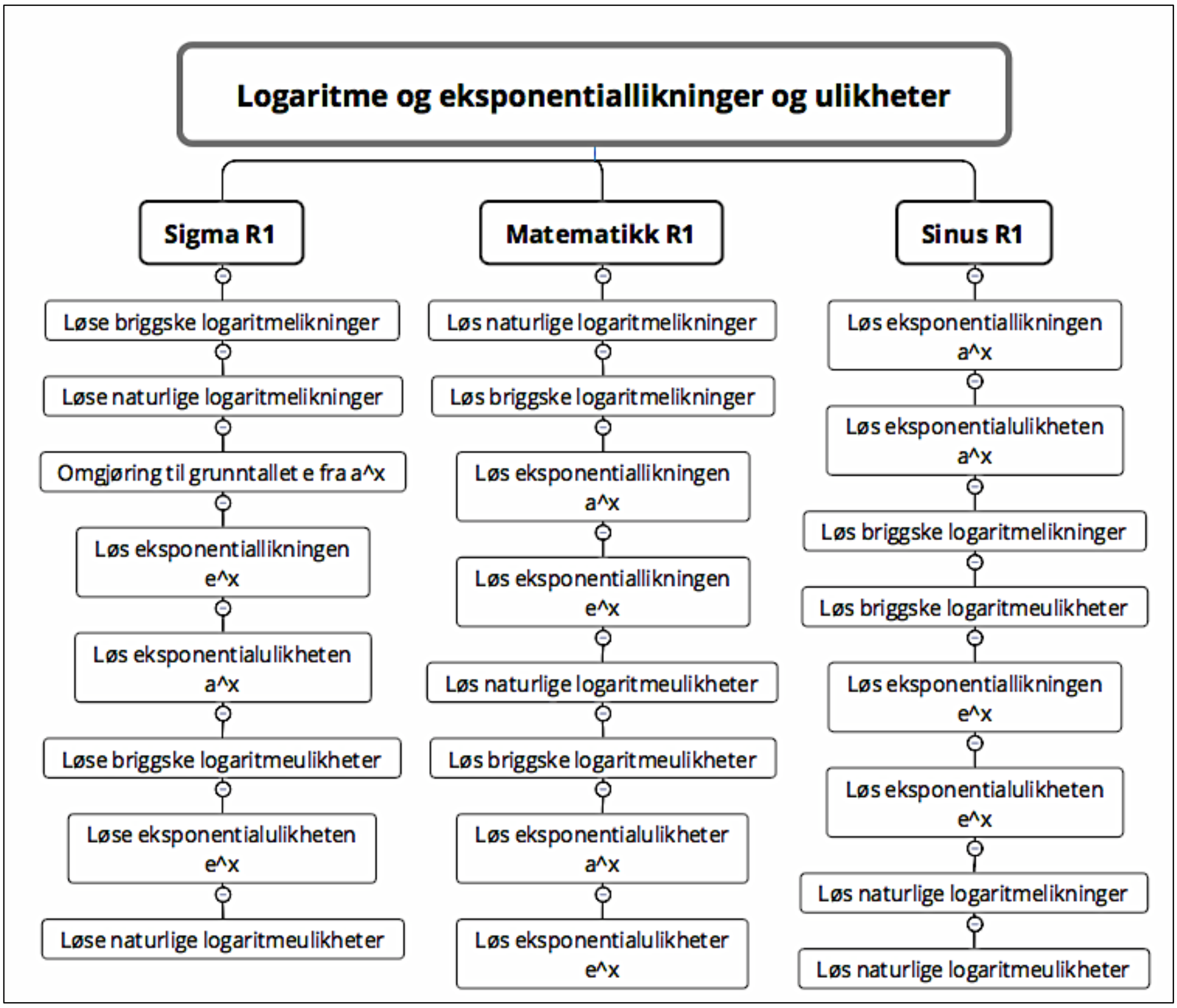


Figur 4.5: Oversikt over området *logaritmedefinisjoner og logaritmesetninger.*

Fra figur 4.5 kan man se at alle lærebøkene har logaritmedefinisjonen for både briggske og naturlige logaritmer felles, samt logaritmesetningene for begge logaritmetypene. Sigma R1 er eneste lærebok hvor logaritmesetningene ikke blir bevist. Matematikk R1 er eneste lærebok som ser nærmere på sammenhengen mellom de briggske og naturlige logaritmene, og den eneste hvor potensregler- og definisjoner repeteres. Matematikk R1 er til gjengjeld den eneste læreboka som ikke viser sammenhengen mellom tallet e og $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$.

Ved å se på hvilken rekkefølge hver av lærebøkene har valgt å presentere for dette emnet, viser oversikten at Sigma R1 og Sinus R1 gjør seg helt ferdige med de briggske logaritmene før de naturlige logaritmene blir introdusert. Dette gjelder da både logaritmedefinisjonene og logaritmesetningene. Matematikk R1 velger å definere briggske logaritmer og naturlige logaritmer før de ser videre på både de briggske og de naturlige logaritmesetningene under ett.

Den siste delen under *algebra* omhandler likninger og ulikheter bestående av logaritmer og eksponenter. Oversikten vises i figur 4.6.

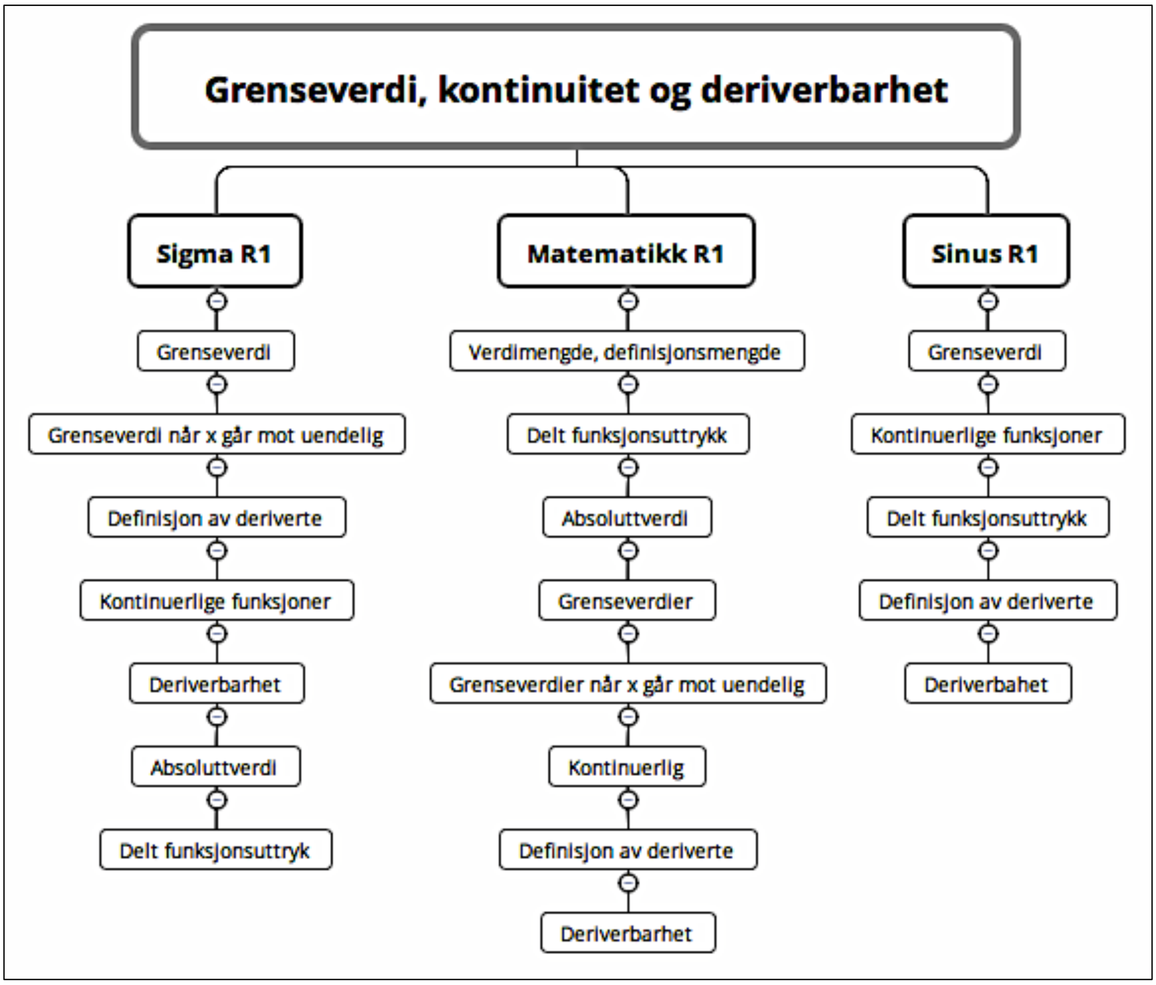


Figur 4.6: Oversikt over området *logaritme- og eksponentiallikninger og ulikheter*.

Alle lærebøkene presenterer briggske og naturlige logaritmelikninger, briggske og naturlige logaritmeulikheter, eksponentialulikheter (både ved e^x og a^x). Sigma R1 er eneste lærebok som kun har valgt å presentere eksponentiallikninger med e^x, hvor de to andre også inkluderer eksponentiallikninger med a^x. Sigma R1 er imidlertid den eneste læreboka som viser omgjøringen fra a^x og til e^x.

Oversikten viser at Sigma R1 og Matematikk R1 velger å starte med briggske og naturlige logaritmelikninger, men i motsatt rekkefølge, mens Sinus R1 har valgt å introdusere eksponentiallikninger- og ulikheter med a^x først. Mønsteret Sinus R1 har valgt å bruke er å først introdusere hvordan likninger løses, før de umiddelbart ser videre på ulikheter for samme logaritme- eller eksponentialtype. Matematikk R1 har valgt å presentere hvordan løse likninger for alle de fire ulike logaritme- og eksponentialtypene, før de ser på løsninger av ulikheter for disse. For både likninger og ulikheter presenterer de først naturlige logaritmer, briggske logaritmer før eksponentene a^x og e^x. For Sigma R1 velges det også å presentere løsninger av likninger før ulikheter. Forskjellen mellom Matematikk R1, er før det første at Sigma R1 ikke viser hvordan løse eksponentiallikning med a^x, og for det andre så presenteres ikke de ulike logaritme-og eksponentialtypene i den samme rekkefølgen for likninger og ulikheter, ved at eksponentialulikheten e^x presenteres før ulikhet av den naturlige logaritmen.

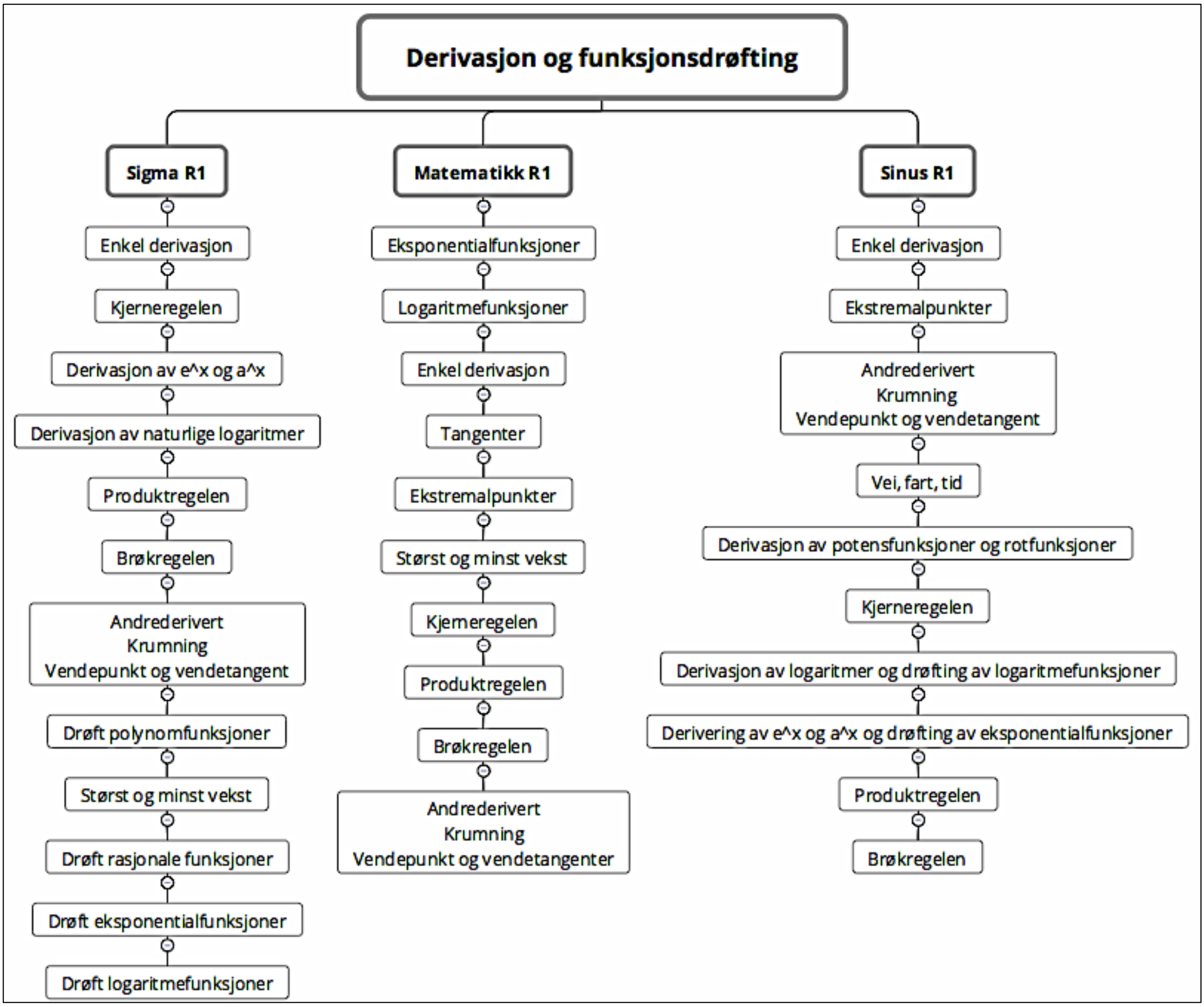
De neste figurene vil vise oversikter for *funksjoner*. Figur 4.7 viser underområdet *grenseverdier, kontinuitet og deriverbarhet*.



Figur 4.7: Oversikt over området *grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet.*

I følge figur 4.7 er likhetene at alle presenterer grenseverdi, delte funksjonsuttrykk, definisjonen av den deriverte, og når funksjoner er kontinuerlig og deriverbar. Det er også det eneste Sinus R1 inneholder. Sigma R1 har i tillegg valgt å inkludere grenseverdier når x går mot uendelig, i tillegg til absoluttverdi. Matematikk R1 har det samme innholdet som Sigma R1, men har i tillegg også med verdimengde og definisjonsmengde.

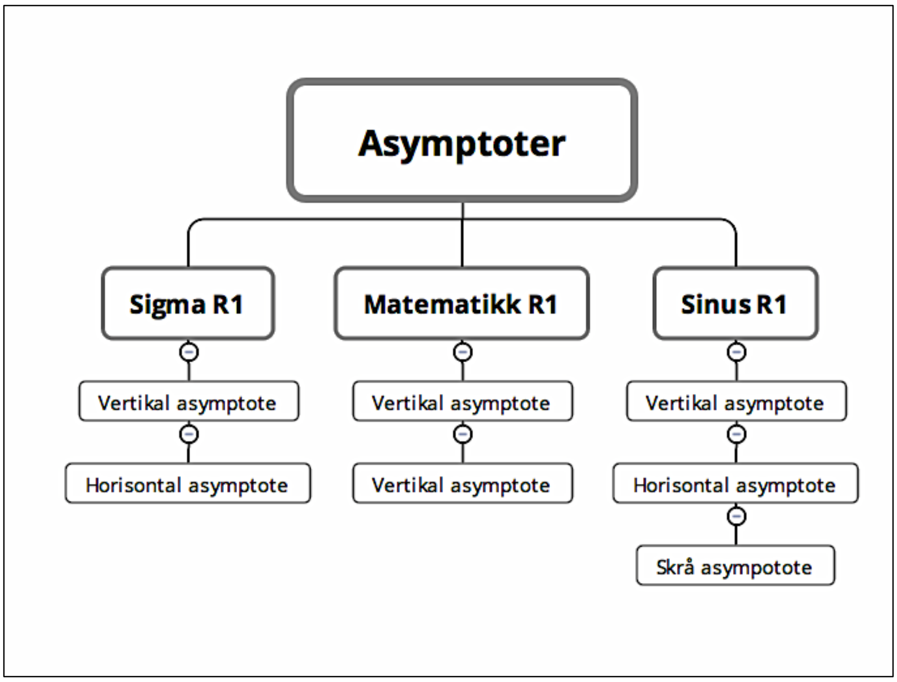
Det neste området er *derivasjon og funksjonsdrøfting*. Figur 4.8 viser oversikt over området.



Figur 4.8: Oversikt over området *derivasjon og funksjonsdrøfting.*

Da dette området ble et større område (i forhold til antall delkapitler fra hver lærebok) begrenset dette også muligheten til å være like detaljert som for de andre områdene. For dette området velger jeg dermed å kun se på ulikhetene i form av temaer presentert for hver lærebok, og ikke kommentere hvilke rekkefølger de har valgt. Matematikk R1 er den eneste læreboka som velger å undersøke logaritmefunksjoner og eksponentialfunksjoner slik som de er, altså før de lærer om derivering. I tillegg er Matematikk R1 eneste som presenterer tangenter (ikke vendetangenter) til funksjoner for gitte punkt for funksjonen. Vei, fart, tid er det kun Sinus R1 som har med.

Det siste området er *asymptoter*. Figur 4.9 viser oversikten over dette området.



Figur 4.9: Oversikt over området *asymptoter*.

Figur 4.9 viser at den eneste forskjellen mellom de tre lærebøkene er at Sinus R1 velger å presentere skrå asymptoter i tillegg til vertikale og horisontale asymptoter, som de to andre også har med. Vertikale asymptoter blir også presentert før horisontale asymptoter for alle lærebøkene.

4.2 Resultater fra den vertikale analysen

Den vertikale analysen består av tre ulike kategorier: *presentert for elevene*, *kreves av elevene* og *sammenhenger* (Charalambous et al., 2010). Under *presentert for elevene* vil jeg vise resultater både av analysen av lærebøkenes eksempler (Charalambous et al., 2010; Usiskin, 1988), i tillegg til hvordan lærebøkenes teori legges fram (Otten et al., 2014; Thompson et al., 2012). Under *kreves av elevene* presenteres lærebøkenes oppgaver basert Lithner (2008) sitt rammeverk. Under *sammenhenger* viser jeg resultater for koblinger til dagliglivet og til matematikk elevene har lært tidligere. Jeg vil for den vertikale analysen skille mellom *algebra* og *funksjoner*. Der det er hensiktsmessig kommer jeg også til å presentere resultatene fra algebra og funksjoner sammen i tillegg til hver for seg.

4.2.1 Presentert for elevene

Jeg velger først å presentere resultatene fra lærebøkenes eksempler, før jeg viser for fremstillingen av teori.

4.2.1.1 Lærebøkenes eksempler

Når det gjelder lærebøkenes eksempler, analyserte jeg dem etter syv komponenter som kan beskrive eksempler. Disse er eksemplenes *prosedyre*, hvilken *type algebra* de representerte, *representasjoner*, om de ble *fullført*, *kontekst*, *grafiske bilder* og om det ble presentert *flere løsningsmetoder*.

Før funnene til disse komponentene presenteres, vil jeg først forklare hvordan hver lærebok har valgt å legge frem eksemplene i forhold til kapitlets oppgaver. Både Matematikk R1 og Sinus R1 plasserte hvert eksempel før ett eller flere sett av lignende oppgaver. Sigma R1 derimot hadde for hvert delkapittel valgt å plassere alle eksemplene før oppgavene. Disse eksemplene hadde ulikt fokus (som for eksempel flere ulike måter å løse logaritmelikninger), og dermed var det ikke opplagt hvilket eksempel man kunne følge for hver av oppgavene. Det var i det større grad for Matematikk R1 og Sinus R1.

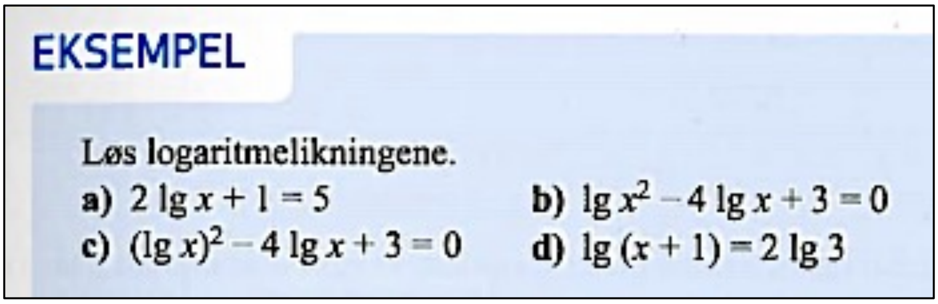
For algebra

- Prosedyrer

For prosedyrene velger jeg først å presentere de som det var flest av for hver lærebok, før jeg går inn prosedyrer som var spesielle for hver lærebok.

Alle lærebøkene hadde eksempler som gjennomgikk faktorisering og forkorting av polynomuttrykk, polynomdivisjon, samt nullpunktsetningen. For alle disse var det Sinus R1 som hadde flest eksempler. Sigma R1 hadde 11 eksempler med bevis, mot Matematikk R1 sin 5 og Sinus R1 sine 7, og var dermed læreboka med flest beviseksempler. Matematikk R1 hadde kun ett eksempel med direkte bevis og ett med kontrapositivt bevis i tillegg til bevis for hver logaritmesetning. Sinus R1 hadde tre eksempler med direkte bevis, to med kontrapositivt bevis, ett moteksempel og en selvmotsigelse, hvor de to sistnevnte ikke fantes i Matematikk R1. Sigma R1 hadde de samme typene som Sinus R1 hadde. Sigma R1 hadde også tre eksempler for ulike måter å bevise Pytagoras´ setning i tillegg.

Den prosedyren som samtlige lærebøker hadde flest eksempler med var det å løse logaritme- og eksponentiallikninger. Jeg skal se litt nærmere på logaritmelikningene og likhetene og ulikhetene jeg fant for hver bok. Dette gjelder både de briggske logaritmene og de naturlige logaritmene. Sinus R1 hadde til sammen 8 slike eksempler, hvor fire av de var med briggske logaritmer og 4 med naturlige logaritmer. Det som skilte Sinus R1 fra de andre lærebøkene var de hadde valgt samme type logaritmelikning hvor hver av de to typene logaritmetypene, men med ulike tall. Likningene som skulle løses, vises i figur 4.10.

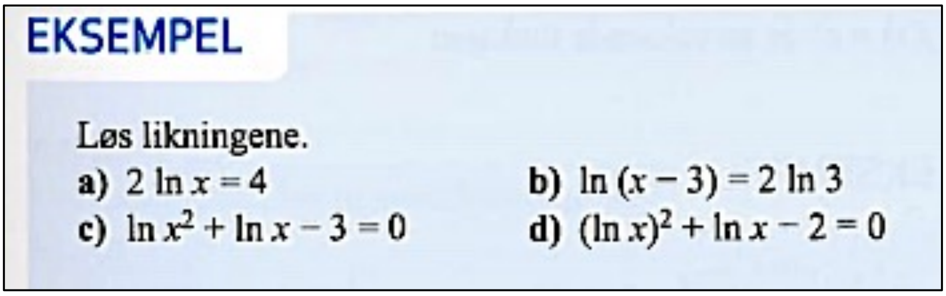


EKSEMPEL

Løs logaritmelikningene.

a) $2 \lg x + 1 = 5$ **b)** $\lg x^2 - 4 \lg x + 3 = 0$

c) $(\lg x)^2 - 4 \lg x + 3 = 0$ **d)** $\lg (x + 1) = 2 \lg 3$



EKSEMPEL

Løs likningene.

a) $2 \ln x = 4$ **b)** $\ln (x - 3) = 2 \ln 3$

c) $\ln x^2 + \ln x - 3 = 0$ **d)** $(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$

Figur 4.10: Viser hvilke logaritmelikningene for briggske og naturlige logaritmer for eksemplene i Sinus R1.

Som figur 4.10 viser så er de fire briggske logaritmelikningene akkurat de samme som de naturlige logaritmelokningene, bare med ulike tall og noen små endringer. For Sigma R1 var tre av eksemplene med den briggske logaritmen og fire med den naturlige. Her kunne man kjenne igjen to av eksemplene med briggske logaritmer i eksemplene for de naturlige logaritmene, slik som i Sinus R1. Matematikk R1 hadde 5 eksempler med den briggske logaritmen, men kun to av den naturlige. Forskjellen fra Sinus R1 var i midlertid at de eksemplene med den naturlige logaritmen, ikke var lik de eksemplene med den briggske logaritmen. Matematikk R1 skiller seg her klart fra trenden i Sinus R1.

Et eksempel som skilte Sigma R1 fra de to andre, var at de som eneste lærebok, hadde et eksempel av en likning bestående av både eksponenter og logaritmer som skulle løses. Matematikk R1 og Sinus R1 viste kun likninger som enten bestod av logaritmer eller eksponenter.

- Type algebra

Tabell 4.4 viser hvilken type algebra hvert eksempel viste med utgangspunkt i Usiskin (1988) sin definering av algebratyper.

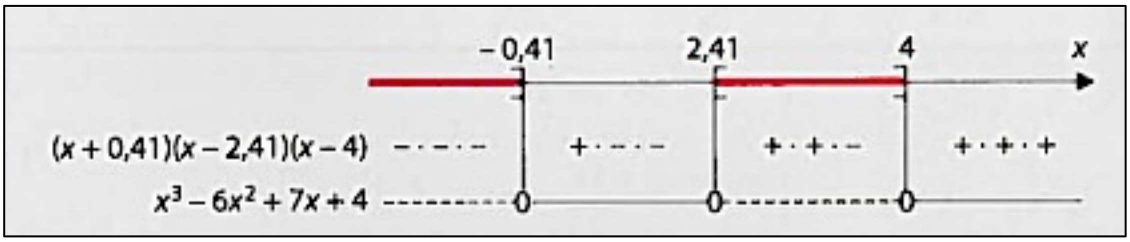
Tabell 4.4
Fordeling av type algebra for hver lærebok i algebra.

	Sigma R1	Matematikk R1	Sinus R1
Type 1	3	0	1
Type 2	25	30	40
Type 3	10	3	10
Type 4	18	22	18

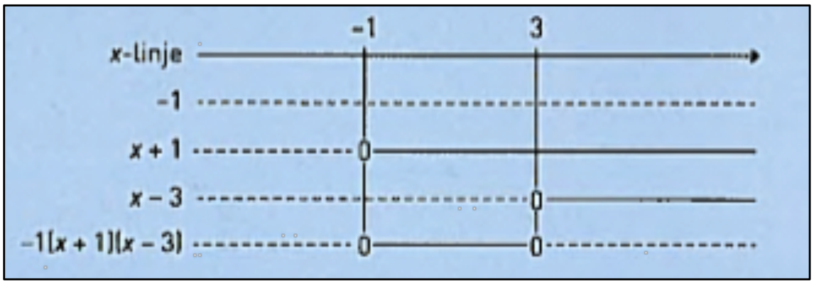
Tabellen viser at det er algebratype 2 som dominerer for *algebra*. Ved denne algebratypen ble variablene sett på som ukjente som skulle finnes. Likninger faller dermed under denne algebratypen, noe som kan gjenspeile resultatet, da det å løse likninger er en stor del av *algebra*. Algebratypen som var inkludert i mange eksempler var for alle algebratype 4. Denne algebratypen tar blant annet for seg faktorisering, noe som også er en stor del av *algebra*.

- Representasjoner

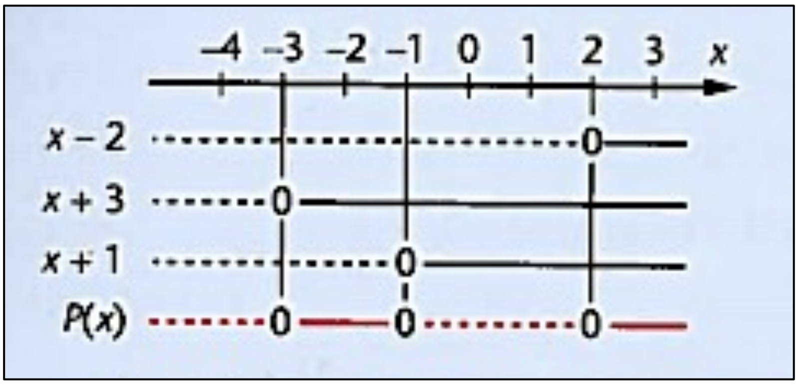
Når det gjelder representasjoner identifiserte jeg 9 eksempler med representasjoner for Sigma R1 og Matematikk R1, mens for Sinus R1 var det 10 eksempler. Representasjonen jeg identifiserte flest ganger, og det for alle lærebøkene, var fortegnslinjer i sammenheng med ulikheter. Siden fortegnslinjer var den representasjonen som oppstod flest ganger, velger jeg å se nærmere på hvordan hver lærebok valgte å presentere disse.



Figur 4.11: Viser hvordan fortegnslinjen for (x + 0,41)(x - 2,41)(x - 4) presenteres for Sigma R1. Hentet fra Øgrim et al. (2012).



Figur 4.12: Viser hvordan fortegnslinje for -1(x+1)(x-3) presenteres hos Matematikk R1. Hentet fra Heir, Engeseth, Moe og Borgan (2015).



Figur 4.13: Viser hvordan fortegnslinje for P(x) = (x - 2)(x + 3)(x + 1) presenteres hos Sinus R1. Hentet fra Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Svorstøl og Hals (2013).

De tre figurene viser at både Matematikk R1 og Sinus R1 velger å splitte faktorene i fortegnslinja, før de "summerer" uttrykkets endelige fortegn tilslutt. Sigma R1 velger å ikke splitte faktorene, men ha de i samme uttrykk. De velger i stedet å vise hvilket fortegn hver faktor har for hvert nullpunkt, før de deretter "summerer" uttrykkets fortegn på bakgrunn av dette.

Ellers hadde Sigma R1 noen figurrepresentasjoner tilhørende beviseksempler. Matematikk R1 hadde en representasjon av en tredjegradsgraf, mens Sinus R1 hadde representasjoner av to grafer til hvert sitt eksempel, i tillegg til ett eksempel som inkluderte tallinje.

- Ikke fullførte eksempler

Alle eksemplene i alle lærebøkene ble fullført.

- Kontekst

Sigma R1 var læreboka med flest eksempler med kontekst knyttet til dagliglivet, med 7 eksempler. Matematikk R1 hadde ingen konteksteksempler, mens Sinus R1 kun hadde ett eksempel med kontekst

- Grafiske bilder

Som for eksempler med kontekst var det også Sigma R1 som hadde flest eksempler med grafiske bilder. Tre av eksemplene som innehold grafiske bilder, var også eksempler knyttet til kontekst. Matematikk R1 hadde ingen grafiske bilder, mens Sinus R1 hadde ett bilde. Dette bildet er også knyttet til det ene eksemplet med kontekst

- Flere enn én løsningsmetode

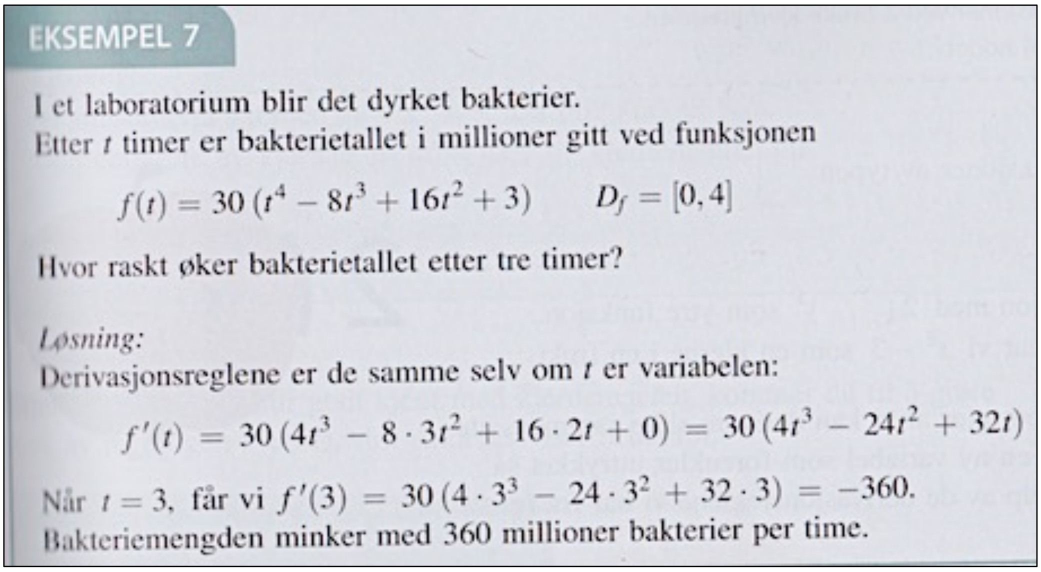
Her var det eksempler som viste flere enn én løsningsmetode i alle lærebøkene. Sigma R1 og Sinus R1 hadde ett tilfelle hver hvor eksemplene viste to ulike fremgangsmåter, mens Matematikk R1 hadde to slike eksempler.

For funksjoner

Resultatene for eksemplene tilhørende *funksjoner* velger jeg å presentere på samme måte som for algebra.

- Prosedyrer

For eksemplene tilknyttet funksjoner, var det eksempler med derivering som alle lærebøker hadde flest eksempler av. Sinus R1 skilte seg imidlertid ut med over dobbelt så mange derivasjonseksempler enn de andre. Ellers skilte Sigma R1 seg ut med å ha flest eksempler hvor man for den deriverte funksjonen skulle sette inn verdier for x. Noen av disse eksemplene ble knyttet til sitasjoner fra dagliglivet. Figur 4.14 viser et eksempel fra Sigma R1 som viser dette.



EKSEMPEL 7

I et laboratorium blir det dyrket bakterier.
Etter t timer er bakterietallet i millioner gitt ved funksjonen

$$f(t) = 30\,(t^4 - 8t^3 + 16t^2 + 3) \qquad D_f = [0, 4]$$

Hvor raskt øker bakterietallet etter tre timer?

Løsning:
Derivasjonsreglene er de samme selv om t er variabelen:

$$f'(t) = 30\,(4t^3 - 8 \cdot 3t^2 + 16 \cdot 2t + 0) = 30\,(4t^3 - 24t^2 + 32t)$$

Når $t = 3$, får vi $f'(3) = 30\,(4 \cdot 3^3 - 24 \cdot 3^2 + 32 \cdot 3) = -360$.
Bakteriemengden minker med 360 millioner bakterier per time.

Figur 4.14: Eksempel med derivasjon knyttet til dagliglivet. Hentet fra Øgrim et al. (2012)

Andre ting verdt å bemerke seg er at Sigma R1 ikke har noen eksempler hvor det bestemmes om en funksjon er kontinuerlig eller deriverbar. Sinus R1 har kun ett eksempler om kontinuitet, men ingen på deriverbarhet. Matematikk R1 har tre kontinuitetseksempler, og er også eneste læreboka som har med eksempler på om en funksjon er deriverbar eller ikke.

Alle lærebøkene hadde eksempler som viste hvordan man kunne finne vendepunkt og/eller vendetangent til en funksjon. Her hadde Sinus R1 kun ett eksempel mot Sigma R1 sine 5 og Matematikk R1 sine 2 eksempler. Det som imidlertid er verdt å nevne er at Sinus R1 hadde hele fire eksempler som gikk ut på å finne tangentlikning for et gitt punkt på funksjonen (altså ikke i vendepunktet). Matematikk R1 og Sigma R1 hadde ingen eksempler om tangentlikning for et gitt punkt.

- Type algebra

Tabell 4.5 viser en oversikt over hvilken type algebra alle eksemplene inneholdt.

Tabell 4.5
Oversikt over hvilken type algebra hver lærebok innehold for funksjoner.

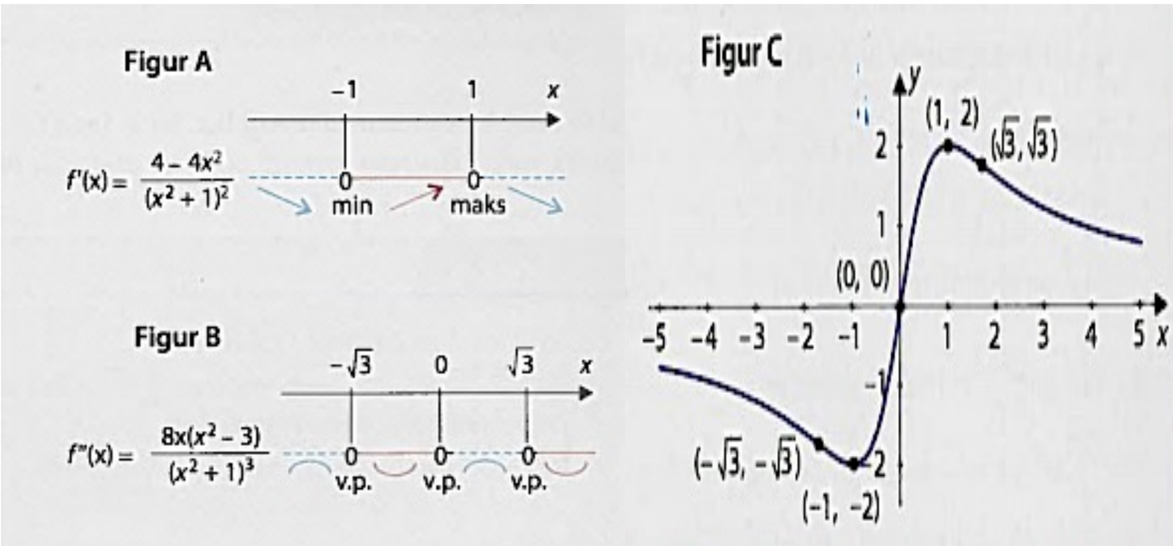
	Sigma R1	Matematikk R1	Sinus R1
Type 1	0	1	1
Type 2	7	5	5
Type 3	60	48	60
Type 4	0	2	5

Som tabell 4.5 viser var algebratypen som dominerte for alle tre lærebøkene type 3. Dette er ikke veldig overraskende, da jeg valgte å kategorisere oppgaver som omhandlet funksjoner og derivasjon som denne typen. Det er heller ikke de store ulikhetene mellom lærebøkene. Alle hadde definitivt flest eksempler med den tredje typen, mens de tre andre typene var det ganske jevnt mellom. Type 1 oppstod i færrest eksempler.

- Representasjoner

For disse eksemplene var den representasjonen som alle lærebøkene hadde flest av grafer av funksjoner. Dette gjaldt både funksjoner og deres eventuelle asymptoter, funksjoner og deres vendepunkter og vendetangenter, og grafer som viste funksjonen etter at ekstremalpunkter var funnet og markert.

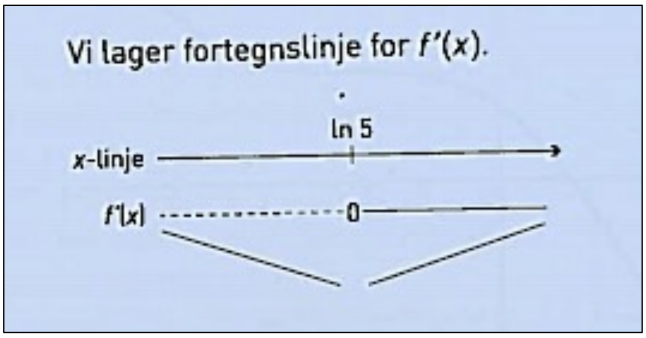
En representasjon som også fantes i en del eksempler var fortegnslinjer, men denne gangen i sammenheng med bestemmelse av ekstremalpunkter og vendepunkter. Jeg har allerede vist hvordan de ulike bøkene presenterer fortegnslinjene sine ulikt. Det jeg i tillegg ønsker å vise er hvordan lærebøkene kombinerer fortegnslinjene med forståelsen av ekstremalpunkter og/eller vendepunkter. Jeg starter med Sigma R1 sin presentasjon i figur 4.15.



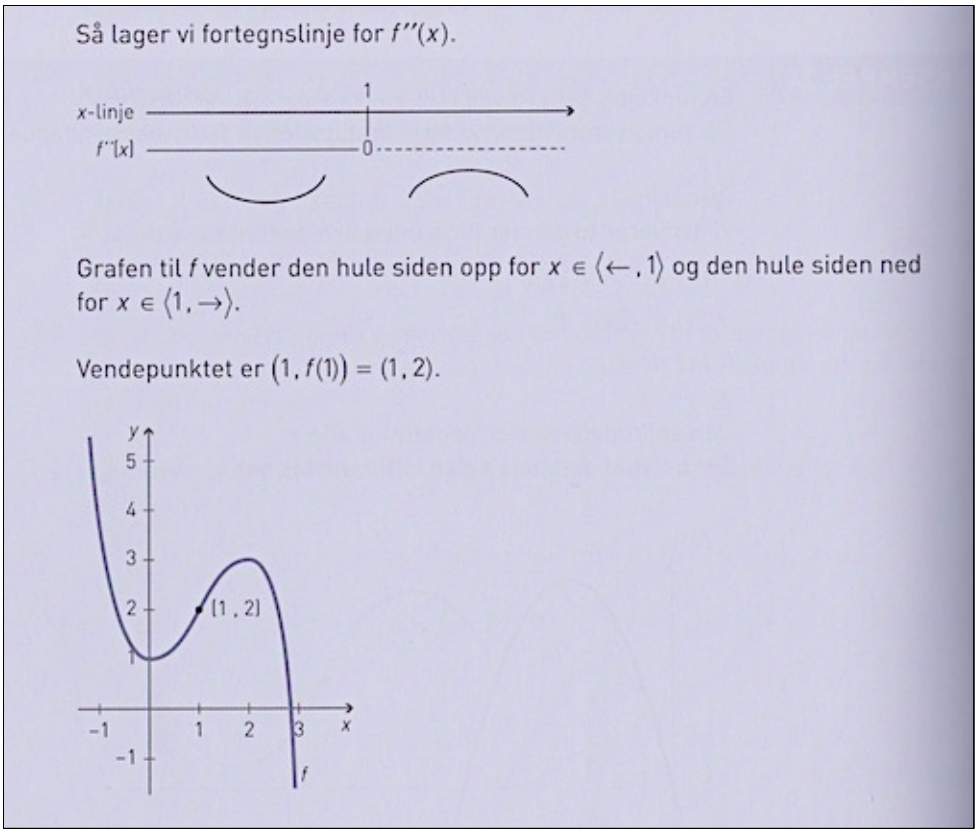
Figur 4.15: Viser hvordan Sigma R1 presenterer fortegnslinje for ekstremalpunkter og vendepunkter. Hentet fra Øgrim et al. (2012).

Som figur 4.15 viser ble fortegnslinjene i Sigma R1 representert med piler som av gjorde om funksjonen økte aller sank for å finne ekstremalpunktene, og bue som krummet opp eller ned for å avgjøre hvilken vei krumningen skulle gå. Sigma R1 har også valgt å farge pilen som peker oppover (voksende) og krumningen med hul side opp (smilemunn) i røde farger, mens de motsatte har fått blå farge. For hver fortegnlinje har Sigma R1 også valgt å vise grafen til funksjonen i eksemplet for å illustrere dette.

Figur 4.16 og figur 4.17 viser hvordan fortegnslinjene til henholdsvis ekstremalpunktene og vendepunktene ble representert for Matematikk R1.



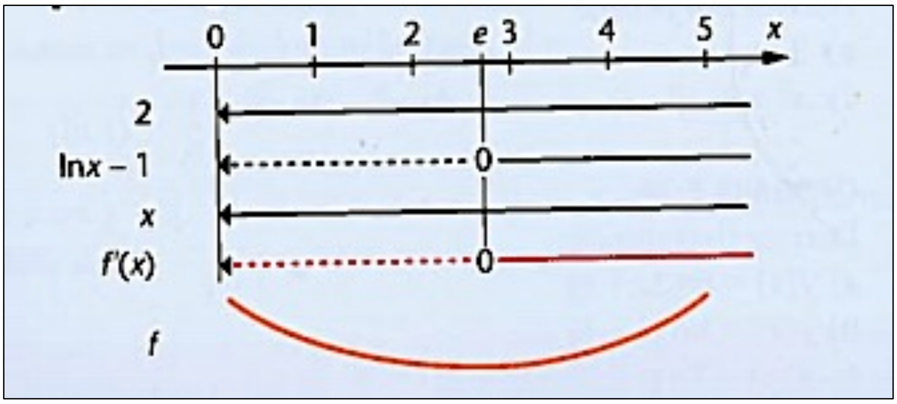
Figur 4.16: Viser fortegnelsene for å finne ekstremalpunkt. Hentet fra Heir et al. (2015).



Figur 4.17: Viser fortegnslinje for å finne funksjonens krumning og vendepunkt. Hentet fra Heir et al. (2015)

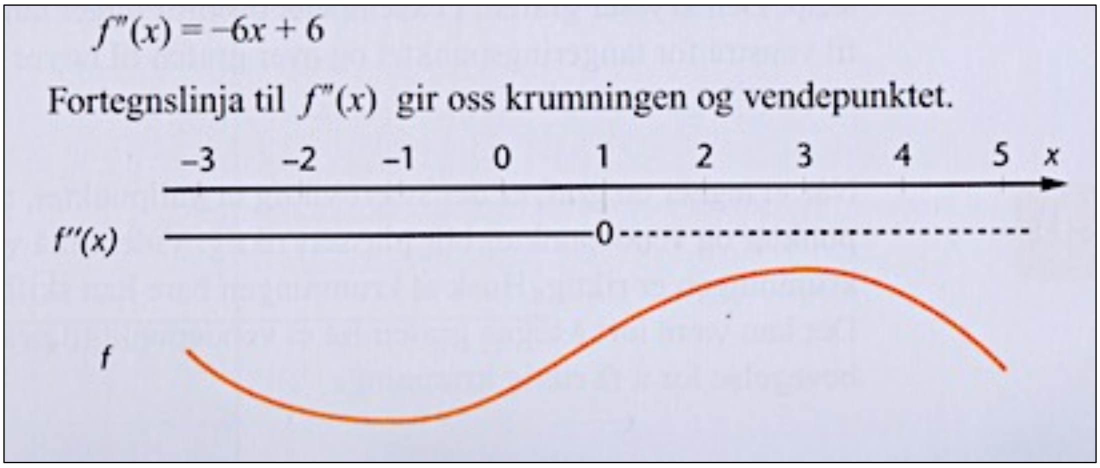
Figur 4.16 viser at funksjonen synker helt til x = ln 5, før den da begynner å vokse. Dette er markert med skrå linjer enten nedover eller oppover for å illustrere om funksjonen synker eller vokser. Figur 4.17 viser hvordan Matematikk R1 velger å presentere fortegnslinjer i sammenheng med funksjonens krumninger. Eksemplet viser at funksjonen krummer oppover (smilemunn) før x = 1 og at den krummer nedover etter x=1. Funksjonens vendepunkt finner man i punktet (1, f(1)).

Figur 4.18 viser hvordan Sinus R1 velger å presentere fortegnslinjer til ekstremalpunkter.



Figur 4.18: Viser fortegnslinje i sammenheng med å finne ekstremalpunkt. Hentet fra Oldervoll et al. (2013)

Figuren viser at Sinus R1 tegner en bue, som synker hvor f´(x) synker, når bunnpunktet i x = e og vokser der hvor fortegnslinjen også viser at f´(x) er positiv. Sinus R1 har i større grad markert hvor bunnpunktet befinner seg med en illusjon av selve grafen. Figur 4.19 viser hvordan Sinus R1 har valgt presentere fortegnslinje i sammenheng med krumning.



Figur 4.19: Viser fortegnslinje i sammenheng med å finne krumning og vendepunkt. Hentet fra Oldervoll et al. (2013)

Figuren viser at Sinus R1 velger i større grad å skissere hvordan funksjonen oppfører seg rundt vendepunktet ved at de to krumningene faktisk møtes i vendepunktet og at det ikke vises med brudd, slik de to andre hadde.

- Ikke fullførte eksempler

Alle eksemplene ble fullført.

- Kontekst

Matematikk R1 og Sinus R1 har like mange eksempler knyttet til kontekst med 5 eksempler, men det er likevel Sigma R1 som har aller flest eksempler med 14 eksempler.

- Grafiske bilder

Også for eksempler med grafiske bilder, er det Sigma R1 som har flest eksempler med 9 eksempler. Her er alle eksemplene med grafiske bilder knyttet til kontekst. Som for *algebra*, har Matematikk R1 heller ikke her noen grafiske bilder, mens Sinus R1 har 2 eksempler. For Sinus R1 er også disse to eksemplene knyttet til to av eksemplene med kontekst.

- Flere enn én løsningsmetode

Sigma R1 har ett eksempel hvor det ble vist to løsningsmetoder. Her skulle man finne den deriverte både ved digitalt hjelpemiddel og med definisjonen av den deriverte. Matematikk R1 var læreboka med flest eksempler med flere løsningsmetoder. De aller fleste her var likevel eksempler hvor grafen enten ble tegnet for hånd ved hjelp av tabeller eller digitale verktøy. Sinus R1 hadde i likhet med Sigma R1 kun ett eksempel som viste flere løsningsmetoder. Også dette eksemplet skilte mellom å tegne grafen forhånd eller ved hjelp av digitalt hjelpemiddel.

4.2.1.2 Fremstilling av teori

Som for presentasjonene av lærebøkenes eksempler, velger jeg her også å dele de i algebra og funksjoner, for å se resultatene for hver del. Tilslutt vil jeg legge de sammen, for å se lærebøkene som helhet.

4.2.1.2.1 Kvantitativ presentasjon av lærebøkenes fremstilling av teori.

Jeg velger å starte med *algebra*. Tabell 4.6 viser hvordan lærebøkene har valgt å legge fram teoridelene i hver lærebok med utgangspunkt i rammeverkene til Thompson et al. (2012) og Otten et al. (2014).

Tabell 4.6
Oversikt over fordeling av teori som deduktiv begrunnelse, empirisk begrunnelse, ingen begrunnelse og ikke fullført i alle lærebøkene for algebra.

Algebra	Sigma R1		Matematikk R1		Sinus R1	
	#	%	#	%	#	%
Deduktiv begrunnelse	7	21,88 %	12	27,90 %	16	35,56 %
Empirisk begrunnelse	13	40,63 %	12	27,90 %	25	55,56 %
Ingen begrunnelse	12	37,50 %	14	32,56 %	4	8,8 %
Ikke fullført	0	0 %	5	11,63 %	0	0 %

Resultatene viser at Sinus R1 er den læreboka som har flest tilfeller og størst prosentandel der teori framstilles med deduktiv begrunnelse med en prosentandel på 35,56 %. Matematikk R1 har 27,9 % tilfeller, mens Sigma R1 har 21,88 % slike tilfeller. Sinus R1 har også flest tilfeller og prosentandel hvor teorien framstilles med empirisk begrunnelse, med rundt det dobbelte antallet av tilfellene både Sigma R1 og Matematikk R1 har. Når det gjelder tilfeller hvor teori presenteres uten noen begrunnelse, er det Matematikk R1 som har flest med 14, mens Sigma R1 har 12. Sigma R1 har likevel den høyeste prosentandelen for ingen begrunnelsen med 37,5% mot Matematikk R1 sine 32,56 %. Sinus R1 har for denne typen framstilling det laveste antallet tilfeller med 4. Tilslutt for teori som ikke er fullført har jeg identifisert 5 slike tilfeller for Matematikk R1, mens Sigma R1 og Sinus R1 ikke hadde noen.

Fra tabell 4.6 ser man at Sinus R1 skiller seg fra de to andre ved at det for den fokuseres mer på begrunnelser, både deduktiv og empirisk, enn det Sigma R1 og Matematikk R1 gjør. Matematikk R1 og Sigma R1 hadde også flere tilfeller hvor teori ble presentert uten noen begrunnelse, hvor Sinus R1 hadde relativt få hendelser. Tilslutt var det kun Matematikk R1 som hadde tilfeller hvor tilfellene ikke ble fullført.

Ved å se på hver lærebok separat ser man at både Sigma R1 og Sinus R1 hadde flest tilfeller med *empirisk begrunnelse* for hver sin bok. Sigma R1 hadde så nest-flest tilfeller med *ingen begrunnelse*, mens Sinus R1 hadde nest-flest tilfeller av *deduktiv begrunnelse*. Her igjen viser det at Sinus R1 fokuserer på at det skal ligge en begrunnelse bak det matematiske innholdet de presenterer. Deretter fulgte *deduktiv begrunnelse* for Sigma R1 og *ingen begrunnelse* for Sinus R1. Ingen av disse hadde deler som ikke ble fullført. Mens Både Sigma R1 og Sinus R1 hadde flest tilfeller av *empirisk begrunnelse,* hadde Matematikk R1 flest av *ingen begrunnelse,* mens *deduktiv begrunnelse* og *empirisk begrunnelse* fulgte etter med like mange tilfeller. Matematikk R1 var også eneste læreboka med deler klassifisert som *ikke fullført.*

For *funksjoner* vises resultatene i tabell 4.7.

Tabell 4.7
Oversikt over fordeling av teori som deduktiv begrunnelse, empirisk begrunnelse, ingen begrunnelse og ikke fullført i alle lærebøkene for funksjoner.

Funksjoner	Sigma R1		Matematikk R1		Sinus R1	
	#	%	#	%	#	%
Deduktiv begrunnelse	9	37,5 %	15	34,88 %	18	37,5 %
Empirisk begrunnelse	11	45,83 %	11	25,58 %	24	50,0 %
Ingen begrunnelse	4	16,67 %	10	23,25 %	6	12,5 %
Ikke fullført	0	0 %	7	16,28 %	0	0 %

Tabell 4.7 viser at Sinus R1 fortsatt har flest tilfeller og høyest prosentandel med deduktiv begrunnelse, mens Sigma R1 har færrest tilfeller. Selv om Sigma R1 har færrest tilfeller, er det Matematikk R1 som har den laveste andelen for deduktiv begrunnelse. Sinus R1 har fortsatt flest tilfeller og størst prosentandel av empirisk begrunnelse*,* over dobbelt så mange tilfeller som både Sigma R1 og Matematikk R1. For tilfeller hvor teorien blir framstilt uten begrunnelse, er det Sigma R1 som har færrest tilfeller, selv om Sinus R1 har lavere andel. Matematikk R1 fortsatt har flest tilfeller. For teori som ikke er fullført er det fortsatt kun Matematikk R1 som har dette.

Ved å se på hver lærebok separat, viser resultatene at Sigma R1 har flest tilfeller av *empirisk begrunnelse* i sin teoridel innad i sin bok, mens *ingen begrunnelse* opptrer færrest, foruten om *ikke fullført.* Sigma R1 fokuserer her mest på begrunnelser, både deduktivt og empirisk. Dette er til forskjell fra *algebra* hvor *ingen begrunnelse* oppstod hyppigere og deduktive begrunnelser færre ganger. Matematikk R1 har her flest tilfeller med deduktiv begrunnelse. Tilfellene med *empirisk* og *ingen begrunnelse* er ganske jevne, og oppstår noe oftere enn de *ikke fullførte* tilfellene. Når det gjelder Sinus R1 har denne læreboka flest tilfeller med empirisk begrunnelser for sin bok. Deretter følger deduktiv begrunnelse. Sinus R1 har ingen tilfeller som ikke blir fullført, mens tilfeller hvor teori legges fram uten begrunnelse kun opptrer 4 ganger. Disse resultatene for Sinus R1 gir samme indikasjon som resultatene for *algebra* gjorde, at Sinus R1 er opptatt av å begrunne deres fremstillinger.

Siden det kun var Sinus R1 som hadde samme tendenser for både algebra og funksjoner, velger jeg å legge resultatene for alle områdene for alle lærebøkene sammen, for å få en mer helhetlig oversikt over hver lærebok. Dette vises i tabell 4.8

Tabell 4.8
Oversikt over fordeling av teori som deduktiv begrunnelse, empirisk begrunnelse, ingen begrunnelse og ikke fullført i alle lærebøkene for både algebra og funksjoner.

	Sigma R1		Matematikk R1		Sinus R1	
	#	%	#	%	#	%
Deduktiv begrunnelse	16	28,57 %	27	31,40 %	34	36,56 %
Empirisk begrunnelse	24	42,86 %	23	26,74 %	49	52,69 %
Ingen begrunnelse	16	28,57 %	24	27,9 %	10	10,8 %
Ikke fullført	0	0 %	12	13,95 %	0	0 %

Resultatene viser at når resultatene legges sammen, er det Sinus R1 som har flest tilfeller og størst prosentandel av deduktiv begrunnelse, før henholdsvis Matematikk R1 og Sigma R1. For empirisk begrunnelse er det også Sinus R1 som har flest tilfeller og størst prosentandel, før Sigma R1 og Matematikk R1. Sinus R1 er da, ikke overraskende, den læreboka med flest tilfeller hvor teorien fremstilles med begrunnelser, og dette er både deduktive og empiriske begrunnelser. Når det gjelder antall tilfeller hvor teori framstilles uten noen begrunnelse, er det Sigma R1 som har størst prosentandel, før henholdsvis Matematikk R1 og Sinus R1, men Matematikk R1 er læreboka med flest tilfeller. Ser at både Sinus R1 og Sigma R1 har flest tilfeller av empirisk begrunnelse for hver sin bok, men at forskjellen ligger i at Sigma R1 har like mange tilfeller av deduktiv begrunnelse og ingen begrunnelse, mens Sinus R1 har betydeligere flere tilfeller av førstnevnte enn sistnevnte. Tilfeller som ikke er fullført, er kun blitt identifisert i Matematikk R1.

4.2.1.2.2 Kvalitativ presentasjon av lærebøkenes fremstilling av teori.

For å forklare hva som ligger bak de kvantitative resultatene, velger jeg å presentere kvalitative resultater fra lærebøkenes teorifremstilling. Jeg kommer til å forklare for hver presentasjon hvorfor de ble klassifisert som det ble.

Den første fremstillinga jeg ønsker å presentere nærmere en del som jeg har klassifisert som deduktiv begrunnelse. Denne vises i figur 4.20.

Hvis $P(x)$ er et polynom slik at $P(x_0) = 0$, går divisjonen $P(x) : (x - x_0)$ opp. Dermed fins det et polynom $Q(x)$ slik at $P(x) : (x - x_0) = Q(x)$. Da er $P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x)$, og $(x - x_0)$ er en faktor i $P(x)$.

Og omvendt: Hvis $(x - x_0)$ er en faktor i $P(x)$, så fins det et polynom $Q(x)$ slik at $P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x)$. Da er

$$P(x_0) = (x_0 - x_0) \cdot Q(x_0) = 0 \cdot Q(x_0) = 0$$

Vi har vist denne regelen:

La $P(x)$ være er et polynom.

$$P(x) \text{ har faktoren } (x - x_0) \Leftrightarrow P(x_0) = 0$$

Figur 4.20: Viser deduktiv begrunnelse. Hentet fra Oldervoll et al. (2013).

Figuren viser ekvivalensen mellom hvis polynomet P(x) har faktoren (x - x_0) så er dette ekvivalent med at P(x_0)=0. Utledningen fram til den endelige ekvivalensen blir gjort helt generelt uten noen spesifikke verdier som hjelp. Denne utledningen vil gjelde for enhver verdi av x_0. Utledningen viser logiske argumenter som støtter den matematiske påstanden ekvivalensen viser. På bakgrunn av dette ble denne utledningen klassifisert som *deduktiv begrunnelse*

Den andre fremstillingen jeg ønsker å presentere er en empirisk begrunnelse. Denne vises i figur 4.21.

Vi setter $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Vi dividerer ut $f(x) : (x - 3)$ og får

$$f(x) : (x - 3) = x - 2, \qquad \text{dvs.} \qquad f(x) = (x - 2)(x - 3)$$

Siden divisjonen $f(x) : (x - 3)$ gikk opp, ser vi at $(x - 3)$ er en faktor i polynomet $f(x)$. Da må $f(x) = 0$ når $x - 3 = 0$, det vil si når $x = 3$. Dette illustrerer nullpunktssetningen for polynomer. At $f(x) : (x - a)$ går opp, vil si at $(x - a)$ er en faktor i $f(x)$. Da blir $f(x) = 0$ når $x - a = 0$, det vil si når $x = a$.

NULLPUNKTSSETNINGEN

For et polynom, $f(x)$, har vi denne nullpunktssetningen:

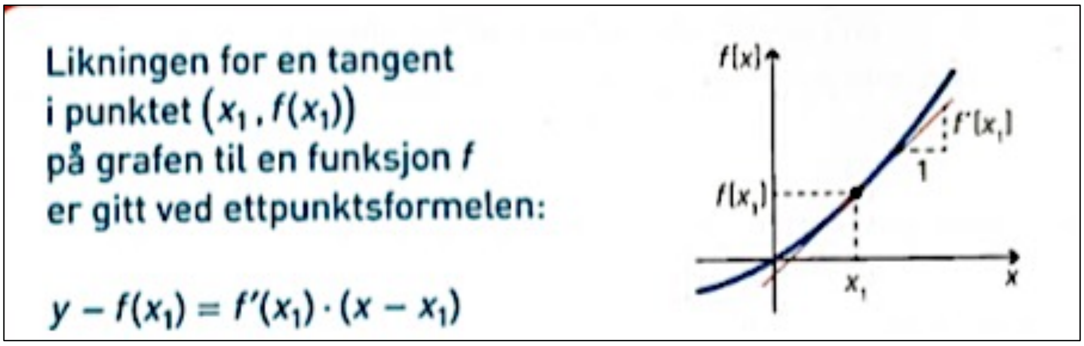
$$f(x) = 0 \text{ der } x = a$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x) : (x - a) \text{ går opp}$$

Figur 4.21: Empirisk begrunnelse for nullpunktsetningen. Hentet fra Øgrim et al. (2012)

Figuren viser en utledning for nesten det samme som for den deduktive begrunnelsen i figur 4.20. Forskjellen er at Sinus R1 sier at (x - x_0) er en faktor i polynomet P(x) hvis og bare hvis

$P(x_0) = 0$, mens Sigma R1 skriver at polynomet f(x) dividert på (x-a) *går opp* hvis og bare hvis f(x) = 0 der x = a. Ser man i midlertid på teksten i figur 4.21 har står det at "siden f(x) : (x-3) gikk opp, ser vi at (x-3) er en *faktor* i polynomet f(x)". Jeg valgte å ta med utledninger for det noe som var likt for å vise hvordan lærebøkenes begrunnelser gjenspeiler seg i utledningene. For figur 4.21 er dette en empirisk begrunnelse. Her tar utledningen utgangspunkt i et spesifikt polynom, $f(x) = x^2 - 5x + 6$, for å vise hvordan dens faktor, (x - 3), gjør at divisjonen f(x) : (x 3) går opp.

Den tredje framstillingen jeg kommer til å vise, er en som viser *ingen begrunnelse.* Dette vises i figur 4.22.

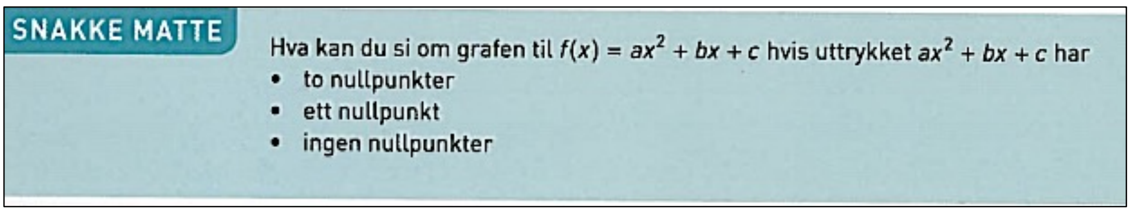

Likningen for en tangent i punktet $(x_1, f(x_1))$ på grafen til en funksjon f er gitt ved ettpunktsformelen:

$$y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

Figur 4.22: Ingen begrunnelse. Hentet fra Heir et al. (2015)

Figur 4.22 viser teori som presenteres uten noe form for begrunnelse. Regelen blir rett og slett bare skrevet ned. De har også lagt ved en funksjon for å vise hvordan formelen er satt sammen, men på bakgrunn av at det må ligge en utledning bak, vil ikke funksjonen være nok til å eventuelt klassifisere denne teoridelen som med deduktiv begrunnelse.

Den siste fremstillingen er de som ikke blir fullført av forfatterne. Figur 4.23 viser en slik.


SNAKKE MATTE

Hva kan du si om grafen til $f(x) = ax^2 + bx + c$ hvis uttrykket $ax^2 + bx + c$ har
- to nullpunkter
- ett nullpunkt
- ingen nullpunkter

Figur 4.23: Viser ikke fullført. Hentet fra Heir et al. (2015)

Figur 4.23 viser hva jeg har klassifisert som ingen begrunnelse, og dette er fordi elevene blir bedt om å si noe om en vilkårlig andregradsfunksjon etter hvor mange nullpunkter den har. Det som er blitt presentert for elevene før denne er å faktorisere andregradsfunksjoner med nullpunktmetoden ($ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$). De har dermed ikke fått vist eller forklart hvordan disse nullpunktene påvirker funksjonen.

4.2.2 Hva som kreves av elevene

Jeg kommer her til å presentere resultatene om lærebøkenes oppgaver. Analyseringen ble gjort på bakgrunn av Lithner (2008) sitt rammeverk for imitativ og kreativ resonnering, og med analyseringsprosedyren inspirert av Bergqvist (2007) sin egen analyse basert på samme rammeverk. Andelen MR var veldig liten for alle lærebøkene, så jeg velger dermed å slå sammen MR og AR til *imitativ resonnering* (IR).Jeg kommer først til å presentere resultatene som IR mot CR, før jeg etter hvert deler de opp i IR, LCR og GCR. Tabell 4.9 viser hvor mange eksempler som er blitt analysert for hvert kapittel i hver lærebok.

Tabell 4.9

Viser oversikt over antall oppgaver analysert for hvert kapittel for hver lærebok.

Sigma R1		Matematikk R1		Sinus R1		Alle lærebøkene
Kap. 2	147	Kap. 1	287	Kap. 1	354	
Kap. 4	338	Kap. 2	320	Kap. 2	247	
Kap. 5	271	Kap. 3	225	Kap. 7	357	
Kap. 6	305	Kap. 4	362	Kap. 8	241	
Totalt	1061		1194		1199	3454

4.2.2.1 Fordeling mellom IR og CR

Jeg velger å først vise resultatene for *algebra* før jeg presenterer for *funksjoner*. Tabell 4.10 viser antall oppgaver klassifisert for algebrakapitlene som IR og CR, samt hvilke prosentandeler dette gir for hver lærebok.

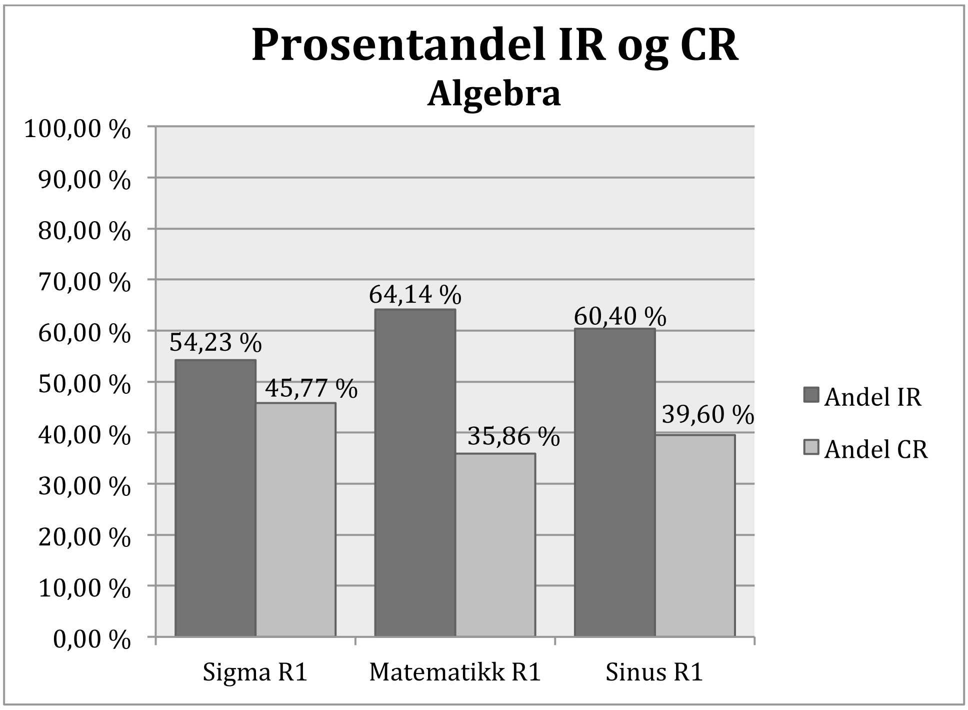
Tabell 4.10

Viser hvordan fordelingen mellom IR og CR har fordelt seg for algebrakapitlene.

Algebra	Antall oppgaver IR	Antall oppgaver CR	Totalt # oppgaver	Andel IR	Andel CR
Sigma R1	263	222	485	54,23 %	45, 77 %
Matematikk R1	390	218	608	64,14 %	35,86 %
Sinus R1	363	238	601	60,40 %	39,60 %

Ser fra tabellen at Sigma R1 har det laveste antall oppgaver med 485 oppgaver, og skiller seg ut fra Matematikk R1 og Sinus R1 som har jevnt totalt antall oppgaver med hverandre. Selv om Matematikk R1 totalt har flest antall oppgaver, og godt over 100 oppgaver flere enn det Sigma R1 har, har Sigma R1 likevel flere oppgaver enn Matematikk R1 som krever CR av elevene for å løse oppgavene. Dette gir Matematikk R1 en betydelig lavere prosentandel for CR enn det Sigma R1 har, med 35,75 % mot Sigma R1 sine 45,77 %. Sinus R1 har nesten like mange totale oppgaver som det Matematikk R1 har, men har noe flere oppgaver som krever CR enn Matematikk R1 har, noe som også gir en høyere prosentandel av oppgaver som krever CR hos Sinus R1.

Figur 4.24 viser hvordan resonneringstypene IR og CR fordeler seg prosentvis mellom hver av de tre lærebøkene. Denne fremstillingen baseres på resultatene presentert i tabell 4.10.



Figur 4.24: Oversikt over prosentandeler av IR og CR for *algebra* for alle lærebøkene.

Ser her at Matematikk R1 har den laveste prosentandelen hvor oppgavene krever CR. Som en direkte konsekvens av det, er Matematikk R1 også den læreboka som inneholder den høyeste prosentandelen oppgaver der krever IR. Som antydet fra tabell 4.10 har Sigma R1 en høyere prosentandel med oppgaver som krever CR enn de to andre. Sigma R1 er også den læreboka med jevnest fordeling mellom oppgaver som krever IR og CR, med henholdsvis 54,23 % og 45,77 %. Resultatene viser at oppgavene fra Sinus R1 legger seg mellom Sigma R1 og

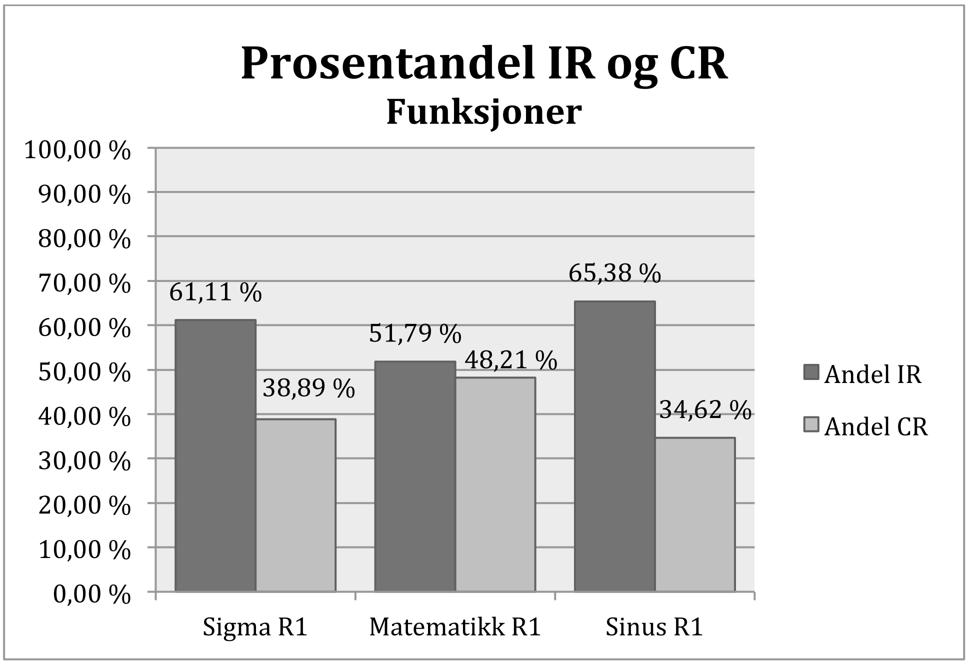
Matematikk R1 for både oppgaver der krever IR og CR. For området *algebra* er det dermed Matematikk R1 som har den laveste prosentandelen CR, mens Sigma R1 har den høyeste prosentandelen CR. Figur 4.24 viser at alle tre lærebøkene inneholder størst prosentandel som krever IR av elevene.

For oppgavene som hører under *funksjoner*, viser tabell 4.11 disse resultatene.

Tabell 4.11
Viser hvordan fordelingen mellom IR og CR har fordelt seg for funksjonskapitlene.

Funksjoner	Antall oppgaver IR	Antall oppgaver CR	Totalt # oppgaver	Andel IR	Andel CR
Sigma R1	352	224	576	61,11 %	38,89 %
Matematikk R1	304	283	587	51,79 %	48,21 %
Sinus R1	391	207	598	65,38 %	34,62 %

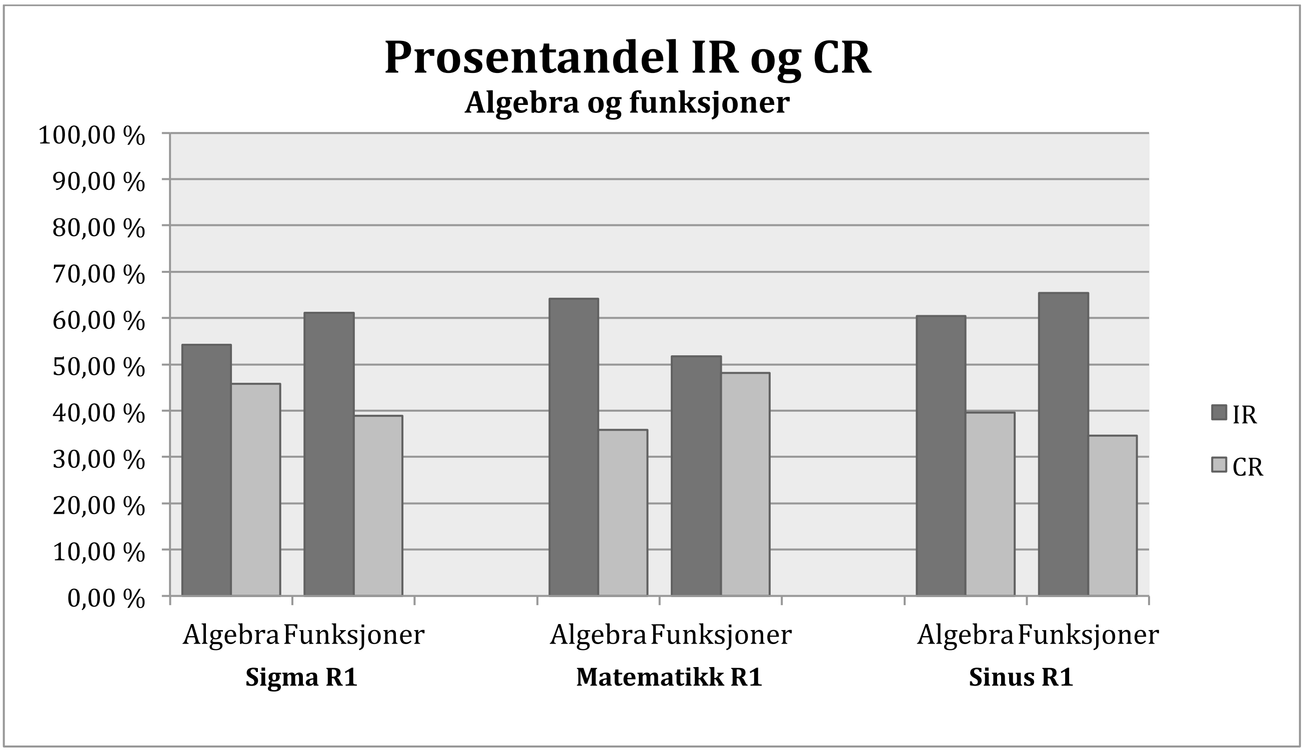
Totalt antall oppgaver er ganske jevne for alle tre lærebøkene. Det skiller 22 oppgaver fra Sinus R1 som har flest oppgaver, til Sigma R1 som har færrest antall oppgaver. Ved å se på figur 4.25, kan en se hvordan andelene CR og IR har fordelt seg prosentvis mellom lærebøkene.



Figur 4.25: Oversikt over prosentandelene av IR og CR for *funksjoner* for alle lærebøkene.

Figur 4.25 viser at for *funksjoner* er Matematikk R1 den læreboka hvor oppgavene er jevnest fordelt mellom kravet om IR eller CR, med henholdsvis 51,79 % og 48,21 %. Sigma R1 har klart større utslag med større prosentandel oppgaver som krever IR enn CR enn det Matematikk R1 har. Den største forskjellen hadde imidlertid Sinus R1, hvor oppgavene der krever IR dominerer med 65,38 % av lærebokas totale antall oppgaver for funksjoner.

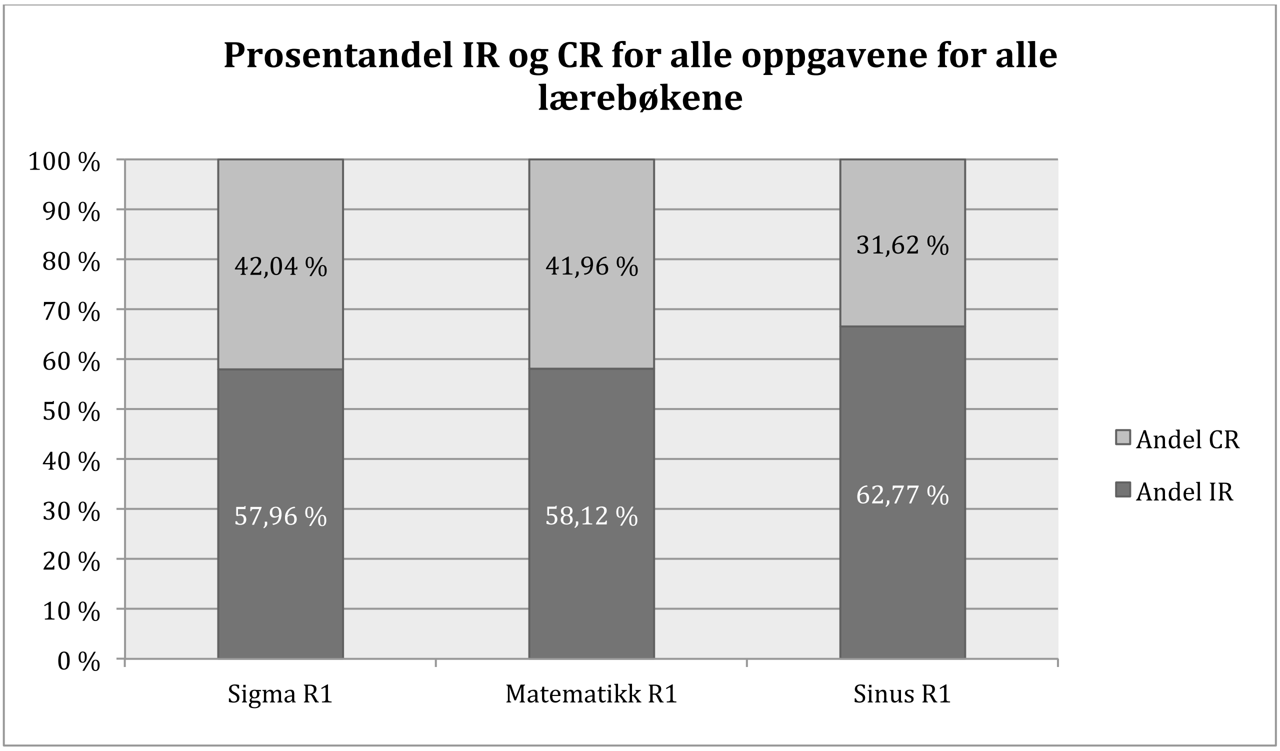
For å kunne se hvordan prosentandelen for hver resonneringstype varierer for hver lærebok for hvert område har jeg valgt å legge resultatene fra figur 4.24 og figur 4.25, sammen slik at resultatene for både algebra og funksjoner for hver lærebok blir mer synlig. Resultatene vises i figur 4.26.



Figur 4.26: Oversikt over prosentandelene av IR og CR for både *algebra* og *funksjoner* for alle lærebøkene.

Ser at for både algebra og funksjoner i alle lærebøkene, er det IR som er den dominerende resonneringstypen oppgavene krever. Den største variasjonen er det Matematikk R1 som har, som for algebra-oppgavene hadde den største andelen IR, til å ha den minste andelen IR for oppgavene tilhørende *funksjoner*. For de to resterende lærebøkene, Sigma R1 og Sinus R1, ser en at det er oppgavene tilhørende algebra som har hatt prosentandeler for IR og CR som er nærmere hverandre enn de er for funksjoner. Dermed hadde Matematikk R1 en motsatt tendens for hvilken resonneringstype oppgavene krevde, enn det Sigma R1 og Sinus R1 hadde.

For en oppsummering på fordelingen av IR og CR velger jeg tilslutt å legge sammen resultatene for algebra og funksjoner, slik at forskjellene lærebøkene mellom vises enda tydeligere. Dette vises i figur 4.27.



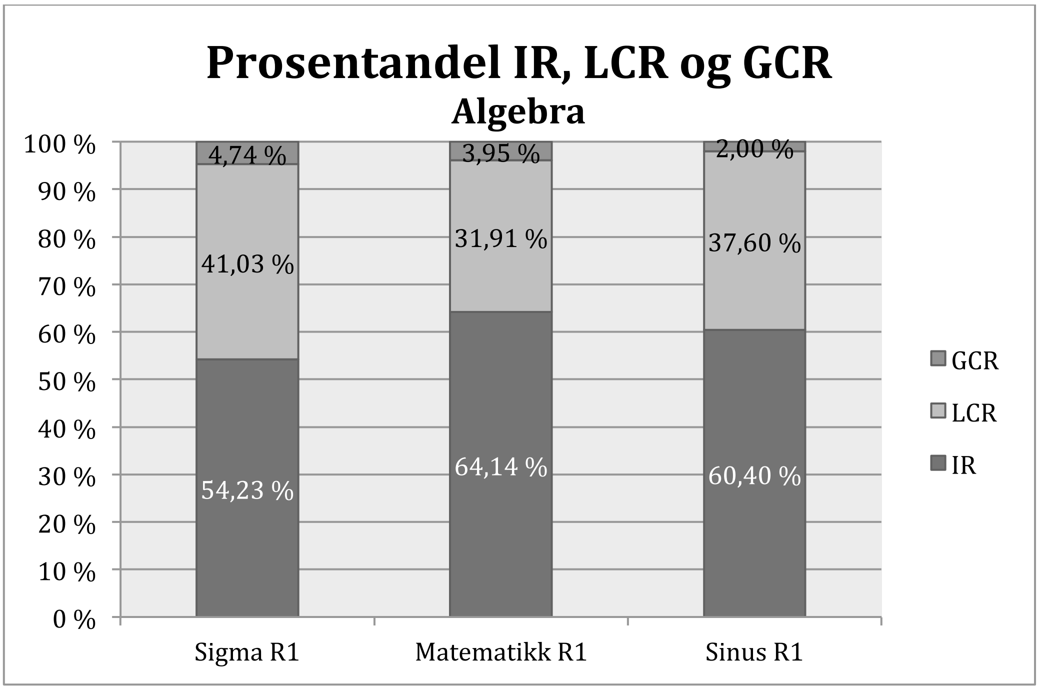
Figur 4.27: Oversikt over prosentandelene av IR og CR samlet for alle lærebøkene

Figur 4.27 viser at Sigma R1 og Matematikk R1 har jevne sammenlagt resultater. Selv om Matematikk R1 hadde veldig varierende resultater for hvert av områdene algebra og funksjoner, viser resultatene at det overordnede resultater er noen lunde likt Sigma R1 sitt resultat. Sigma R1 er likevel den læreboka med størst andel oppgaver som krever kreativ resonnering med 42,04 % av oppgavene. Matematikk R1 hadde 41,96 %, mens Sinus R1 hadde klart den laveste andelen oppgaver der krever CR med 31,62 %. Altså rundt 10 % lavere enn de andre lærebøkene.

4.2.2.2 Fordelingen mellom IR, LCR og GCR

Jeg har til nå kun sett på fordelingen mellom andelen oppgaver som krever IR og CR som resonneringstype. Jeg velger i tillegg å presentere resultatene hvor jeg splitter CR i lokal kreativ resonnering (LCR) og global kreativ resonnering (GCR). Disse resultatene er med på å belyse de resultatene som ble presentert for fordelingen mellom IR og CR, ved å se hvor stor del av CR-andelene som var oppgaver der krevde LCR og GCR. Det som uansett er felles mellom LCR og GCR er at de begge er en form for kreativ resonnering, men i varierende grad.

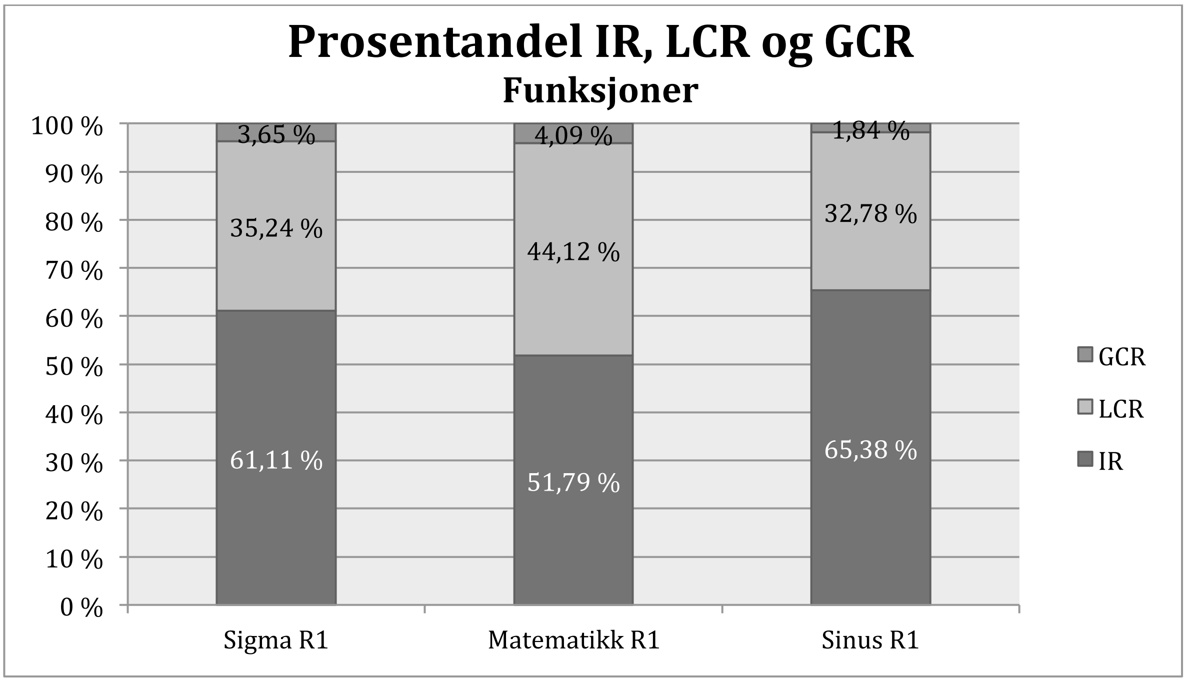
Igjen så presenterer jeg resultatene for *algebra* først. Figur 4.28 viser hvordan andelene for IR, LCR og GCR har fordelt seg mellom de tre lærebøkene.



Figur 4.28: Oversikt over prosentandeler av IR, LCR og GCR for *algebra* for alle lærebøkene.

Det interessante her, i forhold til fremstillingen mellom IR og CR, er å se hvor stor del av det som ble kategorisert CR egentlig er LCR og GCR. Prosentandelen for IR er selvfølgelig den samme som den var for presentasjonen mellom IR og CR. Figur 4.28 viser tydelig at de oppgavene som krevde CR domineres av LCR. Sigma R1, som hadde den høyeste andelen CR, har også den høyeste andelen både av LCR og GCR, med henholdsvis 41,03 % og 4,74%. Matematikk R1 som hadde den laveste andelen CR, har her også den laveste andelen av LCR med 31,96 %, men til gjengjeld er ikke andelen GCR den laveste mellom lærebøkene. Matematikk R1 sin andel GCR er høyere enn andelen GCR til Sinus R1, med 3,95 % mot 2,00 %. Sigma hadde andel GCR på 4,74%

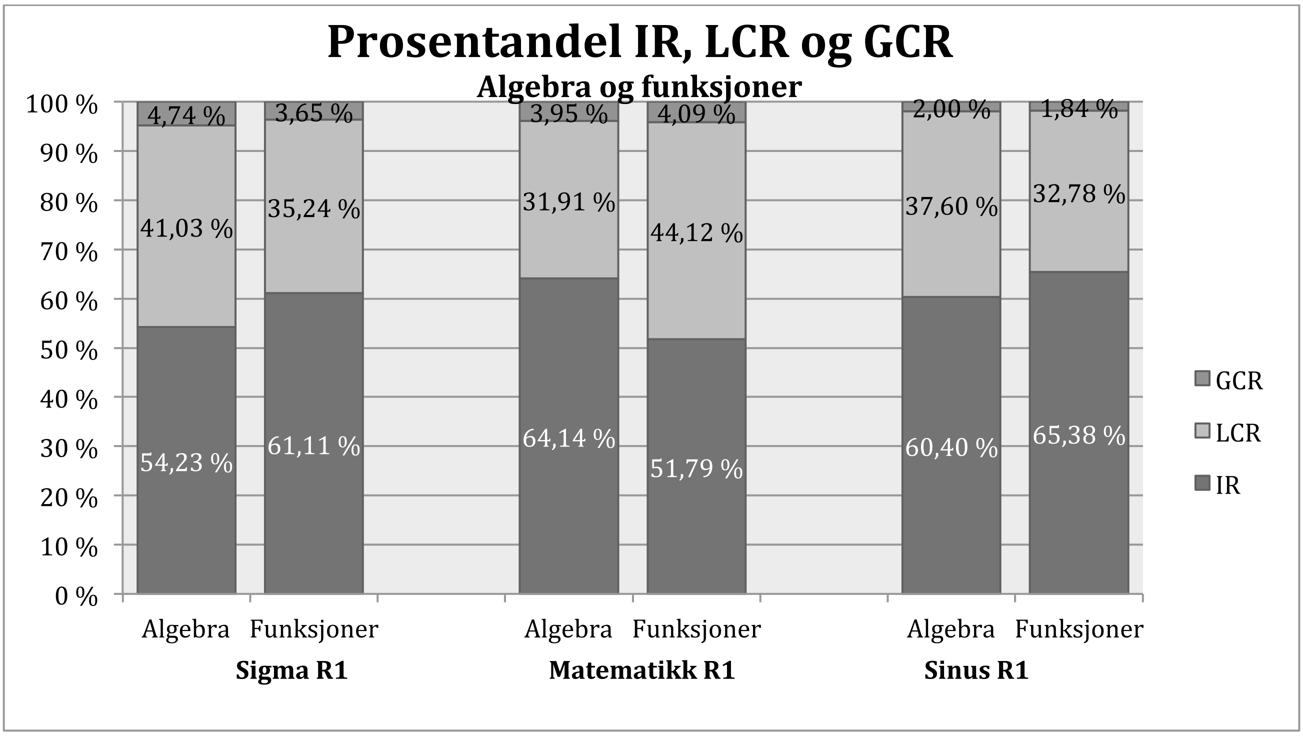
Skal nå se samme presentasjon, men for *funksjoner*. Figur 4.29 viser andelene for IR, LCR og GCR har fordelt seg mellom lærebøkene for oppgavene tilhørende dette området.



Figur 4.29: Oversikt over prosentandeler av IR, LCR og GCR for *funksjoner* for alle lærebøkene.

Ser her at det er Matematikk R1 som har den største andelen CR, og både har den største prosentandelen LCR og GCR. Deretter følger Sigma R1, før Sinus R1 som har den laveste andelen CR av både LCR og GCR.

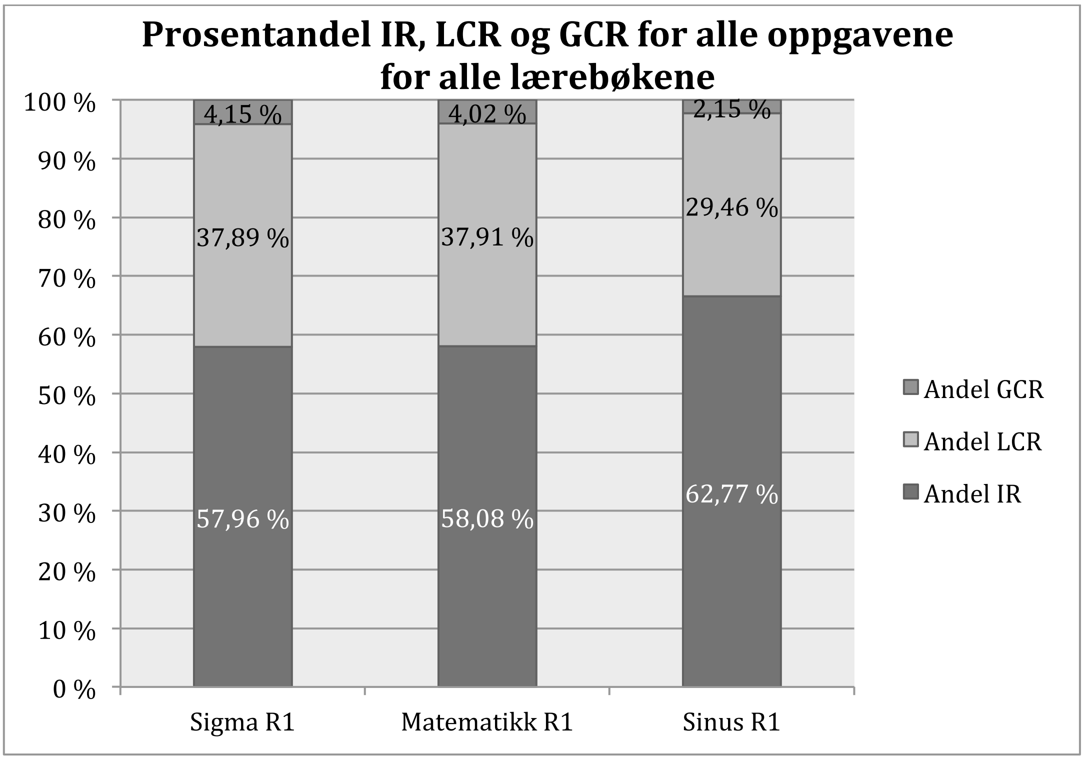
Som for presentasjonen mellom IR og CR, velger jeg også her å samle alle resultatene som viser prosentandel for IR, LCR og GCR Dette vises i figur 4.30.



Figur 4.30: Oversikt over prosentandelene av IR, LCR og GCR for både *algebra* og *funksjoner* for alle lærebøkene.

Ser at både Sigma R1 og Sinus R1 holder den samme tendensen, ved at de begge har lavere andel IR ved algebraoppgavene sammenlignet med funksjonsoppgavene. Når det gjelder LCR for de to nevnte lærebøkene, har begge en større en del LCR ved algebraoppgavene, enn ved funksjonsoppgavene. En siste felles bemerkelse er at for både Sigma R1 og Sinus R1 er det *algebra* som har den høyeste prosentandelen med GCR. Når det gjelder Matematikk R1, viser den helt motsatte resultater enn for Sigma R1 og Sinus R1. Her ser man en økende tendens for LCR-andelen fra algebra til funksjoner. Matematikk R1 er også eneste læreboka som har den høyeste andelen GCR for funksjoner. En siste, men viktig bemerkelse for Matematikk R1 er at den er den læreboka med den laveste andelen LCR for algebra blant alle lærebøkene, men også den høyeste andelen LCR for funksjoner.

Jeg velger også her å slå sammen områdene algebra og funksjoner, for å se på lærebøkene som helheter for de tre resonneringstypene. Resultatene vises i figur 4.31:



Figur 4.31: Oversikt over prosentandelene av IR, LCR og GCR samlet for alle lærebøkene

Siden IR-resultatene er det samme som figur 4.27, velger jeg å kun kommentere resultatene for LCR og GCR. Igjen har Sigma R1 og Matematikk R1 svært jevne resultater, og dette gjelder både for andelen LCR og GCR. For andelen LCR er det Matematikk R1 som har den største andelen LCR, men forskjellen til Sigma R1 er kun på 0,05%. Sigma R1 har til gjengjeld den største andelen GCR. Forskjellen mellom Sigma R1 og Matematikk R1 er også her liten med en prosentforskjell på 0,13 % i favør Sigma R1. Sinus R1 hadde både den laveste andelen LCR og GCR.

4.2.3 Sammenhenger

Den siste delen av den vertikale analysen, havner under det Charalambous et al. (2010) kaller for *sammenhenger*. Her kommer jeg til å presentere to ulike typer sammenhenger. Den ene er koblingen mot dagliglivet, mens den andre er koblingen til det elevene kan fra tidligere, enten det de har lært ved tidligere matematikktrinn eller ved noe de har lært tidligere i disse lærebøkene. For denne delen har jeg valgt å ikke ta med lærebøkenes oppgaver eller eksempler. Jeg kommer til å presentere dette både for algebra og funksjoner separert. Jeg starter med å presentere resultatene for *algebra* i tabell 4.12.

Tabell 4.12
Viser antall tilfeller funnet for kategorien sammenheng for alle lærebøkene i algebra.

Algebra	Sigma R1		Matematikk R1		Sinus R1	
	#	%	#	%	#	%
Dagliglivet	3	10 %	3	14,3 %	2	6,9 %
Lært ved tidligere årstrinn	10	33,33 %	8	38,1 %	12	41,38 %
Lært tidligere i læreboka	17	56,67 %	10	47,62 %	15	51,72 %

Tabell 4.12 viser at Sigma R1 har flest tilfeller og høyest prosentandel hvor matematikken som presenteres har sammenheng og kobles med noe de allerede har lært i samme lærebok. Deretter følger Sinus R1 og så Matematikk R1. For tilfeller som har sammenheng med matematikk de burde kunne fra tidligere årstrinn, er det Sinus R1 som har flest tilfeller og størst prosentandel. Tabellen viser at Sigma R1 har flere tilfeller enn det Matematikk R1 har, men Matematikk R1 har fortsatt den høyeste prosentandelen for denne kategorien. Matematikk R1 er dermed den læreboka som har færrest tilfeller hvor det er sammenhenger eller koblinger med tidligere lært matematikk. For koblinger til dagliglivet hadde Sigma R1 og Matematikk R1 tre tilfeller, mens Sinus R1 hadde to.

Resultatene for *funksjoner* vises i tabell 4.13.

Tabell 4.13
Viser antall tilfeller funnet for kategorien sammenheng for alle lærebøkene i funksjoner.

Funksjoner	Sigma R1		Matematikk R1		Sinus R1	
	#	%	#	%	#	%
Dagliglivet	0	0 %	1	11,11 %	0	0 %
Lært ved tidligere årstrinn	3	23,08 %	4	44,44 %	5	27,78 %
Lært tidligere i læreboka	10	76,92 %	4	44,44 %	13	72,22 %

For Sigma R1 og Sinus R1 er det oftest tilfeller av sammenhenger og koblinger mot det som tidligere er lært i læreboka. Matematikk R1 hadde like mange tilfeller av sammenhenger hvor matematikken var lært ved tidligere årstrinn og tidligere i læreboka.

5 Diskusjon

Jeg skal på bakgrunn av de presenterte resultatene og teorien se dette i sammenheng med problemstillingen. Jeg kommer til å diskutere rundt hvert forskningsspørsmål før jeg tar en endelig konklusjon for selve problemstillingen i neste kapittel.

5.1 Sammenligning av lærebøkenes struktur

Ved et helhetsinntrykk av presentasjonene og strukturen i de tre lærebøkene for *algebra*, vil jeg si at Sigma R1 og Sinus R1 har flest felles temaer med hverandre. Noen forskjeller er det, som for eksempel at Sigma R1 viser hvordan man kan løse polynomlikninger av høyere grad ved bruk av substitusjon, og i tillegg tar for seg irrasjonale likninger, mens Sinus R1 hadde med bevis for alle logaritmesetningene, noe Sigma R1 ikke hadde. Matematikk R1 hadde flere temaer som verken Sigma R1 eller Sinus R1 presenterte, noe som *kan* indikere at den hadde et større innhold av algebra enn de to andre. Temaer Matematikk R1 tok opp som ikke fantes i de andre, var blant annet å eksplisitt presentere likninger hvor man kan risikere å dividere med noe som kan være 0, og hva man da bør være oppmerksom på. Matematikk R1 var også eneste læreboka som så på sammenhengen mellom de briggske og de naturlige logaritmene, og ikke bare så på de hver for seg.

For *funksjoner* var det noe ulikt mønster fra hvert underområdet. For *grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet,* er det Sinus R1 som har færrest temaer, mens de for *asymptoter* har flest, fordi de har valgt å inkludere skrå asymptoter, noe Sigma R1 og Matematikk R1 ikke hadde valgt å gjøre, som kun valgt å ta med vertikale og horisontale asymptoter. Matematikk R1 hadde også her flest antall temaer, og hadde da blant annet presentasjon av verdimengde og definisjonsmengde som et unikt tema. Uten å gå for mye i detalj, så kan det se ut som at det er Matematikk R1 som tar opp flest temaer, og som også har flest unike temaer. Sinus har færrest unike temaer for funksjoner. Sigma R1 og Sinus R1 har omtrent like mange *unike* temaer, men dette er ikke like mange som det Matematikk R1 har.

Når det gjelder hvilken rekkefølge hver lærebok velger å presentere sitt innhold, fant jeg ingen klare trender eller mønstre som jeg kan diskutere videre. De trendene og mønstrene jeg fant, var i så fall for hvert underområde, og disse er blitt presentert for hver figur under punkt 4.1.1.

Når det gjelder forskningsspørsmålet "hvordan strukturerer lærebøkenes deres presentasjoner av ulike temaer?" vil svaret være at hvert underområde har sin egen struktur for hver lærebok. Det er altså ingen overordnet struktur hver enkel lærebok velger. Det som imidlertid kan sies om strukturen og hva de velger å presentere, er at det er Matematikk R1 som har flest unike presentasjoner, mens Sigma R1 og Sinus R1 har relativt jevnt antall unikt innhold.

5.2 Lærebøkenes eksempler

For de prosedyrene som ble gjennomgått flest ganger, var det Sinus R1 som hadde flest eksempler for nesten alle disse prosedyrene. Sigma R1 var læreboka med flest beviseksempler, og skilte seg også ut ved å ha flest eksempler man skulle sette inn verdier for x i den deriverte funksjonen, som ofte skulle tolkes i sammenheng med situasjoner fra dagliglivet. Dette henger nok sammen med at Sigma R1 også var læreboka hvor flest eksempler var knyttet til kontekst. Dette gjaldt både for algebra og funksjoner, noe som førte til at Sigma R1 også hadde flest grafiske bilder, da eksemplene med disse var for eksemplene med kontekst. Når det gjelder kontekst hadde Matematikk R1 ingen konteksteksempler for algebra, men fem for funksjoner. Sinus R1 hadde til sammen ett konteksteksempel mer enn Matematikk R1. Sigma R1 er dermed den læreboka hvor flest eksempler er knyttet til kontekst og grafiske bilder, samt læreboka med flest beviseksempler. Matematikk R1 er læreboka med færrest eksempler knyttet til kontekst og grafiske bilder, mens Sinus R1 er læreboka som inneholder flest eksempler av de prosedyrene som var vanligst.

Når det gjelder hvilken type algebra eksemplene inneholdt var det både for funksjoner og for algebra lite som skilte de tre lærebøkene. For *funksjoner* hadde alle tre helt klart flest tilfeller av type 3. Da denne algebratypen inneholder funksjoner, grenseverdi og derivasjon, var ikke dette overraskende. Sigma R1 hadde for *funksjoner* ingen tilfeller av type 1 og type 4. For algebraområdet er det verdt å bemerke alle tre lærebøkene hadde høye antall for både type 2 og type 4, noe som kunne forventes da disse henholdsvis kan være likninger eller faktorisering. Sigma R1 og Sinus R1 hadde 10 eksempler med type 3 for algebra, mens Matematikk kun hadde tre eksempler.

Jeg vil så trekke fram de ulike måtene lærebøkene velger å presentere fortegnslinjer og dens sammenheng til ekstremal-og vendepunkter. For selve fortegnslinjene skilte Sigma R1 seg ut ved å ikke splitte faktorene i fortegnslinja, slik som de andre to valgte å gjøre. For representasjonen av fortgenslinje i sammenheng med ekstremalpunkt viste alle tre lærebøkene dette på ulike måter. Sigma R1 skilte seg ut ved at de hadde valgt å tegne piler som pekte skrått oppover eller nedover for å markere hvor grafen sank eller økte. Selv om Sigma R1 hadde piler, er det ikke så ulikt måten Matematikk R1 valgt å presentere det på. De hadde hvor funksjonen sank tegnet en rett linje skrått nedover, og skrått oppover når funksjonen begynte å stige igjen etter bunnpunktet. Det som skilte Sinus R1 var at de hadde valgt å tegne hvordan funksjonen sank eller økte ved en sammenhengende skisse som skulle illustrere funksjonen. Når det gjelder presentasjonen av fortegnslinja og sammenheng med vendepunktet, hadde Sigma R1 og Matematikk R1 en lik tilnærming ved at det begge tegnet bue krummet opp eller bue krummet ned for hver av fortegnene fortegnslinja viste. Sinus R1 valgte å følge i samme stil som for ekstremalpunktene, så de valgte å skissere den som en sammenhengende "funksjon" som krummet nedover når det skulle det, og oppover når den skulle det, og som var kontinuerlig gjennom hele fortegnslinja.

Hovedtrekkene fra lærebøkenes eksempler som skal være med på å besvare forskningsspørsmålet "Hvordan presenterer lærebøkene deres eksempler?", er at Sigma R1 har hatt flest unike prosedyrer. Blant annet hadde Sigma R1 flest beviseksempler, og Sigma R1 hadde også som eneste lærebok et eksempel av en likning bestående av både eksponentialer og logaritmer. Sigma R1 har og skilt seg ut ved å ha mange eksempler hvor x erstattes av andre verdier for deriverte funksjoner. Sigma R1 var også læreboka hvor flest eksempler var knyttet til kontekst og grafiske bilder. Fra eksemplenes representasjoner, valgte jeg å vise hvordan de tre ulike lærebøkene valgte å presentere fortegnslinjer og hvordan de valgte å skissere hvordan funksjonen ville oppføre seg etter derivering og dobbelderivering. Jeg har her diskutert det slik at Sinus R1 skilte seg mest fra de to andre lærebøkene.

5.3 Lærebøkenes fremstilling av teori

For denne delen ble lærebøkenes teori analysert etter hvilken begrunnelse de ble presentert med fra rammeverket brukt av Thompson et al. (2012) og Otten et al. (2014). Resultatene viser at Sinus R1 hadde flest tilfeller hvor teorien ble presentert med *deduktiv* begrunnelse for *algebra*. For *funksjoner* hadde Sinus R1 og Sigma R1 like stor prosentandel av denne begrunnelsen. For den *empiriske* begrunnelsen er det Sinus R1 som alene har hatt den største prosentandelen, både for algebra og funksjoner. Sinus R1 er altså den eneste læreboka som har hatt høyest prosentandel for deduktiv og empirisk begrunnelse for både *algebra* og *funksjoner* innad i læreboka. *Empirisk* begrunnelse var også for Sigma R1 den fremstillingen med høyest prosentandel for den læreboka. Matematikk R1 hadde den laveste prosentandelen for empirisk begrunnelse sammenlignet med de andre to bøkene, både for algebra og funksjoner. For *ingen begrunnelse* var det Sinus R1 som hadde lavest prosentandel for både algebra og funksjoner. Matematikk R1 var eneste læreboka hver elevene måtte fullføre teori selv.

Disse resultatene viser at Sinus R1 fokuserer mer på å faktisk begrunne deres matematiske innhold i større grad enn det både Matematikk R1 og Sigma R1 gjør. Det å ha slike begrunnelser gir, i følge Thompson et al. (2012), elevene muligheter til å faktisk lese og reflektere over disse matematiske argumentene, i tillegg til at de senere kan tas i bruk ved utviklingen av deres egen forståelse. Sinus R1 gir da elevene i større grad mulighet til å lese og reflektere over matematiske innhold, og gjør også elevene mer kjente med det å se matematisk argumentasjon bak ulike påstander. Det å kun plassere de matematiske påstandene og setningene uten noen form for begrunnelse, fjerner disse mulighetene for elevene. Elevene blir da i mindre grad kjent med at det ligger en begrunnelse bak hver matematiske påstand eller setning de ser eller bruker. Om ikke dette heller blir gjennomgått av læreren i undervisningen, vil dette begrense elevenes erfaring med å vite og forstå de matematiske begrunnelsene for matematikken de lærer fra læreboka (Thompson et al., 2012). Fra tabell 4.8 hvor resultatene fra *algebra* og *funksjoner* ble lagt sammen, viser at Sigma R1 hadde høyest prosentandel for *ingen begrunnelse*, selv om Matematikk R1 hadde flere tilfeller enn Sigma R1. Man ser også fra tabell 4.8 at både Sigma R1 og Matematikk R1 har betydelig høyere prosentandel for *ingen begrunnelse* enn det Sinus R1 har. Den eneste kategorien Matematikk R1 hadde den høyeste prosentandelen var for tilfellene som ikke var fullførte.

Til forskningsspørsmålet "hvordan fordeler presentasjonen av teori seg, i form av deduktive begrunnelser, empiriske begrunnelser, ingen begrunnelse eller begrunnelser som ikke er fullført, mellom de ulike lærebøkene?" blir besvarelsen at det er Sinus R1 som fokuserer mest på begrunnelse i sine teoripresentasjoner, og da både i form av deduktiv og empirisk begrunnelse. Sigma R1 og Matematikk R1 hadde høye prosentandeler for ingen begrunnelse. Matematikk R1 var eneste lærebok med teori som ikke var fullført.

5.4 Gir lærebøkenes oppgaver elevene kognitive utfordringer?

Her skal resultatene fra analyseringen av lærebøkenes oppgaver diskuteres. Fra resultatene var det noen funn som er verdt å diskutere videre. Læreboka som skilte seg ut her, var Matematikk R1 som gikk fra å ha det største gapet mellom andel IR og CR for algebra, til å få det minste gapet mellom IR og CR for funksjoner. For både Sigma R1 og Sinus R1 var utviklingen motsatt. De begge hadde et mindre gap mellom oppgavene for algebra enn for funksjoner. For alle lærebøkene hadde IR en større andel enn CR for både algebra og funksjoner.

Ut fra disse resultatene kan se at det er den imitative resonneringen som dominerer for alle lærebøkene. Resonneringen hvor elevene, i følge Lithner (2008), kun memorerer svaret eller løsningsalgoritmen, ofte ved å se på lærebokas eksempler, definisjoner, setninger eller andre forklaringer. Matematikk R1 går dermed fra å ha en betydelig stor del av oppgaver som kun krever at elevene husker svaret eller finner svaret ved å se i læreboka for *algebra*, til en annen tendens for *funksjoner*. For *funksjoner* er andelen CR nesten like stor som andelen IR i Matematikk R1. Dette betyr at en større del av disse oppgavene krever at elevene tenker kreativt, at når man løser oppgavene, så vil man i større grad måtte skape nye resonneringssekvenser selv, og at man i større grad må velge strategi og strategiimplementeringen på bakgrunn av argumentasjon for at denne løsningen vil gi riktig svar (Lithner, 2008).

Som tidligere skrevet, er det viktig at elevene får engasjert seg i *productive struggle* for å utvikle deres matematiske forståelse, slik at de får muligheter til å forstå matematikk på et enda dypere nivå, og dermed ha større muligheter til å klare å løse mer utfordrende oppgaver senere (Schoenfeld, 2016). Dette får de i større grad mulighet til ved å måtte resonnere kreativt. Det at elevene får engasjert seg i *productive struggle*, vil øke de kognitive utfordringene elevene møter på. Ved å se på resultatene for andel IR og CR, ser man at det er Sinus R1 som totalt sett for både algebra og funksjoner, har de laveste andelen CR. Elevene som bruker denne læreboka får da i mindre grad mulighet til å engasjere seg i *productive struggle* for å utvikle deres matematiske forståelse. Sinus R1 har den laveste andelen CR for både algebra og funksjoner, men andelen CR var noe mindre for funksjoner. Det vil si at elevene for *algebra* får noe mer tilgang på kreative oppgaver enn for *funksjoner*. Det samme gjelder for Sigma R1. Sigma R1 har imidlertid ikke like lave verdier for andel CR som det Sinus R1 har. For *algebra* i Sigma R1 viser resultatene at gapet mellom andel IR og CR ikke er så stor (henholdsvis 54,23% og 45,77%), men at det øker for *funksjoner* (til 61,11% og 38,89%). Elevene som bruker Sigma R1 vil dermed ha, i likhet med Sinus R1, større tilgang på imitative oppgaver for funksjonsoppgavene enn algebraoppgavene.

Ved å koble *productive struggle* mot Matematikk R1 sine oppgaver, viser resultatene at algebraoppgavene har en lavere andel CR enn funksjonsoppgavene. Eleven som bruker denne læreboka vil da få større muligheter til å engasjere seg i *productive struggle* for oppgavene tilhørende funksjonsdelene av læreboka enn for algebraoppgavene.

Jeg velger så å se på hvor store deler av den kreative resonneringen som ble klassifisert som LCR og GCR. Dette ble avgjort etter hvor mye CR som trengtes for hver oppgave. Oppgaver som analyseres som LCR krever en mindre del CR hvor resten består av IR, mens GCR krever en betydelig større del CR (Bergqvist, 2007). For analyseringen av IR, så jeg etter kjente hendelser i lærebøkene. Jeg satte et krav på at det måtte være minst tre *kjente hendelser* før oppgaven kunne klassifiseres som IR, og siden store deler av LCR faktisk består av IR, valgte jeg å klassifisere oppgaver som LCR når ikke hele løsningsprosedyren var kjent eller om oppgavene kun kunne kobles til én eller to hendelser i læreboka.

Oppgavens resultater viser at LCR var den største delen av CR for alle lærebøkene for både algebra og funksjoner. Både Sigma R1 og Sinus R1 hadde større prosentandeler LCR for algebra enn for funksjoner, noe som gjenspeiler resultatet for IR og CR, hvor de begge hadde større andel CR for algebra enn for funksjoner. Matematikk R1 følger den motsatte tendensen også for fordelingen av LCR og GCR. For denne læreboka er det algebra som har den laveste andelen LCR, mens funksjoner har den høyeste. Det er verdt å bemerke seg at Matematikk R1 sin andel LCR er den laveste andelen LCR for alle tre lærebøkene for både algebra og funksjoner, mens Matematikk R1 sin andel LCR faktisk er den høyeste andelen LCR for alle lærebøkene for både algebra og funksjoner. Som antatt ved diskusjonen av IR og CR, vil Sigma R1 og Sinus R1 sine algebraoppgaver gi større kognitive utfordringer til elevene enn den deres funksjonsoppgaver vil gi, mens for Matematikk R1 vil algebraoppgavene vi mindre kognitive utfordringer enn det funksjonsoppgavene vil gi. Andelen GCR er relativ lav for alle de tre lærebøkene, men der er likevel noe å kommentere. Både Sigma R1 og Sinus R1 har deres største andelen GCR for algebra. Dette forsterker bare påstanden om at Sigma R1 og Sinus R1 for større kognitive utfordringer ved algebraoppgavene enn funksjonsoppgavene. Matematikk R1 fortsetter å holde den motsatte tendensen, så her er det funksjonsoppgavene som har den høyeste andelen GCR, som igjen vil forsterke påstanden om at funksjonsoppgavene til Matematikk R1 vil gi elevene større kognitive utfordringer enn det algebraoppgavene vil gi.

Jeg oppsummerer ved å svare på forskningsspørsmålet "på hvilke måter gir lærebøkenes oppgaver elevene kognitive utfordringer?". Her vil lærebøkene gi elevene kognitive utfordringer basert på hvilken resonneringstype oppgavene krever. Her vil oppgavene til Sigma R1 og Sinus R1 gi større kognitive utfordringer for *algebra*, ved å både ha større andel LCR og GCR enn for funksjonsoppgavene. Oppgavene til Matematikk R1 vil gi større kognitive utfordringer for funksjonsoppgavene, både ved større andel LCR og GCR, enn for algebraoppgavene.

5.5 Sammenhenger og koblinger i lærebøkene

For sammenhenger og koblinger i lærebøkene, valgte jeg å dele disse i tre kategorier, hvor den ene var sammenhenger og koblinger til dagliglivet, den andre var sammenhenger og koblinger med matematikk som var lært ved tidligere trinn, og tilslutt sammenhenger og koblinger mot matematikk som tidligere var blitt presentert i læreboka. Både for algebra og funksjoner var det få tilfeller hvor matematikken ble satt i sammenheng med dagliglivet. Det er viktig å huske at jeg for denne delen ikke har tatt med lærebøkenes eksempler. Denne delen består bare av lærebøkenes teori, altså uten eksemplene og oppgavene.

For lærebøkenes algebradeler var det matematikk som de tidligere hadde fått presentert og lært om tidligere i læreboka som hadde størst andel for hver av bøkene. Dette kan indikere at lærebøkene ønsker at elevene skal se en relasjon med de (del)kapitlene de tidligere har vært gjennom og det eventuelle temaet det kobles mot. Det å vise elevene at matematikk er en kontinuitet som bygger på kunnskap man allerede innehar, kan hjelpe elevene til å se disse sammenhengen, som kan gjøre at matematikk kanskje blir mindre fjernt for noen. Denne argumentasjonen gjelder også for de relasjonene som kobles mot matematikk som er lært ved tidligere årstrinn.

For *funksjoner* har Sigma R1 og Sinus R1 en høyere andel tilfeller som kobles mot matematikk presentert tidligere i læreboka. Matematikk R1 har her like mange tilfeller av sammenhenger mellom matematikk lært tidligere i læreboka og matematikk lært ved tidligere år. For *funksjoner* er noen av disse sammenhengene blant annet at man bruker flere ulike derivasjonsregler sammen, som da for eksempel derivasjon av logaritmer ved hjelp av kjerneregelen. Et annet tilfelle er sammenhengen mellom derivering og fortegnslinje fra å finne ekstremalpunkt til å finne vendepunkt.

For å svare på oppgavens siste forskningsspørsmål ”finnes det sammenhenger mellom det innholdet som presenteres og situasjoner fra dagliglivet eller matematikk som er tidligere lært, og hvordan blir disse fordelt mellom lærebøkene?” tar jeg utgangspunkt i det som allerede er diskutert. Sammenhenger og koblinger til dagliglivet var det få tilfeller av, men sammenhengene mot matematikk som tidligere var lært hadde betydelig flere tilfeller. Noen store ulikheter mellom lærebøkene var det heller ikke, med unntak av Matematikk R1 for *funksjoner* hvor tilfellene for lært ved tidligere årstrinn var like mange som ved lært tidligere i læreboka, mens de to andre lærebøkene hadde høyest andel for sistnevnte.

5.6 Matematisk kompetanse og mulighet for læring

Jeg har til nå undersøkt og diskutert rundt hvert forskningsspørsmål knyttet til oppgaven. Innledningsvis i oppgaven nevnte jeg at spørsmål man kan spørre seg med en komparativ lærebokstudie er om noen lærebøker er bedre enn andre, og om noen lærebøker vil gi elevene større muligheter for læring? Da lærebøker faktisk brukes av elevene som et viktig verktøy i deres læring, ønsker jeg også å se hvilke kompetanser lærebøkene gir elevene på bakgrunn av de forskningsspørsmålene jeg har gitt oppgaven. Disse kompetansene vil gi elevene et bedre utgangspunkt for mulighetene til å lære, noe som er viktig at lærebøker gir elevene (Kilpatrick et al., 2001).

Kompetanse er i følge Niss og Jensen (2002) sin definering å vite, forstå, praktisere, bruke og kunne evaluere matematikk og matematisk praksis i mengden av sammenhenger hvor matematikk enten tar del i eller kan kunne ta del i. Kilpatrick et al. (2001) har definert fem kompetanser elever bør få mulighet til å besitte. Disse kompetansene er (1) *conceptual understanding,* (2) *procedural fluency,* (3) *strategic competence,* (4) *adaptive reasoning* og (5) *productive disposition*. Det er viktig å se på disse som ulike deler som er gjensidig avhengige av hverandre i en kompleks helhet.

Ved å se på lærebøkenes oppgaver og deres krav til resonnering, vil imitativ resonnering være å enten huske oppgavens fullstendige løsning eller løsningsalgoritmen. Definisjonen av imitativ resonnering stemmer da ikke overens med *conceptual understanding*, da dette beskrives som forståelsen av begreper og prosedyrer og deres sammenheng. Elevene skal *forstå* matematikk mer enn kun innøvde begreper og prosedyrer, og heller kunne se sammenhengen og forstå relasjonen mellom de. Det hjelper også elevene å knytte de matematiske begreper mot nye ideer og prosedyrer begreper har forbindelse med (Kilpatrick et al., 2001). Her vil den kreative resonneringen heller finne sin plass, ved at denne resonneringen ved blant annet valg av strategi må støttes av argumenter for hvorfor denne konklusjonen er sannsynlig å være riktig. Da har man forstått begrepene og deres sammenheng med prosedyrene. Ved å koble dette til denne studiens resultater, er det Sigma R1 og Matematikk R1 som hadde de høyeste andelene for kreativ resonnering. Disse vil i større grad gi elevene mulighet for *conceptual understanding* enn det Sinus R1 vil gjøre basert på deres oppgaver.

Precedural fluency blir beskrevet som de ferdigheter i å bruke de passende prosedyrene fleksibelt, effektivt og nøyaktig. Det er viktig at elevene vet når de skal bruke prosedyrene og hvordan de skal bruke de. Elevene må være effektive og nøyaktige med algoritmer, med de fire regneteknikkene og med andre beregninger. (Kilpatrick & Swafford, 2002). For disse bør de kunne algoritmer som de selv forstår, og som er generelle nok til å løse liknende algoritmer, men med små endringer Ved å memorere prosedyrer kan det være sannsynlig at de ikke forstår ideene som ligger bak de (Kilpatrick & Swafford, 2002). Definisjonen sier at elevene må forstå algoritmene på en generell måte, så de kan brukes i andre situasjoner. Dette strider også mot den imitative resonneringen. På en annen måte defineres kompetansen også av at elevene må bruke passende prosedyrer fleksibelt, effektivt og med nøyaktighet. Slik jeg tolker dette vil dette helle mer mot den *lokale* kreative resonneringen slik jeg har valgt å definere den. Da denne både inneholder noe kreativ resonnering, hvor den ikke-memorerende delen kommer inn, men den inneholder også imitativ resonnering, noe som samsvarer med "de ferdigheter i å bruke de passende prosedyrene fleksibelt, effektivt og nøyaktig". Ved å ha ferdigheter med å bruke prosedyrer effektivt og nøyaktig må det og ligge noe mengdetrening bak, og det er dette jeg tenker kommer fra den imitative resonneringen. Ved å se dette i lys av lærebøkene, er det Sigma R1 og Matematikk R1 som har de største andelene av lokal kreativ resonnering med henholdsvis 37,89% og 37,94%. Disse to bøkene vil gjennom oppgavene gjøre det mulige å oppnå *procedural fluency.*

Strategic competence er evnen til å formulere, fremstille og løse matematiske problemer. (Kilpatrick et al., 2001). *Strategic competence* tar i bruk både *conceptual understanding* og *procedural fluency* for å løse oppgaver. Det å ha disse to kompetansene er ikke nyttige før elevene har blitt kjent med når og hvor de skal brukes og ikke brukes. Her vil jeg trekke fram lærebøkenes presentasjon av teori og deres begrunnelser. Thompson et al. (2012) skriver at begrunnelser i lærebøkenes teori viser at elevene har muligheter til å lese og argumentere over disse begrunnelsene, og at teori som legges fram uten begrunnelse ikke gir noen grunn til hvorfor de er gyldige eller hvordan de kan relateres til annet matematisk innhold. Definisjonen av *strategic competence* sier jo blant annet at elevene må ha blitt kjent med når og hvor de skal brukes. Ved å ha mye teori som ikke begrunnes, vil jo elevene miste noe mulighet til å vite dette. Resultatene i tabell 4.8 viser at det er Sinus R1 som har den klart laveste andelen av teori uten begrunnelse. Dette vil styrke mulighetene for å oppnå noe *strategic competence.*

Strategic competence kan også relateres til situasjoner på skolen, der elevene blitt gitt spesifikke oppgaver, men også til livet utenfor skolen hvor situasjonene ofte ikke er forutsett. Her må da elevene selv se hva som er problemet, for å gjøre dette om slik at de kan bruke matematikk for å løse det, for å deretter velge den beste brukbare strategien for å løse problemet (Kilpatrick & Swafford, 2002). Her ønsker jeg å trekke fram de resultatene som relateres til dagliglivet. Disse er henholdsvis som kontekst i lærebøkenes eksempler og som teori i sammenheng med dagliglivet. For lærebøkenes eksempler var det Sigma R1 som hadde flest tilfeller hvor det ble relatert til livet utenfor skolen. Dette kan gi elevene muligheter til å kanskje se en sammenheng med dagliglivet. Elevene som bruker Sigma R1 vil da kanskje i større grad stryke muligheten for denne kompetansen, enn det elevene som bruker Matematikk R1 og Sinus R1, som hadde betydelig færre konteksteksempler, vil. Ser her at Sinus R1 både virker noe positivt og noe negativt for mulighetene de gir elevene til å oppnå denne kompetansen, ved at de har relativt få eksempler knyttet til dagliglivet, men har likevel mye teori som begrunnes. Slik jeg har tolket det kan både situasjoner knyttet til dagliglivet og situasjoner som begrunnes til økt *strategic competence.*

Adaptive reasoning er elevenes ferdigheter til logisk tenkning, refleksjon og begrunnelse i forhold til sammenhengene blant begreper og situasjoner. Resonneringen er gyldig, noe som bygges på elevenes evne til å overveielse av andre alternativer, samt kompetansen til å begrunne den endelig konklusjonen (Kilpatrick et al., 2001). Ved logisk tenkning og refleksjon vil jeg fra min studie trekke fram den deduktive begrunnelsen. Teori presentert med deduktiv begrunnelse blir presentert som logiske argumenter for å støtte eller bevise matematiske påstander. Teori med deduktive begrunnelser kan være til hjelp for elevene ved utvikling av en logisk og reflektert matematisk kompetanse. Her er det Sinus R1 som har det høyeste antallet eksempler med deduktiv begrunnelse sammenlignet med det andre lærebøkene. Basert på dette vil elevene som bruker Sinus R1 møte på flere eksempler inneholdt en deduktiv begrunnelse enn for de andre to bøkene, og dermed kanskje også få større muligheter for denne resonneringskompetansen. Kilpatrick og Swafford (2002) beskriver også denne kompetansen ved å bruke logisk forklaring for å utvide noe fra noe som er kjent, til noe som enda ikke er kjent. Basert på dette vil jeg her igjen trekke fram den kreative resonneringen, men legge hovedfokuset på den *globale* kreative resonneringen. Oppgaver som krever global kreativ resonnering vil inneholde store deler CR, og ved CR definert som resonnering hvor en ny resonneringssekvens må skapes, hvor prosedyren man velger må støttes av gyldige argumenter, samt at disse argumentene har sine spor i de indre matematiske egenskapene resonneringen er involvert i, vil lærebøker som har mange oppgaver der krever global kreativ resonnering, også ha større muligheter for å spre denne kompetansen. For denne studien vil det være Sigma R1 (4.15%) og Matematikk R1 (4.02 %) som vil gi større muligheter for denne kompetansen sammenlignet med Sinus R1 sin andel GCR (2.15%). Ser her at Sinus R1 da i stedet vil gi større mulighet for denne kompetansen gjennom den presenterte teorien sammenlignet med de andre lærebøkene, enn gjennom andelen globale kreative oppgaver. Det viser at det som presenteres i teorien ikke nødvendigvis alltid behøver å gjenspeile seg i oppgavene.

Tilslutt er *productive disposition* definert som tendensen til å se både se en mening i matematikken og oppfatte at den er både nyttig og at den har en verdi. Hvis elevene utvikler de fire andre kompetansene, er det større muligheter for at de vil se på matematikk som nettopp nyttig og verdifull, men samtidig noe som er forståelig (Kilpatrick et al., 2001). Ved å ta utgangspunkt i denne studiens resultater, ser jeg at alle lærebøkene inneholder flere imitative oppgaver enn kreative, det er relativt få eksempler og annen teori som er relatert til kontekst, i tillegg er andelen for *ingen begrunnelse* noe høy hos to av lærebøkene. Alt dette vil påvirke denne kompetansen på en negativ måte. Det vil være momenter i hver lærebok som vil virke positivt på hver sin måte, men samtidig vil lærebøkene også ha mindre positive innvirkninger som da på sin side vil virke negativ på denne kompetansen.

5.7 Sammenheng med tidligere forskning

Jeg velger å se nærmere på tidligere forskning for to av de ulike delene jeg har analysert, for å se om det er noen sammenheng med mine resultater og andres. For å gjøre disse slutningene mest reell, velger jeg å se i sammenheng med forskning som også denne oppgaven tar utgangspunkt i. Thompson et al. (2012) fant i deres studie at for alle deres 20 analyserte lærebøker, var det til sammen flest tilfeller hvor det matematiske innholdet ikke ble begrunnet. Deretter fulgte deduktiv begrunnelse og empirisk begrunnelse, mens ikke fullført teori hadde den laveste andelen. For min studie er det den empiriske begrunnelsen som det flest tilfeller av. Deretter følger den deduktive begrunnelsen før ingen begrunnelser, og tilslutt tilfeller som ikke er fullført. Ved sammenligning av denne studien og Thompson et al. (2012) sin viser resultatene at lærebøkene denne oppgaven har basert seg på hadde flest tilfeller av empirisk begrunnelse, mens forskningsstudien hadde flest tilfeller av ingen begrunnelse. Dette viser forskjeller mellom mine resultater og forskningsstudien, særlig når *ingen begrunnelse* hadde tredje flest tilfeller i min studie, mens empirisk begrunnelse hadde tredje flest tilfeller for forskningsstudien.

Jeg velger også å se på Charalambous et al. (2010) og deres analyse av lærebøkenes kognitive nivå basert på Stein et al. (2000) sin Task Analysis Guide. Selv om jeg har valgt å ikke bruke deres rammeverk, da jeg ønsket å se på det kreative, har jeg likevel tidligere i oppgaven definert kognitive utfordringer, blant annet noe inspirert av Stein et al. (2000) sitt rammeverk. Tidligere i oppgaven har jeg skrevet at oppgaver der ber elevene om å huske, reprodusere lærte fakta, formler eller definisjoner, eller oppgaver der er algoritmiske vil klassifiseres av deres rammeverk som oppgaver der faller under *lavere* kognitivt nivå. Stein et al. (2000) definerer videre to kategorier under *høyere* kognitivt nivå, hvor den første *procedures with connection*, beskrives som oppgaver der prosedyrer blir brukt på en måte at hvor den har relasjoner med andre matematiske konsepter og ideer. Den andre kategorien, *doing mathematics*, er hvor oppgavene krever en kompleks og ikke-algoritmisk tenkning. Her vil *doing mathematics* gi større kognitive utfordringer enn, *procedures with connection*, som igjen vil gi større utfordringer enn *procedures without connection*. For å se dette i sammenheng med rammeverket til Lithner (2008), har jeg tidligere i denne oppgaven beskrevet at hvor kognitivt utfordrende en oppgave er avhenger av mengden kreativ resonnering. Dermed vil oppgaver der krever GCR være de mest utfordrende oppgavevene, foran LCR og deretter IR. Jeg vil presisere at jeg ikke ser på kreativ og imitativ resonnering som det samme som de lavere og høyere kognitive nivåene. Jeg velger heller å ta utgangspunkt i at begge disse rammeverkene kan brukes til å klassifisere oppgaver som er mer kognitivt utfordrende enn andre, selv om de tar utgangspunkt i hvert sine rammeverk og teori.

Charalambous et al. (2010) resultater viste at både læreboka fra Kypros og de to lærebøkene fra Irland hadde en betydelig mengde oppgaver som ble klassifisert som *procedures without connection* med prosentandeler på over 85%. Lærebøkene fra Taiwan derimot inneholdt hele 71% og 81% av de *høyere* kognitive nivåene. Ved å se dette i sammenheng med denne oppgavens resultater var det andelen IR (mindre kognitive utfordringer) flest oppgaver krevde med prosentandeler fra 57,96% til 62,77%. Dette kan verken sammenlignes helt med Kypros og Irland sine resultater eller Taiwan sine resultater. Ser likevel en relasjon til Kypros og Irland, da begge disse landene hadde den største mengden av lærebøkene oppgaver definert som *mindre* kognitivt utfordrende, noe som også gjelder min studie, men ikke i like stor grad. Jeg velger likevel ikke å veie denne sammenligningen veldig tungt, da det ikke er det samme rammeverket som det blir tatt utgangspunkt i.

6 Oppsummering og konklusjon

6.1 Oppsummering

Denne masteroppgaven har basert seg på en mixed method-studie med en komparativ vinkling. Jeg har analysert tre norske lærebøker for R1-matematikk utfra et konseptuelt rammeverk basert på Charalambous et al. (2010) sitt rammeverk for lærebokanalyse, med innspill fra andre rammeverk (Lithner (2008), Thompson et al. (2012) og Otten et al. (2014))

De viktigste funnene til denne oppgaven er blant annet resultatene om lærebøkenes oppgaver om innhold av kreativ resonnering. Både for *algebra* og *funksjoner* hadde Sigma R1 og Sinus R1 flere oppgaver med kreativ resonnering for algebra enn for funksjoner. Dette resultatet var motsatt for oppgavene tilhørende Matematikk R1. Når det gjelder lærebøkenes begrunnelser ved fremstilling av nytt matematisk innhold, var det Sinus R1 som fokuserte samlet sett mest på begrunnelser, da både deduktivt og empirisk. Matematikk R1 og Sigma R1 hadde til gjengjeld høyere prosentandeler hvor teorien ikke var begrunnet. For teori som ikke var fullført, var det bare i Matematikk R1 dette ble identifisert.

For hvordan lærebøkene presenterte deres eksempler fant jeg også noe ulikheter ved bøkene. Blant annet hadde Sigma R1 aller flest biseksempler og flest eksempler knyttet til kontekst. Jeg valgte å tillegg å presentere en mer kvalitativ fremstilling av deres ulike måter å representere fortegnslinjer og disses sammenheng med ekstremal-og vendepunkter. Her skilte Sinus R1 seg noe fra de andre.

6.2 Konklusjon

Jeg velger å gjenta problemstillingen:

- Hvilke forskjeller og likheter er det mellom tre ulike lærebøkers presentasjon av matematisk innhold og krav til elevene i emnene algebra og funksjoner for R1-matematikk?
    - Hvordan strukturerer lærebøkene deres presentasjoner av ulike temaer?
    - Hvordan presenterer lærebøkene deres eksempler?
    - Hvordan fordeler presentasjonen av teori seg, i form av deduktive begrunnelser, empiriske begrunnelser, ingen begrunnelser eller begrunnelser som ikke er fullført, mellom de ulike lærebøkene?

- På hvilke måter gir lærebøkenes oppgaver elevene kognitive utfordringer?
- Finnes det sammenhenger mellom innholdet som presenteres og situasjoner fra dagliglivet eller matematikk som er tidligere lært, og hvordan blir disse fordelt mellom lærebøkene?

Jeg velger å svare på forskningsspørsmålene med problemstillingen som utgangspunkt. Det første forskningsspørsmålet gikk ut på lærebøkenes struktur i presentasjonene. Som allerede nevnt i diskusjonen blir jeg ikke å si noe mer om lærebøkenes valg av rekkefølge, da jeg ikke klarte å se noen spesielle trender som fulgte lærebøkene hos noen av de, og det var heller ingen av lærebøkene som var spesielt like hverandre i valg av rekkefølge. Matematikk R1 er den læreboka som tar opp flest unike temaer, og skiller seg dermed ut basert på det. Sigma R1 og Sinus R1 hadde omtrent like mange unike temaer. Her er det dermed Matematikk R1 som skiller seg ut.

Det andre forskningsspørsmålet mitt baserte seg på lærebøkenes eksempler. Analyseringen av eksemplene ga mye informasjon, og det ble nødvendig å luke ut aspekter og resultater som var mer interessant. Sigma R1 skilte seg ut på flere området. Læreboka var både den læreboka med flest beviseksempler, flest eksempler knyttet til kontekst i tillegg til et unik eksempel bestående av en likning kombinert av logaritmer og eksponentialer. For eksemplenes ulike representasjoner av fortegnelsene med og uten relasjon til ekstremal-og vendepunkter, skilte Sigma R1 seg ut på måten selve fortegnslinja ble presentert. For kombinasjonen med funksjonens oppførsel ved derivering og dobbelderivering, hadde alle tre lærebøkene sine unike representasjoner, men Sinus R1 skilte seg likevel mest fra de to andre. Dette viser at lærebøkene viser ulikheter og likheter på forskjellige området ved eksemplene.

For lærebøkenes fremstilling av teori var det Sinus R1 som fokuserte mest på å begrunne deres matematiske innhold, og hadde få tilfeller av teori som ikke var begrunnet. Matematikk R1 var eneste lærebok med teori som ikke var blitt fullført. Sinus R1 og Matematikk R1 skiller seg dermed ut på hver sin ulike måte, ved at Sinus R1 kanskje bevisst fokuserer mer på forklarende og begrunnet teori, slik at elevene kanskje i større grad skjønner hvordan presenterte matematiske påstander er gyldige.

På hvilke måter lærebøkenes oppgaver gir elevene kognitive utfordringer, baserer seg på hvilken type resonnering de krever av elevene. Som allerede nevnt vil de oppgavene som krever global kreativ resonnering gir større kognitive utfordringer enn oppgavene som krever lokal kreativ resonnering, som igjen vil gi større kognitive utfordringer enn oppgavene som krever imitativ resonnering. Her var det en tydelig forskjell mellom Matematikk R1 og de to andre lærebøkene. Matematikk R1 hadde færre oppgaver der krevde kreativ resonnering (CR) for algebra enn for funksjoner. Sigma R1 og Sinus R1 hadde motsatte resultater ved færre oppgaver som krevde kreativ resonnering for funksjoner enn for algebra.

Det siste forskningsspørsmålet tar utgangspunkt i lærebøkenes sammenhenger med dagliglivet eller tidligere lært matematikk. Her var det få forskjeller mellom lærerbøkene seg i mellom, bortsett fra i Matematikk R1 for *funksjoner*, hvor andelen tidligere lært teori fra læreboka var betydelig mindre enn for de andre to lærebøkene. Til gjengjeld skilte også Matematikk R1 seg fra de andre ved å ha noe høyere andel tilfeller for teori som er lært ved tidligere årstrinn. Både det å ha teori knyttet til tidligere årstrinn og til tidligere presentert matematikk i samme lærebok kan hjelpe elevene med å se relasjoner mellom matematiske begreper og konsepter.

Da lærebøkene er en viktig del av elevene undervisning, har jeg tilslutt valgt å se hvilke muligheter for læring lærebøkene gir elevene basert på ulike matematiske kompetansene (Kilpatrick et al., 2001). Diskusjonen viser at flere av de ulike momentene jeg har analysert kan på hver sin måte enten øke muligheten for de ulike formene kompetanse, eller svekke disse mulighetene. Dette ga da de ulike lærebøkene forskjellige styrker og svakheter i forhold til de mulighetene de gir elevene for læring sett i sammenheng med den matematiske kompetansen og lærebøkenes analyserte deler.

Problemstillingen min gikk ut på å se hvilke forskjeller og likheter det fantes mellom de tre valgte lærebøkene ved analyse av deres presentasjoner av det matematiske inneholder og deres krav til elevene i form av oppgavene. Det er helt klart både forskjeller og likheter mellom lærebøkene, og dette gjelder både for deres presentasjon ev teori, men også hvordan kravene i form av oppgavene endrer seg fra algebra og funksjoner mellom lærebøkene. Hvilke forskjeller og likheter som finnes har jeg både presentert i resultatene, men også diskutert senere i oppgaven. Det at lærebøkene har ulike presentasjoner og fremstilling av teori i tillegg til ulikhetene ved oppgavenes kreative resonnering, har også ført til at de gir elevene mulighet for læring på ulike områder og i ulik grad. Noen lærebøker har et annet fokus enn andre lærebøker, dermed vil det gi ulikheter for deres matematiske presentasjon av matematisk innhold og deres krav til elevene i form av oppgaver.

Litteraturliste

Bergqvist, E. (2007). Types of reasoning required in university exams in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 348-370. doi: 19.1916/j.jmathb.2007.11.001

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y. & Mesa, V. (2010). A Comparative Analysis of the Addition and Subtraction of Fractions in Textbooks from Three Countries. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(2), 117-151. doi: 10.1080/10986060903460070

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education* (7.utg.). London: Routledge.

Creswell, J. W. (2009). *Research design. Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches* (3. utg.). Los Angeles: SAGE Publications

Creswell, J. W. & Clark, V. L. P. (2011). *Designing and conducting mixed methods research* (2. utg.). Los Angeles: SAGE publications.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education, 45*, 765-777. doi: 10.1007/s11858-013-0530-6

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education, 45*, 633-646. doi: 10.1007/s11858-013-0539-x

Grønmo, L. S. & Hole, A. (2016). Matematikk i videregående skole. I L. S. Grønmo, A. Hole & T. Onstad (Red.). *Ett skritt fram og ett tilbake: TIMSS Advanced 2015. Matematikk og fysikk i videregående skole*: Cappelen Damm Akademisk.

Grønmo, L. S., Lindquist, M., Arora, A. & Mullis, I. V. S. (2013). TIMSS 2015 Mathematics Framework. I I. V. S. Mullis & M. O. Martin (Red.). *TIMSS 2015 Assessment Framework*: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Grønmo, S. (2004). *Samfunnsvitenskapelige metoder*. Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjerke AS.

Grønmo, S. (2016). *Samfunnsvitenskapelige metoder* (2. utg.). Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjerke

Heir, O., Engeseth, J., Moe, H. & Borgan, Ø. (2015). *Matematikk R1* (2. utg.). Oslo: Aschehoug.

Hiebert, J. & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students´ learning. I F. K. L. Jr. (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: Vol. 1* (371-404). Charlotte, N.C: Information Age Publishing Inc. .

Hong, D. S. & Choi, K. M. (2014). A comparison of Korean and American secondary school textbooks: the case of quadratic equations. *Educational Studies in Mathematics, 85*, 241-263. doi: 10.1007/s10649-013-9512-4

Jones, D. L. & Tarr, J. E. (2007). An examination of the levels of cognitive demand required by probability tasks in middle grades mathematics textbooks. *Statistics Education Research Journal, 6*(2), 4-27.

Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y. & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 36*, 20-32. doi: 10.1016/j.jmathb.2014.08.003

Kilpatrick, J. & Swafford, J. (2002). *Helping Children Learn Mathematics*. Washington: National Academies Press.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington DC: National Academy Press.

Kleven, T. A. (2011). Forskning og forskningsresultater. I T. A. Kleven, F. Hjardemaal & K. Tveit (Red.). *Innføring i pedagogiske forskningsmetode*: Unipub.

Krumsvik, R. J. (2014). *Forskningsdesign og kvalitativ metode: ei innføring*. Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjerke.

Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 37*(6), 457-467.

Li, Y. (2000). A Comparison of Problems That Follow Selected Content Presentations in American and Chinese Mathematics Textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(2), 234-241. doi: 10.2307/749754

Li, Y., Chen, X. & An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: the case of fraction division. *ZDM Mathematics Education, 41*(6), 809-826. doi: 10.1007/s11858-009-0177-5

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 405-427. doi: 10.1016/j.jmathb.2004.09.003

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276. doi: 10.1007/s10649-007-9104-2

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: an empirical approach. *Educational Studies in Mathematics, 56*, 255-286. doi: 10.1023/B:EDUC.0000040409.63571.56

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematikklæring - Ideer og inspiration til udvikling af matematikkundervisning i Danmark* (Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18). Undervisningsministeriet.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S. (2013). *Sinus matematikk R1* (2. utg.). Oslo: Cappelen Damm.

Otten, S., Gilbertson, N. J., Males, L. M. & Clark, D. L. (2014). The Mathematical Nature of Reasoning and Proving Opportunities in Geometry Textbooks. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(1), 51-79. doi: 10.1080/10986065.2014.857802

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative Research & Evaluation Methods*. Thousand Oaks: SAGE Publications.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode. En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg.). Oslo: Universitetsforlaget

Schoenfeld, A. H. (2016). *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework*. Hentet 29.3.17 fra http://map.mathshell.org/trumath/intro_to_tru_20161223.pdf

Schoenfeld, A. H. & Floden, R. E. (2014). *An Introduction to the TRU Math Dimensions*. Hentet 01.05.2017 fra http://ats.berkeley.edu/tools/TRUMathDimensionsAlpha.pdf

Scott, J. (1990). *A matter of record*. Cambridge: Polity Press.

Silvermann, D. (2010). *Doing Qualitative Research* (3. utg.). Los Angeles: SAGE Publications Ltd.

Stacey, K. & Vincent, J. (2009). Modes of reasoning in explanations in Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 72*(3), 271-288. doi: 10.1007/s10649-009-9193-1

Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275. doi: 129.242.83.22

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. & Silver, E. A. (2000). *Implementing Standards-Based Mathematics Instruction*. New York: Teacher College, Columbia University.

Thagaard, T. (2009). *Systematikk og innlevelse. En innføring i kvalitative metoder* (3. utg.). Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjerke AS.

Thompson, D. R., Senk, S. L. & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to Learn Reasoning and Proof in High School Mathematics Textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(3), 253-295. doi: 10.5951/jresematheduc.43.3.0253

Tveit, K. (2011). Historisk forskningsmetode. I T. A. Kleven, F. Hjardemaal & K. Tveit (Red.). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode* (2.utg.): Unipub.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. I A. F. Coxford & A. P. Schulte (Red.). *The ideas of algebra, K-12: 1988 Yearbook*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Usiskin, Z. (1995). Why is Algebra Important to Learn? *America Educator, 19*(1), 30-37.

Utdanningsdirektoratet. (2013a). *Hovedområder*. Hentet 20.4.17 fra https://www.udir.no/kl06/MAT3-01/Hele/Hovedomraader

Utdanningsdirektoratet. (2013b). *Matematikk R1*. Hentet 25.4.17 fra https://www.udir.no/kl06/MAT3-01/Hele/Kompetansemaal/matematikk-r1

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. & Houang, R. T. (2002). *According to the book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*: Springer Netherlands.

Watson, A. & Mason, J. (2005). *Mathematics as a Constructive Activity. Learners Generating Examples*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Dypbukt, W., Mustaparta, S., . . . Thorstensen, R. (2012). *Sigma R1*: Gyldendal undervisning.

Vedlegg

Vedlegg 1 – hvilke kapitler hva hver lærebok som danner de seks underområdene for algebra

	Sigma R1	Matematikk R1	Sinus R1
Implikasjon og ekvivalens	2.1 Logikk 2.2 Implikasjon og ekvivalens	1C Implikasjon og ekvivalens	1.1 Logikk Mengdelære
Bevis	2.4 Bevis. Direkte bevis 2.5 Andre bevisformer 2.6 Vi øver på bevis 2.7 Bevis for Pytagoras setning	1F Bevistyper	1.3 Noen bevismetoder
Faktorisering og polynomdivisjon	4.1 Andregradsuttrykk 4.2 Polynomdivisjon 4.3 Nullpunktsetningen. Faktorisering	1A Faktorisering 1B Polynomdivisjon	1.4 Polynomdivisjon 1.5 Resten ved en polynomdivisjon Faktorisering av polynomer
Likninger og ulikheter av polynomer	2.3 Irrasjonale likninger 4.4 Likninger og ulikheter med polynomer 4.5 Likninger løst med substitusjon 4.6 Brøkulikheter	1D Likninger 1E Ulikheter	1.6 Likninger og ulikheter 1.7 Rasjonale likninger 1.8 Rasjonale ulikheter
Logaritmedefinisjoner og logaritmesetningene	4.7 Logaritmesetningene 4.9 Tallet e. Naturlige logaritmer	2A Potenser 2B Logaritmefunksjoner 2C Logaritmesetningene	2.1 Briggske logaritmer 2.5 Den naturlige logaritmen
Logaritme- og eksponentiallikninger og ulikheter	4.8 Likninger med logaritmer 4.10 Likninger med naturlige logaritmer 4.11 Uttrykk og likninger med tallet e 4.12 Ulikheter med eksponentialfunksj	2D Logaritmelikninger 2E Eksponentiallikninger 2F Ulikheter	2.2 Eksponentiallikninger 2.3 Eksponentialulikheter 2.4 Likninger og ulikheter med lgx 2.6 Bruk av den naturlige

oner og logaritmer	logaritmen 2.7 Likninger og ulikheter med ln x

Vedlegg 2 – hvilke kapitler hva hver lærebok som danner de tre underområdene for funksjoner

	Sigma R1	Matematikk R1	Sinus R1
Grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet	5.1 Grenseverdier 5.2 Grenseverdier når x vokser over alle grenser 5.3 Definisjon av den deriverte 6.9 Kontinuitet og deriverbarhet	3A Funksjonsbegrepet 3B Grenseverdier 3C Kontinuitet 3G Deriverbarhet	7.1 Grenseverdier 7.2 Kontinuerlige funksjoner 7.5 Derivasjon
Derivasjon og funksjons-drøfting	5.4 Regneregler ved derivasjon 5.5 Kjerneregelen 5.6 Derivasjon av eksponentialfunksjoner 5.5 Derivasjon av logaritmefunksjoner 5.8 Derivasjon av produkter 5.9 Derivasjon av brøkfunksjoner 6.1 Antiderivert. Krumning. Vendepunkt 6.2 Drøfting av polynomfunksjoner 6.3 Størst eller minst vekst 6.5 Drøfting av rasjonale funksjoner 6.6 Drøfting av eksponentialfunksjoner 6.7 Drøfting av logaritmefunksjoner	3E Eksponentialfunksjoner 3F Logaritmefunksjoner 4A Derivasjonsregler 4B Tangenter 4C Størst eller minst 4D Kjerneregelen 4E Produktregelen 4F Brøkregelen 4G Den andre deriverte	7.6 Derivasjon av polynomer 7.7 Funksjonsdrøfting 7.8 Krumning og vendepunkt 7.9 Fart og akselerasjon 8.1 Potensfunksjoner og rotfunksjoner 8.2 Sammensatte funksjoner 8.3 Logaritmefunksjoner 8.4 Eksponentialfunksjoner 8.5 Derivasjon av produkt 8.6 Derivasjon av kvotient
Asymptoter	6.4 Asymptoter	3D Rasjonale funksjoner	7.3 Vertikale asymptoter 7.4 Horisontale og skrå asymptoter