Fakultetet for naturvitenskap og teknologi,

Institutt for matematikk og statistikk

Hvor er bevisene?

- *Analyse av bevis i lærebøker i matematikk R2*

—

Oskar Jensen Wang

Masteroppgave i matematikk ved lektorutdanningen trinn 8-13 (Mat-3907), Juni 2018

Sammendrag

I denne oppgaven har jeg analysert tre lærebøker i matematikkfaget R2. Oppgaven begrenset seg til emnet algebra i disse tre bøkene. Problemstillingen er: *Hvordan introduseres og brukes matematiske bevis i lærebøker?* For å besvare denne problemstillingen ble det utført en mixed methods-studie, altså samlet jeg inn og brukte både kvalitative og kvantitative data. Selve analysen tok utgangspunkt i et sammensatt rammeverk, og tok for seg både teori, eksemplene og oppgavene i lærebøkene.

I det følgende vil jeg presentere noen av de viktigste resultatene. Alle lærebøkene sett under ett, havnet størstedelen av den nye teorien som presenteres på det *deskriptive nivået*. Videere er det totalt bare et eller to beviser i hver bok for formlene som presenteres for elevene. Blant oppgavene med en bevisrolle, er det en blanding av rollene *verifisere*, *forklare* og *oppdage*. Av disse er det *verifisere* som er den dominerende i alle tre lærebøkene. Deretter ble oppgavene kategorisert om de krever kreativ resonnering for å løses. *Matematikk R2* skilte seg ut med å ha klart flest oppgaver med imitativ resonnering, mens *Sigma R2* og *Sinus R2* hadde en jevnere fordeling mellom imitativ og kreativ resonnering.

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på min femårige utdannelse i lektor 8-13. Gjennom studietiden føler jeg at jeg har lært mye og fått erfaring med hva det vil si å være lærer i praksisperiodene.

Jeg vil takke hovedveileder Anne Fyhn ved institutt for lærerutdanning og pedagogikk for alle samtaler, innspill og tilbakemeldinger. Samtidig vil jeg takke biveilederne mine Trygve Johnsen, ved institutt for matematikk og statistikk, og Alv Birkeland, ved institutt for lærerutdanning og pedagogikk.

Videre vil jeg takke familien min som har støttet meg gjennom hele studietiden og hele tiden vært tilgjengelig for samtaler.

Tilslutt ønsker jeg takke medstudentene mine. Vi har ledd sammen og stått sammen i møte med blant annet utfordrende oppgaver og vanskelig fagstoff. Dere har gjort tiden på universitetet minneverdig.

Tromsø, Mai 2018

Oskar J. Wang

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for oppgaven

Når jeg begynte på universitetet merket jeg at det i større grad var behov for å forstå og å lage bevis i matematikken enn tidligere i skolegangen min. Helt til og med videregående skole hadde jeg ikke i nevneverdig grad brydd meg om bevis. For meg var det var bevis noe som viste at matematikken stemte, men å forstå et bevis var ikke hovedprioritet for å si det sånn. Derimot, på universitetet har jeg flere ganger stilt meg følgende spørsmål når jeg har løst oppgaver: 1) hva er et bevis? 2) hvordan formulerer jeg et bevis? Og 3) teller det jeg har gjort nå som et bevis? Jeg var ikke alene om dette. Blant de studentene jeg har jobbet mest med, var dette spørsmål som har kommet opp flere ganger. Derfor har jeg lurt på hvordan bevis bli behandlet på videregående skole.

I *læreplan i matematikk for realfag* (Kunnskapsdepartementet (KD), 2006) er det fremhevet fire grunnleggende ferdigheter som det er meningen at elever skal lære seg gjennom undervisning i fordypningsfagene i realfagsmatematikk, R1 og R2. Under ferdigheten *å kunne uttrykke seg muntlig og skriftlig* står det at elevene skal kunne *«formulere et matematisk bevis skriftlig med bruk av korrekt matematisk notasjon og logisk gyldige slutninger inngår»* (KD, 2006, s. 4). Hvis man ser på kompetansemålene for R2 i *Læreplan i matematikk for realfag* er bevis nevnt to ganger under emnet algebra. Det står at elevene skal kunne gjennomføre og presentere enkle bevis knyttet til formler for tallmønstre, og gjennomføre og gjøre rede for induksjonsbevis (KD). Utenom dette er ikke bevis nevnt i andre kompetansemål.

Bevis inngår i Niss' åtte sentrale kompetanser som til sammen utgjør matematisk kompetanse (Niss & Højgaard Jensen, 2002). Matematisk kompetanse defineres som blant annet å ha viten om, forstå og anvende matematikk i flere forskjellige sammenhenger. Innenfor resonnementskompetanse, som er en av de åtte kompetansene, går ut på å lage og gjennomføre matematiske resonnement, og å følge og bedømme andres resonnement. Herunder inngår det å vite og forstå hva et matematisk bevis er, og å avgjøre når et matematisk resonnement utgjør et bevis.

Lærebøker en forleggers tolkning og implementering av hva det er meningen at elever skal lære seg, altså det som er beskrevet i læreplanen (Charalambous, Delaney, Hsu & Mesa, 2010). Ved lærebokanalyse anbefaler Li (2000) å analysere både teoridel og oppgaver. Dette begrunnes med at siden en analyse av teoridel og en analyse av oppgaver har forskjellige fokus i analyseringen av lærebøker og deres mulige innvirkning på elevenes matematiske prestasjon. Dermed kan en analyse av både teoridel og oppgavene muligens avdekke flere slike innvirkninger enn om man bare analyserer en av delene. Videre påpeker Thompson, Senk og Johnson (2012) at teoridelen gir læreren mulighet til å introdusere bevis og resonnement til elevene, mens oppgavene lar elevene øve på bevis og resonnement. Thompson mfl. (2012) mener en analyse av både teoridel og oppgaver skaper et mer helhetlig bilde av muligheten elevene har til å lære resonnement og bevis.

1.2 Problemstilling

På bakgrunn av det ovennevnte burde det stilles krav til hvordan lærebøkene tar for seg bevis. Dette fører til følgende overordnede problemstilling:

Hvordan introduseres og brukes matematiske bevis i lærebøker?

I denne oppgaven har jeg analysert tre lærebøker for matematikkfaget R2 fra forskjellige forlag. Tabell 1.1 viser de forskjellige lærebøkene jeg har analysert i denne oppgaven. I tabellen står det hvem som er forfattere, hvilket forlag som har gitt ut bøkene og årstallet de er gitt ut. Jeg har valgt å referere til lærebøkene ved boknavn i resten av oppgaven. Dette er for å enklere skille mellom dem.

Ettersom bevis nevnes bare i kompetansemålene for emnet algebra, har jeg valgt å begrense analysen til kapittelet som tar for seg dette emnet. I alle tre lærebøkene er dette kapittelet om *Følger og rekker*. Analysen ble utført på bakgrunn av et sammensatt rammeverk. I hovedsak tok dette rammeverket for seg teorien som ble presentert, eksemplene og oppgavene i lærebøkene.

Tabell 1.1: Dette er de tre lærebøkene som jeg har valgt å analysere.

Lærebok	Forfattere	Forlag	Årstall
Matematikk R2	Odd Heir Inger Christin Borge John Engseth Hermod Haug Håvard Moe	Aschehoug	2016
Sigma R2	Karl Erik Sandvold Stein Øgrim Tore Bakken Bjørnar Pettersen Knut Skrindo Anne Thorstensen Runar Thorstensen	Gyldendal	2015
Sinus R2	Tore Oldervoll Odd Orskaug Audhild Vaaje Otto Svorstøl Sigbjørn Hals	Cappelen Damm	2015

For å forenkle analyseringen deles problemstillingen inn i flere underspørsmål:

- Hvordan fordeler presentasjonen av ny teori og eksempler seg mellom visuelt nivå, deskriptivt nivå, teoretisk nivå eller formelt nivå?
- Hvordan presenteres induksjonsbevis?
- Hvilken type rolle har bevisene i oppgavene?
- Hvilke krav stiller oppgavene til elevers bruk av kreativ resonnering?

2 Teori

I denne delen vil jeg presentere teori som er knyttet til oppgaven og problemstillingen min. Først vil jeg presentere resultater fra tidligere forskning som er knyttet til bevis og resonnering i lærebøker. Deretter vil jeg se på hva som regnes som et bevis i matematikken og induksjonsbevis. Videre vil jeg presentere rammeverket til Charalambous mfl. (2010). Etter dette følger forskjellige måter å definere kreativ resonnering. Til slutt presenteres van Hieles (1986) nivåer av tenking, og hvordan bevis og kreativ resonnering henger sammen.

2.1 Tidligere forskning på bevis og resonnering i lærebøker

G. J. Stylianides (2009) analyserte amerikanske lærebok-serier hvor han så på hvilke muligheter de valgte lærebøkene ga studentene å arbeide med resonnering og bevis. I studien kategoriserte han oppgavene etter om de hadde med resonnering-og-bevis å gjøre eller ikke. Stylianides bruker bindestrek for å understreke fokuset på resonnering som er relatert til bevis. Det var fire forskjellige kategorier for resonnering-og-bevis: 1) identifisere et mønster, 2) lage en antagelse, 3) gi et bevis og 4) gi et argument som ikke var et bevis. Under kategori 3) gi et bevis, ble det også skilt mellom om hvilken rolle disse bevisene hadde. Rollene som ble brukt i denne studien var *verifisere*, *falsifisere*, *forklare* og *genering av ny kunnskap* (*oppdage*). Resultatene fra denne studien viste at 40 % av oppgavene var utformet for å gi studentene en mulighet for resonnering-og-bevis. Under kategorien gi et bevis fordelte oppgavene seg følgende mellom rollene: 94 % *forklare*, 61% *genering av ny kunnskap*, 17 % *verifisere* og 3 % *falsifisere*.

Charalambous mfl. (2010) gjennomførte en studie hvor de sammenlignet flere lærebøker i Kypros, Irland og Taiwan, og analyserte hvordan lærebøkene tok for seg addisjon og subtraksjon av brøker. Blant annet så studien på hvilke kognitive utfordringer oppgavene ga elevene og hvordan teori ble presentert. Et av funnene var at lærebøkene fra Taiwan inneholder en mye større andel av oppgaver som krever høyere kognitive krav enn lærebøkene fra de to andre landene (Charalambous mfl., 2010). Rammeverket som ble brukt i denne studien er beskrevet i kapittel 2.3.

Thompson mfl. (2012) utførte en studie hvor de analyserte utbredelsen av bevis og resonnering i 20 lærebøker fra videregående skole. I likhet med Charalambous mfl. (2010), valgte Thompson mfl. (2012) å analysere både teoridelen og oppgavene i lærebøkene innen emnene eksponenter, logaritmer og polynomer. I teoridelen ble alle nye egenskaper til eksponenter, logaritmer og polynomer som ble presentert kategorisert etter hvordan de ble begrunnet. Ble egenskapen begrunnet med: 1) et bevis, 2) et deduktivt argument om et konkret tilfelle, eller 3) begrunnelsen ble overlatt til studenten, eller 4) ingen begrunnelse. Oppgavene ble kategorisert etter om elevene ble bedt om å: 1) lage eller undersøke en antagelse, 2) utvikle eller evaluere et argument, eller 3) annen bevisrelatert resonnering. Funnene fra denne studien viser at 30,8 % av egenskapene ble begrunnet med et bevis, mens 22,4 % ble begrunnet med et deduktivt argument. 40% av egenskapene ble ikke begrunnet i det hele tatt. Når det kommer til oppgavene viste resultatene at kun 6% av oppgavene krevde bevisrelatert resonnering, hvor utvikle et argument og undersøke en antagelse som de mest vanlige typene (Thompson mfl., 2012).

2.2 Bevis

Et formelt bevis kan ses på som en rekke antagelser hvor den siste antagelsen er teoremet som er bevist, og alle antagelsene før dette er enten et aksiom eller resultatet av å gjøre en slutning på bakgrunn av den foregående formelen i sekvensen (Hanna & de Villiers, 2012). Slutningen skal være så innlysende at verifiseringen av beviset ikke trenger utdypende forklaring. A. J. Stylianides (2007) utviklet en definisjon av bevis i skolematematikk. Han definerer bevis som et matematisk argument, en sammenhengende sekvens av antagelser for eller mot en matematisk påstand, som oppfyller følgende tre kriterier:

1. Alle utsagn, definisjoner, og aksiomer skal være akseptert av elevene;
2. All form for resonnering som brukes skal være gyldig og kjent for elevene;
3. Beviset skal uttrykkes på en måte som er forståelig for elevene.

(A. J. Stylianides, 2007)

Disse tre kriteriene medfører at det kan være forskjellig hva som regnes som et bevis, avhengig av hvilket nivå av matematikk man er på (Solem mfl., 2017). Dermed er det ikke nødvendigvis like strenge krav til bevis i skolematematikken som til formelle bevis.

Hemmi (2010) argumenterer for at bevis danner et felles grunnlag for alle som driver med matematikk, fordi bevis tilbyr kriterier for å akseptere og generere ny matematisk kunnskap og sammenhenger mellom nye og gamle teoremer. Dette fører til at det blir enklere for nye generasjoner å tilpasse matematisk kunnskap fra tidligere generasjoner og tillater nye problemer innen matematikken. Ved hjelp av bevis er det mulig å skape en kjerne av matematisk kunnskap som er stabil fra generasjon til generasjon (Hemmi).

I matematikken har bevis fem forskjellige roller (de Villiers, 1990); 1) et bevis kan brukes til å *verifisere*, altså overbevise eller begrunne for andre, at en matematisk påstand er sann. Eller i motsatt tilfelle, å falsifisere en påstand. 2) Bevis kan brukes til å *forklare* hvorfor en antagelse eller påstand er sann. 3) Bruke bevis til å *organisere* og lage deduktive systemer av aksiomer, definisjoner og teoremer. 4) Ved arbeid med et bevis kan en matematiker *oppdage* eller dedusere et uventet resultat. Til slutt, 5) bevis er en måte å *kommunisere* eller overføre matematisk kunnskap til andre. Selv om disse fem rollene er forskjellige, betyr det ikke at de ikke kan være knyttet sammen på en eller annen måte. I noen tilfeller kan en rolle dominere de andre, mens i andre tilfeller kan en rolle være fraværende. Alt avhengig av situasjonen bevise opptrer i (de Villiers, 1990). Hemmi (2010) bemerket at erfaring med flere av bevisenes roller kan forsterke følelsen av mening med bevis hos studenter, og dermed øke deres deltagelse i matematisk praksis.

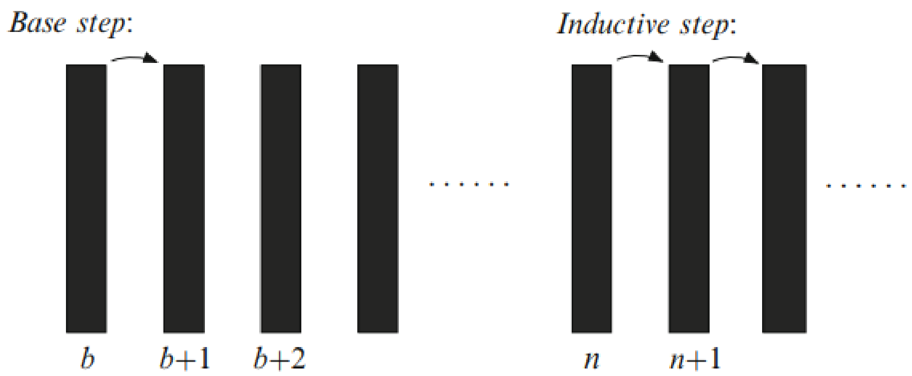
2.2.1 Induksjonsbevis

En type bevis, som nevnes spesifikt i kompetansemålene for R2 (KD, 2006), er induksjonsbevis. Ved induksjon prøver man å gå fra eksempler eller noe som gjelder for spesifikke tilfeller til noe som gjelder generelt (Hemmi, 2010). Dette er også tilfelle for induksjonsbevis. Hvis man har et utsagn *P(b)* som gjelder for et heltall *b*, kan induksjonsbevis brukes til å vise at utsagnet også gjelder for alle heltall større enn *b*. Cunningham (2013) definerer matematisk induksjon på følgende måte: La b være et gitt heltall og la $P(n)$ være et utsagn som er definert for alle heltall $n \geq b$. Anta at

1. $P(b)$ er sann, og
2. For alle $n \geq b$, hvis $P(n)$ da $P(n+1)$.

Da er påstanden $P(n)$ sann for alle heltall $n \geq b$.

Utførelsen av induksjonsbevis kan ses på som en bevisstrategi som er delt inn i to steg: et *basissteg* og et induktivt steg (Cunningham, 2013). På *basissteget* beviser man at $P(b)$ er sann. Deretter følger *det induktive steget*, hvor man først lar $n \geq b$ være et heltall og antar at $P(n)$ er sann, og etterpå beviser at $P(n+1)$ er sann. Cunningham begrunner at en slik framgangsmåte vil fungere på grunn av at etter å ha bevist at påstanden gjelder for en verdi b kan det vises at påstanden også gjelder for $b + 1$, deretter ar det gjelder for $b + 2$. Videre kan det hele tiden vises at påstanden gjelder for et heltall som er 1 større enn den forrige. Dette generaliseres til å heller sjekke for $n + 1$, istedenfor hvert enkelt heltall. Figur 2.1 illustrerer denne generaliseringen.



Figur 2.1 Illustrasjon av basissteg og induktivt steg. Hentet fra Cunningham (2013)

2.3 Teoretisk rammeverk

Rammeverket til Charalambous mfl. (2010) er delt inn i to dimensjoner. Ved å bruke et rammeverk som består av begge dimensjonene, kan analyseringen belyse flere aspekter enn om bare den ene dimensjonen blir brukt. Charalambous mfl. forklarer at bruken av begge dimensjonene danner grunnlag for å bedre kunne utforske mulighetene elevene har for å lære enn ved bruk av bare en dimensjon. De to dimensjonene kaller Charalambous mfl.: horisontal og vertikal analyse. Meningen med den *horisontale analysen* er å få et mer helhetlig bilde over lærebøkene, for eksempel antall sider, emner som blir dekt, rekkefølgen på kapitler. Den horisontale analysen sier derimot ingenting om selve innholdet i bøkene. Det gjør derimot den *vertikale analysen* som går i dybden på det matematiske innholdet. Den vertikale analysen kan fortelle hvordan noe om hvordan teori blir presentert og hva oppgavene krever av elevene for å løse dem (Charalambous mfl., 2010).

Den horisontale analysen er delt i to kategorier: bakgrunnsinformasjon og generell struktur (Charalambous mfl., 2010). Den første kategorien gir et deskriptivt overblikk over læreboka og produksjonsbakgrunnen. Dette kan være tittel på boka, antall sider, forfatter(e) og utgiver. Den andre kategorien, generell struktur, gir en oversikt over emnene i læreboka og rekkefølgen på disse. Charalambous mfl. (2010) har delt den vertikale analysen inn i tre kategorier: *kommunisert til studentene* (communicated to students), *krevd av studentene* (required of students) og *sammenhenger* (connections). Kategorien *kommunisert til studentene* ser på det matematiske innholdet i læreboken og hvordan det er presentert til elevene. *Krevd av studentene* tar for seg hvilke krav læreboken stiller til elevene når de skal løse oppgaver, herunder er kognitive krav og type svar (kort svar, matematisk setning eller forklaring). *Sammenhenger* analyserer sammenhengene mellom det matematiske innholdet i læreboka og mellom læreboka og klasserommet eller situasjoner utenfor skolen. Charalambous mfl. (2010). Hele rammeverket kan ses i Figur 2.2.

HORIZONTAL ANALYSIS OF THE TEXTBOOK

Background Information	**Overall Structure**
• Title • Number of books • Pages (Number and Density) • Profile of authors and advisory committee • Publisher and year of publication • Accompanying materials (e.g., teachers' guides, resource materials)	• Number of units/lessons and average number of pages per unit/lesson • Structure of units/lessons • Topics covered • Sequencing of topics

VERTICAL ANALYSIS OF THE TEXTBOOK

Communicated to Students	**Required of Students**	**Connections**
Mathematical Content • Topic-specific construct, structure etc. (e.g. part-whole, ratio, operator, quotient, measure fraction constructs) • Definitions, rules, conventions • Illustrations-representations (irrelevant, relevant to the context but not to the mathematics, supporting the mathematics) *Mathematical Practices* • Worked examples • Modeling thinking *Attitudes* • Equity • View of mathematics	• Potential Cognitive Demands (memorization, procedures with connections, procedures without connections, doing mathematics) • Type of Response (answer only, answer and mathematical sentence, explanation, justification)	• Connecting within and between strands • Classroom instruction - textbook connections • Connecting to situations outside of school

Figur 2.2 Rammeverket til Charalambous et al. (2010)

Som grunnlag for lærebokanalysen vil jeg ta utgangspunkt i noen rammeverket som er utviklet av Charalambous mfl. (2010). Deretter vil jeg bygge ut dette rammeverket med rammeverk fra andre, slik at dette blir et sammensatt rammeverk. Under kategorien *kommunisert til studentene* vil jeg et rammeverk fra van Hiele (1986) som tar for seg nivåer av tenking i matematikk. I tillegg vil jeg se hvordan lærebøkene tar for seg induksjonsbevis. I *krevd av studentene* vil jeg analysere hvilken rolle bevisene har i oppgavene, og bruke Lithners (2008) rammeverk som kategoriserer oppgavene i lærebøkene etter om de enten krever imitativ eller kreativ resonnering. Teori angående kreativ resonnering og nivåer av tenking i matematikk presenteres i henholdsvis kapittel 2.5 og 2.4.

2.4 Læringsnivåer i matematikk

van Hiele (1986) har utviklet en inndeling av matematikk i fem *nivåer av tenking* (levels of thinking). Disse nivåene er har et hierarkisk system, tenkning på et nivå er ikke mulig uten tenking på de lavere nivåene. Nivå 1 er det laveste, deretter kan elever trinnvis bevege seg mot høyere nivåer. Overgangen mellom et nivå til det neste er ikke en naturlig prosess, men den påvirkes av et undervisning-læringsprogram, for eksempel gjennom valg av passende oppgaver (van Hiele). De fem nivåene i matematikk er:

1. *visuelt nivå*
2. *Deskriptivt nivå*
3. *Teoretisk nivå*; med logiske relasjoner
4. *Formell logikk*; en studie av lovene i logikk
5. *Naturen til logiske lover*

(van Hiele, 1986)

van Hiele (1986) påpeker at nivå 5 og høyere kun har teoretisk verdi, og for elever burde fokuset heller burde ligge på nivåene 1-4. Hvis elevene ikke forstår læreren er det på nivåene 2, 3 og 4 at elevene ikke forstår, og ikke høyere. Videre påpekes det at et nivå ikke er viktigere eller mer verdt enn et annet nivå. For hvert nytt tema som introduseres skal undervisningen starte på nivå 1. Dette begrunner Van Hiele med at vanskelighetene starter på nivå 2 på grunn av at beskrivelsene avhenger av valgt kontekst, og ustabiliteten av de neste nivåene som skyldes at de bygger på lavere nivåer.

Personer på det første nivået, det visuelle nivået, tilegner seg kunnskap om matematiske egenskaper gjennom intuisjon og observasjoner av figurer, grafer eller symboler. På det andre nivået beskrives relasjoner og elementer. Her skal personene kunne anvende operasjonelle egenskaper og trekke konklusjoner angående relasjoner mellom egenskaper (van Hiele, 1986).

For å illustrere forskjellen på nivå en og to bruker Van Hiele en rombe. Hvis en person på det første nivået ser et bilde av en rombe, kan denne personen deretter gjenkjenne en annen rombe som en rombe uten videre forklaring. På nivå to legges egenskaper til romben. Dermed kan personen konkludere med for eksempel: «dette er ikke en rombe, fordi de fire sidene ikke er like lange», eller at alle kvadrater er romber (van Hiele, 1986).

Det tredje nivået omhandler generalisering og å være i stand til å bevise enkelte egenskaper ved anvendelse av matematiske egenskaper og forstå hvorfor de forskjellige stegene utføres. van Hiele (1986) presenterer et eksempel som tar for seg kalkulering på nivå to og tre. Nivå to tar for seg relasjoner mellom tall, for eksempel: $4 * 3 = 12$ og $6 + 8 = 14$, mens på nivå tre er det generalisering av resultater, for eksempel $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$, hvor man ikke bruker tall. Nivå tre inkluderer også uformelle bevis. Nivå fire derimot består av formelle bevis.

2.5 Kreativ resonnering

I kategorien krevd av elevene skal jeg analysere hvilke kognitive utfordringer som stilles til elevene når de løser oppgaver i en lærebok. For å gjøre dette skal jeg bruke et rammeverk som er utviklet av Lithner (2008). Rammeverket kategoriserer oppgavene som enten en form for imitativ eller kreativ resonnering. Det er ingen klar definisjon av hva som regnes som matematisk kreativitet (Haylock, 1997). Derfor vil jeg først beskrive hva Lithner mener om kreativ matematisk resonnering, deretter tar jeg for meg kreativ resonnering hos Haylock (1997) og Mellin-Olsen (1984).

Lithner (2008) definerer resonnering som den tankerekken som blir utført for å produsere påstander og komme til en konklusjon i oppgaveløsning. Denne tankerekken trenger ikke være basert på formell logikk eller bevis og kan til og med være feil så lenge den som utfører resonneringen mener det ligger fornuftige grunner bak tankerekken. Man kan se på resonnering som et produkt av en resonneringssekvens som starter med en oppgave og ender med et svar (Lithner). Oppgaveløsning kan bli sett på som en utførelse av fire steg.

- Steg 1: Presentasjon av (del)oppgaven. Hvis det ikke er klart for oppgaveløseren kalles det en problematisk situasjon.

- Steg 2: Valg av strategi. Dette kan være å velge, huske, konstruere eller undersøke en prosedyre eller tilnærming til oppgaven. Valget kan være støttet av spørsmålet: Hvorfor vil strategien løse oppgaven?
- Steg 3: Strategien blir implementert, som kan bli etterfulgt av spørsmålet: Hvorfor førte strategien fram til løsningen på oppgaven.
- Steg 4: Oppgaveløseren kommer fram til en konklusjon eller svar på oppgaven.

(Lithner, 2008)

2.5.1 Imitativ og kreativ resonnering hos Lithner

Hvordan strategi oppgaveløseren (elevene) velger, bestemmer hvilken type resonnering som blir brukt, om det er imitativ eller kreativ resonnering. Imitativ resonnering kan kort beskrives som å følge en algoritme eller et eksempel, og kan deles inn i to hovedtyper; *memorert resonnering* (MR) og *algoritmisk resonnering* (AR) (Lithner, 2008).

2.5.1.1 Memorert resonnering

For at en oppgave skal karakteriseres som MR må den oppfylle to kriterier.

1. Valg av strategi er å huske et komplett svar.
2. Implementasjonen av strategien er kun å skrive den ned.

(Lithner, 2008)

Memorert resonnering er mest naturlig å bruke på oppgaver som spør etter fakta, definisjoner og bevis. Eksempler på slike spørsmål kan være: hvor mange cm^3 er en liter? Eller, hva er et polynom? (Lithner, 2008).

2.5.1.2 Algoritmisk resonnering

Algoritmisk resonnering går ut på å huske eller lete etter en algoritme som man tror kan løse oppgaven, for deretter å bruke denne algoritmen (Sidenvall, Lithner & Jäder, 2015). Dette er vanlig oppgaver som ber om at man skal beregne noe er det mer naturlig å huske en algoritme enn et svar (Lithner, 2008). Brousseau (1997) definerer en algoritme som en endelig sekvens av utførbare steg som fører til et svar for et gitt sett av oppgaver. I rammeverket til Lithner (2008) inkluderes alle tidligere presenterte prosedyrer i begrepet algoritme. Dette begrunnes med at alle de delene av en oppgave hvor oppgaveløseren må tenke selv blir dekt av algoritmen, og dermed må oppgaveløseren bare utføre de forskjellige stegene. Dermed kan

AR brukes med både begrenset og full forståelse av prosedyren (Lithner, 2008). AR må tilfredsstille følgende to kriterier:

1. Valg av løsningsstrategi er å huske en algoritme.
2. Implementeringen av strategien består i å følge den valgte algoritmen steg for steg. Det eneste som kan hindre oppgaveløseren i å komme fram til rett svar er en slurvefeil.

(Lithner, 2008)

Lithner (2008) deler AR inn i tre underkategorier: *Familiær AR* (FAR), Avgrenset *AR* (AAR) og *Guidet AR* (GAR).

- **Familiær AR**

FAR er forbundet med at oppgaveløseren leter etter kjente (muligens overfladiske) ledetråder eller hint som deretter fører til valg av en antatt passende algoritme (Sidenvall mfl., 2015). Disse likhetene kan for eksempel være begreper, grafer og symboler som gjenkjennes fra tidligere gjorte oppgaver som ligner på den oppgaven som skal løses. Lithner (2008)

- **Avgrenset AR**

Hvis en elev ikke klarer å knytte en kjent algoritme til oppgaven, og kan eleven velge ut et sett med av algoritmer som er innsnevret på bakgrunn av algoritmenes overfladiske likheter til oppgaven (Sidenvall mfl., 2015). Deretter prøves algoritmene ut en etter en. Hvis en algoritme ikke fører frem til et fornuftig svar/konklusjon (til eleven), vil resonneringssekvensen stoppe opp uten videre evaluering og eleven velger en annen algoritme fra settet (Lithner, 2008).

- **Guidet AR:**

Hvis verken Familiar AR eller Delimited AR fører fram til et tilfredsstillende svar, kan eleven søke etter hjelp fra en ekstern kilde, enten en skriftlig kilde, læreren eller en medelev (Lithner, 2008). Om eleven spør læreren eller en medelev om hjelp, vil valg av løsningsstrategi bli gjort av denne personen og eleven følger de instruksjonene som blir gitt. På en annen side kan eleven lete gjennom skriftlige kilder, sånn som læreboka. Da gjøres valg av algoritme på bakgrunn av overfladiske likheter som eleven gjenkjenner mellom oppgaven og et eksempel, definisjon, teorem, regel eller en annen situasjon i en tekstkilde. Deretter brukes algoritmen uten et verifiserende argument (Sidenvall mfl., 2015).

2.5.1.3 Kreativ matematisk begrunnet resonnering

På motsatt side av imitativ resonnering har vi *kreativ matematisk begrunnet resonnering*, eller Creative mathematically founded reasoning (CMR) som (Lithner, 2008) kaller det. I denne oppgaven kommer jeg til å referere til denne typen resonnering som enten *kreativ resonnering* eller *CMR*. I motsetning til i imitativ resonnering konstrueres hele eller deler av løsningsmetoden i CMR. For at en oppgave skal kategoriseres som CMR må følgende tre kriterier være oppfylt:

- *orginalitet*. En ny (for den som utfører resonneringen) sekvens av resonnering er produsert, eller en glemt er reprodusert.
- *Plausibilitet*. Argumentene som støtter valget av strategi og implementeringen av den er korrekte eller plausible.
- *Matematisk fundament*. Argumentene er basert på iboende matematiske egenskaper ved elementene som er med i resonneringen.

(Lithner, 2008).

Kreativ resonnering kan inneholde deler av imitativ resonnering. Avhengig av hvor mye imitativ resonnering som brukes, kan CMR deles inn i lokal CMR og global CMR (Palm, Boesen & Lithner, 2011). Lokal CMR er i hovedsak basert på imitativ resonnering, men inneholder mindre deler av kreativ resonnering. Global CMR består av store deler kreativ resonnering, men kan inneholde elementer av imitativ resonnering (Palm mfl.).

2.5.2 Kreativ resonnering hos Haylock og Mellin-Olsen

To sentrale begreper innen kreativ resonnering hos Haylock (1997) er *fleksibilitet* og *divergent tenking*. For å forstå *fleksibilitet* er det enklere å se på *fiksering*, som er det Haylock setter opp som motsats til fleksibilitet. Fiksering deles inn i to typer fiksering: *innholds-univers fiksering* og *algoritmisk fiksering*. Med *innholds-univers fiksering* menes det å ikke kunne se alle mulighetene i en situasjon. En elev med denne typen fiksering vil ha en begrenset oppfatning av måter å løse et problem på. *Algoritmisk fiksering* innebærer at en elev holder seg til algoritmer som tidligere har fungert. Dette på tross av at det kan finnes enklere løsninger, eller at til og med tankegangen er feil. Dermed blir *fleksibilitet* et mål på evnen til å se flere måter å løse en oppgave og ikke blindt følge en algoritme for å komme fram til et svar.

Det andre begrepet *divergent tenking* referer til oppgaver hvor det er mange mulige løsninger (Haylock, 1997). For å måle den divergente tenkingen i et svar, kan man ta utgangspunkt i tre kriterier: *fluency*, *fleksibilitet* og *originalitet* (Haylock, 1987). *Fluency* henviser til antall svar på en oppgave, *fleksibilitet* sier noe om antall typer svar, mens *originalitet* peker på hvor ofte et svar går igjen i en samling av besvarelser. Motsatsen til divergent produksjon er *konvergent tenking*, hvor det bare er en løsning på oppgaven.

Mellin-Olsen (1984) deler inn i to tuper forståelse når det kommer til regler i matematikken: *regelforståelse* og *strukturforståelse*. *Regelforståelse* omhandler forståelsen av hvordan en regel eller et prinsipp skal brukes i matematikk. Sammen med det å kun være ute etter å få rett svar utgjør dette *instrumentell forståelse.* På den motsatte siden finner man *strukturforståelse*. Dette er forståelse av hvorfor en regel er slik som den er. I følge Mellin-Olsen, kan elever med strukturforståelse i større grad forstå sammenhengen matematiske tegn brukes i, og dermed kunne bruke symbolet i andre situasjoner. Birkeland, Fyhn og Sriraman (2016) argumenterer for at hvis en student skal ha kreative matematiske resonnementer, holder det ikke med instrumentell forståelse av matematikk. Derimot er det mer ønskelig med strukturforståelse.

2.6 Sammenheng mellom bevis og kreativ resonnering

van Hiele (1986) skisserer et scenario hvor en elev blir bedt om å gi et bevis for en påstand. Hvis eleven ikke er på et høyt nok nivå av tenking, kan den lære seg alle stegene i beviset utenat. Dermed kan det være vanskelig å vite om eleven har forstått beviset, for den vet hvilke egenskaper som skal brukes. Dersom eleven ikke er på nivå tre, vet den ikke hvorfor disse egenskapene skal brukes. Når denne eleven etterpå blir stilt overfor et nytt problem, evner den ikke å overføre denne kunnskapen.

Dette scenarioet illustrerer en mulig konsekvens av å pugge et bevis uten å egentlig forstå beviset. Hvis eleven ikke har forstått hvorfor beviset er slik som det er, har eleven ingen nytte beviset. Det kan ikke brukes til noe. Dermed kan det se ut som at for å forstå et bevis er det nødvendig med en høyere forståelse av matematikk.

Scenarioet ovenfor kan også knyttes til imitativ resonnering hos Lithner. Eleven har lært seg beviset utenat, men ikke forstått innholdet. En slik form for utenat læring plasserer Lithner (2008) inn under imitativ resonnering. Lithner (2004) påpeker at hovedproblemet med for stort fokus på imitativ resonnering er at det fører til en dårligere forståelse av alle aspekter ved matematikk. For eksempel, manglende generelle problemløsningsferdigheter eller lav forståelse av matematiske egenskaper.

I en studie utført av Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi og Christou (2013) ble det undersøkt om det er en sammenheng mellom matematisk kreativitet og matematisk evne. Som et mål på matematisk kreativitet brukte de *divergent tenking*. Et av resultatene fra denne studien var at det er en sammenheng. Studenter med høy matematisk evne har også høy matematisk kreativitet. Motsatt gjelder for elever med lav matematisk evne, som har lav matematisk kreativitet. De konkluderte med at matematisk kreativitet er en komponent av matematisk evne. Denne sammenhengen mellom matematiske evne og matematisk kreativitet samsvarer med resultater fra Bahar og Maker (2011) og Leikin og Lev (2013).

Matematisk resonnering er en sentral del av begrunnelse eller bevis av matematiske påstander (Ball & Bass, 2003). Resonneringskompetanse hos Niss og Højgaard Jensen (2002) omhandler blant annet å forstå hva et matematisk bevis er og avdekke de grunnleggende ideene i et bevis, inkludert å kunne skille mellom hovedlinjene i argumentene og detaljer. I *Trends in Mathematical Science Study Advanced* 2015 (TIMSS Advanced 2015) for matematikk og fysikk deles elevene inn i tre forskjellige kompetansenivåer (L. S. Grønmo, Hole & Onstad, 2016). På avansert kompetansenivå, som er det høyeste, skal elevene kunne anvende matematisk resonnering. Å resonnere defineres her som blant annet å formulere matematiske argumenter og bevis.

3 Metode

I denne delen vil jeg først si noe generelt om lærebokanalyse og dokumentanalyse. Her vil jeg også relatere valg av metode sammen med analyseringen jeg utførte. Videre presenterer jeg utvalget i denne oppgaven. Deretter vil jeg beskrive hvordan jeg utførte analyseringen. Til slutt vil jeg komme med kommentarer angående validiteten og reliabiliteten til oppgaven.

3.1 Lærebokanalyse

Forskning på lærebøker matematikk har i løpet av de siste tiårene fått økt oppmerksomhet fra det internasjonale forskningssamfunnet i matematikkutdanning (Fan, 2013). Den mest vanlige typen forskning på lærebøker i matematikk er lærebokanalyse (Fan, Zhu & Miao, 2013). Lærebokanalyse kan enten utføres på en enkelt lærebok eller lærebokserie, eller lærebøker fra forskjellige forlag, fra samme eller ulike land. Lærebokanalyse kan deles inn i forskjellige aspekter (Fan mfl.). De to mest relevante for denne oppgaven er *matematisk innhold og emner*, og *kognisjon og pedagogikk*. Matematisk innhold og emner handler om hvordan innhold og emner blir behandlet, mens kognisjon og pedagogikk ser på hvilke kognitive ferdigheter som kreves av elevene.

3.2 Dokumentanalyse

S. Grønmo (2004) definerer dokumenter som alt fra skriftlig framstilling, lydopptak av muntlige framstillinger, til visuelle framstillinger, som bilder, grafikk eller video. Dokumenter kan brukes som kilde til å finne relevant informasjon om problemstillingen. På bakgrunn av problemstillingen blir det nødvendig å gjennomføre en dokumentanalyse av lærebøkene for å kunne si noe om det matematiske innholdet i bøkene.

Hvilket synspunkt innholdet i dokumentene blir skildret fra kan påvirke innholdet. På en side kan dokumenter bestå av meningsytringer og oppfatninger om det dokumentet handler om. Dermed kan slike dokumenter subjektive meninger fra forfatteren. Motsatt kan dokumenter være faktainformasjon, og ikke være påvirket av standpunktet til forfatterne (S. Grønmo, 2004). Ettersom lærebøker skal være en sann representasjon av omverdenen og være objektiv (Johnsen, 2001), vil lærebøker havne innunder sistnevnte kategori.

3.2.1 Innholdsanalyse

Innholdsanalyse er en systematisk undersøkelse av dokumenter, med hensikt å kategorisere, registrere og analysere innholdet (S. Grønmo, 2004). Grønmo deler innholdsanalyse inn i kvalitativ og kvantitativ innholdsanalyse, alt etter hvordan datamaterialet samles inn. Analysen jeg gjennomførte består av både kvalitativ og kvantitativ innholdsanalyse.

Ved kvalitativ innholdsanalyse vil de valgte dokumentene gjennomgås systematisk med hensikten å kategorisere og registrere innhold som skal hjelpe til å svare på problemstillingen (S. Grønmo, 2004). En kvalitativ tilnærming kan brukes til å gå i dybden på materialet og dermed skape en forståelse av faktiske forhold (Thagaard, 2009). I kvalitativ innholdsanalyse skjer datainnsamlingen og analyseringen av data samtidig (S. Grønmo). Jeg vil si at min oppgave består i hovedsak av kvalitativ innholdsanalyse. Dette skyldes at blant annet bestemte hvilket nivå av tenking teorien og eksemplene tilhørte, hvordan lærebøkene har skrevet om induksjonsbevis og kategorisert om oppgavene krevde imitativ eller kreativ resonnering. Analyseringen skjedde på bakgrunn av egne rammeverk for de forskjellige analyseringsdelene. Ettersom rammeverkene jeg har brukt, nesten utelukkende, baserer seg på allerede eksisterende rammeverk, vil dette være en deduktiv kvalitativ innholdsanalyse. En deduktiv analyse tar utgangspunkt i begreper og teorier fra tidligere forskning (S. Grønmo). Det motsatte av deduktiv, er induktiv kvalitativ innholdsanalyse. I en induktiv analyse vil kategoriene dannes på grunnlag av datamaterialet som analyseres (S. Grønmo). Når jeg analyserte hvordan induksjonsbevis ble behandlet i lærebøkene laget jeg selv kategoriene, dermed blir denne delen av analysen induktiv.

I kvantitativ innholdsanalyse skjer analyseringen på bakgrunn av et ferdigutviklet skjema, kalt kodeskjema (S. Grønmo, 2004). I et kodeskjema registreres datamaterialet ved å merke av i skjemaet hvilken kategori som er relevant for hver enhet. I mitt tilfelle er enhetene oppgavene og eksemplene. Ved kvantitativ datainnsamling gjennomføres først datainnsamlingen, deretter vil datamaterialet analyseres. Dataanalysen baseres på antallet av enheter som plasseres i hver kategori.

Kodeskjemaene jeg brukte utviklet jeg i Excel. Mens jeg utførte den kvalitative innholdsanalysen førte jeg alle funnene inn i Excel. Slik som S. Grønmo (2004) anbefaler, brukte jeg et nytt kodeskjema for hver analyseenhet. Dette gjorde jeg ved å opprette et eget Excel-dokument til hver av de forskjellige rammeverkene, og hver lærebok fikk sitt eget ark i dokumentet. En positiv ting med dette var at jeg enklere kunne skille mellom funnene fra analyseringen av hver enkelt lærebok. De forskjellige Excel-dokumentene hadde lignende oppbygning. I en kolonne helt til venstre førte jeg opp oppgavenummer eller nummeret på eksemplene. Deretter fulgte kolonner med de forskjellige kategoriene som tilhørte det rammeverket jeg brukte. Når en oppgave eller eksempel ble plassert i en kategori, skrev jeg et 1-tall i den tilhørende ruten. Til høyre hadde jeg en kolonne hvor jeg skrev opp eventuelle kommentarer. Dette gjorde jeg hvis det var noe jeg var usikker på eller bemerkninger jeg følte var relevante. Dermed kunne jeg gå tilbake i ettertid å sjekke, og om mulig sammenligne med andre vurderinger jeg gjorde på et senere tidspunkt for å sikre et så rettferdig utfall som mulig. Når den kvalitative analyseringen var ferdig, kunne jeg summere opp antallet oppgaver og eksempler som havnet i de forskjellige kategoriene. Dette utgjorde dermed den kvantitative datainnsamlingen.

3.3 Mixed methods

Ved bruk av både kvalitative og kvantitative metoder, vil denne oppgaven havne inn under *mixed methods* (Creswell, 2009). Innsamlingen og analyseringen av data må foregå ved hjelp av både kvalitative og kvantitative metoder. Videre kombineres datamaterialet fra begge metodene. Kombineringen av datamaterialet kan skje på tre forskjellige måter: slå sammen, koble sammen eller bygge inn data fra det ene metoden inn i den andre (Creswell & Plano Clark, 2007). For eksempel skal jeg i denne oppgaven kategorisere oppgavene som etter hvilken type imitativ eller kreativ resonnering som kreves for å løse dem. Først vil jeg gjennomføre en kvalitativ analyse av oppgavene. Deretter vil fra resultatene fra den kvalitative analysen presenteres i kvantitativ form, som for eksempel antall og prosentandel. Dermed vil den kvantitative dataen bli koblet sammen med den kvalitative dataen.

Creswell (2009) påpeker at det er opp til forskeren å bestemme hvordan fordelingen av kvalitative og kvantitative metoder skal være. En metode kan brukes mer enn en annen. Det er kombinasjonen av kvantitativ og kvalitativ metode som kan styrke studien og danne et mer helhetlig bilde av problemstillingen enn hvis en metode hadde blitt brukt alene (Creswell & Plano Clark, 2007).

Det er flere forskjellige typer mixed methods. Jeg vil plassere min oppgave i det Creswell og Plano Clark (2007) kaller for *concurrent mixed methods*. Denne typen kjennetegnes ved sammenslåing av den kvalitative og kvantitative datamaterialer for å kunne danne en omfattende analyse av problemstillingen. Dette kommer til uttrykk ved at begge typer datamaterialer samles inn samtidig, og deretter brukes dette til å tolke resultatene (Creswell, 2009). Som tidligere nevnt, registrerer jeg resultatene fra den kvalitative analysen i et kodeskjema som deretter blir grunnlaget for det kvantitative datamaterialet. Dermed skjer denne innsamlingen samtidig.

Hvordan forskningen foregår er påvirket av hvilket *verdenssyn*, eller *paradigme*, forskeren har (Creswell, 2009). Verdenssynet påvirker valgene forskeren tar, blant annet gjennom hvilke(n) metode man bruker. Forskning som tar i bruk mixed methods blir typisk plassert her (Creswell & Plano Clark, 2007). Dette skyldes at forskeren står fritt til å velge metoder for å på best mulig måte besvare problemstillingen som er valgt (Creswell, 2009). Derfor vil jeg plassere denne oppgaven inn under et *pragmatisk* verdenssyn. Valget jeg tok med å bruke både kvantitative og kvalitative metoder skyldes av at jeg mente dette ville hjelpe å besvare problemstillingen.

3.4 Utvalg

Etter å ha søkt rundt etter lærebøker i faget matematikk R2, har jeg funnet tre lærebøker fra forskjellige forlag. Den ene læreboka er *Sigma R2 matematikk: studieforberedende matematikk R2*, som er utgitt av Gyldendal undervisning. Den andre læreboka er *Sinus matematikk R2: lærebok i matematikk: studiespesialiserende program*, som er utgitt av Cappelen Damm. Den tredje læreboka er *Matematikk R2*, som er utgitt av Aschehoug. Informasjon om forfattere og utgivelsesår er oppført i Tabell 1.1 i kapittel 1.2. Ettersom det kan være gjort endringer fra en utgave til en annen, bruker jeg den siste utgitte utgaven av alle tre lærebøkene. Alle tre lærebøkene forteller i oppslaget at de er skrevet etter gjeldende læreplan for faget matematikk R2.

Ifølge kompetansemålene i *Læreplanen i matematikk for realfag* skal elevene kunne gjennomføre og presentere enkle bevis for formler for tallmønstre og gjennomføre og gjøre rede for induksjonsbevis (KD, 2006). Alle tre lærebøkene tar for seg disse kompetansemålene i et kapittel, som alle bøkene har kalt *Følger og rekker*. Derfor vil min analyse være av dette kapittelet.

Ettersom *Sinus* R2 hadde veldig få oppgaver sammenlignet med de andre lærebøkene i dette kapittelet, valgte jeg å ta med oppgaver utenfor kapittelet *Følger og rekker* i denne læreboka. Bakerst i *Sinus R2* er det ekstra oppgaver til hvert kapittel. Disse oppgavene kalles «øv mer», og er tydelig merket hvilket kapittel de tilhører. Dette valget gjorde jeg for å få et større omfang av oppgaver, og dermed muligens et bedre bilde av oppgavene.

3.5 Utførelse av analysering

Analyseringen av lærebøkene tar utgangspunkt i rammeverket til Charalambous mfl. (2010). Jeg har valgt å bruke begge dimensjonene til Charalambous mfl., altså både horisontal og vertikal analyse. I den vertikale analysen har jeg brukt kategoriene *kommunisert til* studentene og *krevd av studentene*, men har hentet rammeverk fra andre for selve analysen. Dermed får jeg et rammeverk som er sammensatt av flere. I dette delkapittelet vil jeg presentere hvordan jeg utførte analysen.

Rekkefølgen jeg utførte analysen er lik rekkefølgen på beskrivelsen av hvordan jeg gjennomførte analysen under. Først startet jeg med den horisontale analysen for å bli kjent med lærebøkene. Andre var inndelingen av lærenøkenes teori og eksempler i van Hieles *nivåer av tenking*. Deretter fulgte analysen av induksjonsbevis i lærebøkene. Videre kategoriserte jeg hvilken rolle bevisene hadde i lærebøkenes oppgaver. Tilslutt analyserte jeg hvorvidt disse oppgave krevde kreativ resonnering. For hver analysebit gjorde jeg meg ferdig med de tre lærebøkene etter tur, før jeg gikk over til neste analysebit.

3.5.1 Horisontal analyse

I den horisontale analysen har jeg valgt å bruke noen av punktene fra rammeverket til Charalambous mfl. (2010). Dette er for å kunne si noe om hvordan de forskjellige lærebøkene og forlagene prioriterer det matematiske innholdet. Dette er også informasjon som jeg anser som relevant i tilknytningen til den vertikale analysen.

For å se på hvordan prioriteringer som er gjort har jeg sett på hvor mye plass som er satt av i lærebøkene til kapittelet *Følger og rekker*. Det vil si hvor mange sider det er i kapittelet sammenlignet med resten av læreboka, og antall oppgaver i kapittelet. I tillegg vil rekkefølgen på delkapitlene bli presentert.

3.5.2 Vertikal analyse

Den vertikale analysen er delt inn i kategoriene *kommunisert til studentene* og *krevd av studentene*. *Kommunisert til studentene* tar for seg teoridelen og eksemplene som blir presentert, mens *krevd av studentene* ser på oppgavene i lærebøkene. I *kommunisert til studentene* har jeg valgt å se på hvordan de forskjellige lærebøkene presenterer induksjonsbevis og hvilke læringsnivåer man kan plassere teori og eksempler i. Under *krevd av studentene* har jeg valgt å se på hvilken rolle bevisene har i oppgavene og hvilken resonneringstype som kreves for å løse disse oppgavene.

Ettersom det ikke er et fast antall deloppgaver på hver oppgave, hverken i hver enkelt lærebok og i hvert fall ikke på tvers av forlagene, måtte jeg ta en avgjørelse på hvordan jeg skal telle oppgavene. Derfor har jeg valgt at hver deloppgave teller som en. Dermed vil en oppgave uten deloppgaver være verdt en, mens en oppgave med fire deloppgaver vil telle som fire. Charalambous mfl. (2010) og Thompson mfl. (2012) gjorde et lignende valg og begrunnet dette med at det ville føre til en mer rettferdig framstilling av antall oppgaver

3.5.2.1 Kommunisert til studentene

3.5.2.1.1 Nivåer av tenking på teori og eksempler

Ifølge van Hiele og hans nivåer av tenking burde teori som presenteres starte med visuelle representasjoner. Deretter skal elevene trinnvis ledes gjennom nivåene. Ettersom van Hiele mener fokuset burde ligge på nivå 1-4, er det disse nivåene jeg skal plassere ny teori og eksemplene som presenteres i. Hvis det brukes flere forskjellige måter å introdusere definisjoner og formler, er det mulig at disse kan havne under flere kategorier. Jeg har valgt å ikke telle med definisjonsbokser. Dette skyldes at det er ganske lik praksis i de tre lærebøkene, og jeg er mer interessert i hvordan teorien presenteres for elevene.

Teorien og eksemplene kategoriseres etter følgende kriterier

- *Visuelt nivå:* Hvis det brukes illustrasjoner til å forklare teorien som presenteres eller eksemplene. Eksempler på illustrasjoner kan være figurer, grafer og symboler.
- *Deskriptivt nivå*: Hvis egenskaper ved figurer, definisjoner, formler og resultater presenteres ved hjelp av tall.
- *Teoretisk* nivå: generalisering av resultater og uformelle bevis plassert. Dette gjelder utledninger som ikke kvalifiseres som bevis og
- *Formelt* nivå: Formelle bevis.

3.5.2.1.2 Induksjonsbevis

I følge læreplanen for R2 (KD, 2006) skal elevene kunne gjennomføre gjøre rede for induksjonsbevis. Alle tre lærebøkene tar for seg induksjonsbevis i et eget delkapittel. Derfor skal jeg gjøre en kvalitativ analyse av hvordan bøkene introduserer/fremstiller induksjonsbevis, og hvordan induksjonsbevis formuleres. Ettersom jeg ikke var helt sikker på hva jeg kom til å finne valgte jeg å til dels gjøre en induktiv analyse, for å holde åpen muligheten for at jeg kunne finne noe jeg ikke hadde tenkt på på forhånd.

Jeg endte opp med å se på hvordan de tre lærebøkene presenterer og rettferdiggjør bruken av induksjonsbevis. Deretter så jeg på forskjeller i måten de har definert induksjonsbevis. Videre analyserte jeg om lærebøkene brukte induksjonsbevis for å bevise andre formler i oppgavene.

3.5.2.2 Krevd av studentene

3.5.2.2.1 Bevisenes rolle

Ettersom jeg ikke kan vite hvordan elevene arbeider i klasserommet, men bare kan analysere det som står i læreboka, har jeg valgt å se på hvilken rolle bevisene har i oppgavene i lærebøkene. Et matematisk bevis er et argument for eller imot en påstand (A. J. Stylianides, 2007). Derfor kategoriserer jeg oppgaver til å ha en bevisrolle, hvis elvene skal vise noe ved hjelp av utregning eller skal begrunne et utsagn med et tekstsvar. Deretter har jeg sett på hvilken rolle bevisene har i disse oppgavene.

I en studie utført av Bleiler-Baxter og Pair (2017) ble det undersøkt hvordan rolle bevisene hadde i et emne med forespørsel-basert tilnærming til bevis. De undersøkte skriftlige refleksjoner fra studenter på et universitet. Studentene reflekterte over situasjoner gjennom semesteret hvor de hadde arbeidet med de fem forskjellige rollene til bevis. Bleiler-Baxter og Pair prøvde å finne ut hvordan aktiviteter studentene anså som betydningsfulle i arbeidet med rollene til bevis. Studien endte opp med fem typer aktiviteter: *presentere*, *diskutere*, gjøre en *antagelse*, *arbeide med problemer* og *kritisere*. I aktiviteten arbeide med problemer identifiserte Bleiler-Baxter og Pair alle de fem forskjellige rollene til bevis.

For å analysere hvilken rolle bevisene har, har jeg brukt kriterier som baserer seg på resultater fra studien til Bleiler-Baxter og Pair (2017) for de forskjellige rollene til bevis. I tillegg har jeg hentet inspirasjon fra kriteriene G. J. Stylianides (2009) brukte i sin studie.

- *Verifisere*:
    - Elevene skal vise at et utsagn er sant.
- *Forklare*:
    - Elevene blir bedt om å bevise en påstand på mer enn en måte.
    - Elevene blir gitt en forståelsesoppgave.
- *Organisere*: Elevene skal systematisere forskjellige resultater inn i et deduktivt system av definisjoner og teoremer.
- *Oppdage*:
    - Elevene skal rette opp en gal påstand.
    - Elevene utvikler ny resultater. Med nye resultater menes det at elevene tilegner seg kunnskap gjennom å bevise utsagn hvor det ikke er bestemt hva elevene skal komme fram til.

Jeg har valgt å utelate rollen *kommunisere* fra analysen av oppgavene. Dette skyldes at det er vanskelig å definere denne rollen på en tydelig måte som kan brukes i en lærebokanalyse (G. J. Stylianides, 2009).

3.5.2.2.2 Kreativ resonnerings

I analyseringen av hvilken resonneringstype som kreves i oppgavene har jeg valgt å fokusere på de oppgavene som ble analysert til å inneha en bevisrolle.

I likhet med (Bergqvist, 2007), har jeg valgt å bruke kategoriene *memorert resonnering, algoritmisk resonnering, lokal kreativ resonnering* og *global resonnering*. Årsaken til at jeg ikke velger å ta med underkategorier av AR er at uten å nøyaktig vite hvordan eleven tenker og løser oppgaven, kan jeg ikke skille mellom hvordan eleven velger hvilken algoritme som skal brukes. Både (Bergqvist, 2007) og Palm mfl. (2011) påpeker at selv om en oppgave blir klassifisert som enten MR, AR, LCR eller GCR trenger ikke det nødvendigvis å bety at alle elevene, som har gjort oppgaven, har brukt samme type resonnering. Dette avhenger av hvor mange ganger den enkelte eleven har vært borti lignende hendelser. Med andre ord, hvor kjent oppgaven er for eleven.

En oppgave blir ansett som kjent for en elev hvis det eksisterer minst tre hendelser i læreboka som, hver og en, deler nok overfladiske egenskaper med oppgaven slik at det fører til eleven til en korrekt løsning på oppgaven (Bergqvist, 2007). Hun definerer en hendelse som enten et eksempel, en annen oppgave med lik løsning eller deler av teori som deler nok overfladiske egenskaper med oppgaven som analyseres. For eksempel, hvis det fins et eksempel og to tidligere oppgaver som bruker samme algoritme som kan brukes på en ny oppgave, vil denne algoritmen og oppgaven anses som kjent for eleven. Dermed kan eleven løse oppgaven med algoritmisk resonnering. Hvor kjent oppgaven er for eleven er sentralt i klassifiseringen av oppgavene.

For å kategorisere oppgavene som enten en form for imitativ eller kreativ resonnering har jeg valgt å bestemme kriterier på bakgrunn av kriterier som blir presentert i artiklene til Bergqvist (2007) og Palm mfl. (2011). Selv om Bergqvist har tatt utgangspunkt i kriterier fra Palm mfl. skiller disse seg litt fra hverandre da Bergqvist analyserte eksamensoppgaver på universitetsnivå, mens Palm mfl. analyserte matematikkprøver som ble gitt til elever på videregående skole (eller tilsvarende) i Sverige. Kategoriseringen av oppgavene ble gjort etter følgende steg:

Steg 1: *Analysere oppgavene i lærebøkene*. Fire variabler ble brukt for å bevise hver oppgave.

- Løsning: Identifisere mulige svar eller algoritmer som kan løse oppgaven.
- Eksplisitt informasjon om situasjonen: Informasjon angående selve matematikken i oppgaven.

- Andre viktige trekk/egenskaper: Dette kan være ord, fraser, formulerte hint eller annen informasjon som er relevant for sammenligning med hendelser i den samme læreboka som oppgaven befinner seg i.

Steg 2: *Analysering av lærebok*. Analyseringen skjer innenfor den valgte avgrensningen av læreboka. Variablene fra steg 1 blir brukt for å bestemme om en mulig hendelse deler nok overfladiske likheter med oppgaven slik at det er mulig for eleven å velge rett løsningsmetode. To typer data blir notert:

- Antall hendelser i eksempler og oppgaver.
- Antall hendelser i teoritekst.

Steg 3: *Argumentasjon og konklusjon* for hvilken resonneringstype oppgaven skal klassifiseres under.

En oppgave blir klassifisert som AR hvis det fins minst tre hendelser som blir vurdert til å være veldig lik på bakgrunn av variablene i steg 1 og fører til valg av algoritme som skal brukes på oppgaven. For MR er det lignende som for AR, men for MR må det fins minst tre svar, hele løsninger, i læreboka som løser oppgaven. Oppgaver som ber om fakta, definisjoner eller bevis som står i læreboka klassifiseres også som MR. Palm mfl. (2011) påpeker at hele oppgaven trenger ikke å være kjent for eleven, men det er nok at de viktige oppgavevariablene indikerer at kjent informasjon kan brukes. Der oppgaver kan hverken klassifiseres som enten MR eller AR, vil oppgaven klassifiseres som LCR eller GCR. Dette vil være oppgaver hvor det ikke er tre lignende hendelser eller hvor viktige steg i oppgaveløsningen må utføres av eleven. Hvis bare en liten del er overlatt til eleven klassifiseres oppgaven som LCR, men om det er en større del klassifiseres oppgaven som GCR.

Under steg 1 har jeg også tatt med elementer fra Haylock (1997) og Mellin-Olsen (1984) angående kreativ resonnering. Det vil si at jeg har i tillegg har sjekket om oppgavene inneholder elementer av *fleksibilitet*, *divergent tenking* og *strukturforståelse*. Kriteriene jeg satt på disse tre begrepene er som følger:

- *Fleksibilitet*
    - Oppgaver hvor eleven ikke bare kan følge en algoritme, men må gjøre minst et viktig steg selv.

        - Oppgaver som ber om flere forskjellige løsninger.
- *Divergent tenking*
    - Oppgaver som kan løses på flere forskjellige måter.
- *Strukturforståelse*
    - Oppgaver som omhandler gyldigheten av definisjoner, regler eller formler.

Resultatene fra denne analysen blir presentert i en egen tabell.

3.6 Validitet og reliabilitet

Det å vurdere oppgavens kvalitet er en viktig forutsetning for å kunne si noe om kvaliteten på funnene. Hvis datamaterialet skal brukes til å belyse en problemstilling, er det nødvendig med god kvalitet på funnene som blir gjort i analysen (S. Grønmo, 2004). Jo høyere kvaliteten på datamaterialet er, jo bedre egnet er det til å svare på problemstillingen. Grønmo nevner reliabilitet og validitet som to viktige begreper for å bedømme datakvaliteten.

3.6.1 Validitet

Validitet omhandler gyldigheten til datamaterialet (S. Grønmo, 2004). Vurderingen av validiteten av forskningen er oppgaven hovedoppgaven å undersøke om resultatene som er samlet inn samsvarer med det som er blitt analysert (Silverman, 2011). Om validiteten er høy, medfører dette at det innsamlede datamaterialet godt egnet til å svare på problemstillingen til studien (S. Grønmo, 2004). Videre vil jeg se på begrepene *ekstern validitet*, *innholdsvaliditet* og *konstruktvaliditet*.

Ekstern validitet omhandler overførbarheten til resultatene i forskningen (Thagaard, 2009). Altså om resultatene kan generaliseres, slik at de også er gyldige i andre situasjoner. I denne oppgaven har jeg valgt å analysere tre ulike lærebøker i R2-matematikk. På en side vil jeg kunne si noe generelt om lærebøkene i dette faget. På en annen side er det begrenset hvor mye som kan generaliseres, ettersom jeg kun har analysert ett kapittel i hver bok. Jeg kan si noe om hvordan lærebøkene har tatt for seg bevis (og andre elementer i analysen) i kapittelet *Følger og rekker*. Derimot kan jeg ikke generalisere til andre kapitler. Dette skyldes at det kan være forskjell i hva oppgaver ber elevene om å gjøre og hvordan de formuleres, og hvordan teori presenteres. For eksempel påpeker Otten, Gilbertson, Males og Clark (2014) at kan være mer naturlig å analysere hvordan lærebøkene tar for seg bevis i geometri enn andre deler av lærebøkene. Dette skyldes av at det er her bevis er mest utbredt. Valget jeg gjorde av å analysere kapittelet *Følger og rekker* skyldes av at dette kapittelet tar for seg kompetansemålene under emnet algebra. Dette er det eneste stedet hvor det spesifikt er nevnt bevis, og dermed burde det legges opp til at elevene skal lære enkle bevis i dette kapittelet. Videre generaliseringer utenfor de tre valgte lærebøkene er også umulig.

Innholdsvaliditet er en vurdering av om analyseverktøyene dekker det området som det er tenkt til på en rettferdig og omfattende måte (Cohen, Manion & Morrison, 2018). Nøyaktig innsamling av datamateriale, vil føre til at resultatene er representative for forskningen. For å tydeliggjøre problemstillingen, valgte jeg å dele den inn i flere underspørsmål. Dette kan øke innholdsvaliditeten, siden de viser hva jeg ønsker å finne ut av og dermed være med på å finne og utvikle de ulike rammeverkene som brukes. Som utgangspunkt for analyseringen valgte jeg å bruke Charalambous mfl. (2010) rammeverk med horisontal og vertikal analyse. Dette fører til at det er flere aspekter som blir analysert i lærebøkene. Disse aspektene er lærebøkenes teori, eksempler og oppgaver. Dermed blir en det en større el av lærebøkene dekket, som gir et mer helhetlig bilde av hva elevene leser i lærebøkene og gjør. Noe som er med på å senke innholdsvaliditeten i denne oppgaven er at jeg ikke har analysert geometrikapitlene, av årsakene som er nevnt ovenfor.

Konstruktvaliditet tar for seg om det er samsvar mellom forskerens forståelse av begreper og forestillinger, og de allment aksepterte oppfatningene (Cohen mfl., 2018). Creswell og Plano Clark (2011) beskriver konstruktvaliditet som et mål på om hvorvidt det som er ment til å måles faktiske blir målt. I min oppgave vil dette være tolkningen jeg har gjort av teorien og rammeverkene som brukes. Riktig bruk av kilder, vil være med på å forsikre at teorien og rammeverkene er tolket på den måten det er ment. Videre prøvde jeg i teoridelen å etablere en sammenheng mellom matematiske bevis og kreativ resonnering. Dette gjorde jeg for å rettferdiggjøre hvorfor jeg så på kreativ resonnering blant oppgavene. På grunn av at det ikke er total enighet av definisjonen av kreativ resonnering, har jeg valgt å se på forskjellige definisjoner av dette.

3.6.2 Reliabilitet

Spørsmålet om forskningen er utført på en pålitelig og tillitsvekkende måte knyttes til reliabiliteten til forskningen (Thagaard, 2009). Generelt kan man si at hvis ulike datainnsamlinger kommer fram til de samme resultatene ved bruk av samme metode, vil påliteligheten være høy (S. Grønmo, 2004). Jo større samsvar det er mellom de forskjellige datainnsamlingene, jo høyere er reliabiliteten. Derfor er reliabiliteten avhengig av utformingen av undersøkelsesopplegget og gjennomføringen av datainnsamlingen. Hvis undersøkelsesopplegget er utformet på en slik måte at det ikke er stor plass til misforståelser og innsamlingen av data gjennomføres på en grundig og systematisk måte, øker det muligheten for høy reliabilitet (S. Grønmo).

S. Grønmo (2004) presenterer to hovedtyper av reliabilitet: *stabilitet* og *ekvivalens*. *Stabilitet* omhandler samsvar mellom datainnsamlinger gjort ved forskjellige tidspunkter med samme analyseringsverktøy. Ved gjentatte analyseringer av samme utvalg, med samme analyseringsredskap og til ulike tidspunkt, vil høy stabilitet bety at man får de samme resultatene ved de forskjellige analyseringene. I denne oppgaven er grunnlaget for analyseringen rammeverk og tilhørende teori. Disse rammeverkene ble fulgt systematisk under analyseringen. Dermed er det mulig at sjansene for å få samme resultat øker, hvis analyseringen skulle blitt utført ved en senere anledning.

Den andre typen reliabilitet er *ekvivalens*. S. Grønmo (2004) beskriver *ekvivalens* som samsvar mellom uavhengige datainnsamlinger gjort av forskjellige personer på samme tidspunkt med samme analyseringsverktøy. Høy ekvivalens indikerer at analyseringen ikke påvirkes av hvem som utfører den. Hvis dette er tilfelle, er også reliabiliteten høy. En metode for å sjekke ekvivalensen kaller Silverman (2011) for *inter-rater reliability*. Denne metoden baserer seg på å gi samme datasett til flere forskjellige personer som skal analysere dette basert på de analyseverktøyene som det er blitt enighet om. Deretter sammenlignes resultatene og eventuelle forskjeller blir diskutert og man kommer fram til en felles enighet. Dette var noe jeg gjorde ved kategorisering av oppgavene som enten imitativ eller kreativ resonnering og plassering av teori og eksempler i nivåer av tenking. For å ta eksempelet med oppgavene. Jeg fikk en medstudent til å analysere 40 deloppgaver med det tilhørende rammeverket. Deretter møttes vi og sammenlignet våre funn. På de få oppgavene hvor det var uenighet, begrunnet vi for hverandre hvorfor vi mente at oppgaven var kategorisert slik vi hadde gjort, og kom fram til en enighet. Ved å gjøre det på denne måten kan eventuelle uklarheter bli oppdaget, og som kan forbedres. Dermed styrkes reliabiliteten i oppgaven ved at en annen har utført samme analysering av det samme datasettet.

4 Analyse

I denne delen vil jeg presentere resultatene fra analyseringen jeg gjorde. Først vil jeg presentere den horisontale analysen, deretter følger den vertikale analysen. I den vertikale analysen, vil jeg først ta for meg kategorien *kommunisert til studentene*. Deretter følger funnene fra kategorien *krevd av studentene*.

4.1 Horisontal analyse

Som man kan se av Tabell 4.1 bruker *Matematikk R2* flest sider på kapittelet *Følger og rekker*. Dette fører også til den største prosentandelen blant lærebøkene. Selv om det er flere sider i *Sinus R2* enn i *Sigma R2*, utgjør dette kun 8,0 % av det totale antall sider. Dette er den laveste andelen på tvers av lærebøkene. *Sigma R2* har, med sine 38 sider, det laveste antallet sider. Til gjengjeld er dette også den læreboka med færrest sider totalt.

Tabell 4.1: Tabell over hvor mange sider det er i kapittelet Følger og rekker i de tre lærebøkene og hvor stor andel dette utgjør av hele boka.

	Antall sider i kapittelet	Totalt antall sider i læreboka	Andel av lærebok
Matematikk R2	66	500	13,2 %
Sigma R2	38	370	10,3 %
Sinus R2	44	552	8,0 %

Tabell 4.2 gir en oversikt over rekkefølgen på delkapitlene i de tre lærebøkene. Rekkefølgen lærebøkene tar opp de forskjellige temaene er noenlunde like. Alle starter med å introdusere følger og rekker først. Aritmetiske følger og rekker presenteres før geometriske følger og rekker. Den store forskjellen i rekkefølgen er hvor induksjonsbevis er plassert. I *Matematikk R2* er dette delkapittelet plassert som nummer 3. Derimot er delkapittelet plassert nest sist og sist i henholdsvis *Sigma R2* og *Sinus R2*, hvis man bare teller delkapitler hvor det presenteres ny teori.

Tabell 4.2: Oversikt over rekkefølgen på delkapitlene i kapittelet Følger og rekker i de tre utvalgte lærebøkene.

Matematikk R2	Sigma R2	Sinus R2
7A Følger	6.1 Følger og rekker	8.1 Tallfølger
7B Rekker	6.2 Aritmetiske følger og rekker	8.2 Rekker
7C Induksjonsbevis	6.3 Geometriske følger og rekker	8.3 Aritmetiske følger
7D Aritmetiske rekker	6.4 Sparing og lån	8.4 Aritmetiske rekker
7E Geometriske rekker	6.5 Konvergente geometriske rekker	8.5 Geometriske følger
7F Uendelige geometriske rekker	6.6 Konvergensområdet for geometriske rekker	8.6 Geometriske rekker
Sammendrag	6.7 Matematiske induksjon	8.7 Uendelige rekker
Kapitteltest	6.8 Rekursive tallfølger	8.8 Geometriske rekker med variable kvotienter
	6.9 Sammensatte eksempler	8.9 Induksjonsbevis
	Sammendrag	Sammendrag
	test deg selv	
	Les, skriv og snakk	
	Øvingsoppgaver	

4.2 Vertikal analyse – kommunisert til studentene

I det følgende vil jeg presentere funnene fra kategorien *kommunisert til studentene*. Herunder er analysen av teori og eksempler, og av induksjonsbevis.

4.2.1 Nivåer av tenking på teori og eksempler

Tabell 4.3 er en oversikt over hvor mange av definisjonene og formlene som presenteres som plasseres i de forskjellige nivåene. All ny teori som blir presentert havnet i en av kategoriene, altså er det ingen formler eller definisjoner som kun blir skrevet opp. I enkelte tilfeller ble teorien presentert på flere forskjellige måter. Dermed er noe av teorien plassert i mer enn en kategori.

Tabell 4.3: Oversikt over hvor mange definisjoner og formler, som blir presentert i kapittelet Følger og rekker, som blir plassert i de forskjellige nivåene av tenking til van Hiele. Noen av definisjonene og formlene er plassert i flere nivåer. Dermed summeres

Nivå av tenking	*Matematikk R2*	*Sigma R2*	*Sinus R2*
Visuelt nivå	2	1	2
Deskriptivt nivå	9	8	9
Teoretisk nivå	11	5	6
Formelt nivå	2	1	2
Totalt antall formler/definisjoner	16	12	15

I *Sinus R2* blir 9 av 15 definisjoner og formler kategorisert til å havne på det *deskriptive nivået*, og er dermed det vanligste nivået i denne læreboka. Lignende, er dette også det mest utbredt nivået for *Sigma R2*. Her var 8 av 12 på det *deskriptive nivået*. Derimot er dette nivået det nest mest utbredte nivået i *Matematikk R2*, med 9 av 16.

Lærebøkene bruker ofte bruker et spesifikt tilfelle for å introdusere nye definisjoner eller formler. Disse spesifikke tilfellene brukes som utgangspunkt for å rettferdiggjøre eller forklare teorien som presenteres. Derfor havner nesten all ny teori under kategorien *deskriptiv*. Et eksempel på dette kan ses i Figur 4.1. Denne figuren viser hvordan geometriske følger blir introdusert i *Sigma R2*. Her brukes en bestemt geometrisk følge for å forklare definisjonen av geometriske følger. Dermed havner denne på det *deskriptive nivået*.

Vi forklarer geometriske følger ut fra denne tallfølgen:

$$3, 6, 12, 24, \dots$$

Vi finner det neste leddet ved å multiplisere leddet foran med 2.
I definisjonen av geometriske følger foretrekker vi heller å si at forholdet mellom et ledd og leddet foran er lik 2. Vi kan skrive det slik:

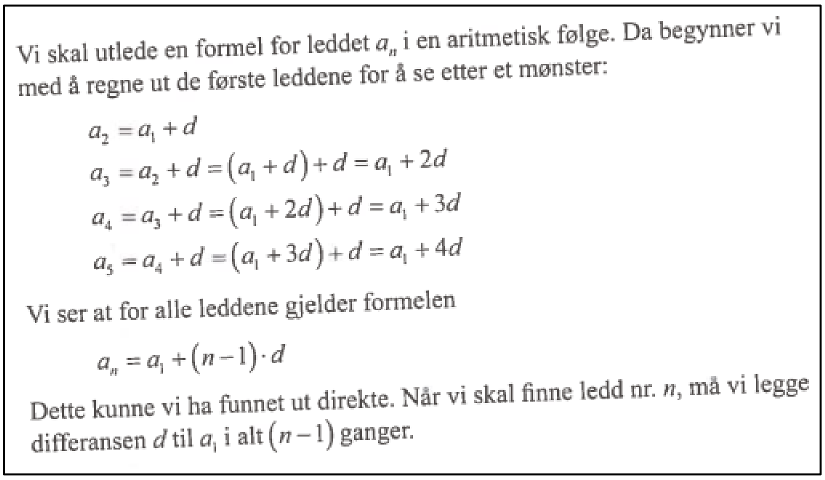
$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 2, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{6} = 2, \quad \frac{a_4}{a_3} = \frac{24}{12} = 2, \quad \dots$$

Dette kan vi generelt skrive slik: $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 2$. Vi sier at følgen er geometrisk med første ledd $a_1 = 3$ og kvotienten $k = 2$.

Figur 4.1: Slik introduseres geometriske følger i Sigma R2 (Sandvold, Ruud & Olsen, 2015)

Det *teoretiske nivået* er det mest utbredte nivået hos *Matematikk R2*, hvor 11 av 16 formler og definisjoner blir begrunnet med et generalisert tilfelle. Hos de to andre lærebøkene er dette den nest største kategorien. I *Sigma R2* fant jeg 5 hendelser som ble plassert på det *teoretiske nivået*. *Sinus R2* har 6 formler og definisjoner som havner i denne kategorien.

For flere av formlene som presenteres, viser lærebøkene utledninger for disse. I flere tilfeller er dette generaliserte utledninger som viser hvorfor formelen er slik som den er, men ikke kan kvalifiseres som formelle bevis. Figur 4.2 er hentet fra *Sinus R2*, og viser hvordan læreboka har utledet formelen for det n-te leddet i en aritmetisk følge.


Vi skal utlede en formel for leddet a_n i en aritmetisk følge. Da begynner vi med å regne ut de første leddene for å se etter et mønster:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$$

Vi ser at for alle leddene gjelder formelen

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Dette kunne vi ha funnet ut direkte. Når vi skal finne ledd nr. n, må vi legge differansen d til a_1 i alt $(n-1)$ ganger.

Figur 4.2: Utledning av formel for ledd nr. n i en aritmetisk følge. Hentet fra Sinus R2 (Oldervoll, Hals, Svorstøl, Vaaje & Orskaug, 2015).

I lærebøkene *Matematikk R2* og *Sinus R2* fant jeg to hendelser som kan kategoriseres som formelle bevis, og dermed havner i kategorien *formell*. I *Sigma R2* ble det kategorisert én slik hendelse. Figur 4.4 og Figur 4.3 viser bevis for formelen av summen av de n første leddene i en aritmetisk rekke. Figur 4.4 er hentet fra *Matematikk R2*, mens Figur 4.3 er fra *Sinus R2*. Ideene og hovedtrekkene er de samme i begge lærebøkene, men *Sinus R2* har valgt å vise flere utregninger enn *Matematikk R2*. Det at *Sinus R2* har mer utregning i beviset sitt gjelder også for det andre beviset i disse to lærebøkene. For det ene beviset i *Sigma R2*, følger denne boka en lignende tilnærming som *Matematikk R2*.

BEVIS FOR FORMELEN FOR SUMMEN AV EN ARITMETISK REKKE

Nå skal vi utlede en formel for summen s_n av de n første leddene i en aritmetisk rekke. Vi viser utledningen for $n = 5$. For en rekke med n ledd kan vi gå fram på den samme måten.

Vi utnytter at $a_i = a_1 + (i-1) \cdot d$ og får

$$\begin{aligned} s_5 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) \end{aligned}$$

Vi kan også uttrykke alle leddene med det siste leddet.

$$\begin{aligned} a_4 &= a_5 - d \\ a_3 &= a_5 - 2d \\ a_2 &= a_5 - 3d \\ a_1 &= a_5 - 4d \end{aligned}$$

Hvis vi begynner med det siste leddet, får vi dette uttrykket for summen:

$$\begin{aligned} s_5 &= a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 \\ &= a_5 + (a_5 - d) + (a_5 - 2d) + (a_5 - 3d) + (a_5 - 4d) \end{aligned}$$

Vi summerer de to uttrykkene for s_5:

$$\begin{aligned} s_5 + s_5 = a_1 &+ (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) \\ &+ a_5 + (a_5 - d) + (a_5 - 2d) + (a_5 - 3d) + (a_5 - 4d) \end{aligned}$$

Nå løser vi opp parentesene og trekker sammen leddene.

$$\begin{aligned} s_5 + s_5 &= 5a_1 + 5a_5 \\ 2s_5 &= 5 \cdot (a_1 + a_5) \\ s_5 &= \frac{5 \cdot (a_1 + a_5)}{2} \end{aligned}$$

Hvis rekka har n ledd, får vi på tilsvarende måte at

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Figur 4.3: Bevis for formel av summen av de n første leddene en aritmetisk rekke i Sinus R2 (Oldervoll mfl., 2015).

Bevis for formelen $s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

La

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

være summen av de n første leddene i en aritmetisk rekke med differansen d. Siden rekka er aritmetisk, vet vi at

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Derfor er

$$① \quad s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1) \cdot d)$$

Vi skriver opp summen en gang til der vi snur rekkefølgen på leddene, og uttrykker dem ved a_n. Vi får da

$$② \quad s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-1) \cdot d)$$

Vi legger sammen de to uttrykkene for summen. Da faller alle leddene med d bort. Siden vi har n forekomster av a_1 i uttrykket i ① og n forekomster av a_n i uttrykket i ②, får vi

$$\begin{aligned} 2s_n &= a_1 \cdot n + a_n \cdot n \\ &= (a_1 + a_n) \cdot n \end{aligned}$$

Formelen for s_n er dermed

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Figur 4.4: Bevis for formel av summen av de n første leddene en aritmetisk rekke i Matematikk R2 (Heir mfl., 2016).

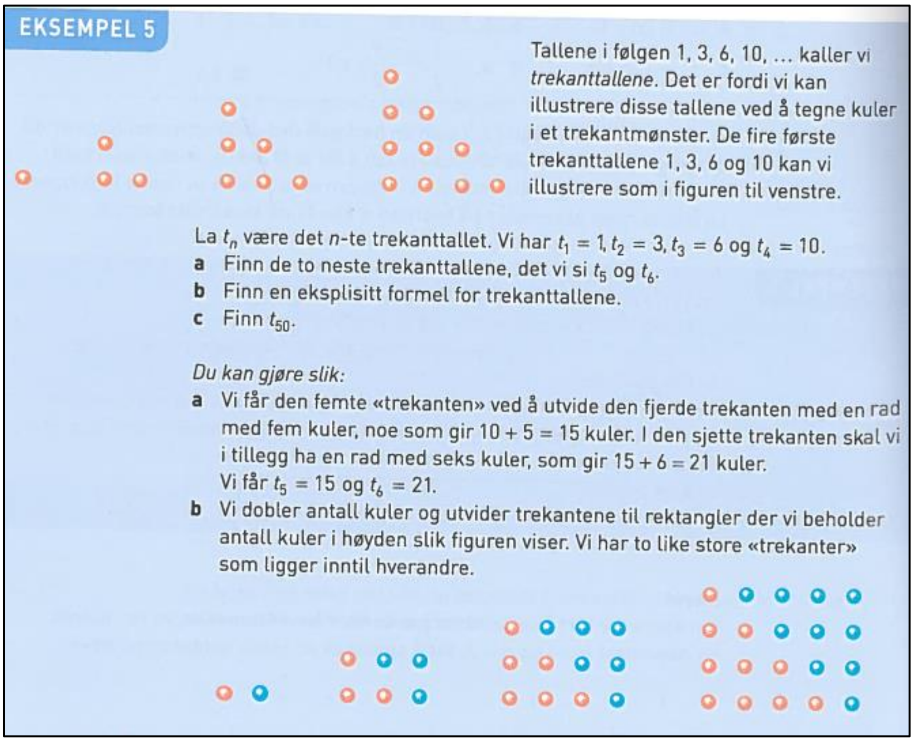
Fordelingen av eksemplene blant *nivåer av tenking* vises i Tabell 4.4, i tillegg til det totale antallet eksempler. Grunnet at noen eksempler har flere delspørsmål og noen har illustrasjoner, havnet noen eksempler i flere nivåer. *Matematikk R2* har, med sine 46 eksempler, over dobbelt så mange eksempler som *Sigma R2* og *Sinus R2*. 33 av de 46 eksemplene i *Matematikk R2* havnet på det *deskriptive nivået*. I *Sigma R2* er 15 av 18 eksempler på dette nivået.

Tabell 4.4: Oversikt over hvor mange eksempler, i kapittelet Følger og rekker, som blir plassert i de forskjellige nivåene av tenking til van Hiele. Noen av eksemplene er plassert i flere nivåer.

Nivå av tenking	*Matematikk R2*	*Sigma R2*	*Sinus R2*
Visuelt nivå	2	4	2
Deskriptivt nivå	33	15	20
Teoretisk nivå	14	4	3
Formelt nivå	0	0	0
Totalt antall eksempler	46	18	20

Matematikk R2 har også det høyeste antallet eksempler som havnet på det *teoretiske nivået*. I denne læreboka er det 14 slike eksempler. *Sigma R2* og *Sinus R2* har omtrent likt antall på dette nivået. Hos *Sigma R2* er det 4 eksempler, mens det er 3 eksempler i *Sinus R2* på dette nivået. Som man kan se av tabellen er det ingen tilfeller av formelle bevis i lærebøkenes eksempler.

Noe som gjelder for både introduksjon av ny teori og for eksemplene, er at det i liten grad brukes visuelle hjelpemidler for å illustrere det som presenteres eller eksempelet. Dette er tilfellet i alle tre lærebøkene. Når det brukes illustrasjoner/bilder, brukes omtrent halvparten av disse til å underbygge det som presenteres. Et eksempel på dette kan ses i Figur 4.5, her brukes illustrasjonen som et hjelpemiddel til å vise hvordan tallfølgen utvikler seg. Dermed kan den brukes til å forklare hvordan tallfølgen fortsetter og til å lage en eksplisitt formel for følgen. Den andre halvparten av illustrasjonene/bildene har ingen hjelpende effekt på teorien som presenteres eller eksemplene. For eksempel, i *Sinus R2* er det et eksempel som handler om vekst i en kaninbestand på en øy. Til dette er det lagt ved en illustrasjon av flere kaniner som sitter på en øy. En slik illustrasjon har ingen videre kobling med eksempelet, og er derfor ikke bli medregnet i analysen.



EKSEMPEL 5

Tallene i følgen 1, 3, 6, 10, … kaller vi *trekanttallene*. Det er fordi vi kan illustrere disse tallene ved å tegne kuler i et trekantmønster. De fire første trekanttallene 1, 3, 6 og 10 kan vi illustrere som i figuren til venstre.

La t_n være det n-te trekanttallet. Vi har $t_1 = 1, t_2 = 3, t_3 = 6$ og $t_4 = 10$.

a Finn de to neste trekanttallene, det vi si t_5 og t_6.
b Finn en eksplisitt formel for trekanttallene.
c Finn t_{50}.

Du kan gjøre slik:

a Vi får den femte «trekanten» ved å utvide den fjerde trekanten med en rad med fem kuler, noe som gir $10 + 5 = 15$ kuler. I den sjette trekanten skal vi i tillegg ha en rad med seks kuler, som gir $15 + 6 = 21$ kuler.
Vi får $t_5 = 15$ og $t_6 = 21$.
b Vi dobler antall kuler og utvider trekantene til rektangler der vi beholder antall kuler i høyden slik figuren viser. Vi har to like store «trekanter» som ligger inntil hverandre.

Figur 4.5 Deler av et eksempel i Matematikk R2 (Heir mfl., 2016).

4.2.2 Induksjonsbevis

Alle lærebøkene har valgt å ha induksjonsbevis som et eget delkapittel. Hvordan de tre lærebøkene velger å introdusere og argumentere for at induksjonsbevis fungerer varierer fra forlag til forlag. I det følgende vil jeg beskrive hvordan induksjonsbevis presenteres, hvilken verdi som defineres til å være den første i et induksjonsbevis og hvordan lærebøkene bruker induksjonsbevis i oppgavene.

Sinus R2 introduserer induksjonsprinsippet som en framgangsmåte for å bevise at formler (for eksempel slike som er utledet i kapittelet *Følger og rekker*) og andre påstander gjelder for alle naturlige tall n. Deretter følger en definisjon på induksjonsbevis. Måten *Sinus R2* legitimerer at induksjonsbevis er å presentere en tankerekke for elevene. Hvis formelen oppfyller punkt 1, vet vi at den stemmer for $n = 1$. Siden formelen gjelder for $n = 1$, medfører punkt 2 at den gjelder for $n = 2$. Videre sikrer punkt 2 at formelen også er riktig for $n = 3$, og deretter $n = 4$. Denne framgangsmåten kan fortsette i det uendelige og formelen vil være riktig for alle verdier av n.

Sigma R2 starter delkapittelet rett på å bruke induksjonsbevis for å bevise at den generelle regelen for derivasjon er gyldig for alle naturlige tall n. Først gjøres en antagelse om at regelen gjelder for n, altså at $[x^n]' = nx^{n-1}$. Deretter vises det at regelen også gjelder for $n + 1$. Dette gjøres ved å vise flere steg i utregningen fra $[x^{n+1}]'$ til $(n + 1)x^{(n+1)-1}$. Videre forklarer *Sigma R2* hvordan dette beviser at regelen nå er gyldig for alle naturlige tall n. Forklaringen sier at når vi vet at regelen er riktig for $n = 1$, vil den dermed være riktig for $n = 2$. Som igjen fører til at den også stemmer for $n = 3$, og slik kan det fortsette i det uendelige.

Matematikk R2 starter delkapittelet om induksjonsbevis med å fortelle hva man kan bruke induksjon til og deretter defineres hva bevis og utsagn er. Læreboka bruker formelen for summen av de n første naturlige tallene som utgangspunkt for å eksemplifisere induksjonsbevis. Den starter med å vise at formelen stemmer for $n = 1$, $n = 2$, og $n = 3$. Deretter påpekes det at en slik framgangsmåte ikke kan brukes for å sjekke alle de naturlige tallene, men at hvis det er mulig å sjekke for et vilkårlig naturlig tall, og det da er sant. Vil det også stemme for det neste naturlige tallet. *Matematikk R2* bruker deretter samme argumentasjon som *Sinus R2* og *Sigma R2* for å vise at en slik løsning er gyldig. Etter å ha argumentert for at en slik løsning er gyldig, fullføres induksjonsbeviset for den valgte formelen ved å vise at formelen gjelder for $n = k + 1$.

Sigma R2 forteller i første trinn av induksjonsbeviset at elevene skal bevise at formelen stemmer for en første verdi av n. Selv om det ikke står skrevet direkte, så kan det tolkes at formelen som skal bevises ikke trenger å starte på $n = 1$. Dette er ikke tilfelle hos både *Matematikk R2* og *Sinus R2*. I disse to lærebøkene blir elevene bedt om å først sjekke for $n = 1$, deretter om å sjekke for $k + 1$. Det må nevnes at *Matematikk R2* kommer med en merknad tre sider senere i delkapittelet hvor det påpekes at utsagnet som skal bevises ikke alltid trenger å gjelde for $n = 1$, men kan for eksempel gjelde for $n \geq 4$.

Ettersom *Sigma R2* har definert induksjonsbevis til å gjelde for en første verdi av n og bruker $n \geq 2$ i det ene av to eksempler i dette delkapittelet. Derfor analyserte jeg hvilken startverdi som ble oppgitt i oppgavene hvor elevene blir bedt om å bruke induksjonsbevis. I *Sigma R2* er det kun i 2 av 21 oppgaver hvor startverdien ikke er $n = 1$. Selv i de få oppgavene med ulikheter skal elevene bevise for alle naturlige tall. Et lignende tilfelle er det for *Matematikk R2*, der 2 av 20 oppgaver hvor startverdien ikke er $n = 1$.

Tabell 4.5 viser hvilke formler elevene blir bedt om å verifisere ved hjelp av induksjonsbevis. *Matematikk R2* ber elevene bruke induksjonsbevis til å bevise formelen for det n-te leddet i rekka og formelen for summen av rekka til både aritmetiske og geometriske rekker. I *Sinus R2* blir elevene bedt om å bevise formelen for summen av de n første leddene i en aritmetisk og en geometrisk rekke ved induksjon. *Sigma R2* ber elevene bevise formelen for ledd nummer n i en geometrisk følge.

Tabell 4.5: Oversikt over formler som elevene blir bedt om å verifisere ved hjelp av induksjonsbevis.

	Matematikk R2	Sigma R2	Sinus R2
Formel for ledd nr. *n* i en aritmetisk følge	x		
Sum av *n* første ledd i aritmetisk rekke	x		x
Formel for ledd nr. *n* i en geometrisk følge	x	x	
sum av *n* første ledd i en geometrisk rekke	x		x

4.3 Vertikal analyse – krevd av elevene

I denne delen skal jeg presentere i kategorien *krevd av elevene*. Dette inneholder analysen av bevisenes rolle i oppgavene og hvilken type resonnering som kreves for å løse disse. Ettersom det er veldig mange færre oppgaver kapittelet *Følger og rekker* i *Sinus R2*, valgte jeg å inkludere oppgaver fra lengre bak i læreboka. Disse oppgavene er merket at de tilhører kapittelet *Følger og rekker*. Dette gjorde jeg for å få et bedre bilde av oppgavene.

4.3.1 Bevisenes rolle

Tabell 4.6 viser fordelingen mellom oppgavene som ble vurdert til å ha en bevisrolle og de uten en bevisrolle. *Sinus R2* har flest oppgaver som ble kategorisert til å ha en bevisrolle, med 137 oppgaver. Dette utgjør 26,3 % av alle oppgavene som ble analysert i denne læreboka. *Sigma R2* hadde nest flest oppgaver med bevisrolle. I denne læreboka ble 115 oppgaver vurdert til å ha en bevisrolle. Dette tilsvarer 34,7 % av det totale antallet oppgaver, som også er den høyeste prosentandelen blant disse tre lærebøkene. Med sine 78 oppgaver, har *Matematikk R2* færrest oppgaver.

Tabell 4.6: Oversikt over antall oppgaver som ble vurdert til å inneha en bevisrolle og oppgavene uten bevisrolle, og hvor mange prosent dette utgjør. Prosenten er beregnet på bakgrunn av det totale antallet oppgaver som ble analysert. Kolonnen ytterst til høyre viser det totale antall oppgaver som ble analysert.

	Totalt antall oppgaver med bevisrolle		ingen bevisrolle		Total antall oppgaver
	#	%	#	%	
Matematikk R2	78	19,3 %	327	80,7 %	405
Sigma R2	115	34,7 %	216	65,3 %	331
Sinus R2	137	26,3 %	383	73,7 %	520

Tabell 4.7 viser en oversikt over hvor mange oppgaver som ble kategorisert til å tilhøre de forskjellige rollene til bevis og det totale antallet oppgaver med bevisrolle. Tabellen viser at den bevisrollen som er mest utbredt i alle tre lærebøkene er *verifisere*. *Sinus R2* har flest oppgaver innenfor denne bevisrollen med 82 oppgaver. Deretter følger *Sigma R2* med 54 oppgaver, og til slutt *Matematikk R2* med 37 oppgaver.

Tabell 4.7: Oversikt over antall oppgaver som ble plassert i de forskjellige rollene til bevis.

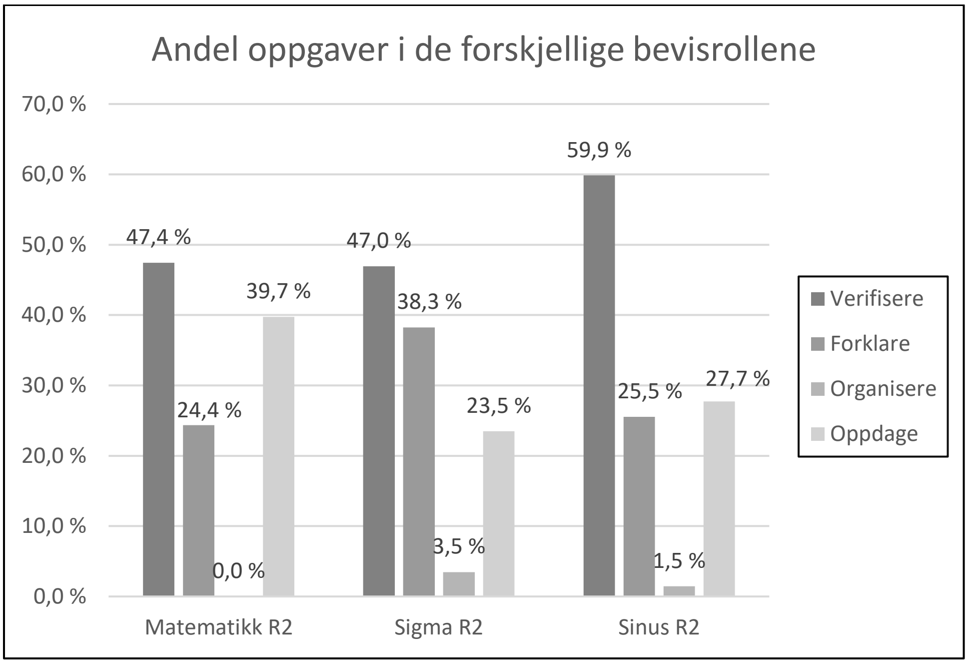
	Verifisere	forklare	organisere	oppdage
Matematikk R2	37	19	0	31
Sigma R2	54	44	4	27
Sinus R2	82	35	2	38

For bevisrollen *forklare*, er det *Sigma R2* som har flest oppgaver med 44 oppgaver. *Matematikk R2* har 19 oppgaver som ble vurdert til å høre inn under denne kategorien, som er det lavest antallet. I *Sinus R2* er det 35 oppgaver i rollen *forklare*.

I alle tre lærebøkene er rollen *organisere* så å si fraværende. *Sigma R2* og *Sinus R2* har henholdsvis 4 og 2 oppgaver som ble kategorisert til å havne i kategorien *organisere*.

Sinus R2 har flest oppgaver i bevisrollen *oppdage*, med sine 38 oppgaver. Deretter følger *Matematikk R2* med nest flest oppgaver. Denne læreboka har 31 oppgaver innenfor denne rollen. I *Sigma R2* er det 27 oppgaver i rollen *oppdage*.

Figur 4.6 viser prosentvis fordeling av oppgavene i de ulike bevisrollene. Hos alle tre lærebøkene er *verifisere* den bevisrollen med størst andel oppgaver. *Sinus R2* har den høyeste andelen oppgaver, med 59,9 %, innenfor denne rollen. *Matematikk R2* og *Sigma R2* har lignende andeler oppgaver i kategorien *verifisere*. I begge lærebøkene utgjør oppgavene omtrent 47 %.



Figur 4.6: Oversikt over andelen av oppgaver som er kategorisert i hver av bevisrollene. Prosenten er beregnet med det totale antallet oppgaver med bevisrolle. Ettersom oppgavene kan havne i flere forskjellige roller, vil ikke prosentandelen for bevisrollene i de ulike rollene summeres til 100 %.

For rollen *forklare* er det *Sigma R2* som har den høyeste andelen oppgaver, med 38,3 %. Deretter er det *Sinus R2* med nest størst andel, tett etterfulgt av *Matematikk R2*. Prosentandelen i disse lærebøkene utgjør henholdsvis 25,5 % og 24,4 %. Ser man på rollen *oppdage*, er det *Matematikk R2* som har den høyeste andelen av oppgaver. *Sigma R2* har den lavest andelen, med 23,5 %. Hos *Sinus R2* er denne prosenten 27,7 %.

I oppgaver som ble kategorisert til å inneha en bevisrolle er det noen ord, eller verb, som går igjen. For eksempel rollen *verifisere* bruker alle tre lærebøkene som regel «vis at». I oppgavene som havner i rollen *forklare*, bruker lærebøkene i stor grad «forklar». For rollen *oppdage* veksles det på mellom «avgjør» og «undersøk».

I kapittelet *Følger og rekker*, brukes ikke, med et unntak, ordet *bevis* i oppgavetekstene. Dette unntaket fins i oppgavene som er knyttet til at elevene blir bedt om å bruke induksjonsbevis. *Matematikk R2* og *Sigma R2* bruker konsekvent ordet bevis i oppgaver hvor elevene blir bedt om å bruke induksjon. Et eksempel på dette er «*Bruk induksjon til å bevise at …*» (Heir mfl., 2016). *Sinus R2* derimot, veksler på å bruke «*Vis ved induksjon …*» og «*bevis ved induksjon…*» (Oldervoll mfl., 2015).

De fleste oppgavene i alle tre lærebøkene er oppgaver som jeg kategoriserte til å ikke være tilknyttet noen bevisrolle. Typiske eksempler på slike oppgaver er oppgaver hvor elevene blir bedt om «finn», «regn ut», «bestem» eller svare på «hvor mye/stort». I disse oppgavene er ikke formålet å bevise noe..

4.3.2 Kreativ resonnering

For oppgavene med bevisrolle har jeg analysert om det kreves kreativ resonnering for å løse de. Dette har jeg gjort på to måter. Jeg har brukt rammeverket til Lithner (2008) for å kategorisere oppgavene som enten imitativ eller en type kreativ resonnering. I tillegg analyserte jeg om oppgavene inneholdt elementer av *divergent tenking* og *strukturforståelse*.

4.3.2.1 Imitativ resonnering og kreativ resonnering

Resultatene fra analyseringen av kreativ resonnering i oppgaver som har blitt vurdert til å inneholde en bevisrolle, kan ses i Tabell 4.8 og Figur 4.7. Tabellen viser hvor mange oppgaver som har blitt kategorisert som enten imitativ resonnering (IR) eller kreativ resonnering (CMR), i tillegg til hvor mange prosent dette av oppgavene dette utgjør. Jeg har valgt å slå sammen algoritmisk resonnering og memorert resonnering til imitativ resonnering (IR). Årsaken til dette er at det var svært få eller ingen oppgaver som havnet i kategorien memorert resonnering. I Tabell 4.8 har jeg valgt å slå sammen lokal kreativ resonnering og global kreativ resonnering, mens Figur 4.7 viser fordelingen mellom lokal kreativ resonnering (LCR) og global kreativ resonnering (GCR).

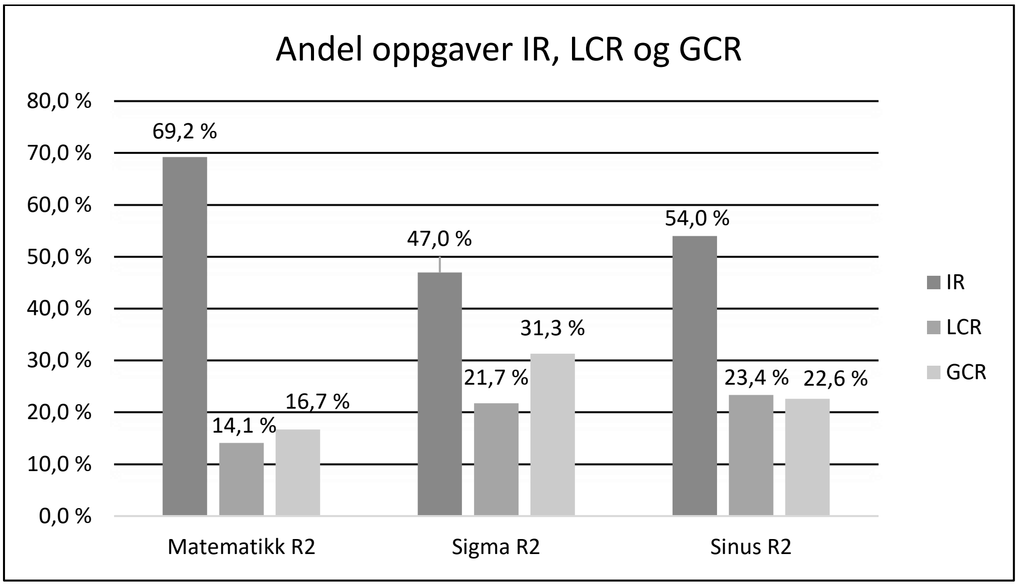
Tabell 4.8: Fordelingen av oppgavene i IR og CMR blant oppgavene som ble funnet til å ha en bevisrolle i kapittelet følger og rekker.

	Antall oppgaver IR	Antall oppgaver CMR	Andel Oppgaver IR	Andel oppgaver CMR
Matematikk R2	54	24	69,2 %	30,8 %
Sigma R2	54	61	47,0 %	53,0 %
Sinus R2	74	63	54,0 %	46,0 %

Sinus R2 er den læreboken med flest oppgaver med en bevisrolle. Videre er det også denne læreboken som har det høyeste antallet oppgaver innenfor både IR og CMR for blant disse oppgavene. I *Sinus R2* utgjorde oppgavene som krevde kreativ resonnering 46 % av oppgavene med bevisrolle. Dette medfører at 54,0 % av oppgavene ble kategorisert som imitativ resonnering.

Matematikk R2 det størst andel oppgaver som ble kategorisert som IR. Denne andelen er på 69,2 %, og utgjorde 54 av oppgavene. Dermed blir andelen CMR-oppgaver i *Matematikk R2* også den laveste blant disse lærebøkene. *Sigma R2* hadde like mange oppgaver som ble vurdert til å kreve imitativ resonnering som *Matematikk R2*. Ettersom *Sigma R2* har flere oppgaver med bevisrolle enn *Matematikk R2*, utgjorde IR-oppgavene en lavere prosentandel. 53,0 % av oppgavene i *Sigma R2* ble kategorisert til å kreve kreativ resonnering. Dermed har *Sigma R2* den jevneste fordelingen av IR og CMR-oppgaver, tett etterfulgt av *Sinus R2*.

Figur 4.7 viser en oversikt over andelen IR, LCR og GCR i de tre lærebøkene. Som man kan se av figuren har alle lærebøkene størst andel IR-oppgaver, hvis man skiller mellom LCR og GCR. *Matematikk R2* skiller seg ut med lavest andel av både LCR og GCR, med henholdsvis 14,1 % og 16,7 %. Dette gjør at denne læreboka har mest ujevne fordelingen mellom IR, LCR og GCR.



Figur 4.7: Oversikt over andelen oppgaver i kategoriene imitativ resonering (IR), lokal kreativ resonnering (LCR) og global kreativ resonnering (GCR) i de tre utvalgte lærebøkene

Som man kan se av figuren over, har *Sigma R2* den jevneste fordelingen av de tre forskjellige kategoriene sett under ett. I denne læreboka ble 21,7 % av oppgavene vurdert til å kreve LCR, mens 31,3 % krever global kreativ resonnering. Dette er også den høyeste andelen GCR blant lærebøkene. *Sinus R2* har den jevneste fordelingen av LCR og GCR. Andelen oppgaver innenfor disse to kategoriene er henholdsvis 23,4 % og 22,6 % for LCR og GCR.

4.3.2.2 Divergent tenking og strukturforståelse

Under analyseringen valgte jeg å slå sammen resultatene av *fleksibilitet* og *divergent tenkning*, og kalt dette *divergent tenking*. Jeg mener dette er greit å gjøre ettersom Haylock (1987) nevner fleksibilitet som et kriterium for *divergent tenking*. Resultatene av denne analysen kan ses i Tabell 4.9.

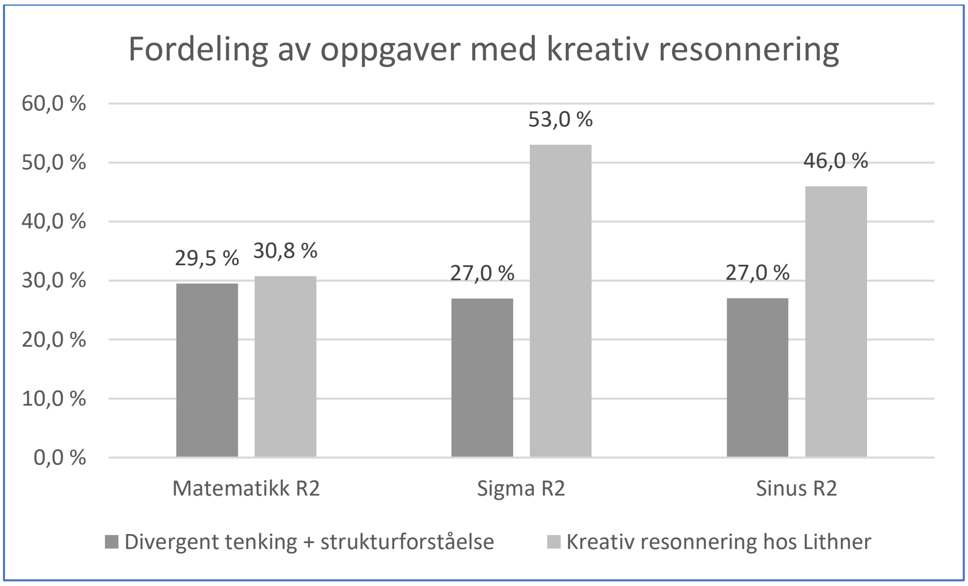
Tabell 4.9: Oversikt over hvor mange oppgaver som ble vurdert til å fremme divergent tenkning og strukturforståelse, og hvor mange prosent dette utgjør av det totale antallet oppgaver med bevisrolle.

	divergent tenking		strukturforståelse		Total antall oppgaver	
	#	%	#	%	#	%
Matematikk R2	17	21,8 %	6	7,7 %	24	29,5 %
Sigma R2	27	23,5 %	4	3,5 %	31	27,0 %
Sinus R2	30	21,9%	7	5,1 %	37	27,0 %

Sigma R2 er den læreboka med den høyeste andelen oppgaver med element av *divergent tenking*, med 23,5 %. Deretter følger både *Matematikk R2* og *Sinus R2* like etter med rett i underkant av 22 %. Ser man på antall oppgaver er det *Sinus R2* som har flest, etterfulgt av *Sigma R2* og deretter *Matematikk R2*.

Matematikk R2 har størst andel oppgaver med element av strukturforståelse, med 7,7 %. Med 5,1 % har *Sinus R2* nest størst andel. Ser man *divergent tenking* og *strukturforståelse* under ett, er det *matematikk R2* som har høyest andel. Derimot er det *Sinus R2* som har flest oppgaver med disse elementene.

I Figur 4.8 har jeg sammenlignet resultatene fra oppgavene med *divergent tenking* og *strukturforståelse* med resultatene fra analysen av kreativ resonnering hos Lithner (2008). Som man kan se er det jevnt mellom resultatene for *Matematikk R2*. Derimot er det store forskjeller i de to andre lærebøkene. Størst forskjell er det i *Sigma R2*.



Figur 4.8: Viser fordeling av oppgavene med kreativ resonnering. I stolpene til venstre viser summen av oppgaver med divergent tenking og strukturforståelse. Stolpene til høyre er oppgavene som ble kategorisert til å kreve kreativ resonnering hos Lithner (2008).

5 Diskusjon

I denne delen skal jeg se på problemstillingen i sammenheng med funnene jeg gjorde i kapittel 4. Deretter skal jeg diskutere rundt de forskjellige underspørsmålene. Videre vil jeg også presentere noen observasjoner og refleksjoner jeg gjorde meg under analysering.

5.1 Presentasjon av ny teori og eksempler

I analysen av lærebøkenes teori og eksempler, så jeg på hvilke nivåer av tenking disse plasserte seg i. Hvis man ser funnene av presentasjon av ny teori og eksemplene under ett, er det en helt klar overvekt av tilfeller på det *deskriptive nivået*. For presentasjonen av ny teori er dette ikke tilfelle i alle lærebøkene. Hos *Sigma R2* og *Sinus R2* er den største andelen kategorisert i som *deskriptivt nivå*. Derimot gjelder dette ikke for *Matematikk R2*. Her havnet flere definisjoner og formler på det *teoretiske nivået* enn det *deskriptive nivået*. Det må nevnes at *Matematikk R2* var den læreboka hvor mer av teorien som havnet i begge disse kategoriene enn i de to andre lærebøkene.

Blant eksemplene er det et overveldende flertall av eksemplene som havner på det *deskriptive nivået* hos alle tre lærebøkene. Dette skyldes at eksemplene brukes til å vise hvordan elevene skal bruke teorien til å løse oppgavene.

Som man kan se av Tabell 4.3 og Tabell 4.4 er det ikke mange definisjoner, formler eller eksempler som inneholder illustrasjoner. Ifølge van Hiele (1986) burde introduksjon av ny teori starte på *visuelt nivå*. Hvis man skal følge teorien til van Hiele, vil dette kunne påvirke elevene negativt og det kan påvirke elevenes tilegnelse kunnskap på de senere nivåene. I lærebøkene er rundt halvparten av illustrasjonene bilder som ikke er til noen tydelig hjelp for elevene. Disse bildene kunne med fordel vært byttet ut med illustrasjoner som kan hjelpe elevene å visualisere det oppgaven spør om.

Som man kan se av funnene fra analysen av nivåer av tenking blant teorien som presenteres og eksemplene er det få tilfeller av hendelser som blir kategorisert på formelt nivå. Altså er det få tilfeller av bevis som blir presentert for elevene. Dette gjelder for alle tre lærebøkene. Dermed er det opp til læreren å presentere bevis for formler for elevene. Hvis læreren ikke gjøre dette, vil elevene ikke få erfaring med hvordan et bevis skal se ut. En mulig implikasjon av dette presenterer jeg senere i kapittel 5.5.

I studien til Thompson mfl. (2012) fant de at 30,8 % av egenskaper som ble presentert ble begrunnet med et bevis og 22,4 % ble begrunnet med et deduktivt argument. For å relatere dette til kategoriene jeg har brukt i analyseringen av ny teori, kan man gjøre en grov inndeling. Bevis hos Thompson mfl. og *formelt nivå* hos meg vil tilsvare det samme, mens *deskriptivt nivå* og *teoretisk nivå* vil være noenlunde det samme som Thompson mfl. kaller deduktivt argument. En slik inndeling vil ikke være absolutt, men vil være en omtrentlig fordeling som kan gi en indikasjon på forskjeller mellom lærebøkene. Med en slik inndeling ser man at det er en større andel av teorien i lærebøkene Thompson mfl. analyserte som blir begrunnet med et bevis. Derimot er det en mye lavere andel deduktive argumenter enn i min analyse.

5.2 Induksjonsbevis

Som man kan forvente, har de tre valgte lærebøkene definert induksjonsbevis ganske lik definisjonen til Cunningham (2013) (se seksjon 2.2.1 om induksjonsbevis). Alle lærebøkene har valgt å beskrive induksjonsbevis som en metode hvor man skal sjekke at en formel er gyldig ved å vise at formelen gjelder for en første verdi av n, og deretter for $n + 1$. I tillegg forklarer alle lærebøkene hvorfor en slik framgangsmåte fungerer.

Matematikk R2 og *Sigma R2* bruker et eksempel for å illustrere hvordan induksjonsbevis gjennomføres og hvorfor induksjonsbevis er en gyldig måte å bevise noe på er. Derimot har *Sinus R2* valgt å ikke gjøre dette. Ser man på nivåene av tenking til van Hiele (1986) plasseres *Matematikk R2* og *Sigma R2* på det deskriptive nivået, mens *Sinus R2* havner i det teoretiske nivået. Van Hiele mener at ny teori som presenteres skal begynne på så lavt nivå som mulig for at elevene skal kunne opparbeide seg forståelsen som kreves på de høyere nivåene. På den ene siden trenger dette ikke å bety noe for bruken av induksjonsbevis, ettersom det er eksempler i *Sinus R2* som viser nettopp dette. På en annen side kan det være vanskelig å se for seg forklaringen på hvorfor induksjonsbevis skal være gyldig.

Selv om det er noenlunde samme definisjon av induksjonsbevis blant lærebøkene, er det en liten forskjell. Denne forskjellen ligger i hvilken tallverdi som skal være startverdi for induksjonsbeviset. *Sigma R2* forteller med en gang at induksjonsbevis gjelder for en første verdi n, *Matematikk R2* innfører dette noen sider senere, mens *Sinus R2* ikke adresserer dette i det hele tatt. Ved å unnlate å ta opp dette, kan elevene gå glipp av bruksområder for induksjonsbevis.

Ettersom *Matematikk R2* og *Sigma R2* tar opp at induksjonsbevis ikke trenger å starte på $n = 1$, antok jeg at dette også ville vise seg i oppgavene. Dette viste seg derimot ikke å være tilfelle. På den ene siden, hvis elevene skal lete seg fram til den første verdien for n hvor det matematiske uttrykket gjelder, kan det ta tid. På den andre siden er det mulig å oppgi i denne verdien for n i oppgaveteksten. Dermed vil ikke elevene bruke unødvendig lang tid på dette.

Det er også en forskjell på når i kapittelet delkapittelet om induksjonsbevis er plassert (se Tabell 4.2). I *Matematikk R2* er delkapittelet plassert som nummer 3. Etter delkapitlene om følger og rekker, men før blant annet kapitlene om aritmetiske og geometriske rekker og følger. I de to andre lærebøkene er induksjonsbevis plassert henholdsvis som siste og nest siste delkapittel i *Sinus R2* og *Sigma R2*. Selve utførelsen av å gjøre induksjonsbeviset er ikke forskjellig fra resten av oppgavene om induksjonsbevis, men det kan vise elevene gyldigheten av formlene det brukes på.

5.3 Bevisenes rolle

I analysen av hvilken rolle bevisene har i oppgavene. *Sinus R2* er den læreboka med flest oppgaver med bevisrolle, og det er den boka hvor jeg analyserte flest oppgaver. Derfor er andelen oppgaver med bevisrolle i *Sigma R2* høyere enn i *Sinus R2*. *Matematikk R2* er den læreboka hvor jeg fant færrest oppgaver og lavest andel av oppgaver med bevisrolle.

I de tre lærebøkene er det stort sett rollene *forklare*, *oppdage* og *verifisere* som er representert. På grunn av at flere roller er tilstede i oppgavene, kan dette gi elevene en forståelse av hvorfor vi har bevis (Hemmi, 2010). I alle tre lærebøkene er *verifisere* er den mest utbredte rollen. For de to ande rollene, varierte det fra lærebok til lærebok hvilken som hadde størst andel. Ser man på *matematikk R2*, er rollen *oppdage* hyppigere brukt enn *forklare*. Motsatt er det for

Sigma R2. Her går *forklare* oftere igjen. Hos *Sinus R2* er det ganske jevnt mellom disse to rollene.

Det at rollen *organisere* ble brukt så lite, er ikke så overraskende. Denne rollen kommer først og fremst til syne på et veldig avansert nivå av matematikk (de Villiers, 1998). Dermed vil denne rollen ikke være relevant for elever på videregående skole.

I studien til G. J. Stylianides (2009) viste resultatene at 40 % av oppgavene ga mulighet for resonnering-og-bevis. Av disse oppgavene var 94 % *forklare*, 61 % *generering av nye kunnskap,* og 20 % *verifisere eller falsifisere*. Dermed er det det en høyere andel bevisoppgaver i den studien enn i min oppgave. I min oppgave er *Sigma R2* nærmest denne andelen med 34,7 %. Videre ser man at der *forklare* var den mest utbredte rollen hos Stylianides, er *verifisere* den rollen som dukker oftest opp i oppgavene jeg analyserte. Dermed kan det kan det virke som det er en forskjell fra lærebøkene Stylianides analyserte og de tre jeg har valgt.

5.4 Kreativ resonnering

I analysen av hvilken type resonering som kreves i oppgavene med en bevisrolle, brukte jeg et rammeverk fra Lithner (2008), og jeg har brukt begrepene *divergent tenking* fra Haylock (1987) og *strukturoppfatning* fra Mellin-Olsen (1984).

Ved hjelp av rammeverket til Lithner (2008) kategoriserte jeg oppgavene etter om det kreves imitativ, lokal kreativ eller global kreativ resonnering. Hvor kjent algoritmen, som skulle brukes i oppgaven, er for elevene, var med på å bestemme hvilken kategori de havnet i. Som kriterium valgte jeg å sette at det minst måtte være 3 like hendelser blant tidligere oppgaver, teori eller eksempler for å kategorisere oppgaven som IR. Dette skyldes at algoritmen må være kjent for eleven for at det skal regnes som imitativ resonnering (Bergqvist, 2007). I oppgaver som ble kategorisert som LCR var enten hele løsningen ikke kjent for elevene eller det bare var en eller to lignende hendelser i boka.

Resultatene viser at *Matematikk R2* inneholder den største andelen oppgaver med imitativ resonnering. Deretter fulgte *Sinus R2* med nest flest. I begge disse lærebøkene var IR mer utbredt enn kreativ resonnering. Dette var ikke tilfellet i *Sigma R2*. Her krever litt under halvparten av oppgaven imitativ resonnering. Dermed er andelen CMR større enn IR i denne læreboka. Disse resultatene viser at elevene i større grad må velge strategi for å løse oppgavene og lage løsningsmetoden selv i *Sigma R2* enn i de to andre lærebøkene.

Videre kan man dele inn resultatene for kreative resonnering i lokal og global kreativ resonnering. Både *Matematikk R2* og *Sinus R2* har en jevn fordeling av oppgavene i disse to kategoriene. *Sinus R2* har den største andel oppgaver i kategorien LCR, mens *Sigma R2* har høyest andel GCR. På den andre siden har *Matematikk R2* lavest prosentandel i begge kategoriene. Det betyr at elevene i større grad kan følge et eksempel eller løsningen på en tidligere oppgave for å løse en senere oppgave.

Ved analysering av oppgavene på bakgrunn av begrepene *divergent tenking* og *strukturforståelse*, kom det fram at det er *Matematikk R2* som har den høyeste andelen av oppgaver sammenlagt. Selv om *Sigma R2* og *Sinus R2* har flere oppgaver totalt, utgjør dette en lavere prosentandel.

Hvis man sammenligner resultatene fra disse to måtene å analysere kreativ resonnering på, ser man at det for to av lærebøkene er store forskjeller. Hos *Matematikk R2* er andelen oppgaver ganske jevn. Derimot er dette ikke tilfelle hos *Sigma R2* og *Sinus R2*. Her er det en mye høyere andel oppgaver i resultatene fra analysen gjort med rammeverket til Lithner (2008). Dette kan skyldes kriteriet om at det må være minst tre helt like hendelser i eksempler og andre oppgaver, som forklart litt tidligere. Dermed kan det være oppgaver hvor elevene kan følge en annen oppgave eller et eksempel, men at det fortsatt vil regnes som kreativ resonnering.

5.5 Refleksjon angående bevis i lærebøkene

Som tidligere nevnt, fant jeg få tilfeller av bevis under analysen, og at det dermed er opp til læreren å vise bevis til elevene eller få de til å jobbe med det. Etter en rask gjennomgang av lærebøkene og en tur bak i stikkordsregisteret i alle lærebøkene, fant jeg at det bare er *Matematikk R2* som forteller hva et bevis er. Dermed står det i hvert fall i denne læreboka hva et bevis. Jeg vil ikke si at det å forklare hva bevis er i lærebøkene er løsningen. Kanskje elevene får med seg definisjonen av bevis, kanskje tenker de ikke noe mer over det. Det jeg vil fram til er at for å lage et bevis, er det en fordel å vite hva det er og hvordan det ser ut.

Forskning gjort av Knuth (2002) viser at lærere i videregående skole har begrenset kunnskap om matematiske bevis. Dette gjelder konstruering, evaluering og forståelse av bevis. Lærere som har dårlig forståelse av bevis, vil undervise elevene i bevis dårlig eller ikke i det hele (Steiner, 1989). Dette er ikke forskning som er gjort her til lands, men hvis det er lignende situasjon i Norge, er det ikke oppløftende resultater. Særlig med tanke på at bevis er så viktig for matematikken, mener jeg at dette også burde reflekteres i lærebøkene og undervisningen.

Lærebøkene unngår i stor grad å bruke ordet bevis i oppgavene. Ordet bevis kun hvis det er snakk om oppgaver hvor elevene skal bevise noe ved hjelp av induksjon. Kanskje er det en bevisst handling for at det ikke skal være strenge krav til løsningen på oppgaven. I tillegg er det muligens enklere for elevene å vite hva de skal gjøre når det brukes uttrykk som «vis at» eller «avgjør». Dermed er det ikke sikkert at elevene ser på disse oppgavene som bevisrelaterte, og dermed ikke forstår hvilken bevisrolle oppgaven har.

5.6 Fremtidig læreplan i matematikk

Tidligere i 2018 har det vært en høringsrunde på kjerneelementer i alle læreplaner (*Fagfornyelsen - siste innspillsrunde kjerneelementer*, 2018), inkludert læreplanen i matematikk. Kjerneelementene er de områdene som blir ansett som de viktigste i hvert fag, og skal sørge for dybdelæring. Utviklingen av de nye læreplanene skal basere seg på disse kjerneelementene. Til hvert av kjerneelementene er det formulert noen sentrale begreper, tenkemåter og uttrykksformer.

Under kjerneelementet *resonnering og argumentasjon* er det foreslått at elevene skal kunne forstå og vurdere andres argumenter og begrunne resultater med matematiske argumenter (*Fagfornyelsen - siste innspillsrunde kjerneelementer*, 2018). Herunder skal elevene kunne forstå hva et matematisk bevis er og kunne følge og vurdere et matematisk resonnement. Dermed kan det virke som resonnering og bevis kan få en sentral rolle i den kommende læreplanen. Samtidig er dette i dag en del av de grunnleggende ferdighetene å kunne *uttrykke* *seg skriftlig og muntlig* i matematikk (KD, 2006) som elevene skal lære seg i matematikkfaget.

I kjerneelementet *Utforskning og problemløsning* står det *«utvikle algoritmisk tenking og andre problemløsningsstrategier»* (*Matematikk, Fagfornyelsen - siste innspillsrunde kjerneelementer*, 2018). I denne høringen beskrives *algoritmisk tenking* som et viktig element i utviklingen av strategier og fremgangsmåter. Dette inkluderer å bryte ned et problem i flere deler, for deretter å løse disse systematisk. Dermed er det en forskjell på en slik definisjon av *algoritmisk tenking* og *algoritmisk resonnering* hos Lithner (2008). I *Algoritmisk resonnering* er det fokus på å velge blant og å bruke allerede eksisterende algoritmer, mens det virker som tanken bak *algoritmisk tenking* er at elevene selv skal lage sin egen algoritme.

Man må bare vente å se hvordan den endelige læreplanen i matematikk vil se ut. Ettersom *resonnering og argumentasjon* er et eget kjerneelement i matematikk, kan det virke som om det kan få en sentral plass. Dermed vil det forhåpentligvis kanskje komme mer fokus på dette i den neste læreplanen.

6 Avslutning

6.1 Oppsummering

I denne oppgaven analyserte jeg tre lærebøker i faget R2-matematikk. Analysen ble gjennomført med både kvalitativ og kvantitativ metode. Derfor er dette en mixed methods studie. For å analysere brukte jeg et sammensatt rammeverk som tok utgangspunkt i rammeverket til Charalambous mfl. (2010). Dette rammeverket ble utvidet med rammeverk fra blant annet van Hiele (1986) og Lithner (2008).

Analysen hadde fokus på bevis i emnet Algebra. I de tre valgte lærebøkene tilsvarte dette kapittelet om *følger og rekker*. Analysen tok for seg både lærebøkenes presentasjon av teori og eksempler, og oppgavene. Teorien og eksemplene kategoriserte jeg i van Hieles (1986) *nivåer av tenking*. Videre analyserte jeg hvordan lærebøkene tok for seg induksjonsbevis. Oppgavene kategoriserte jeg etter om de har en bevisrolle eller ikke, og fordelte dem blant hvilken type rolle de har. Deretter analyserte hvilken type resonnering som kreves for å løse disse oppgavene.

6.2 Konklusjon

Før jeg kommer med en konklusjon velger jeg å gjenta problemstillingen og underspørsmålene. Problemstilling er som følger:

- *Hvordan introduseres og brukes matematiske bevis i lærebøker?*
    - Hvordan fordeler presentasjonen av ny teori og eksempler seg mellom visuelt nivå, deskriptivt nivå, teoretisk nivå eller formelt nivå?
    - Hvordan presenteres induksjonsbevis?
    - Hvilken type rolle har bevisene i oppgavene?
    - Hvilke krav stiller oppgavene til elevers bruk av kreativ resonnering?

Jeg velger å oppsummere de viktigste resultatene fra underspørsmålene først, før jeg svarer på problemstillingen.

Det første underspørsmålet omhandler fordelingen av teori og eksempler *blant nivåer av tenking*: For alle tre lærebøkene er det det *deskriptive nivået* som dominerer blant eksemplene.

Derimot er det en forskjell i presentasjon av ny teori. Der *Sigma R2* og *Sinus R2* har størst andel som havner på det *deskriptive nivået*, er det *teoretiske nivået* mest utbredt i *Matematikk R2*. Ser man på antallet formelle bevis i lærebøkene, er det bare et fåtall av disse.

Det andre underspørsmålet tar for seg hvordan induksjonsbevis presenteres i de tre lærebøkene. Lærebøkene definerer induksjonsbevis på lignende måte. Forskjellen mellom lærebøkene er at i *Sinus R2* definerer induksjonsbevis til å alltid starte på $n = 1$, mens *Matematikk R2* og *Sigma R2* ikke setter en slik begrensning. Derimot vises denne forskjellen i stor grad ikke blant oppgavene som omhandler induksjonsbevis. I *Matematikk R2* og *Sinus R2* brukes det et spesifikt tilfelle for å introdusere induksjonsbevis, før de forklarer hvorfor dette er en gyldig måte å bevise noe på. *Sinus R2* har valgt å bare fortelle hvorfor induksjonsbevis er gyldig.

For å svare på underspørsmålet: hvilken type rolle har bevisene i oppgavene? Analyserte jeg hvilken bevisrolle som fantes i oppgavene. De tre rollene som i hovedsak er tilstede i oppgavene med bevisrolle er *verifisere*, *forklare* og *oppdage*. I alle tre lærebøkene er bevisrollen *verifisere* mest utbredt. Deretter følger rollene *forklare* og *oppdage*. Hos *Sigma R2* utgjør *forklare* den nest største andelen, mens i *Matematikk R2* og *Sinus R2* er *oppdage* nest størst.

I det siste underspørsmålet kategoriserte jeg oppgavene etter hvilken type resonnering som kreves for å løse dem. Ved bruk av rammeverket til Lithner (2008), kom *matematikk R2* dårlig ut av analysen med den høyeste andelen imitativ resonnering. I tillegg har denne læreboka den laveste andelen LCR og GCR. *Sigma R2* har en høyere andel oppgaver som krever kreativ resonnering enn imitativ resonnering. Av denne andelen utgjør GCR størsteparten. For *Sinus R2* utgjorde oppgavene med imitativ resonnering like over halvparten av oppgavene. Videre har *Sinus R2* den høyeste andelen LCR av lærebøkene, og en jevn fordeling mellom LCR og GCR. Ved analysering om oppgavene inneholdt elementer av *divergent tenking* og *strukturforståelse*, ble resultatene annerledes. Her kom *Matematikk R2* ut med den høyeste totale andelen. *Sinus R2* og *Sigma R2* fulgte like etter.

For å gjøre en kort konklusjon av problemstillingen. I introduksjon av ny teori brukes det sjeldent bevis for å rettferdiggjøre formlene som presenteres. Alle tre lærebøkene definerer induksjonsbevis på noenlunde samme måte, men det er forskjeller som jeg har tatt for med i diskusjonsdelen. Blant oppgavene i lærebøkene er det bevisrollen *verifisere* som er størst, men det er også oppgaver med rollene *forklare* og *oppdage*. Dette gir elevene mulighet til å få erfaring med flere typer roller. Av disse oppgavene er det i *Matematikk R2* en høy andel oppgaver med imitativ resonnering. Dermed kan elevene i stor grad følge en allerede kjent algoritme for å løse disse. I de to andre lærebøkene er det en høyere andel kreativ resonnering, dette gjelder spesielt *Sigma R2*. Her må dermed elevene i større grad gjøre bevisene selv.

6.3 Videre forskning

Ettersom denne oppgaven er en analyse av lærebøkene, kan det gi ett bilde av hvordan bevis presenteres for elevene og muligheten de har for å arbeide med dem. Derimot vet jeg ikke hvordan forståelse elevene sitter igjen med angående bevis, eller om de er i stand til å gjennomføre et bevis . Da dette styres av hvordan læreren legger opp undervisningen. For å undersøke hva elevene kan om bevis og sitter igjen med, er det mulig å gjennomføre intervju med flere elever.

I dette intervjuet kan man for eksempel spørre elevene om de kan definere hva et bevis er og hvorfor man har bevis. Dette kan gi en oversikt over hvilke roller bevisene kan ha. Deretter kan man presentere elevene med flere forskjellige forslag til bevis av en formel og få elevene til å vurdere hvilken som er best og svakheter og styrker med de forskjellige forslagene. Videre er det mulig å be elevene produsere et bevis for en enkel formel, som de skal ha forkunnskapene til å kunne gjøre.

7 Referanser

Bahar, A. K. & Maker, C. J. (2011). Exploring the Relationship between Mathematical Creativity and Mathematical Achievement. *Asia-Pasific Journal of Gifted and Talented Education, 3*(1), 33–48.

Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Making Mathematics Reasonable in School. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifer (Red.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (s. 27–35). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bergqvist, E. (2007). Types of reasoning required in university exams in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(4), 348–370. doi: 10.1016/j.jmathb.2007.11.001

Birkeland, A., Fyhn, A. B. & Sriraman, B. (2016). Et rammeverk for å analysere studenters matematiske resonnementer. I B. K. Selvik, M. J. Høines, H. Alrø & T. E. Rangnes (Red.), *Matematikklæring for framtida : festskrift til Marit Johnsen-Høines*. Bergen: Caspar.

Bleiler-Baxter, S. K. & Pair, J. D. (2017). Engaging students in roles of proof. *The Journal of Mathematical Behavior*, *47*, 16–34. doi: 10.1016/j.jmathb.2017.05.005

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques 1970-1990*: Kluwer Academic Publishers.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y. & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematics Thinking and Learning*, *12*(2), 117–151. doi: 10.1080/10986060903460070

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education* (8 utg.). London: Routledge.

Creswell, J. W. (2009). *Research design : qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (3rd ed. utg.). Los Angeles: SAGE.

Creswell, J. W. & Plano Clark, V. L. (2007). *Designing and conducting mixed methods research* (1 utg.). Thousand Oaks, Calif: Sage.

Creswell, J. W. & Plano Clark, V. L. (2011). *Designing and conducting mixed methods research* (2 utg.). Los Angeles: Sage.

Cunningham, D. W. (2013). *A Logical Introduction to Proof*. New York: Springer.

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*(1), 17–24.

de Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. I R. Lehrer & D. Chazan (Red.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (s. 369–393). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Fagfornyelsen - siste innspillsrunde kjerneelementer, Kunnskapsdepartementet (2018).

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM*, *45*(5), 765–777. doi: 10.1007/s11858-013-0530-6

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM, 45*(5), 633-–646. doi: 10.1007/s11858-013-0539-x

Grønmo, L. S., Hole, A. & Onstad, T. (2016). *Ett skritt fram og ett tilbake. TIMSS Advanced 2015: matematikk og fysikk i videregpende skole*. Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Grønmo, S. (2004). *Samfunnvitenskapelige metoder*. Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Hanna, G. & de Villiers, M. (Red.). (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education* (Bd. 15). Dordrecht: Springer.

Haylock, D. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school chilren. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(1), 59–74. doi: 10.1007/bf00367914

Haylock, D. (1997). Recognising mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM*, *29*(3), 68–74. doi: 10.1007/s11858-997-0002-y

Heir, O., Borge, I. C., Engeseth, J., Haug, H. & Moe, H. (2016). *Matematikk R2* (Bokmål, 2. utg.). Oslo: Aschehoug.

Hemmi, K. (2010). Three styles characterising mathematicians' pedagogical perspective on proof. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(3), 271–291. doi: 10.1007/s10649-010-9256-3

Johnsen, E. B. (2001). *Textbooks in the kaleidoscope : a critical survey of literature and research on educational texts*. Tønsberg: Høgskolen i Vestfold.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM*, *45*(2), 167–181. doi: 10.1007/s11858-012-0467-1

Knuth, E. J. (2002). Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 379-405. doi: 10.2307/4149959

Kunnskapsdepartementet (KD). (2006). *Læreplan i matematikk for realfag - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering*. Oslo: Utdanningsdirektoratet. Hentet fra http://www.udir.no/kl06/mat3-01

Leikin, R. & Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: what makes the difference? *ZDM*, *45*(2), 183–197. doi: 10.1007/s11858-012-0460-8

Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in american and chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(2), 234–241.Hentet fra http://www.jstor.org/stable/79754

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(4), 405–427. doi: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.09.003

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 255–276. doi: 10.1007/S10649-007-9104-2

Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet*. Oslo: NKI-forlaget.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring - Ideer og inspiration til udvigling af matematikundervisning i Danmark* (18). København: Undervisningsministeriet.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S. (2015). *Sinus matematikk R2 : lærebok i matematikk : studiespesialiserende program* (Bokmål, 2. utg.). Oslo: Cappelen Damm.

Otten, S., Gilbertson, N. J., Males, L. M. & Clark, D. L. (2014). The Mathematical Nature of Reasoning-and-Proving Opportunities in Geometry Textbooks. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(1), 51-79. doi: 10.1080/10986065.2014.857802

Palm, T., Boesen, J. & Lithner, J. (2011). The requirements of mathematical reasoning in upper secondary level assessments. *Mathematics Thinking and LEarning, 13*(3), 221–246. doi: 10.1080/10986065.2011.564994

Sandvold, K. E., Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Thorstensen, A. & Thorstensen, R. (2015). *Sigma R2 matematikk : studieforberedende matematikk R2* (bokmål, 2. utg.). Oslo: Gyldendal undervisning.

Sidenvall, J., Lithner, J. & Jäder, J. (2015). Students' reasoning in mathematics textbooks task-solving. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 46*(3), 533–552. doi: 10.1080/0020739X.2014.992986

Silverman, D. (2011). *Interpreting qualitative data : a guide to the principles of qualitative research* (4th ed. utg.). Los Angeles, Calif: SAGE.

Solem, I. H., Alseth, B., Eriksen, E., Smestad, B., Ødegaard, E., Vetlesen, E. & Paiam, V. (2017). *Tall og tanke 2 : matematikkundervisning på 5. til 7. trinn*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Steiner, H. (1989). The nature of the theoretical concepts in physics and mathematics - implications for the fragility of knowledge in the educational context. I S. Vinner (Red.), *Proceedings of the Second International Jerusalem Convention on Education: Science and Mathematics Educations – Interaction between Research and Practice* (s. 387–396). Israel: University of Jerusalem.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289–321.Hentet fra http://www.jstor.org/stable/30034869

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in school mathematics textbooks. *Mathematics Thinking and Learning, 11*(4), 258–288. doi: 10.1080/10986060903253954

Thagaard, T. (2009). *Systematikk og innlevelse : en innføring i kvalitativ metode* (3. utg. utg.). Bergen: Fagbokforl.

Thompson, D. R., Senk, S. L. & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(3), 253–295.Hentet fra http://www.jstor.org/stable/10.5951/jresematheduc.43.3.0253

van Hiele, P. M. (1986). Structures and insight. A theory of mathematics educatino. I. Orlando, FL.: Academic Press Inc.