UiT
NORGES ARKTISKE UNIVERSITET

Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Tidlig algebra

Kjennetegn på 3. trinnselevers tilnærming til mønstergeneralisering

—

Mette Nilssen

Masteroppgave i lærerutdanning 5-10. trinn, mai 2019

Matematikkdidaktikk

Innholdsfortegnelse

Sammendrag

Tidlig algebra – *Kjennetegn på tilnærminger 3.trinnselever har til mønstergeneralisering,* er en deskriptiv kvalitativ case-studie om yngre elevers prosess mot algebraisk generalisering gjennom oppgavebasert intervju. Elevene fikk oppgaver med voksende mønster satt i en kontekst de kunne kjenne igjen, der en plante vokser med to blader hver dag. Elevene ble invitert først til å finne antall blader på dag 4 gjennom en rekursiv tilnærming, og de deretter over på dag 10, dag 100 og dag ”n”. I tillegg ble de invitert til å knytte regneuttrykk til hver dag. Oppgavene ble plassert i en ”regneramme” som fungere som en tabell, for å gi yngre elever et ryddig oppsett som skulle være en visuell støtte i prosessen. Det var lagt opp til at oppgavene skulle løses i samarbeid med en medelev, og forsker som støtte i den matematiske samtalen.

Det teoretiske rammeverket for denne studien er hentet fra forskere som har fokus på tidlig algebra, og yngre elevers tilnærming til mønstergeneralisering. Min vitenskapelige posisjon tar utgangspunkt i hermeneutikken, og i datainnsamlingen har jeg elleve intervjuer, videoopptak av alle intervjuene og elevarbeid. Med utgangspunkt i det teoretiske rammeverket har jeg tatt i bruk både en deduktiv og en induktiv tilnærming i analysearbeidet. Med det som utgangspunkt beskriver jeg mine tolkninger og funn, og knytter disse opp mot kategorier jeg kom frem til i prosessen.

Analysen av funnene viste at flere 3.trinnselever var i stand til å generalisere algebraisk på ulike nivå gjennom en nøye tilrettelagt prosess. I denne prosessen fikk forsker innsikt i elevenes begrunnelser og tilnærminger, og kunne hjelpe elevene videre fra ulike generaliseringsnivå gjennom grep som ble gjort i den matematiske samtalen og bruk av regneramma. I denne prosessen benyttet elevene seg av sine egne intuitive representasjoner gjennom hverdagsspråket, aritmetiske-algebraiske notasjoner som de førte inn i regneramma. Flere elever klarte å komme frem til en muntlig eksplisitt generalisering, og noe klarte det også skriftlig.

Forord

For noen lærerike og spennende år! Denne oppgaven avslutter et fem års langt løp med først videreutdanning i matematikk 1 og 2. Deretter matematikkMOOC som spesielt fikk meg til å endre og tenke nytt i forhold til min måte å undervise på, og som var avgjørende for at jeg valgte å gå videre på master i matematikkdidaktikk. Jeg har undervist i matematikk siden jeg var ferdigutdannet som lærer i 1997, og tenker at den erfaringen har vært nyttig i denne prosessen. Det er mange som fortjener en takk for støtte og hjelp i prosessen.

Først min arbeidsplass med rektor i spissen som har vært positiv hele veien. Så til mine arbeidskolleger som har vært tålmodig med all tilrettelegging der jeg i perioder har vært på studier for så å kunne arbeide dette inn senere. Til slutt mine elever som begynte på 1.trinn da jeg startet mine studier og som vært med på min reise uten å vite om det. Gjennom dem har jeg fått prøv ut anbefalte oppgaver, testet ut opplegg og oppgaver jeg har designet underveis i prosessen. De har vært aktive og arbeidsomme, og gitt meg uvurderlig datamaterialer som jeg kunne knytte til nyere forskning. Min reise disse fem årene har rett å slett vært et dypdykk i, hver eneste dag, i selve forskningsfeltet med hovedfokus på elevenes matematiske tenkning og min ledelse og tilrettelegging for den.

Jeg vil også takke min veileder, Geir Olaf Pettersen, for veiledningen jeg har fått underveis. Gode konstruktive tilbakemeldinger har vært uvurderlig, da studier på topp av jobb er en ensom prosess. Ingen klarer noe alene, og all veiledning har satt i gang ny tankevirksomhet og vinkling av oppgaven.

Til slutt vil jeg takk de som betyr mest for meg, familien min. Mine fire barn som har hatt en mamma med nesen ned i bøker, papirer og datamaskinen etter arbeidstid. Denne hverdagen har resultert i selvstendige barn som ordner opp og tar ansvar. Så Gaute, min viktigste støtte og motivator. Disse fem årene hadde ikke vært mulig uten deg. Hverdagen skal driftes og i de mest hektiske periodene har du vært tryggheten selv og stått stødig som en klippe. Den beste roen og avkoblingen har vært hjemme sammen med dag.

Alta 15.mai 2019

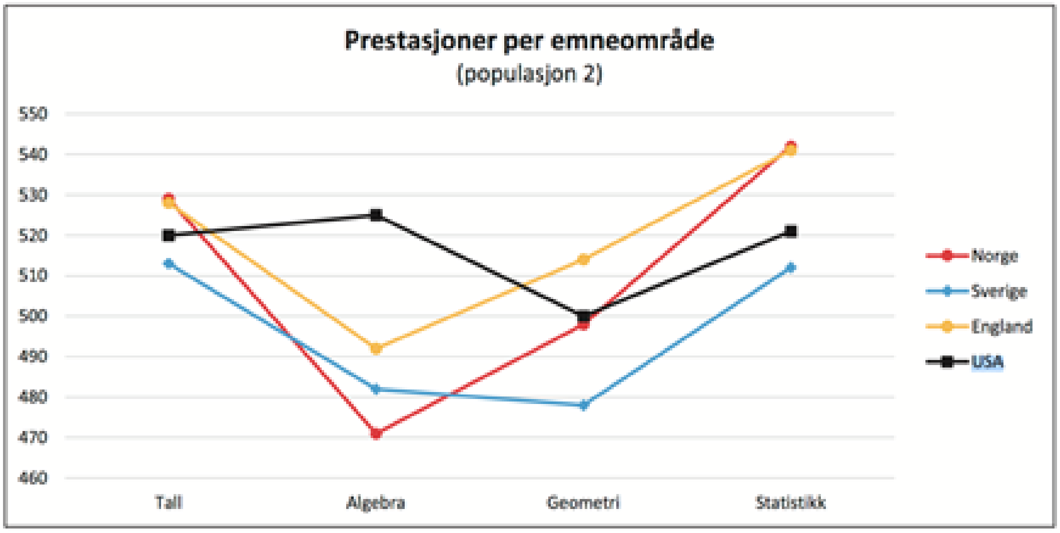
Mette Nilsse

1 Innledning

Algebra er et emneområde i matematikken norske elever gjør det svært dårlig i. Forskere (Radford, 2010; Charraher et al.,2008; Wilkie, 2014) mener at mønstergeneralisering er en god måte å innføre algebra på for elever. Tidlig algebra og ulike tilnærminger innenfor mønstergeneralisering har jeg som matematikklærer hatt lite kunnskap om. Jeg har heller ikke hatt samtaler med mine kolleger om tidlig algebra. Både jeg og mine kolleger har nok tenkt at algebra er noe elevene skal arbeide med på ungdomstrinnet. Jeg vil videre presentere bakgrunn for valg av problemstilling og målsettingen for prosjektet.

1.1 Bakgrunn

Etter å ha undervist i matematikk i over 20 år på barnetrinnet, mesteparten av tiden på småtrinnet og tatt videreutdanning i matematikk de siste årene, har jeg fått interessen for tidlig algebra og ulike generaliseringer innenfor feltet. Gjennom denne prosessen har jeg fått bedre innsikt i og blitt bevisst hva tidlig algebra og algebraisk tilnærming går ut på, og viktigheten av å legge tidligere til rette for algebraisk tilnærming slik at elevene kan lykkes bedre med den formelle algebraen de møter på ungdomskolen. Interessen for temaet ble større etter å ha lest artikkelen om tidlig algebra og algebraisk resonering fra*"Second Handbook of resarch on Mathematics Teaching and learning"* skrevet av Carraher & Schliemann (2007) som beskriver algebra som en måte å tenke på. I samme artikkel kom det frem at mange elever har sitt første møte med algebra på ungdomsskolen, og da gjerne med manipulering av algebraiske symboler uten forståelse. Resonneringsprosesser uteblir, og elever har en tilnærming til algebra gjennom ulike innlærte prosedyrer og får dermed et negativt forhold til algebra. Dette fant jeg en bekreftelse på ved å se på"Analyser og resultater" fra TIMSS (2015) (Se figur 1). Der karakteriseres norske elevers prestasjoner i matematikk på 9.trinn som middels gode i europeisk perspektiv, men særlig svake prestasjoner i emneområdet algebra.



Figur 1 Norske prestasjoner i TIMSS (2015) i emneområder, s sammenliknet med referanseland (Bergem, 2016)

I forbindelse med et arbeidskrav i min videreutdanning høsten 2015 ga jeg mine 2.trinnselever to oppgaver med mønstergeneralisering med geometriske figurer, partall- og oddetallsmønster som jeg plasserte i en"regneramme". Regneramma ble tatt i bruk for å hjelpe elevene til å strukturere oppgaven, og ha kontroll på egen tankegang og skriftlige representasjonsformer. Jeg ble overrasket over hvor mange elever som spesielt klarte oppgaven med partall, og fikk god innsikt i elevenes resonnering i forhold til underliggende strukturer de så i mønsteret (Mason m.fl.,2014). Jeg husker spesielt en jentes resonnering da hun ble spurt om hvor mange figurer det ville være i figur 500 (5-hundre), og jenta svarte *"det må jo være 10-hundre for jeg bare dobler"*. Jenta som var 7 år så den underliggende strukturen som dobling i forhold til figurnummeret, men hadde ikke utviklet en tallforståelse for at 10 hundrere er 1000. Her har vi kjernen i resonnering i algebra som jeg de siste årene har ønsket å forske videre på. Oppgavene som ble gitt videreutviklet jeg med inspirasjon fra Wilkie (2014), og tok utgangspunkt i en virkelig kontekst med blader som vokser med to for hver dag. Disse testet jeg ut på mine 4.trinnselever i forbindelse med en blogg jeg skulle skrive høsten 2017. Her så jeg at elevene var i stand til å resonnere seg frem til en generalisering i samarbeid med sin læringspartner. Med dette som utgangspunkt skal jeg bruke den siste versjonen av oppgavedesignet mitt på 3.trinnselever jeg ikke kjenner.

1.2 Målsetting

Gjennom masteroppgaven min ønsker jeg å sette fokus på ulike tilnærminger elever på 3.trinn tar i bruk når de arbeider med mønstergeneralisering. Jeg håper at forskningen min kan fungere som et tankeredskap ved tilrettelegging av oppgaver som øver elevene på å se og utforske strukturer i mønstergeneralisering, gi en oversikt over tilnærminger lærere kan ta i bruk når de vurdere hvor elevene er i prosessen for å hjelpe dem videre til et høyere nivå.

De er skrevet flere masteroppgaver med fokus på mønstergeneralisering som tar for seg tilnærmingen høytpresterende elever på mellomtrinnet eller elever på ungdomstrinnet gjør. Selv om det er gjort en del forskning (Carraher et al.,2008; Wilkie, 2014; Moss, 2006) på at yngre elever kan tilnærme seg slike oppgaver, er bevisstheten rundt dette fortsatt lav. Jeg er opptatt av at alle elever skal får utfordrende oppgaver, og ikke bare de”flinke”. Utfordrende oppgaver får elevene til å være i en psykisk grense mellom komfort- og risikosone der de setter ord på sin tenkning (Stillman et al.,2009). Det er i denne prosessen elevene utvikler seg og kommer videre til høyere nivå i matematiske prosesser.

1.3 Problemstilling

Jeg vil forske på 3.trinnselever og se på tilnærminger, underliggende strukturer de tar i bruk i gjennom språket, og om de klarer å knytte aritmetisk notasjon til resonneringen sin. Elevene skal få oppgaver som er satt i en virkelig kontekst og løses i det jeg kaller en”regneramme” i samarbeid med læringspartner og forsker som støtte. Jeg har følgende problemstilling:

Hva kjennetegner 3.trinns elevers tilnærming når de arbeider med mønstergeneralisering?

Hvilke faktorer har betydning for framdrift?

2 Teoretisk rammeverk

I denne delen vil jeg presentere den forskningen og teorien jeg har som grunnlag for min studie.

2.1 Tidlig algebra

I følge Carraher & Schliemann (2007) er algebra en måte å tenke på og tidlig algebra omfatter resonnering der yngre elever (ca. 6-12 år) kan ta i bruk språket for å generalisere algebraisk. Det kan gjøres ved å beskrive tallmønster visuelt og ikke-visuelt. En dyp forståelse for aritmetikken der elever utforsker tall, ligger til grunn for algebraisk tenkning, og aktiviteter i tidlig algebra omfatter generalisering fra aritmetikk og mønster. De mener at elever er i stand til å arbeide pre-algebraisk med variabler og regler i aritmetikk før de blir undervist i algebra, gjennom oppgaver fra en kjent kontekst og en prosess der forståelsen ligger til grunn. I utforskningen kan de lære algebraisk notasjon og teknikker selv som de ikke har blitt undervist i emnet. Kompetanse i algebra krever en evne til å se sammenhenger fra skriftlige former og underliggende strukturer, for deretter å kunne generalisere. For yngre elever kan andre tilnærminger brukes enn den tradisjonelle innføringen i algebra for ungdommer. Gjennom språket kan små elever uttrykke algebraiske ideer og relasjoner i tabeller og grafer. De påpeker at bruk av representasjoner i bestemte situasjoner og kontekster, med oppgaver der elever kan ta i bruk fysiske mengder spiller en rolle for elevers matematiske forståelse. I tidlig algebra er det fire typer representasjoner som uttrykker algebraiske ideer. Aritmetiske-algebraiske notasjoner, tabeller, grafer og naturlig språk. Matematikk har iboende strukturer som krever at elever følger de samme generelle måter uansett alder. Yngre elever begynner med det grunnleggende, og går videre noe saktere enn eldre elever.

2.2 Teoretisk og empirisk generalisering

Carraher et al.(2008) skiller mellom teoretisk og empirisk generalisering. Begrunnelsen for generalisering er forskjellig i matematikk og tidlig matematikk. I matematikk er det ikke viktig hvordan en forstår problemene, hvordan denne innsikten oppsto og hvordan læringen utviklet seg. De ha følgende definisjon på generalisering (Carraher et al. 2008, s.3): Matematisk generalisering innebærer et krav om at teknikken eller forholdet holder for et stort sett med matematiske objekter eller forhold. En generalisering (ofte referert til som en teori) er antatt å være sant hvis og bare hvis det støttes av et gyldig bevis (min oversettelse). I tidlig matematikkundervisning er en opptatt av elevenes psykologiske verden og hvordan de lærer. Der de reflekterer over situasjoner som involverer fysiske mengder og tall, hvordan elevene bruker konvensjonell notasjon og teknikker, hvordan de representerer og begrunner matematikk på sine måter. Det er gjennom denne prosessen elever generalisere empirisk.

I en studie har Carraher et al.(2008) undersøkt hvordan 9 år gamle elever generaliserer gjennom lineære funksjoner. Funksjoner innføres normalt gjennom algebraiske uttrykk, men dette er ikke et alternativ for 9 år gamle elever som ikke er kjent med algebraisk notasjon.

I studien så de på elevene begrunnelser og tilnærminger i prosessen, hva som fremmet overgangen fra er rekursiv generalisering over på en input-output funksjon med to variabler som ikke fult ut samsvarer med de aksepterte normer i matematikk. For å få til dette la de til rett for å tvinge elevene ved hjelp av lærer over på figur 100 og figur n. Elevene benyttet sine egne intuitive representasjoner for så å gradvis gå over til konvensjonelle representasjoner, inkludert bruk av bokstaver for å representere variabler for å forstå matematiske relasjoner.

“x” blir normalt presentert for yngre elever som et bestemt tall, og gjerne som en manglende addend i utrykk som 5+x=7. Det funksjonelle perspektivet forstørrer betydningen av algebraiske uttrykk ved å behandle "x" som en variabel, det vil si som et objekt som kan variere i verdien i f.eks. funksjoner f(n)=2n+1. Elevene ble oppfordret til å flytte fra å tenke på operasjoner på bestemte tall til relasjoner mellom variabler. I begynnelsen lærer elevene å gjøre generaliseringer i situasjoner som involverer fysiske mengder. De lærer å bruke tabeller, grafer, algebraisk notasjon og andre matematiske representasjoner for å fange generelle aspekter av deres tankegang om slike situasjoner. Gradvis blir de komfortable ved å bruke bokstaver til å stå for variable mengder og operere direkte på algebraiske uttrykk.

2.3 Radfords fire generaliseringer

Ifølge Radford (2010) er mønstergeneralisering en fremtredende måte å innføre algebra for elever. I denne prosessen må man ikke forveksle algebraiske generaliseringer med andre former for generalisering, da alle generaliseringer ikke er algebraiske. Karakteristisk for algebraisk tenkningen er at det først handler om algebraiske objekter som ukjente, variabler og konstante. For det andre må denne tenkningen være analytisk der elevene uttrykker de underliggende strukturene de ser i figurmønsteret. Det tredje er når objekter uttrykkes med symboler. Radford (2010, s.42) definerer generalisering av mønster på følgende møte:

> *"Generalizing a pattern algebraically rests on the capability of grasping a commonality noticed on some elements of a sequence S, being aware that this commonality applies to all the terms of S and being able to use it to provide a direct expression of whatever term of S."*

Radford skiller mellom to overordnede nivåer, aritmetiske- og algebraiske generaliseringer. Aritmetisk eller ikke-algebraiske generalisering består av praktiske løsningsstrategier, og algebraisk generalisering deler han inn i tre underkategorier, fakta generalisering, kontekstuelle generaliseringer og symbolske generaliseringer. Når elever arbeider på nivået aritmetisk generalisering er de i stand til å se lokale likheter. De kan bygge neste figur praktisk gjennom konkreter eller tegninger, uten at de kan bruke det de legger merke til for å komme frem til et eksplisitt uttrykk. Denne handlingen er ubestemmelig og kalles naiv induksjon, en ikke-algebraisk generalisering. På dette nivået prøver og feiler elevene gjennom gjetting, og kan uttrykke at de fant løsningen ved et uhell.

Når elever arbeider med algebraiske generaliseringer skal de gjennom prosessen kunne utarbeide generelle regler for hvilket som helst tall i rekken av figurmønsteret. Gjennom faktabasert generalisering kan elever beregne konkrete tilfeller av en variabel i mønsteret fra figur til figur. På dette nivået begynner elevene å se en underliggende struktur, og de danner skjema som opererer på bestemte tall.

Gjennom kontekstuelle og symbolske generalisering er elevene i stand til språklig å uttrykke eksplisitt et generelt uttrykk for figurmønsteret. Det ubestemmelige må nevnes og tallene i uttrykket må forklares. Når det gjelder den kontekstuelle generaliseringen kan variabler og konstante objekter uttrykkes med en blanding av matematiske symboler og begreper gjennom hverdagsspråket ved å for eksempel si "tallet på figuren +3", "den øverste rekken", "det neste tallet". Elevene snakker om figuren og neste figur. De kan se mønster eller den underliggende strukturen i et uttrykk og regne konkrete tilfeller i en figurrekke, der de skiller mellom likt (konstant) og ulikt (variabel).

I symbolsk generalisering er elever i stand til å lage et generelt uttrykk med algebraiske symboler som for eksempel n2 eller n2 +1. I den symbolsk generalisering må elevene være i stand til å beskrive regelen, forklare variabelen n og konstante tall i uttrykket. Det må de uttrykke med algebraiske symboler, og kunne beskrive regelen for hvilket som helst tall med full symbolsk ligning.

Gjennom generaliseringsprosessene prøver elevene å gjøre noe tydelig gjennom handlinger som kommer til uttrykk gjennom gestikulering, ord eller fakter som kalles objektiviseringsprosess. Denne generaliseringen er ikke anerkjent eller navngitt, og elevene kan bruke begrep som "figuren" i stedet for figurnummeret.

2.4 Staceys fire metoder i mønstergeneralisering

Ifølge Stacey (1989) er det å finne og bruke mønster og organiserer resultater systematisk, en viktig strategi for matematisk problemløsning. I sin undersøkelse fant hun ut at elever har vanskeligheter med å se og uttrykke mønsteret som en funksjonssammenheng. Funnene i undersøkelsen der elevene skulle finne figur nummer 20 og 100 plasseres i fire kategorier:

1 Couting Method som jeg oversetter til tellemetoden, teller elevene antall fra tegningen.
2 Difference Metod som jeg oversetter til differansemetode, ganger elevene antall trinn med 3. Ser implisitt at gjentatt addisjon av 3 gir M(n)=3∗n
3 Whole-objekt Method som jeg oversetter til hel-objekt-metoden, bruker elevene antallet i en mindre stige og multipliserer dette for å finne antallet i en større stige. Her antar

man implistt at M(mn)= m M(n). Denne metoden ble også brukt med addisjon ved å legge sammen antallet for flere stiger.

4 Linear Method som jeg oversetter til lineær metode, bruker elevene både multiplikasjon og addisjon i funksjonsuttrykket, der rekkefølgen av operasjonene har betydning. Bruker implisitt lineær metode $M(n)=an+b$ der $b\neq 0$

2.5 Rekursiv og eksplisitt generalisering

Wilkie & Clarke(2015) har forsket på og kommet frem til at yngre elever kan tilnærme seg algebra gjennom visuelle voksende mønster, og knytte aritmetiske uttrykk til det visuelle. Det er i denne prosessen elever får en mulighet for å utvikle konseptuell forståelse for algebra og tenke funksjonelt i forbindelse med algebraiske oppgaver, som vil støtte dem i møte med algebra senere i skoleløpet. Wilkie (2014, s.24) definerer funksjonell tenking i forbindelse med algebraiske oppgaver som "fokus på sammenhengen mellom to (eller flere) varierende mengder, nærmere bestemt spesielt den type tenkning som fører fra spesifikke forhold (enkelte tilfeller) til generaliseringer av forholdet på tvers av forekomster" (min oversettelse). Det hjelper elever til å forstå notasjonen og endringene. Å bli i stand til å finne en regel som viser hvordan variabler forholder seg til hverandre er kjernen i funksjonell tenkning. Forståelsen for manipulering av bokstaver i algebra blir viktig for å uttrykke sammenhenger i problemløsning.

Wilkie & Clarke (2015) har vist at elever kan utvikle funksjonell tenking innenfor en kjent kontekst der det brukes flere representasjoner i utforskningsprosessen. Det gjøres ved å arbeide med oppgaver med voksende mønster der de ser på sammenhengen mellom de ulike delene og dagsnummeret. Lærer oppmuntrer elevene til først å beskrive økningen verbalt med å stille åpne spørsmål, deretter får elevene gjennom den matematiske samtalen hjelp til å uttrykke økningen algebraisk med tallmønster og regneuttrykk der bokstaver for varierende mengder innføres. Det er to måter å beskrive sammenhengen mellom to varierende mengder (variabler). Når elevene finner det neste leddet i mønsteret ved å gå fra dag til dag der de bruker konkreter eller tegner mønsteret, eller forklarer økningen ved å beskrive det dag for dag tar de i bruk en *rekursiv generalisering*. Når de ser sammenhengen mellom to variabler og knytter det til figurnummeret i mønsteret tar de i bruk en *eksplisitt generalisering.*

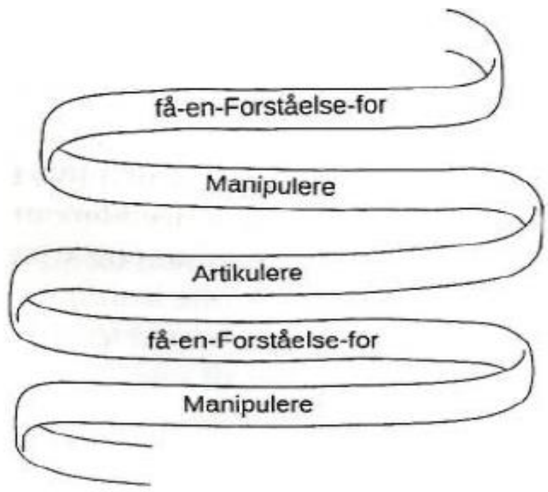
Stacey (1989) beskriver disse to generaliseringene som *"near generalisation"* der elevene finner antallet i neste figur ved å ta utgangspunkt i figuren foran, og *"far generalisation"* når elevene kan gi uttrykk for hvilket som helst figur.

Ifølge Mason m.fl.(2014) ligger en av de viktigste kildene til generalisering i tallene, gjennom å oppdage og uttrykke tallmønster, der man ser det generelle gjennom spesielle.

Her prøver man ut spesialtilfeller for å få erfare strukturen som ligger bak beregningene. Gjennom elevene egne oppdagelser og valg av underliggende struktur, er det større sannsynlighet for at de tar ansvar og blir interessert og motivert. Det visuelle ligger til grunn for resonnering der lærer hjelper elevene med å spørre "Hva er likt?" og "Hva er ulikt, og hvordan endrer det seg?". Etterhvert som elevene flytter seg fra figur til figur, legger hjernen merke til hva som er likt og hva som endrer seg. Dersom de ikke er sikker hjelper det å skrive ned det de ser. Når elevene uttrykker en sammenheng for første gang har den en status som en antakelse. Kan elevene si med ord hvordan figurrekken fortsetter, har de funnet et første utrykk for en generell sammenheng. Denne generaliseringen kaller Mason rekursiv på lik linje med Wilkie (2014). Å teste ut spesielle tilfeller er en god måte for å få en formening om hva som skjer, og for å forstå strukturen som leder til et uttrykk for noe generelt som uttrykkes eksplisitt. Gjennom å si antakelsen høyt og skrive dem ned ser elevene mer objektivt på strukturen, og det gir rom for å modifisere eller forkaste dem til fordel for en ny versjon. Det finnes flere måter å utvide en figurrekke på ved hjelp av en regel, der elevene ser antall og teller dem ulikt. Dette gir muligheter for å være kreativ.

2.6 Problemløsningskontekst og algebraiske syklus

I følge Lesh & Zawojewski (2007) kan algebra bli mer forståelig dersom den settes inn i en problemløsningskontekst. De beskriver at problemløsning er prosessen der elever tolker et problem fra den «virkelige verden» som elevene kjenner seg igjen i og løse den hensiktsmessig ved å matematisere situasjonen gjennom modellering. Denne prosessen er dynamisk og kan knyttes til Mason (2014) sin algebraiske som beskriver prosessen i arbeidet med algebraiske oppgaver gjennom en spiral som han kaller MFA-spiralen. Elevene manipulerer (M) endringene ved å tegne eller bruker konkreter, deretter får-en-Forståelse for (F) endringene, og så artikulere (A) ved å beskrive endringene verbalt. Denne prosessen fortsetter i en spiral til elevene klarer å generalisere verbalt eller til slutt å uttrykke det på en matematisk måte.



Figur 2- MFA-spiralen (Mason, 2014)

2.7 Representasjoner

I tidlig algebra er det fire typer representasjoner som uttrykker algebraiske ideer. Aritmetiske-algebraiske notasjoner, tabeller, grafer og naturlig språk (Carraher et al.,2008). Yngre barn vet ikke hva algebraiske uttalelser betyr og kan på grunnlag av situasjoner og aktiviteter få første innføring med algebraen, der det tas utgangspunkt i mengder og forholdet mellom dem.

Matematiske objekter kan ikke vises direkte; de må uttrykkes gjennom representasjonsformer.

Mason m.fl.(2014) beskriver fire representasjonsmoduser som elever forflytter seg mellom; ord, symboler, tabeller og bilder (grafer og diagrammer). Når elevene forflytter seg til en spesiell representasjon har de muligheter for å legge merke til en eiendommelige trekk som karakteriserer hver modus. Disse modusene deles inn i enaktiv, ikonisk og symbolsk som er notert som EIS etter konvensjonen. I den enaktive modusen manipulerer elvene fysiske objekter. Den ikoniske refererer til bilder som må plasseres innenfor en kjent kontekst for at elevene skal se hva de representerer. Den symbolske modusen refererer til merker eller tegn som blir brukt til å representere noe etter konvensjonen. Disse modusene er ikke faste, men endrer seg etter elevenes erfaring. Det som er symbolsk for en elev, kan være ikonisk for en annen. Modusene blir et uttrykk for hvordan elevene tenker og det de opplever. Gjennom manipulering får elevene en formening om underliggende strukturer sammenhenger, som igjen skal uttrykkes i symboler. Elever lærer best når de blir oppmuntret til å legge det fysiske til side i forhold til forestillinger til fordel for symboler som kan manipuleres.

2.8 Matematisk samtale

Språket er en av representasjonsformene i tidlig algebra (Carraher et al.,2008). Ifølge Drageset (2016, s.169) er det ulike grep en lærer kan bruke for å styre samtaler på, og deler disse inn i tre grupper. Den første gruppa handler om å hjelpe elevene til å endre strategi gjennom råd, spørsmål og avvisning. Den andre gruppa handler om å hjelpe elevene fram mot svaret gjennom demonstrasjon, forenkling og spørsmål. Den tredje gruppa handler om å fokusere på forståing gjennom å be om detaljer, be om begrunnelser og fremheve det som er viktig. Videre deler Drageset samtaler inn i fire typer. Ensretta-, medvirkende-, refleksiv- og rik kommunikasjon. De to første knytter han til IRE-mønsteret, der samtalen preges av at læreren tar initiativ ved for eksempel å stille spørsmål, eleven respondere og læreren evaluerer der elevene i liten grad får dele sine tanker og strategier. I refleksiv kommunikasjon tas ideer og strategier opp til refleksjon, utfordring og diskusjon for å utvikle en dypere forståelse av matematikken. Argumentasjon og logikk er hovedfokus, og diskusjonen forgår naturlig også mellom elevene. I rik kommunikasjon samarbeider elevene og lærer tett for å utvikle elevenes forståelse av matematikken. Elevene er utforskende og aktive, og lærer spør mer enn de forklarer og definerer.

Det er tre grep lærer kan bruke for å hjelpe elever til å utvikle en matematisk forståelse som er solid, effektiv og presis; lokke frem elevenes sine løsningsstrategier, støtte elevene sin begrepsforståelse og utvide elevenes matematiske tenkning. I det første grepet lokker lærer frem hvordan elever tenker og hvordan de løser oppgaver, og får tak i hva elever ikke forstår og hva de forstår slik at de lærer av hverandre. Der lærer støtter hjelpes elevene til å utvikle en mer presis forståelse av begrep. I disse to vurdere og hjelper lærer med den matematikken de kjenner til. I det siste grepet utvides elevenes matematiske tenking ved å hjelpe elevene med å lære nye ting med utgangspunkt i det de forstår og arbeider med. Gjennom disse grepene brukes åpne spørsmål som f.eks.”Hva skal vi gjøre her?” eller ”Hvordan tror du at du kan finne svaret?”. I tillegg er spørsmål som starter med ”Hvorfor...?” et viktig grep for å be om en begrunnelse, og for å øve opp evnen til å argumentere matematisk. Underveis i en samtale trenger elevene hjelp til å fokusere på det som er viktig der lærer poengterer hva som er viktig å huske på for å få de til å holde tråden eller få de tilbake på sporet.

3 Metode

I denne delen redegjør jeg for metoden og vitenskapelige tilnærming jeg har valgt for å kunne besvare forskningsspørsmålet mitt.

3.1 Forskningsdesign

Mitt forskningsdesign er deskriptiv kvalitativ der min vitenskapelig posisjon tar utgangspunktet i hermeneutikken. Hermeneutikk kommer fra gresk og betyr utlegningskunst eller forklaringskunst (Gilje & Grimen, 1993, s.143). Kjennetegn ved kvalitative studier er at analysen starter med en gang og pågår gjennom hele forskningsprosessen (Nilssen, 2014, s.25). Den ontologiske forutsetningen har fokus på at det eksisterer mange virkeligheter som er i stadig forandring. For å få tak i disse virkelighetene må jeg ha fokus på deltakernes perspektiv som er i samspill med mitt perspektiv (Postholm, 2010). Den epistemologiske forutsetningen har fokus på at kunnskap blir konstruert i møtet mellom forsker og deltakerne.

Mine erfaringer, bakgrunn, kunnskaper og det teoretiske rammeverket ligger til grunn for prosessen med å forstå og skape mening i datamaterialet. Dette skal jeg formidle i en helhetlig beskrivende tekst, og vil ha en subjektiv tilnærming som utvikler seg gjennom studien. I følge Gilje & Grimen (1993) brukes begrepet ”mening” både om menneskelige aktiviteter og resultatene av menneskelige aktiviteter. Min hensikt er å få frem denne meningen, der 3.trinnselevers tilnærming i mønstergeneralisering gjennom handlinger og muntlige ytringer i samarbeid med medelev og støtte fra forsker, skal beskrives og fortolkes for å forstås og som forhåpentligvis svarer på min problemstilling. Da elevene skal samarbeid med hverandre og forsker, tar jeg utgangspunkt i et sosialkonstruksjonistisk syn der virkeligheten konstrueres gjennom språket og måten vi kommuniserer med hverandre på (Kleven, 2018).

Samfunnsvitenskapene bygger på en dobbel hermeneutikk (Gilje & Grimen, 1993). Her forholder jeg meg til en verden som er fortolket av de sosiale aktørene og deres resonnering gjennom hverdagsspråket, og i min forskning er det elevene jeg intervjuer. På den andre siden skal jeg drive forskning og rekonstruere de sosiale aktørenes fortolkninger ved hjelp av teoretiske begreper innenfor et samfunnsvitenskapelig språk. Gilje & Grimen (1993) refererer til Gertz som beskriver dette med å skille mellom erfaringsnære og erfaringsfjerne begreper. Elevene vil bruke erfaringsnære begrep på en naturlig måte ved å beskrive hva de ser, hører, føler, tenker eller forestiller seg, og forstå disse når andre bruker det. Gjennom min tolkning for å forstå vil jeg ta i bruk erfaringsfjerne begrep for å beskrive og forklare mine funn. I hermeneutikken forstår vi noe på grunnlag av visse forutsetninger. Gilje & Grimen (1993) referer til det Gadamer kaller forutsetninger for forforståelse eller for-dommer, og er et nødvendig vilkår for forståelse da vi må starte med å ha visse ideer om hva vi skal se etter eller rette vår oppmerksomhet mot. Popper (1959) kaller dette for forventningshorisonter som gir retning til undersøkelsen. Forforståelsen deles i tre komponenter; språk og begreper, trosoppfatninger og individuelle personlige erfaringer. For det første ser aktøren verden gjennom de begreper språket stiller til rådighet, slik at det er mulig å se noe som noe, og bestemme hva en ser, oppfatter og gjør. Når det gjelder trosoppfatninger er de medbestemmende for hva aktøren kan akseptere som grunner for eller imot et standpunkt, og hva som oppleves som et problem. Mitt teoretiske rammeverk og hypotese vil være min mer eller mindre velbegrunnede trosoppfatning. For det tredje inngår aktørens personlige erfaringer i forforståelsen. Disse erfaringene vil variere etter hvilket miljø aktøren har vokst opp i og levd sine liv i, og tolker verden i lys av de erfaringene de selv har gjort. Mine personlige erfaringer som lærer vil være medbestemmende på hvordan jeg driver elevene videre i intervjusituasjonen. Tolkningen av funn skal gjøres ved en vekselvirkning mellom del og helhet, der jeg forstår delene i materialet ut fra helheten, men også forstå helheten ved forståelsen av enkeltdelene. En slik vekselvirkning mellom del og helhet refereres til den hermeneutiske sirkel (Kleven & Hjardemaal, 2018). Denne tolkningen gjøres ut ifra begrunnelsessammenhenger, forbindelsene mellom det vi skal fortolke, forforståelsen og konteksten det må fortolkes i.

Min forskning er også et kasusstudie da det er tids- og stedbundet og skal foregå i en klasse på en skole over fire uker. Jeg skal beskrive og belyse temaet tidlig algebra, gi en grundig, helhetlig beskrivelse av tilnærming til mønstergeneralisering elevene tar i bruk ved å intervjue et lite antall elever (Postholm, 2010).

3.2 Metode for datainnsamling

I denne delen redegjør jeg for hvordan jeg har gått frem for å innhente data til analyse.

3.2.1 Utvalg

Oppgavene jeg har designet har jeg tidligere gjennomført med mine 2.og 4.trinnselever, og ønsker i denne studien å fordype meg mer i hva som kjennetegner tilnærmingen 3.trinnselever tar i bruk. Elevene skal ha et visst grunnlag for oppgavetypen da de har vært gjennom følgende kompetansemål for 2.trinn i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2013).

Eleven skal kunne:

- *Kjenne att, samtale om og vidareføre strukturar i talmønster*
- *Doble og halvere*
- *Lage og utforske geometrisle mønster, både med og utan digitale verktøy, og beskrive dei munnleg*

Innsamlingen av data er gjort på en stor barneskole i Nord-Norge. Jeg kontaktet rektor og lærerne på trinnet til den utvalgt skolen, og de var positive til mitt prosjekt. Innbydelse til å delta i prosjektet ble sendt ut til alle elevene på 3.trinn, og 24 elever ønsket å delta (Vedlegg 1). Alle disse var med på førundervisningen jeg gjennomførte, og av disse ble det tilfeldig trukket ut tolv elever som ble intervjuet. Elevene ble sett sammen i seks elevpar. Ifølge Kvale & Brinkmann (2015) skal man intervjue så mange personer som det trengs for å finne ut det du trenger å vite til metningspunktet nås når intervjuene ikke tilfører noe nytt. Jeg ønsker et tilfeldig utvalg for mest mulig å representere resonneringen som kjennetegner 3.trinnselever. Kleven & Hjardemaal (2018) sier at kjennetegnet på et tilfeldig utvalg er at utvalgsmedlemmene trekkes enkeltvis fra en liste over populasjonsmedlemmene, uten at det legges noen form for føringer eller restriksjoner på trekningen. Hvert medlem har like stor sjanse for å bli med i utvalget.

3.2.2 Intervju

For å få tilstrekkelig og nødvendig data for å belyse min problemstilling valgte jeg å gjennomføre oppgavebasert intervju. Intervjuet er semi-strukturert der jeg på forhånd har forberedt meg på åpne spørsmål i en intervjuguide (Se vedlegg 2). Tilnærming blir varsomt spørre-og-lytte-orientert (Kvale & Brinkmann, 2015). Forskningsintervjuet har som mål å produsere kunnskap. For at denne kunnskapen skal bevisstgjøre både meg og forhåpentligvis andre matematikklærere, har jeg valgt å gjøre intervjusituasjonen så lik som mulig en vanlig skoletime. To elever samarbeidet om oppgavene på et grupperom i tilknytning til klasserommet til elevene. Intervjuene ble filmet slik at jeg kunne konsentrere meg om å få tak i hvilke tilnærminger gjennom språklige resonneringen og aritmetiske notasjoner elevene tok i bruk. I gjennomføringen stilte jeg spørsmål fra intervjuguiden og i tillegg andre spørsmål som var naturlig for meg for å få elevene til å utdype sin tenkning, og samtidig gjorde noen grep som Drageset (2016) mener er viktig for å drive elever fremover i den matematiske prosessen. Intervjuene på hver oppgave varte fra 10-17 minutter. Jeg har gjennomført elleve intervju. Seks intervju med oppgave 1, fire intervju med oppgave 2 og ett intervju med oppgave 3.

3.2.3 Førundervisning

Før jeg begynte med intervjuene, hadde jeg to økter med undervisning med elevene som hadde meldt seg på mitt prosjekt. Det var for å skape en relasjon til elevene samtidig som de fikk mulighet til å øve seg på matematisk samtale i algebraiske oppgaver og begrepene jeg vil bruke i intervjuet. Undervisningen tok utgangspunkt i at aritmetikken ligger til grunn for algebra (Carraher & Schliemann, 2007). Elevene må forstå bruken av matematiske symbol som +, -, x, : , =, og den lineære orden i voksende mønster. Jeg fokuserte først på innholdet i begrepet tallmønster med heltall, f.eks. 3–6–9. Elevene fortsatte tallmønsteret samtidig som de forklarte til hverandre økningen de så i hvert tallmønster. I tillegg ble forståelsen rundt likhetstegnet sentralt, og ble presentert som ”det samme som”. Deretter blir det fokus på de matematiske symbolene med uttrykk med f.eks. manglende addend 5+_=9 eller med en ukjent 9=X+4. I tillegg regneuttrykker der elevene selv måtte velge tall for å øve på at likhetstegnet ikke betyr svaret, f.eks. 5+_=_+_.

I andre økt ga jeg elevene en problemløsningsoppgave der de måtte tenke algebraisk med “x” som variabel der de arbeidet i par (Carraher et al.,2008). Oppgaven var satt i en kjent kontekst for å bli mer forståelig (Lesh & Zawojewski, 2007).

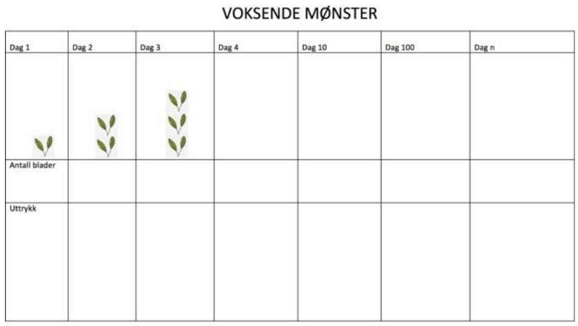
Figur 3- Algebraisk oppgave satt inn i en problemløsningskontekst med funksjon f(n)= 3n+2

Undervisningen fokuserte på algebraisk tenkning i problemløsning, der flere strategier ble tatt i bruk, elevene lyttet til andres resonnering, og bygget videre på det de selv kunne. Gjennom prosessen støttet elevene seg til samhandlingen med lærer og medelev på både strategier til det ferdige produkt (Sullivan et al.,2015). Eleven fikk utdelt et blankt A3-ark og fikk tilgang til to forskjellige fargede perler som de kunne forsyne seg av når de hadde lest og kunne forklare hva de skulle gjøre. Tre sorte perler skulle representere ulvene, og deretter en annen farge som skulle representere sauene. Elevene startet med en konkret tilnærming med å manipulere perler, for så skrive ned regneuttrykkene de kom frem til. Her ble noen av løsningene valgt ut til diskusjon slik at elevene fikk mulighet for å oppleve matematiske ideer, utvikle nye strategier og representasjonsmåter. Lærer valgte ut hvilke strategier som ble presentert og hvordan rekkefølgen i strategier skulle presenteres. I denne sluttfasen fikk elevene en kort innføring i multiplikasjon som tok utgangspunkt i gjentatt addisjon som elevene hadde benyttet.

3.2.4 ”Regneramma” og oppgavene

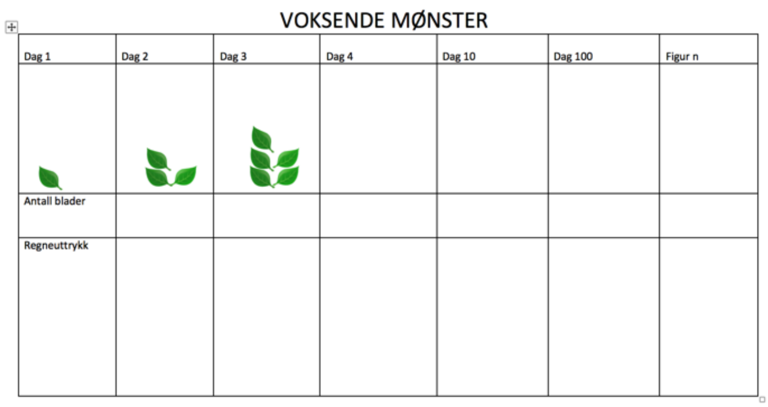
Oppgavene er satt inn i en ”regneramme” som skrives ut i A3-størrelse. Denne tanken er inspirert av rammer for skriving av tekst. Ifølge skrivesenteret.no gir skriverammer elevene støtte eller stillaser, der de får hjelp til å planlegge sin tekst gjennom gitte kriterier slik at de kan utvikle en helhetlig tekst og skrivekompetanse. Målet er at elevene på sikt skal klare seg uten denne formen for støtte, og gi slipp på skriveramma når de har fått nok erfaring i å bygge opp en tekst.

I tidlig algebra er tabell en av representasjonsformene (Carraher et al.,2008). Regneramma vil fungere som en tabell, der systematikken med hver dag skrives vertikalt i kolonner som tilhører de bestemte dagene. Målet for ”regnerammen” på sikt blir at de skal klare seg uten denne formen for støtte når de løse oppgaver med mønstergeneralisering.



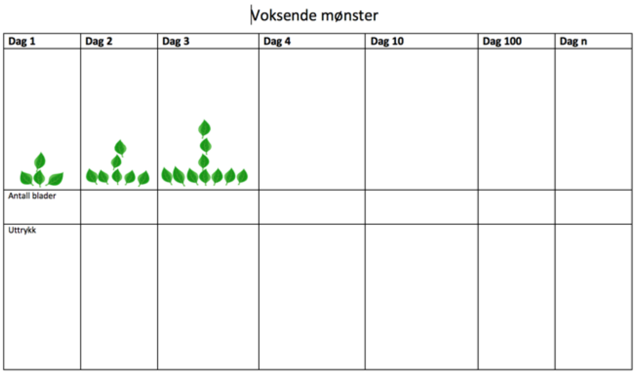
Figur 4- Oppgave 1 med funksjon f(n) = 2n

Oppgavene jeg har designet er med inspirasjon fra Wilkie (2014). Elevene kan kjenne seg igjen i oppgavekonteksten der en plante vokser for hver dag, og jeg støtter meg til det Radford (2010) kaller rike erfaringskontekster. Elevene blir til å begynne med invitert til en rekursiv generalisering der dag 1 til dag 3 er avbildet og de skal tegne dag 4. Deretter skal de knytte antall blader til hver dag som skrives med et tallmønster under hvert bilde. Underveis inviteres elevene til å uttrykke muntlig det de ser, underliggende strukturer, og videre til å skrive det de ser med et regneuttrykk. Når forsker vurderer at den første prosessen er utført, inviteres elevene til å tenke funksjonelt og over på en input-output funksjon på dag 10 og dag 100 med to variabler. Den uavhengige variabelen er dagen som velges og den avhengige variabelen er antall blader på den bestemte dagen. Dag 10 og dag 100 blir da utprøving av spesialtilfeller for å forstå strukturen som kan lede dem til et uttrykk for noe generelt (Mason m.fl.,2014). Vurderer forsker at eleven har kommet frem til den underliggende strukturen, inviteres de videre til å uttrykke dag n.



Figur 5- Oppgave 2 med funksjonen f(n)= 2(n-1) +1 eller f(n)= 2n-1

Da oppgavene i regneramma er utformet slik at de skal arbeide rekursivt fra dag 1 til dag 4 for så å gå over på en input-output funksjon på oppgave 2 og 3, kan det bli en hindring for noen elever slik at de ikke kommer videre i prosessen. Disse vil ha behov for å fortsette den rekursive tilnærmingen for å oppdage den underliggende strukturen, og tegne flere planter eller bygge videre dag for dag ved hjelp av klosser som er tilgjengelig. I min studie ønsker jeg å finne ut hvilke tilnærminger elever tar i bruk når de arbeider med figurmønster. Regneramma inviterer først til en rekursiv tilnærming ved å beregne dag 4, og etterhvert til dag 100 og n der de må da må ta i bruk eksplisitt generalisering. I utgangspunktet hadde jeg planlagt å gi elevene to oppgaver, men utvidet med en ekstra som jeg gjennomførte med en gruppe, da det viste seg at oppgave 2 var mer utfordrende en oppgave 1.



Figur 6- Oppgave 3 med lineær funksjonen f(n)=3+1

3.3 Kvalitet i studiet

Validitet betyr gyldighet og referer til om jeg ”måler det jeg skal måle”, og reliabilitet betyr pålitelighet og om denne er påvirket av tilfeldige målefeil (Kleven & Hjardemaal, 2018).

3.3.1 Validitet

Begrepsvaliditeten i studier uttrykker samsvaret mellom teoretiske begrep som er valgt og gjennomført måling (Kleven & Hjardemaal, 2018). Den indre validitet styrkes dersom jeg måler det jeg skal måle og at det er representert i datasettet, hvis ikke vil det bli feilkilder fordi samsvaret mellom begrepet slik jeg har definert det og begrepet slik jeg har operasjonalisert er redusert. Forskningens ytre validitet er svekket da resultatet ikke kan overføres til å gjelde alle 3.trinnselever. Jeg har tolv informanter som er satt i seks elevpar, og resultatene er avhengig meg som forsker og hvilke spørsmål jeg stiller i prosessen. I tillegg er funnene avhengig av den som tolker og hva som legges i denne tolkningen (Thagaard, 2018). Ifølge Postholm (2010) kan en beskrivende handling ikke overføres direkte til et annet klasserom. Andre lærere kan ut ifra individuelle erfaringer og opplevelser overføre og tilpasse noe av forskningen til sitt eget klasserom da de kan oppfatte, gjenkjenne konteksten. Mitt ønske er at studien min kan brukes som et tankeredskap ved tilrettelegging av oppgaver som øver elevene på mønstergeneralisering.

3.3.2 Reliabilitet

I følge Kleven & Hjardemaal (2018) refererer reliabiliteten til nøyaktigheten i datasettet som er samlet inn. Det blir viktig at jeg redegjør for utviklingen av data i forskningsprosessen. Hva som er atskilt fra mine fortolkninger, hva som er referert fra opptaket av intervjuet (Thagaard, 2018). Den Indre reliabiliteten i studien blir mer troverdig da jeg har triangulering i innsamling av data, der jeg intervjuer med opptak av lyd og video i tillegg til elevarbeid (Maxwell, 2013). I analysen kan jeg støtte meg til resonneringen, gester og fakta jeg har på lyd og film, i tillegg se om jeg kan finne det samme i elevarbeidene Den ytre reliabiliteten svekkes da det kan oppstå målefeil som skyldes det jeg vurderer, observerer og hvordan jeg stiller spørsmål, tar i bruk grep for å drive elevene fremover i oppgaveløsningen. I tillegg kan resultatet påvirkes av rammene rundt intervjuet, filmingen og min manglende relasjon til de elevene som trenger mer tid en to økter for å bli trygg på meg som forsker.

3.3.3 Etikk

Ifølge Kleven & Hjardemaal (2018) er det viktig at deltakerne har fått tilstrekkelig informasjon om forskningsfeltet, og at det er mulig å trekke seg uten å oppgi grunn og ut ifra det gitt et informert samtykke. I kvalitativ forskning er det knyttet utfordringer til informert samtykke, da opplegget kan endres underveis. På forhånd vet vi ikke hva dataene vil vise og hvordan forskeren vil analysere og tolke dataene. Min invitasjon til å delta i prosjektet ble sendt ut til det utvalgte trinnet, og samtykket ble underskrevet av foresatte/foreldre da de som deltar er under 15 år. I mitt prosjekt har 23 av 24 gitt samtykket til at korte lyd og videosekvenser kan brukes i undervisning eller i presentasjoner. Ifølge Kleven & Hjardemaal (2018) kan det være vanskelig for barn å si nei til voksne når de vil at de skal delta i prosjekt. Jeg er opptatt av at barna selv og foresatte/foreldre skal samtykke og få anledning til å vurdere hvordan de ble filmet, før jeg eventuelt skal ta noen lyd eller videosekvenser i bruk til det undervisning eller presentasjoner. Deltakerne vil bli anonymisert i film og i transkribering ved at jeg ikke oppgir navn eller annen informasjon som kan identifisere deltakerne, og sikrer at dataene ikke brukes av andre (Thagaard, 2018).

I forbindelse med at jeg skal filme deltakerne i intervjuet, ble prosjektet meldt inn til Norsk samfunnsvitenskapelige datatjeneste som ivaretar personvernet i forskningen. Lyd og videoopptakene er blitt lagret på ekstern harddisk som ble låst inn i skap som bare jeg har tilgang til og slettes når prosjektet er over.

3.4 Analysemetode

Datamaterialet mitt består av elleve intervjuer, videoopptak av alle intervjuene og elevarbeid. For å hjelpe meg i analyseprosessen ble videoopptakene og intervjuene transkribert etter hvert intervju. Her har jeg gjort om tale til tekst og valgt å skrive ned lydrett det som er blitt sagt. I tillegg har jeg notert i parenteser når og hvor det pekes i regneramma, hvilke kroppsspråk med gester og mimikk som kan observeres på filmen, og uthevet og understreket der elevene er ivrige og oppdager nye strukturer. Elevene har fått fiktive navn, slik at utsagn ikke kan spores tilbake til eleven, og jeg som forsker benevnes med F. Underveis i prosessen har jeg tatt i bruk en forskerlogg der jeg har notert ned tanker, ideer, følelser hendelser og endringer jeg gjorde underveis.

For at jeg skal besvare forskningsspørsmålet mitt må jeg beskrive vilkårene for forståelsen min, og min metodiske tilnærming vil være både deduktiv og induktiv. Det vil si at analysen gjøres gjennom deduktiv metode der jeg lager koder ut ifra valgt rammeverk der jeg bruke teorier systematisk både i tilnærming og for å begrunne min tolkning (Gudmundsdottir, 1992). Samtidig som analysen av data i kvalitativ forskning gir mulighet for nye koder, da forskeren i den kreative skrivingen ser nye sammenhenger og kommer frem til nye konklusjoner. Koding- og kategoriseringsprosessen vil alltid være preget av teori, men samtidig vil forskerens erfaring, kunnskaper og forståelse være en viktig del av analyseprosessen og dataene tolkes og kodes gjennom en induktiv metode (Nilssen, 2014).

3.4.1 Fase 1

Jeg startet analysearbeidet ved å gå gjennom transkripsjonene. Jeg tok først for meg oppgave 1, deretter oppgave 2 og til slutt oppgave 3. I den første fasen så jeg etter matematikken og strategiene elevene tok i bruk i oppgaveløsningene, og tok i bruk en deduktiv tilnærming med utgangspunkt i mitt teoretiske rammeverk. I analysen av mine funn fant jeg eksempler på Radfords (2010) fire generaliseringsnivåer, Staceys (1989) fire metoder, Wilkie & Clarke (2015) sin funksjonelle tenking med rekursiv- og eksplisitt generalisering, og Carraher et al.(2008) sin input-output funksjon.

I det videre arbeidet begynte jeg å lete etter sammenhenger mellom disse teoriene, og har tatt i bruk en både en deduktiv og induktiv tilnærming som resulterte i et oppsett der jeg har brukt de fire nivåene til Radford (2010) som utgangspunkt for min kategorisering. Staceys (1989) fire metoder har jeg oversatt og kaller; tellemetoden, differansemetode, hel-objekt metoden og lineære metode. Den lineære metode har jeg vurdert som det samme som Carraher et al.(2008) kaller input-output funksjon, og jeg velger å bruke den siste i mitt videre arbeid. Funksjonell tenkning er det Wilkie & Clarke (2015) betegner som rekursiv og eksplisitt generalisering der man sammenhengen mellom variabelen og dagsnummer, dobler eller uttrykker det med gjentatt addisjon eller med addisjon og multiplikasjon i et uttrykk.

Lokal økning i praktisk-aritmetiske strateger er ikke navngitt eller anerkjent og Radford (2014) betegner det som ubestemmelig naiv induksjon som ikke fører til noe bestemt. Addisjonsmetoden på samme nivå kan være å ramse opp tallmønsteret uten å forklare at hva økningen er. Kategoriseringen har jeg satt opp i en tabell som utgangspunkt for analysearbeidet mitt, og bak hver koding står hvem har navn satt koden.

Praktisk-aritmetisk strategier	**Fakta generalisering**	**Kontekst generalisering**	**Symbolsk Generalisering**
	Begynnende underliggende struktur *(Radford)*	Bruker regneramma for å se mønster/regelen, og uttrykker det muntlig eller skriftlig *(Forsker)*	Beskrive regelen muntlig og uttrykker det med symboler for hvilket som helst tall. *(Radford)*
Konkrete handlinger *(Radford)* Tellemetoden *(Stacey)* Addisjonsmetoden *(Radford)* Hel-objekt-metoden *(Stacey)* Lokal-økning *(Radford)*	Dobling *(Radford)* Multiplikasjon *(Radford)* Differansemetoden *(Stacey)* Addisjonsmetoden *(Radford)*	Funksjonell tenking *(Wilkie)* Uttrykker det eksplisitte muntlig med eller uten forklaring *(Radford)* Ser det som er likt og ulikt *(Radford)* Input-output funksjon *(Carraher)*	<u>Oppgave 1</u> 2xn nx2 2*n <u>Oppgave 2</u> 2n-1 <u>Oppgave 3</u> 3n+1

3.4.2 Fase 2

I den andre fasen så jeg etter funn i datamaterialet som kunne vise hvilken betydning regneramma, oppgavene og samtalene hadde for fremdrift i oppgaveløsningen, om disse bidro til utvikling, om elevene kom seg videre til neste nivå og et skifte i forståelse. Da jeg som forsker hadde en intervjuguide som jeg tok utgangspunkt i og hadde lagt til rette for å få elevene fra dag 4 til dag 10, dag 100 og dag n, ble det naturlig å se på hvilke spørsmål som fikk elevene videre. I tillegg har jeg sett på hvilke spørsmålsformuleringer jeg naturlig tok i bruk i intervjuene. Disse er knyttet opp mot grep lærere gjør i matematiske samtaler som har betydning for elevenes framdrift (Drageset, 2016). Grepene gjennom spørsmål som gis eksempler på er åpne spørsmål, de som gir støtte, lokker frem og utvider elevenes matematiske tenkning.

4 Presentasjon av empiri

I innledningen ble følgende forskningsspørsmål presentert:

Hva kjennetegner 3.trinns elevers tilnærming når de arbeider med mønstergeneralisering?
Hvilke faktorer har betydning for framdrift?

I dette kapitelet vil jeg ta for meg utdrag og uttalelser fra elever jeg intervjuet, som kan gi støtte til at forskningsspørsmålet mitt kan besvares. Da jeg har elleve intervjuer med tolv elever involvert og flere av elevene har samme tilnærming, velger jeg å legge frem eksempler fra mine funn der elever benytter samme løsningsstrategier. Jeg har seks grupper som har arbeidet med oppgave 1, fire grupper har arbeidet med oppgave 2 og en gruppe har arbeidet med oppgave 3. Elevene har ikke tidligere arbeidet med oppgaver med figurmønster.

4.1 Analyse fase 1 Matematikken

I denne første fasen av analysen skal jeg ta for meg matematikken som kom frem i samtalen med elevene og løsningene de utviklet gjennom prosessen. Jeg velger å legge frem eksempler på tilnærminger og de ulike strategiene elevene tok i bruk, og plassere dem innenfor ikke-algebraisk og algebraiske generaliseringsnivåene. Disse tilnærmingene til løsningene har jeg redegjort for i metodedelen og plassert i en tabell.

4.1.1 Aritmetisk generalisering – ikke algebraisk generalisering

Aritmetisk generalisering gjøres gjennom praktiske handlinger der en tar i bruk konkreter eller bilder for å se lokale likheter. Elever kan bygge neste figur *praktisk gjennom konkreter* eller tegninger, uten at de kan bruke det de legger merke til for å komme frem til et eksplisitt uttrykk (Radford, 2010).

Eksemplet er hentet fra elevpar 6 i starten av oppgave 1 der elevene tar i bruk en *lokal økning* (Radford, 2010). Elevene ser at planten vokser uten å nevne til å begynne med hvor mye den vokser for hver dag.

1.F:Nu e vi i gang. Der gutta nu skal dåkker få en oppgave. Da lurer æ på ka trur dåkker at dåkker skal gjøre?
2.Ulf:Vi skal tegne sånn flere blar til(*peker plantene)*
3.F:Ja
4.Tom:Å ja nu forstår æ..
5.Ulf:En liten ting til en større ting*(peker på plantene)*
6.F:Ka ser dåkker?
7.Tom:For hver dag den vokser jo større blir den*(peker på plantene).*
8.F:Ja
9.Tom:Jo mere blar får den.

Elevene starter med å si at de skal tegne flere blader (linje 2), og at en liten ting blir til en større ting (linje 5). Redford (2010) kaller handlingen naiv induksjon, og det de uttrykker er på en ikke navngitt måte og er derfor en ikke algebraisk tilnærming.

Elevpar 2 som arbeidet med oppgave 1 valgte å ta i bruk *konkrete handlinger* der de brukte klosser for å prøve å finne antall blader i figur 10. Elevene tar i bruk en enaktiv representasjonsform (linje 150) gjennom å manipulere brikker (Mason m.fl.,2014).

147.Eli:**Dag 3** og 4, dag 4 **da må vi ta 2 ganger 10 på den andre***(dag 10)*
148.F:Ja....2 ganger 10 ka det blir?
149.Eli:Å skal vi se...*(nøler og prøver å regne på fingrene)*vi har jo lært i første klasse at vi hvis vi ikke fikk til må vi bruke det å gjøre med eller tegne sånne streker
150.Ane:Hvis æ tar de her, så har vi 2 på en dag, 4 på annen på den andre dagen, åså 6 på den tredje dagen, åså kom fjerde dagen så har vi 8,3,4,5,6,7,8.(*Manipulerer brikker)*Vi treng non flere klossa.

Eli har sett sammenhengen mellom dagsnummeret og planten og følger mønsteret i regneuttrykket der dagsnummeret skal multipliseres med 2 (linje 147). Eleven klarer ikke regne det ut da hun ikke helt har skjønt multiplikasjon, og heller ser dette som dobling. Carraher et al.(2008) sier at overgangen fra gjentatt addisjon til multiplikasjon er vanskelig for elever da det krever mer enn å addere. Ane tar i bruk en rekursiv tilnærming da hun velger å bygge dag for dag med klosser for å finne antall blader (Mason m.fl.,2014; Wilkie, 2016). Begge elevene bruker det Stacey (1989) kaller *tellemetoden* (Couting Method) som strategi da Eli prøver å regne ut 2 ganger 10 på fingrene (linje 149), og Ane teller hver kloss for å finne antall blader (linje 149 og 150).

Videre i prosessen ser Ulf det Radford (2010) kaller *lokal økning.* Ved hjelp av den visuelle planten som er en ikonisk representasjon (Mason m.fl.,2014) ser han at det skal være 8 blader dag 4 (linje 18).

15.F:For her kan dåkker skrive tall*(peker på rutene for uttrykk)*
16.Begge i kor:Uttrykk?
17.F:Ja regneuttrykk, vi må jo lage et regnestykke til det her å...ja da kan dåkker få lov til å begynne, ka trur dåkker at dåkker skal gjøre?
18.Ulf:2,4,6*(peker på plantene)*så her er det 6 så da får vi 8 åsså har ikke peiling*(peker på dag 10)*

Den lokale økningen finner han ved å benytte seg av *addisjonsmetoden* ved å ramse opp tallmønsteret der det legges til to fra dag til dag (Radford, 2010). Det bekreftes også da eleven ikke ser umiddelbart antall blader som skal være på dag 10, og uttrykker at han ikke har peiling på hva som skal stå der (linje 18).

I følge Radford (2010) kan elever som ikke klarer å forklare regelen i sin tankegang si at *"Vi fant det ved et uhell"*. Denne uttalelsen hadde en av elevene i elevpar 3 på slutten av intervjuet og oppgave 1 (linje 255).

244.Eik:Vi har jo 20 der*(peker på dag 10)***på hever 10-er dag er det 20, så da kan vi bare telle med 20-era**

245.F:Ja
246.B:20,40,60,80,100
247.Eik:60,80,100 men*(teller på fingrene)*
248.F:Når du sa holder opp fem hender der da, å så sa du hver 10-ende dag så var det 20-era
249.Jan:Kan ikke bli delt opp
250.F:Når du har telt 5 gager kas dag er du på dag da?
251.Eik:Telt fem ganga *teller på fingrene)*
252.Jan:Se her 20,40*(teller på fingrene)*
253.Eik:100 nei 50
254.F:50..du er på dag 50 da?
255.Jan:Se her 20,40,60 med et **uhell** fordi det blir sånn at 60 kan ikke deles opp

Her brukte Eik det Stacey (1989) kaller *hel-objekt metode* (Whole-objekt Method), for å prøve å finne antall blader på dag 100, der han tok utgangspunkt i dag 10 og 20 blader. Han uttrykker entusiastisk: "Vi har jo 20 der (peker på dag 10) **på hver 10-er dag er det 20, så da kan vi bare telle med 20-era"** (linje 244). Eik bruker antall blader på dag 10 for å finne antall blader på dag 100, og legger sammen 20-ere. Stacey (1989) beskriver denne metoden der elever bruker en mindre figur for så å addere seg frem til en større figur. Jan prøver å følge resonnementet og begge teller sammen "20, 40, 60, 80, 100". Dette skal Jan prøve å forklare ved å si "Se her" (linje 252), men da han ramser opp "20, 40, 60" stopper resonnementet da han ikke ser regelen som ligger bak og han uttrykker at det ble til "med et uhell" (linje 255). Dette samsvarer med det Radford (2010) sier om at elever på dette nivået prøver, gjetter og feiler.

4.1.2 Faktabasert generalisering

I denne kategorien begynner elevene å se underliggende strukturer i mønsteret, og danner skjemaer som opererer på bestemte tall (Radford, 2010).

Elevparet som fikk løse oppgave 3 har i denne fasen oppdager at regneuttrykkene skal ha samme mønster/struktur som planten vokser og klarer å regne ut konkrete tilfeller av en variabelen (Radford, 2010)

104.Tom:1+3
105.F:Ja
106.Liv:Jaaaa +
107.Tom:Her kan det være 1+6(peker på dag 2)
108.F:ja men så skulle det være
109.Tom:**3 3 3 3 3**

110.Liv:(ler)
111.F:Ja tenk litt…her var det 1+(peker på uttrykket på dag 1)og her skal du ha(peker på uttrykket på dag 2)
112.Tom:1+6...**<u>å æ vet ka det e, det e 3 hele veien</u>**(peker på plantene)

Tom tar i bruk det Radford (2010) kaller *addisjonsmetoden* og knytter 1+3 til dag 1 (linje 104), der han tidligere har forklart at 1-tallet til bladet i midten som er konstant, og 3-tallet er variabelen til de tre bladene som vokser videre ut av planten. Han går videre til dag 2 og ser først 1+6 før han oppdager 3-tallet i alle plantene (linje 112) og uttrykker entusiastisk "1+6...**<u>å æ vet ka det e, det e 3 hele veien</u>**(peker på plantene)". Gjennom å se 3-tallene hele veien dannes en begynnende struktur/skjema som utgangspunkt for regneuttrykkene (Mason m.fl.,2014; Radford, 2010).

Det samme paret kommer etterhvert frem til en generell formel "3 ganger n+1" som beskrives under symbolsk generalisering. Forsker vil finne ut om de kunne bruke formelen og teste ut spesialtilfeller (Mason m.fl.,2014).

298.F:Okey da spør æ dæ a blir regnestykket på dag 1000
299.Alle:(ler)
300.Liv:3 ganger 1000..+1
301.F:Ja kor mye e det
302.Liv:Det e 3001
303.F:E du enig(ser på Tom)
304.Tom:Nei(ser på Liv)
305.F:Ja
306.Liv:(jubler)
307.Tom:Nei 3002
308.F:Nei
309.Tom:Det va det æ regna
310.Liv:(ler)
311.F:Ja for 3 ganger 1000+1
312.Liv:1
313.Tom:For at 500, da var det en igjen..

Liv viser at hun kan regne ut korrekt antall blader på dag 1000 ved å bruke formelen og kommer frem til antall blader som er 3001 (linje 300 og 302). Da forsker spør om Tom er enig (linje 303) svarer han "nei" og har en annen begrunnelse som ligner på det Stacey (1989) kaller *differansemetoden* (Difference Method). Eleven tar utgangspunkt i dag 500 der antall blader er 1501 og *dobker* det, slik at han får antall blader på dag 1000 til å bli 3002 (linje 307 og 313). Denne metoden vil ikke føre til riktig antall blader da funksjonen til oppgave 3 er $f(n)=3*n+1$.

Elevpar 1 i oppgave 2 har sett det underliggende strukturen med gjentatt addisjon med 2 blader som vokser for hver dag, og kommet frem til uttrykket 1+2+2+2 for dag 4. I overgangen til multiplikasjon blir det vanskelig å se helheten i uttrykket.

113. Ane: 3 ganger 1
114. F: Nei..ka e det
115. Eli: <u>3 ganger 2</u>
116. F: 3 ganger 2 ja
117. Ane: 3 ganger 2

I linje 113 foreslår Ane ”3 ganger 1” som uttrykk for dag 4. Eli foreslår ”3 ganger 2” (linje 115), og begge tar i bruk det *multiplikasjon* som Radford (2010) knytter til fakta generalisering. De klarer ikke å se dette som en input-output funksjon og knytte på +1.

4.1.2 Kontekstbasert generalisering

Når det gjelder den kontekstuelle generaliseringen kan variabler og konstante objekter uttrykkes med en blanding av matematiske symboler og begreper gjennom hverdagsspråket.

Elevpar 2 har oppdaget *dobling* som underliggende struktur i oppgave 1 (Mason m.fl., 2014). Forsker skal sjekke om denne strukturen gjelder for flere enn dag 10 og 100 som elevene korrekt hadde kommet frem til riktig antall blader på.

250. F:Enn hvis det hadde vært dag 500?
251. Ane:Hmm..
252. Eli:Da hadde det vært..
253. Ane:**<u>Det vært 10-hundre</u>**
254. Eli:Det hadde vært 1000.

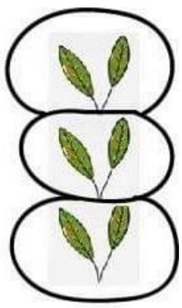
Forsker spør “Enn hvis det hadde vært dag 500?”(linje 250). Ane må tenke litt og svarer ivrig **<u>“Det vært 10-hundre”(</u>**linje 253). Elevene bruker dobling som underliggende struktur og hører at forsker spør om “Enn hvis det hadde vært dag 5-hundre?”. Ane dobler 5 til 10, og føyer på hundre slik at det blir 10-hundre. Den andre eleven kommer da med antall blader på dag 500 “Det hadde vært 1000”(linje 254). Elevene har sett sammenhengen mellom dagsnummeret som de *dobler* for å finne antall blader på planten og *tenker funksjonelt*, og har beveget seg fra rekursiv generalisering og over til eksplisitt muntlig generalisering ifølge Wilkie og Clarke (2015) og Radford (2010).

Eksemplet under er hentet fra oppgave 1 med elevpar 5 i starten av samtalen. Her bruker Liv regneramma, og ser umiddelbart figurmønsteret i de tre første dagene ved hjelp av *funksjonell tenkning* (Wilkie & Clarke, 2015).

13.Liv:**<u>Åååå æ ser,</u>**2,4,6*(peker på tallmønsteret)*
14.F:Ja
15.Liv:Det e 2-gangen
16.F:E det 2-gangen
17.Liv:Ja siden det e 2*(peker på planten på dag 1)*2 pluss 2 det blir 4*(peker først på den to nederste bladene og deretter på øverste rad på planten på dag 2)*og 2 pluss 2 pluss 2*(peker først på de nederste bladene, så på bladene over og til slutt på øverste rad med blader på dag 3).* Der tar man bare 2*(peker på dag 1)*her tar man to 2 gang*(peker på dag 2)*. Her var det en 2*(peker på dag 1)*her var det to 2*(peker på dag 2)*her e det på dag 2. Her e det på dag 3*(peker på planten)*derfor e det tre 2-era. Da blir det 2,4,6*(peker på tallmønsteret).*

Liv utrykker entusiastisk **<u>“Ååååå æ ser”</u>** (linje 13). Gjennom det ikoniske bildet uttrykker Liv at hun ser endringene (Mason m.fl.,2014). Tallmønsteret nevnes samtidig som hun peker “2, 4, 6”, og eleven knytter 2-gangen til plantene (linje 13). Den underliggende strukturen eller skjemaet forklares muntlig samtidig som hun peker på bladene som hun knytter tallsymbol til. Først gjennom *gjentatt addisjon* der hun sier “2 pluss 2 pluss 2”, peker på de nederste bladene, deretter på bladene over og til slutt på øverste rad med blader på dag 3(linje 17). Det er det Radford (2010) kaller objektiviseringsprosess der handlingene gjennom gester og språket gjør noe tydelig og gir mening til tallene og utrykkene hun etter hvert skriver. Det ubestemmelige må nevnes og tallene i uttrykket må forklares.

Liv ser sammenhengen mellom variabler og dagsnummeret (linje 17). Dette bruker hun i sin kontekstuelle generalisering. I eksemplet ovenfor sier eleven “Her e det på dag 3*(peker på planten)* derfor e det tre 2-era", med dette uttrykkes med regneuttrykket 3 ganger 2 (figur 3).



Figur 7- Liv tar i bruk gjentatt addisjon og går over til multiplikasjon som underliggende struktur

Gjennom å knytte dagsnummeret til planten fra dag til dag, tenker hun funksjonelt og tar i bruk en rekursiv generalisering (Wilkie & Clarke, 2015). Her ser hun mønster eller den underliggende strukturen i et uttrykk og regner konkrete tilfeller i en figurrekke, der hun skiller mellom likt (konstant) og ulikt (variabel)(Radford, 2010).

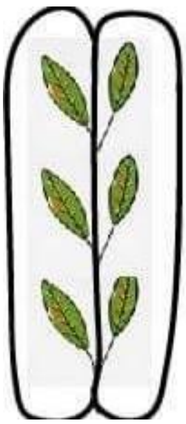
I samtale med elevpar 1 knytter Lea variabler til dagsnummeret i oppgave 1 (Wilkie & Clarke, 2015). Den underliggende strukturen kommer tydelig frem som *dobling*. Elevene har ikke hatt opplæring i multiplikasjon, bare fått en kort innføring med forsker da de oppsummerte i plenum etter oppgaven med "Ulven Ulf".

11.Lea:Det burde være sånn fire.Da blir det 2 ganger 2 er fire(peker på dag 2)3 ganger 3 er 6(peker på dag3)

12.F:Okey, ta å skriv det da.

13.Lea:**æ vet, æ vet** det e en, da en på hver side*(peker på planten på dag 1)*det to det er to på hver side*(peker på planten på dag 2)*det tre og det er tre på hver side*(peker på planten på dag 3)*det er fire og det skal være fire på hver side*(peker på dag 4)*

Det kan virke som Lea bruker multiplikasjon der hun sier " Da blir det 2 ganger 2 er fire(peker på dag 2)3 ganger 3 er 6(peker på dag 3)"(linje11), men det viser seg i neste utsagn at hun ser på det som dobling. Det kommer frem da hun sier "3 ganger 3 er 6" (linje13) og forklarer videre ved å peke på planten på hver side og si "..det tre og det er tre på hver side".



Figur 5- Lea ser dobling som underliggende struktur

Lea bruker det kontekstuelle i regneramma ved å se og forklare, samtidig som det pekes på bladene på hver side av planten (figur 5).

Elevpar 4 i oppgave 2 prøver å komme frem til en generell formel ved å forklare ved hjelp av å bruke samme mønster i uttrykk som er skrevet ned.

155.F:Ja da skal det stå 19 her*(peker antall blader på dag 10)*du e god å regne..

Korsen vil regneuttrykket se ut på dag 100*(peker)*

156.Per:..åå...åå....1+2 ganger 100, nei, 99

157.F:Ja skriv det...fordi at det blir jo alltid....

158.Per:Ops(skriver 99)

159.F:99 korsen fant du det, korsn klarte du å finne det

160.Per:Fordi æ så her*(peker på regnestykkene)* en mindre, en mindre, en mindre

161.F:.en mindre for hver dag ja, men korsen vil regneuttrykket se ut på dag n*(peker)*

162.Per:..da naturligvis 1+2 ganger n

Per regner ut riktig antall blader på dag 100 ved å bruke det Carraher et al.(2008) kaller en *input-output funksjon* (linje 156). Han har sett den underliggende strukturen og forklarer den ved å peker på regneuttrykkene de har skrevet, og sier "...en mindre, en mindre, en mindre" (linje 160). Her bruker eleven regneramma, ser mønsteret i regneuttrykkene og knytter variabelen til en mindre enn dagsnummeret. Wilkie og Clarke (2015) kaller dette en eksplisitt generalisering da eleven ser sammenhengen mellom dagsnummeret og variabelen og *tenker funksjonelt*. Radford (2010) mener at elever er i stand til å generalisere kontekstuelt og uttrykke denne generaliseringen muntlig med en blanding av matematiske symboler og begrep gjennom hverdagsspråket. Eleven foreslår at uttrykket på dag n skal være "...1+2 ganger n" som ikke er korrekt. Eleven følger bare mønsteret i de andre regneuttrykkene og foreslår en generell formel, uten å teste om den er riktig og elevene har derfor ikke kommet frem til en symbolsk generalisering. Ifølge Mason (2014, s.18) trenger elever mye erfaring i det å uttrykke generelle sammenhenger for at vi skal være sikre på at de forstår generaliseringene som ligger implisitt i teknikker og konsepter, heller enn at de bare prøver å gjenskape disse teknikkene.

Elevparet som arbeidet med oppgave 3 har tidligere i samtalen kommet frem til at det ene bladet i midten er *likt* på alle plantene og har knyttet tallsymbolet 1 til dette bladet (linje 23).

23.Jan:Det e tre blad til(peker på endene av planten på dag 3)

24.Liv:Det som er likt med alle de der er det bladet blir der hele tiden(peker på bladet i midten av plantene)

I tillegg sett at planten vokser med tre blader hver dag og knytter tallsymbolet 3 til denne økningen (linje 24). Eleven ser det som er *likt og ulikt*, knytter de tre bladene til variabelen og bladet i midten til konstant, og uttrykker det med en blanding av matematiske symboler og språk (Radford, 2010).

I eksemplet jeg videre har valgt ut viser elevene det Wilkie & Clarke (2015) kaller *funksjonell tenkning* ved gjentatt addisjon og hvor mange 3-tall det skal være, og knytter disse til dagsnummeret ved å muntlig forklare det og skrive det i regneuttrykk (linje 131 og 133).

133.Liv:1+3+3+3(skriver i ruta for uttrykk)

134.Jan:1+3+3+3+3 her(peker på dag 4)

135.F: Ja du nu snart å få plassmangel

136.Liv:Vent litt ka skal æ skrive der(peker på dag 3)

137.Jan:Her(peker)1+3+3

138.F:Gjør det, men du må forklare koffer du har gjort det

139.Jan: Fordi at det, her e det en 3-er(peker på utrykket og deretter på dagsnummeret på dag 1)her e det det to 3-ere(peker på uttrykket og dagsnummeret på dag 2)og her e det tre 3-era(peker på uttrykket og dagsnummeret på dag 3) og her skal det være fire 3-era(peker på uttrykket og dagsnummeret på dag 4)her skal det være ti 3-era(peker på uttrykket og dagsnummeret på dag 10)og her skal det være hundre 3-era(peker på uttrykket og dagsnummeret på dag 100)

Jan *generaliserer muntlig eksplisitt* der han sier "...her skal det være ti 3-era" og “her skal det være hundre 3-era" (linje 139) samtidig som han peker på dagsnummeret som tilhører den dagen han viser til (Wilkie, 2014). De bruker regneramma og det ikoniske bildet av den voksende planten og snakker om endringene ut ifra de ulike dagene og da konteksten, og peker for å vise og tydeliggjøre. Denne objektiviseringsprosessen hjelper dem til å danne et skjema/underliggende struktur som de uttrykker både symbolsk ved et regneuttrykk som samtidig forklares muntlig (Radford, 2010)

4.1.3 Symbolsk generalisering

I symbolsk generalisering må elevene beskrive regelen og uttrykke det med symboler for hvilken som helst dag (Radford, 2010)

Elevene på tredje trinn har ikke kjennskap til n som symbol for alle naturlige tall. Den ene eleven Jan i elevpar 6 som arbeidet med oppgave 1 foreslo først nyttårsaften for dag n da denne begynner på n (linje 159).

58.F:2 hundre ganga, ja det ligg i ordet, for matematikk e jo bare mønster åsså tall..men så e vi kommet til dag n*(peker)*

159.Jan:Dag nyttårsaften..

160.F:Det kunne ha vært det*(ler)*men det e bra, ikke nyttårsaften, men n i matematikk står for alle naturlige tall, å det kan være hvilken som helst dag. Det kunne ha vært dag 1*(peker)*det kunne ha vært dag 1000

161.Liv:**Ååå**

162.Jan:**Det kunne ha vært dag***(lager ivrig liggende åttetall bevegelser i lufta)*

163.Liv:En million

164.Jan:Uendelig

165.F:Ja

166.Jan:Uendelig tall

Ved hjelp av forsker som i linje 160 forklarer at n står for hvilken som helst dag begynner Jan å lage ivrige liggende åttetalls bevegelser i lufta, og sier etter hvert "uendelig" (linje 164). Det er det Radford (2010) kaller gester og som skal understreke og tydeliggjøre betydningen av et utsagn. Et elevpar til knyttet n til uendelig, men tydeliggjorde ikke dette med gester. Selv om elevene ikke har kjennskap til n som symbol har han en formening om hva det kan være og knytter dette til uendelig antall dager. Da han videre skal lage et generelt uttrykk for hvilken som helst dag foreslår han "n ganger n" (linje 192).

192.Jan: n ganger n

193.F:Ja koffer n ganger n*(peker på regneuttrykkene* har du, det er jo ikke det samme

194.Jan:2 ganger n

195.F:2 ganger n ja

196.Jan:*(skriver)*2 n ganga

Her kan det tyde på at han bruker dobling som den underliggende strukturen, selv om han sier "gange". Videre i samtalen kommer Jan frem til riktig uttrykk *"2*n"* (linje 194), og han bekrefter dette ved å si *"2 n ganga"* (linje 196). Eleven tar i bruk symbolsk representasjonsmodi (Mason, 2014), og har laget et skriftlig uttrykk for alle dager. I tillegg har de underveis i prosessen forklart hva som er likt og hva som er ulikt og testet ut spesialtilfeller. De er ifølge Radford (2010) kommet frem til en symbolsk generalisering.

Elevpar 1 i oppgave 1 kommer frem til en symbolsk generalisering og forklarer n

som"naturlige tall" (linje 170).

168.Lea:n ganger 2

169.F:For n står for*(peker)*

170.Pia:Naturlige tall

Videre i prosessen viser de at de kan regne ut flere spesialtilfeller som jeg ikke tar med her.

Elevparet 2 som arbeidet med oppgave 2 har brukt en input-output funksjon for å regne spesialtilfeller (Radford, 2010), og kommer helt til slutt frem til en generell formel f(n)=2n-1.

290.F:Ja og her hadde du*(peker på uttrykket på dag 100)*

291.Tom:99 2 tall

292.F:Ja og kor mange mindre e det enn 100*(peker)*

293.Tom:1*(rekker opp en finger)*

294.Ulf:1 mindre

295.F:Ja å da må vi skrive her*(peker på dag n)*

296.Tom:billion

297.F: Nei, en mindre enn n, ka gjør vi da, korsn regnestykke blir det

298.Tom:**minus**(skriver 2n-1)

Dette er samme elev som i oppgave 1 knyttet n til uendelig. Da han foreslår ”billion” (linje 296) er det nok et eksempel på at n kan vare et stort sett med tilfeller. Videre uttrykker han ivrig ”**minus”** (linje 298) og skriver 2n-1 inni regneramma.

I oppgave 3 kommer elevene frem til et generelt uttrykk der de bruker input-output funksjon (Carraher et al.,2008). Dette er tredje oppgave med voksende mønster de arbeider med.

224.Jan:Å da skal det være +1 der(peker på uttrykket på dag 100)

225.F:Ja

226.Liv:jeg vil skrive det

227.Jan:Æ skal..æ må bare skrive

228.Liv:(ler)

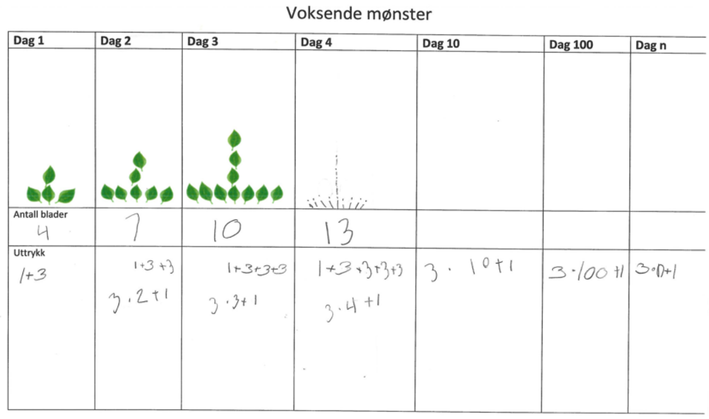
229.Jan:Æ vet det her da(peker på dag n)

230.F:Ja

231.Liv:Det e...

232.Jan:3 gange n+1(peker)

Jan peker på uttrykket på dag 100, ser og sier +1 (linje 224). Dette tar han med videre i det generelle uttrykket *“3*n+1”* (linje 232).



Figur 8- Elevarbeid oppgave 3

Undervis i samtalen har de forklart hva de ulike symbolene betyr, og de viser helt til slutt i samtalen at de kan finne antall blader til hvilken som helst dag ved å teste ut spesialtilfeller (Mason m.fl., 2014).

324.Jan:10000

325.F:Ka e regnestykke først

326.Jan:Det e...em..okey..3 ganger 10000+1

327.F:Ja ka e 3 ganger 10000

328.Jan:Det eee 30001

Eksemplet ovenfor viser at Jan kan regne ut antall blader på dag 10000 (linje 326 og 328). I følge Radford (2010) har dette elevparet generalisert symbolsk da de både kan forklare symbolene i uttrykket og kommet frem til et generelt uttrykk for hvilken som helst dag i figurrekka.

4.1.4 Oppsummering av analysens første del

Et fellestrekk med alle elevparene var at de startet med det Radford (2010) kaller ikke-algebraiske metoder, der de tok i bruk konkrete handlinger, tegnet, uttrykte de de så på en ubestemmelig og ikke navngitt måte og gjennom dette så lokale likheter. Denne handlingen er ubestemmelig og kalles naiv induksjon. For å finne antall blader startet flere elevpar med å ta i bruk tellemetoden (Stacey, 1989). Det de la merke til uttrykte de med uhensiktsmessige metoder som Stacey (1989) kaller differansemetoden og hel-objekt metode. De var innom det Radford (2010) kaller fakta generalisering og brukte dobling eller multiplikasjon i forsøket på å finne riktig antall blader. Gjennom kontekstuelle generaliseringer i prosessen var flere elevpar i stand til språklig å uttrykke eksplisitt et generelt uttrykk for figurmønsteret. Det ubestemmelige ble nevnt og tallene i uttrykket ble forklart, der variabler og konstante objekter ble uttrykt ved å si ”det som er ulikt” eller “det som er likt”. Det ubestemmelige uttrykte de med en blanding av matematiske symboler og begreper gjennom hverdagsspråket for eksempel ved å si “bladet i midten”, “de der to bladene”, “de neste bladene” samtidig som de pekte. Elevene snakket om figuren og neste figur, og flere så mønsteret eller den underliggende strukturen i uttrykkene og regnet konkrete tilfeller i figurrekka.

I flere tilfeller da det så ut til at elevene beveget seg mot en generalisering gikk de tilbake til et lavere nivå for å se etter mønster både i planten og i regneuttrykkene. Det er i tråd med MFA-spiralen til Mason m.fl.(2014) der elever går tilbake i prosessen når situasjonen blir for komplisert. De starter på nytt gjennom å se på bildene av planten og tegnet videre eller manipulerte klosser, så den underliggende strukturen, for så å artikulere “meningen” der de fikk en forståelse for mønsteret.

Et fellestrekk fra de elleve intervjuene var at alle elevparene startet med det Wilkie (2014) og Mason m.fl.,(2014) kaller en rekursiv generalisering, der de beregnet og så økningen fra dag til dag. Det gjorde de gjennom bruk av det Stacey (1989) kaller tellemetoden ved å telle antall blader fra dag til dag, og/eller Radford (2010) kaller addisjonsmetoden ved å legge til to på antall blader på dagen før. Det oppsto flere hindringer på veien i overgangen fra dag 4 til dag 10 fra å telle antall blader på den konkrete planten som de så visuelt, og over til å ta i bruk underliggende strukturer de så i mønsteret til å klare å beregne antall blader på dag 10.

Gjennom prosessen klarte de fleste å se på sammenhengen mellom de ulike delene på det voksende mønsteret og knytte variabelen til dagsnummeret. Det er det Wilkie & Clark (2015) kaller funksjonell tenking og en rekursiv eller eksplisitt generalisering. Dette uttrykte de først muntlig og deretter i regneutrykk der de testet spesialtilfeller, før noen til slutt kunne uttrykk det i et generelt uttrykk.

Flere elevpar klarte på slutten av samtalene å komme frem til muntlig og/eller symbolsk generalisering av oppgave 1. Oppgave 2 ble mer komplisert og bare et par som kom frem til symbolsk generalisering som var riktig f(n)=2n-1, og denne kunne de forklare som en mindre en dagsnummeret. Gjennom hele prosessen brukte de en input-output funksjon på f(n)=2(n-1)+1. Elevparet som arbeidet med oppgave 3 hadde arbeidet seg gjennom alle tre oppgavene og klarte til slutt å komme frem til symbolsk generalisering der de hadde beskrevet regelen underveis.

4.2 Analyse fase 2 Utløsende faktor for fremdrift

I denne delen skal jeg vise eksempler på funn som viser hva som bidrar til matematisk framdrift og/eller overgangen mellom de fire generaliseringsnivåene i prosessen.

4.2.1 Oppgavene plassert i Regneramma

En av grunnene til at jeg ønsker å sett oppgaven i en regneramme (tabell) er at elevene skal få et ryddig oppsett som er lett å ha kontroll på. I eksempelet nedenfor begynte et elevparet som arbeidet med oppgave 3 å tegne altfor stort.

30.Jan:Æ tegne det

31.L:Ikke bruk så mye tid på pen tegning

32.Jan:1...okey det var for stort

33.L:Ja vi tar viskelær, du kan egentlig bare tegne bittersmå prikka

Jan oppdager selv at han tegner for stort og uttrykker “okey” det var for stort” (linje 32). Her bidrar de begrensede rutene til at eleven må tegne mindre, og får plass til alt på en side slik at eleven kan se sammenhenger mellom planten, dagsnummeret, tallmønsteret og regneuttrykk.

Elevpar 3 som arbeidet med oppgave 2 viser i linje 253 at de bruker regneramma for å gå fra dag 4 for å finne regelen i regneuttrykket på dag 10.

251.F:Da lurer æ på klarer dere å lage det regneuttrykket

252.Lea:Jaaa..

253.Pia:Vi skal herme etter den*(peker på regneuttrykket på dag 4)*hvis vi bare flytter det over hit*(peker på regneuttrykket for dag 10)*

254.F:Okey du herme etter den, okey men hva skal det være helt likens eller skal du herme nokka

255.Pia:Æ kan ta bare 1 å+2, åså kan æ ta en gange å så kan æ finne et anna tall*(peker på dag 10)*

Pia peker på regneuttrykket på dag 4 og sier " vi skal herme etter den*(peker på regneuttrykket på dag 4)*hvis vi bare flytter det over hit*(peker på regneuttrykket for dag 10)".* Pia bruker ifølge Radford (2010) en kontekstuell generalisering der hun peker og bruker mønsteret i regneuttrykkene for å uttrykke noe generelt. Pia sier "æ kan ta bare 1 å +2, åså kan æ ta en gange å så kan æ finne et anna tall*(peker på dag 10)"(linje 255).* Her er hun over i input-output funksjonen som hun kommer frem til visuelt, men klarer ikke å regne ut antall blader ved hjelp av regneuttrykket da hun ikke mestrer multiplikasjon. Carraher et al.(2008) kaller dette empirisk generalisering da elevene tar i bruk bildene i planten for å finne den underliggende strukturen, forklarer med ord hvordan de tenker og kommer frem til et uttrykk gjennom prosessen.

Elevpar 4 som arbeidet med oppgave 2 bruker også regneramma visuelt for å forklare den underliggende strukturen.

159.F:99 korsen fant du det, korsn klarte du å finne det

160.Per:Fordi æ så her*(peker på regnestykkene)*en mindre, en mindre, en mindre

I linje 160 peker Per på regneuttrykkene som er ryddig skrevet inn i ruter under den tilhørende planten, og flytter fingeren etterhvert som hun forklarer at det er en 2-er mindre enn dagsnummeret. Denne observasjonen bruker han til å beregne antall blader på dag 100 som er beskrevet i analysedel 1.

Eksempelet som er valgt ut under viser elevpar 5 som arbeider med oppgave 1 klarer å tenke funksjonelt ved hjelp av å se (Wilkie og Clarke, 2015).

17.Liv:Ja siden det e 2*(peker på planten på dag 1)*2 pluss 2 det blir 4*(peker først på den to nederste bladene og deretter på øverste rad på planten på dag 2* og 2 pluss 2 pluss 2*(peker først på de nederste bladene, så på bladene over og til slutt på øverste rad med blader på dag 3).* Der tar man bare 2*(peker på dag 1)*her tar man to 2 gang*(peker på dag 2)*. Her var det en 2*(peker på dag 1)*her var det to 2*(peker på dag 2)* her e det på dag 2. Her e det på dag 3*(peker på planten)*derfor e det tre 2-era. Da blir det 2,4,6*(peker på tallmønsteret).*

Liv bruker regneramma aktiv der hun peker på dagene, først på de nederste bladene og så på de øverste bladene og knytter tall, både addisjon- og multiplikasjonsuttrykk til sin forklaring samtidig og begrunner sammenhengen med dagsnummeret. Det er gitt flere eksempler analysedel 1 og kontekstuell generalisering, der elevene ser sammenhengen mellom dagsnummeret, planten og regneuttrykkene både på oppgave 1, 2 og 3. I denne prosessen som Radford (2014) kaller empirisk generalisering ble regneramma og det ryddige oppsettet avgjørende da elevene visuelt så sammenhengen.

Elevpar 2 som arbeider med oppgave 2 sliter med å regne ut antall blader på dag 100, og forsker vurdere å avslutte intervjuet og sier ”...den er litt vanskelig”(linje 280).

280.F:Nei+1 bare skriv den e litt vanskelig

281.Tom:Nei æ skal finne det ut

282.F:Skal du finne det ut okey, men her på dag 100 har du(peker)

283.Tom:Ja 99

284.F:Ka e det du egentlig gjør da

285.Tom:Hvis vi går ned hit igjen(peker på regneuttrykket på dag 4)her e det tre 2-tall

286.F:Ja

287.Tom:Her et 2-tall fordi at her e det ingen 2-tall, så går vi opp hit(peker på uttrykket på dag10)da har vi ni 2-tall

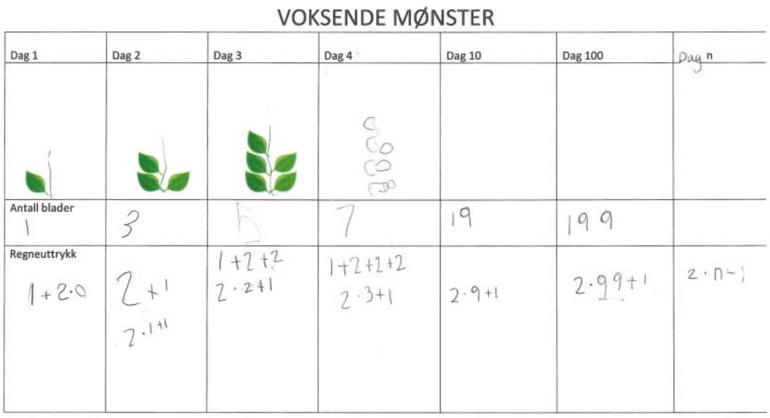
288.F:Ja og da e det..koffer e det 9

289.Tom:Fordi det e 10 daga, fordi på enern har vi ingen 2-era, da har vi bare ni 2-tall(peker)

290.F:Ja og her hadde du(peker på uttrykket på dag 100)

291.Tom:99 2-tall

Tom vil ikke gi opp og sier at ”Nei æ skal finne det ut” (linje 281). For å komme videre brukes regneramma aktiv ved at eleven selv går tilbake til dag 4 for å forklare den underliggende strukturen der han sier ”Hvis vi går ned hit igjen (peker på regneuttrykket på dag 4) her e det tre 2-tall” (linje 285). Videre i linje 287 går han til dag 10 ”... så går vi opp hit (peker på uttrykket på dag 10) da har vi ni 2-tall”. Etter dette er forsker det forsker som peker i regneramma for å drive eleven fremover ved å fokuser på dag 100 (linje 290). Gjennom aktiv bruk av regneramma kommer eleven frem til et generelt uttrykk for oppgave 2 der han etter hvert bruker en input-output funksjon på f(n)=2(n-1)+1 og videre til det generelle uttrykket f(n)=2n-1, og begrunnet dette uttrykket med at det var en mindre 2-er enn dagsnummeret.



Figur 9- Elevarbeid til elevpar 2 i oppgave 2

4.2.2.Den matematiske samtalen med forsker og medelev

Nedenfor skal jeg ta for meg tre av de planlagte spørsmålene fra intervjuguiden og vise hvilken betydning de hadde for overgangen mellom nivåene. Videre vil jeg se på noen grep som forsker gjør i den matematiske samtalen underveis for å drive elevene videre mot en løsning (Drageset, 2016).

Spørsmålet *"Hva er likt og hva er ulikt?"* fra intervjuguiden (linje 33) fikk elevene først til å fokusere den visuelle planten, for så å finne både konstant og variabel. Eksempelet er hentet fra elevpar 1 som arbeidet med oppgave 2.

33.F:Ja men ka som er likt og ka som er ulikt?

34.Eli:Det kommer 2 blar hver dag

35.F:Det kommer 2 blar ja og ka som er likt da?

36.Ane:Hmmm

37.Eli:At det bladet(peker på bladet på dag 1)

38.Ane:Alltid ett blad her(peker på første blad på hver plante)

Eli sier at det kommer 2 blader hver dag (variabelen i linje 34) og svarer på i linje 37 at det ene bladet på dag 1 er likt i alle plantene (konstant). Medelev Ane gjentar og tar opp tråden i det Eli sier i linje 37, og viser videre på de andre plantene hvor det konstante bladet er. Spørsmålet fikk elevene til å fokusere på en begynnende underliggende struktur som er nødvendig for en kontekstuell eller symbolsk generalisering (Radford, 2010).

Spørsmålet *"Hvordan vil planten se ut på dag 10 og dag 100?"* fra intervjuguiden ble ikke stilt slik det var planlagt, men ble delt opp først med fokus på dag 10 og deretter på dag 100. Eksempelet er hentet fra elevpar 1 som arbeidet med oppgave 1 som ledes over på dag 10.

52.F:Okey, ja men da lurer jeg på nu vi har jo ikke dag fem her

53.Pia:Men vi har dag ti(peker på dag 10)

54.F:Kordan vil det se ut?

55.Lea:Mmm..Kanskje ti blader da

56.F:Kanskje det

57.Lea:Kanskje ti blader på hver side

58.F:Hvorfor da?

59.Lea:Eee...

60.F:Det er riktig, men hvorfor blir det sånn?

61.Lea:Æ så bare her så at det var tre her og der(peker på dag 3)

Elevene har kommet frem til riktig antall blader på dag 4 og forsker bekrefter med et "okey" (linje 1) og sier videre *"Ja men da lurer jeg på nu vi har jo ikke dag fem her".* Det får elevene til å fokusere på dag 10 (linje 2) og inviteres til å avbryte den rekursive tenkningen. Forsker bruker videre i samtalene spørsmålene "Hvordan vil det se ut?" (linje 3) og " Hvorfor da?" (linje 7). Spørreordene *"hvordan og "hvorfor"* gjør at elevene reflekterer og begrunner sine antakelser, og er viktig for å øve opp evnen til å argumentere matematisk (Drageset, 2016). I linje 6 bruker Lea ordet "Kanskje..." da hun ikke er helt sikker, og forsker bekrefter at det er riktig for å oppmuntre og driver elevene videre med å stille et nytt *åpent spørsmål* "Det er riktig, men hvorfor blir det sånn?" (linje 9), og Lea forklarer at hun så bare her ved å peke på hver side av planten (linje 10).

Eksemplet er fra elevpar 2 som arbeider med oppgave 2 og får spørsmålet " Enn på dag 100 korsn blir regnestykket da*(peker)"*(linje 255).

255.F: Nei du skal slippe det. Enn på dag 100 korsn blir regnestykket da*(peker)*

256.Tom: **<u>Æ vet 2 ganger 99</u>**

257.F: Ja skriv

258.Ulf: æ skulle akkurat si det

259.Tom: 2 ganger 99 +1*(skriver)*

260.F: Ja klarer du å regne det ut

261.Tom: **<u>Æ vet</u>**

262.F: Ja

263.Tom: 2 nittini gang det blir 198 +1 det blir 199

264.Ulf: 199 ja

Tom ser umiddelbart mønsteret i regneuttrykket og svarer ivrig "**<u>Æ vet 2 ganger 99"</u>** (linje 256). Videre bruker han en input-output funksjon som han sier, skriver (linje 259) og regner ut (linje 263). Spørsmålet fikk Tom til å uttrykke verbalt det han tenkte og skrive uttrykket i regneramma.

Elevene på 3.trinn hadde ikke kjennskap til eller arbeidet med symbolet n tidligere. I intervjuguiden er det lagt opp til at forsker skal forklare symbolet n *"n står for hvilken som helst dag"*, for så å stille spørsmålet *"Hvor mange blader er det på dag n?".* Dette spørsmålet ble gitt til de elevparene forsker vurderte kunne ha mulighet til å klare å lage et generelt uttrykk. I eksempelet fra elevpar 5 som arbeidet med oppgave 1 spør forsker hva regnestykket på dag n skal bli, samtidig som det forklares at n står for hvilken som helst dag (linje1).

156.F:Ja okey, men ka trur dåkker at regnestykket skal bli på dag n*(peker)*.....dag n står for uansett dag, dag n, n står for alle naturlige tall og det kan være hvilken som helst dag

157.Jim:**1000**

158.F:Hvis du hadde hatt 1000, korsn hadde regne, dag 1000, korsn hadde regnestykket blitt da

159.Liv:**Å 2000**

160.F:ja det hadde blitt 2000 men korsn hadde regnestykket sett ut

161.Liv:2 gange 1000

162.F:Ja men nu skal du lage et regnestykke med n*(peker)*

163.Liv:Andre sida

164.Liv:2 gange n

Her foreslår Jim dag 1000 for dag n (linje 157). Forsker griper fatt i dette og får elevene til å si regnestykke og regne ut dette spesialtilfellet (linje 158-161). Mason m.fl.,(2014) sier at meningen med å teste ut spesialtilfeller er for å oppdage den underliggende strukturen for så å generalisere. Forsker leder elevene videre ved å støtte som er en av grepene lærer gjør for å styre den matematiske samtalen, og hjelper dem til å utvikle et mer presis forståelse for begrepet n (Drageset, 2016). Ved hjelp av *hintet* "Ja men nu skal du lage et regnestykke med n" (linje 162), gjør at Liv kommer med et generelt utrykk og sier "2 ganger n" (linje 9).

I flere intervju ble det nødvendig å hjelpe elevene til å skifte retning for å få fremdrift. Eksemplet er fra elevpar 4 og oppgave 2.

83.Per: Trur det blir 4
84.F: Ja det kunne vi ha skreve, men da får du ikke mønsteret frem, ka skjer fra dag til dag
85.Per: 2+2+1

Per foreslår at det at det skal være fire blader på dag 3 (linje 83). For å få eleven til å skifte retning bruker forsker et korrigerende spørsmål som starter med *"Ja det kunne du ha skreve, men da får du ikke mønsteret frem, ka skjer fra dag til dag "* (linje 84). Drageset (2016) kaller dette en slag dobbelt kommunikasjon da forsker først aksepterer forslaget, og neste trekk er å fokusering på mønster som hjelper elevene til å huske på hva som er viktig. Til slutt stilles et åpent spørsmål for å få Per til å komme med det riktige uttrykket.

En av intervjuene startet forsker med å gi oppgave 1 til elevpar 6 der det ble stilt det åpne spørsmålet *"Da lurer æ på ka trur dåkker at dåkker skal gjøre?"*.

1.F:Nu e vi i gang. Der gutta nu skal dåkker få en oppgave. Da lurer æ på ka trur dåkker at dåkker skal gjøre?

2.Tom:Vi skal tegne sånn flere blar til*(peker)*

3.Ulf:Å ja nu forstår æ

Spørsmålet får guttene til å rette fokuset mot oppgaven og de er i gang med resonneringen. *Åpne spørsmål* er en av grepene for framdrift som lærere gjør for å styre den matematiske samtalen i den retningen som er ønskelig (Drageset, 2016).

Et annet grep lærer gjør i en matematisk samtale er å *utvide eleven forståelse*, der elevene lærer nye ting med utgangspunkt i det de forstår (Drageset, 2016). Elevpar 1 i oppgave 2.

172.Ane: 2 ganger 100*(leser hva H har skrevet)*

173.F: ja men koffer blir det det

174.Ane: Det blir....

175.Eli: Fordi at det var jo 2 blader på dag 1*(peker)*og da var det jo 2 ganger1, og der var det 2 ganger *(peker)*2 ganger 3*(peker)*og 2 ganger 4*(peker)*og 2 ganger 10*(peker)*

176.Ane:*(Følger med og peker på dag10)*

177.Ane:og da må det jo være 2 gange**<u>100</u>***(peker hele veien)*

178.F: Ja, ka er 2 ganger 100

179.Eli: hmmm æ vet ikke helt

180.F: har dåkker lært gange?

181.Eli: ja....holder på med det

182.Ane: nei...bare med dæ*(peker på meg)*

183.F: Bare med mæ ja okey

184.Ane: 2,4,6*(teller og peker)*

185.F: Hvis du tar 2 ganga 100*(peker)*det er det de betyr

I dette eksempelet ser vi at Ane leser opp det Eli har skrevet på regneuttrykk "2 ganger 100" (linje 172). Forsker spør videre *"Hvorfor blir det det?"* (linje 173). Spørsmålet får Eli til å forklare hvorfor (linje175), og det er et grep som gjøres i for å *lokke frem elevenes løsningsstrategier* der elevene forteller hvordan de tenker og hvordan de løser oppgaven (Drageset, 2016). Gjennom dette får forsker tak i hva elevene forstår og ikke. Elevene viser gjennom denne sekvensen i samtalen at de tar i bruk multiplikasjon selv om de ikke på forhånd har hatt formell undervisning om det, kun den korte oppsummeringen i før undervisningen. Her sier de selv at de bare har hatt det med meg (linje 182). Det er i tråd med det Carraher et al.(2008) sier at elever kan lære seg multiplikasjon, sammensatte uttrykk og algebraisk notasjon uten å ha fått formell undervisning om det.

Elevpar 1 var konsentrerte og fulgte hverandre i prosessen mens de arbeidet med oppgave 2.

149.F:Og kor mange 2-era får du på dag 10?*(peker)*

150.Eli:**9**

151.F:Ja

152.Eli:Så det blir **9 ganger 2**

153.F:Ja

154.Ane:9 ganger 2

155.Eli:**+1***(skriver)*

156.F:Jaa

157.Ane:+ 1 På alle skal det være +1

158.Eli:Nå må vi bare finne ut kor mye det e

159.Ane:9 ganger 2 e jo 19

160.Eli:Ja 19 **<u>nei det e 18</u>**

161.Ane:Ja og **<u>+1 e 19</u>**

162.F:Ja

163.Eli:**<u>Det e 19</u>**

I linje 149 stiller forsker det *lukkede spørsmålet* "Og kor mange 2-era får du på dag 10?*(peker)"* for å hjelpe elevene til å få framdrift i prosessen. Dette reduserer kompleksiteten slik at elevene lettere skal finne et svar (Drageset, 2016). Det som skjer videre er at elevene ved hjelp av dette hintet fortsetter den matematiske samtalen ved å støtte og utfylle resonnementene til hverandre. I linje 152 bruker Eli multiplikasjon for å prøve å regne ut antall blader på dag 10." Så det blir **<u>9 ganger 2"</u>**. Forsker bekrefter med et "Ja" (linje 153), og Ane gjentar det Eli har sagt (linje 154). Deretter fortsetter Eli resonnementet og sier ivrig "+1" og skriver regneuttrykket på dag 10. Ane gjentar igjen det Eli sier "+1 på alle skal det være +1" (linje 157), slik fortsetter de til de kommer frem til riktig antall blader på dag 10 som er 19 ved hjelp av en input-output funksjon.

4.2.2 Oppsummering av analysen del 2

Oppgavene ble plassert i en regneramme (tabell), som ble aktivt bruk som visuell støtte der elevene fikk et ryddig oppsett. Gjennom regneramma måtte elevene forholde seg til avgrensede ruter de ikke kunne tegne eller skrive for stort i. I alle intervjuene pekte elevene, flyttet fingeren samtidig som de brukte hverdagsspråket for å forklare den underliggende strukturen som de uttrykte muntlig og/elle skriftlig. Det gjorde de ved å si f.eks."en mindre, en mindre, en mindre" der de så sammenhengen mellom planten og dagsnummeret. Regneramma bidro til at de så mønsteret i regneuttrykkene og klarte å uttrykke gjennom funksjonell tenkning, både en muntlig rekursiv eksplisitt generalisering (Wilkie & Clarke, 2015). I tillegg ble det pekt i ramma der de så sammenhengen mellom gjentatt addisjon, som igjen bidro til overgangen til å ta i bruk multiplikasjon. Det var også naturlig for forsker å peke for å fokusere på det matematiske for å føre samtalen i den retning som var ønskelig. Samtalen og regneramma ledet elevene videre i prosessen og bidro til både framdrift og skifte mellom de ulike generaliseringsnivåene.

De planlagte spørsmålene fikk elevene til å fokusere på det som var likt og det som var ulikt og fikk de over på varierende mengder. Spørsmålene om antall blader eller regneuttrykk på dag 10, dag 100 og dag n fikk flere elever til fokusere og bidro til både fremdrift i den matematiske tenkningen og for noen overgang til et nytt nivå. Underveis brukte elevene hverdagsspråket for å forklare sine antakelser, og der forsker lokket frem deres tenkning og forklaringer på løsninger ved å stille både lukkede- og åpne spørsmål og ga hint. Gjennom samtalene fikk forsker innsikt i hva elevene forsto og ikke forsto, og støttet elevene i å utvikle en mer presis forståelse av ulike begrep. Flere elevpar utvidet sin forståelse ved at forsker tok utgangspunkt i det de forsto og arbeidet hjalp elevene videre. Spørsmålstillinger som innehold spørreord som «hva», «hvordan» og spesielt «hvorfor» fikk elevene til å utdype sin matematiske tenkning.

5 Drøfting

Problemstillingen i denne studien er:

Hva kjennetegner 3.trinns elevers tilnærming når de arbeider med mønster generalisering?

Hvilke faktorer har betydning for framdrift?

For å kunne svare på problemstillingen skal jeg ta utgangspunkt i mitt teoretisk rammeverk der jeg først drøfter yngre elevers møte med mønstergeneralisering. Dette velger jeg da forståelsen for tilnærmingen elevene har, må ha dette som bakgrunn. Deretter vil jeg drøfte hvilke tilnærminger de tok i bruk i prosessen, og hvilke faktorer som bidro til fremdrift. Det blir også naturlig å ta for meg noen utfordringer som dukket opp i prosessen.

5.1 Mønstergeneralisering og yngre elever

I min studie har jeg valgt å gi 9 år gamle elever oppgaver med mønstergeneralisering for å se på hvilke tilnærminger de tar i bruk i prosessen. Elevene hadde ikke arbeidet med slike oppgaver tidligere, og nyere forskning viser at mønstergeneralisering er en fremtredende måte å innføre algebra på for yngre elever (Charraher et al.,2008; Wilkie, 2015). Analysen av mine funn viste at yngre elever er i stand til å generalisere algebraisk gjennom ulike representasjonsformer, og gjennom tilnærminger i prosessen der forståelsen ligger til grunn. Denne måten å innføre algebra på er i kontrast til den tradisjonelle innføringen i algebra for ungdom, der de ifølge Carraher & Schiliemann (2007) manipulerer algebraiske symboler gjennom innlærte prosedyrer uten forståelse da resonneringsprosesser uteblir.

For meg som lærer er det interessant å få kunnskap om og bli bevisst på generaliseringer yngre elever tar i bruk i mønstergeneraliseringer. Her støtter jeg meg til Carraher et al.(2008) som skiller mellom teoretisk og empirisk generalisering. I tidlig matematikk og den empirisk generalisering er en opptatt av hvordan elevene lærer, og hvordan læringen utviklet seg i prosessen. Min studie kan knyttes til denne empiriske generaliseringen da analysen av funn kan vise til ulike tilnærminger elever gjør når de generaliserer gjennom lineære funksjoner. Funksjoner innføres normalt gjennom algebraiske uttrykk, og for yngre elever er dette ikke et alternativ da de ikke er kjent med algebraisk notasjon. “x” og andre bokstaver blir normalt innført som et bestemt tall for yngre elever, men min forskning viser at yngre elever kan uttrykke ”x” som noe som kan variere. I følge Carraher et al.(2007) trenger vi å forstå og fremme overgangen fra en rekursiv generalisering og over på en input-output funksjon med to variabler og den eksplisitte generaliseringa, som ikke fult ut samsvarer med de aksepterte normene i matematikk. Dette kan ses i sammenheng med et av kjerneelementene ”Abstraksjon og generalisering” i den nye fagfornyelse (Udanningsdirektoratet, 2019).

> *”Abstraksjon i matematikk inneber at elevane gradvis utviklar ei formalisering av tankar, strategiar og matematisk språk. Utviklinga går frå konkrete situasjonar*

til formelt symbolspråk og formelle resonnement. Generalisering i matematikk handlar om at elevane oppdagar samanhengar og strukturar og ikkje blir presenterte for ei ferdig løysing. Det vil seie at elevane kan utforske tal, utrekningar og figurar for å finne samanhengar og deretter formalisere ved å bruke algebra og formålstenlege representasjonar."

Mitt design av oppgavene der elevene blir invitert til en rekursiv generalisering fra dag 1 til dag 4 og så videre over på dag 10, dag 100 og dag n, ga funn som kan svare på noe av det som fremmer denne overgangen. Det gjorde elevene ved å benytte seg av sine egne intuitive representasjoner, og ved hjelp av tilretteleggingen klarte mange gjennom prosessen å ta i bruk "n" som variabel for å uttrykke en generell sammenheng muntlig gjennom hverdagsspråket og noen klarte det også skriftlig.

5.2 Tilnærminger og ulike generaliseringer

I analyseprosessen og gjennom mine funn fikk jeg innsikt i de ulike tilnærmingene elevene hadde i mønstergeneralisering. Aritmetikken ligger til grunn for algebraisk generalisering, og det er ifølge Radford (2010) viktig at lærere ikke blander algebraiske generalisering med andre former for generalisering. Forskjellen og kunnskapen om disse generaliseringene vil framover hjelpe meg i vurdering av hvor elever er i sin tenkning når det gjelder det matematiske, og gi meg grunnlag få dem videre til et høyere nivå når de arbeider med mønstergeneraliseringer. I analysen tok jeg utgangspunkt i Radford sine fire generaliseringsnivåer. Da 3.trinns elevene jeg intervjuet ikke tidligere hadde arbeidet med mønstergeneralisering, og heller ikke hadde hatt undervisning om multiplikasjon, var det naturlig at de aller fleste tok i bruk praktisk/aritmetiske strategier i den først tilnærmingen der de så lokal likheter. Gjennom prosessen begynte de å se underliggende strukturer og beveget seg over til fakta generaliseringer som Radford (2010) betegner som begynnende algebraisk generalisering, der de beregnet konkrete tilfeller av en variabel.

Da elevene skulle bevege seg over til å beregne dag 10, dag 100 og til slutt dag n, oppsto det noen hindringer da de ikke lenger kunne beregne antall blader på en dag med utgangspunkt i dagen før. Det er i overenstemmelse med det Radford (2010) sier om at overgangen fra konkrete objekter til mentale objekter er utfordrende. Et elevpar hadde kommet frem til riktig antall blader på dag fire, da de tok i bruk klosser og begynte å bygge fra dag 1 og videre dag for dag for å prøve å finne ut hvor mange blader det skulle være på dag ti. Det viser at denne prosessen er utfordrende, og elevene trengte å gå tilbake for å starte prosessen på nytt der de tar i bruk konkreter som beskrives som en algebraisk syklus som Mason m.fl.(2014) kaller MFA-spiralen.

Etterhvert oppdaget jeg i mitt analysearbeid at jeg hadde veldig mange funn på kontekstuell generalisering, der elevene brukte regneramma for å finne mønsteret/regelen for den underliggende strukturen der de så det som var likt (konstant) og det som var ulikt (variabelen) (Mason m.fl.2014). Analysen av mine funn viser også at yngre elever er i stand til å utvikle funksjonell tenkning i utforskningsprosessen der de ser sammenheng mellom de ulike delene på det voksende mønsteret og dagsnummeret (Wilkie & Clarke 2015). I analysedel 1 der jeg har tatt for meg matematikken som kom frem i prosessen, har jeg vist eksempler på at elevene tok i bruk denne funksjonelle tenkingen i alle tre oppgavene. Ved hjelp av å «se» uttrykte de denne sammenhengen først gjennom hverdagsspråket, før de ble oppfordret av lærer til å skrive ned regneuttrykket med den underliggende strukturen de så i mønsteret. Det gjorde de ved hjelp av det Wilkie (2014) kaller rekursiv eller eksplisitt generalisering. Mange elever så den underliggende strukturen som gjentatt addisjon eller dobling, og beregnet antall blader fra dag til dag ved hjelp av en rekursiv generalisering. Andre så den underliggende strukturen som dobling eller multiplikasjon og klaret å generalisere eksplisitt. I den symbolske generaliseringen er det ifølge (Radford, 2010) ikke nok å skrive et generelt uttrykk, men disse symbolene må forklares. Dette er interessant da man tradisjonelt sett har vært fornøyd med at elevene produserer riktig svar. I mine funn har jeg eksempler der elevpar kom frem til et generelt symbolsk uttrykk ved å bruke den kontekstuelle generaliseringen, der de så strukturen i regneuttrykkene de hadde knyttet til de ulike dagene og bare ”hermet” etter strukturen uten at jeg fant funn på at de hadde gitt forklaring til variabler og konstante. Mine intervju varte fra 10-17 minutter og i prosessen var jeg som forsker ikke nok bevisst på å spørre etter dette.

5.3 Faktorer som bidro til skifte

I denne delen skal jeg drøfte faktorer som bidro til framdrift og et skifte til et høyere nivå i den matematiske forståelse.

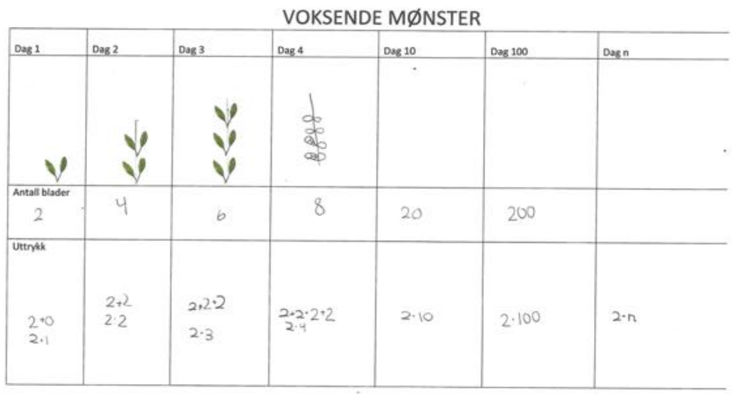
5.3.1 Regneramma og oppgavene

Min erfaring med små elever er at de i problemløsningsoppgaver tegner og skriver veldig stort og plasserer arbeidstegninger og regneuttrykk der det er plass uten noen systematisk nedskriving. Dette blir uoversiktlig og mange ganger får de ikke plass på en side og må snu arket, og fortsette på andre siden. Da mister de kontrollen og oversikten og klarer ikke å se sammenhengen mellom arbeidstegninger, tall og regneuttrykk. Et av mine funn var at en elev sa "okey det var for stort" der han oppdaget selv at ikke fikk plass i ruten. Regneramma vil fungere som en tabell der tegninger og uttrykk har sine systematiske plasser. Her støtter jeg meg til det Carraher et al.(2008, s.6) sier at å fylle inn i tabell og lese av tabell er en av representasjonsformene som uttrykker algebraiske ideer i tidlig algebra

Analyse av mine funn viser at jeg fant mange eksempler på kontekstuell generalisering. Det vil jeg begrunn med arbeidsformen tilnærmingen ble gjort i og oppsettet oppgaven var satt i. Regneramma ble aktivt brukt av både forsker og elever under den matematiske samtalen som ble en visuell støtte i tilnærmingen. Forsker brukte regneramma ved å peke og hjelpe elevene til å ha fokus på viktige matematiske ideer for fremdrift. For det andre var oppsettet og oppgavene med på å få elevene over fra en rekursiv tenkning over på en input-output funksjon, der de oppdaget underliggende strukturer ved å se mønsteret i utrykkene de hadde skrevet inn. Elevene pekte samtidig som de brukte hverdagsspråket for å bevege seg fra plante til uttrykk, der de uttrykte "Hvis vi går ned hit og så går vi opp hit", "Vi skal herme etter den (peker) hvis vi bare flytter den hit". De oppdaget strukturene i regneuttrykkene ved for eksempel å si "Alle har gange 2", "Fordi æ så her (peker) en mindre, en mindre, en mindre".

I tillegg til arbeidsformen gjorde det ryddige oppsettet det mulig å se mønster og strukturer.

Uten denne for avgrensing av det skriftlige ville elever plassere sine uttrykk på helt andre steder slik at de ikke fikk denne formen for visuell støtte. De fleste elevarbeidene som er en del av datamaterialet, viser at elevene har fylt inn i ramma og har et ryddig oppsett. I tillegg er det flere elevpar som ikke har tegnet planten på dag 10 da de har kontroll på antallet gjennom regneuttrykket (Se figur 9).



Figur 10-Elevarbeidet til elevpar 4 med oppgave 1

Oppgave 1 og 3 har funksjonsuttrykkene f(n)=2*n og f(n)=3*n+1 (Carraher et al.,2008). I disse oppgavene ble det enklere for elevene å se sammenhengen mellom dagsnummeret og planten, og dermed ta i bruk dagsnummeret direkte som variabelen i funksjonsutrykket slik Wilkie & Clarke (2015) har forsket på. Mine funn viser at nesten alle elevparene kom frem til en muntlig og/eller skriftlig generelt uttrykk for oppgave 1, og elevparet som arbeidet med oppgave 3 klarte også å komme frem til et generelt uttrykk. Oppgave 2 med funksjonsuttrykk f(n)=2n-1 eller f(n)=2(n-1)+1 ble vanskeligere da elevene måtte se variabelen som en mindre enn dagsnummeret. Dette hadde jeg ikke tenkt på når jeg designet oppgavene. For meg var hovedfokuset på partall og oddetall. I etterkant ser jeg at denne ville fungere bedre dersom den hadde blitt endret, der dag 1 hadde startet med de tre bladene som var på dag 2 og da fått funksjonsuttrykket f(n)=2*n+1. Oppgave 3 ble derfor gitt til et elevpar for å teste ut om det var lettere gå over til dag 10 og 100 der variabelen kan knyttes direkte til dagsnummeret

Oppgave 2 vil være en fin for elever som trenger mer utfordring, der de må tenke en mindre en dagsnummeret. Det vil være en annen måte å øve elevene opp på å se strukturer og relasjoner mellom tall.

5.3.2 Den matematiske samtalen

Elevene hadde ikke arbeidet med oppgaver med mønstergeneralisering tidligere, og på forhånd hadde jeg planlagt spørsmål som skulle gi retning for samtalen som skulle forgå gjennom oppgaveløsningen. Mine funn viser at flere av spørsmålene var avgjørende for framdriften som elevene hadde underveis i prosessen, og forsker ble derfor avgjørende for å hjelpe elevene til å ha fokus på det matematiske innholdet som var ønskelig at de skulle lære (Carraher et al.,2008).

Gjennom spørsmålet "Hva som er likt og hva som er ulikt?" fikk elevene til å fokusere på forholdet mellom varierende mengder og den underliggende strukturen i mønsteret (Mason m.fl.,2014). Spørsmålene om planten på dag 10, dag 100 og dag n viste seg var en invitasjon for å få elevene over fra en rekursiv generalisering og over på en eksplisitt generalisering. Elevene ble oppmuntret til å flytte fra å tenke på operasjoner på bestemte tall til relasjoner mellom variabler (Carraher et al.,2008). Først uttrykte de det gjennom sitt naturlige språk, for så å skrive uttrykkene som en input-output funksjon før noen klarte å gi uttrykk for en generell sammenheng. Pia fra elevpar 3 og oppgave 2 bruker sitt naturlige språk når hun uttrykker det generelle gjennom en input-output funksjon. "Æ kan ta bare 1 å+2, åså kan æ ta en gange å så kan æ finne et anna tall*(peker på dag 10)"*. Det de så uttrykket det verbalt, og naturlig språk er en av representasjonsformene i tidlig algebra (Carraher & Schliemann, 2007).

I tillegg til de planlagte spørsmålene ble det stilt spørsmål som ble til etterhvert i forhold til hvor elevene var i prosessen, for å få frem tilnærminger elever har i arbeid med mønstergeneralisering. Disse spørsmålene kaller Drageset (2016) for grep som har betydning for retningsendring og fremdrift. I intervjusituasjonen var disse grepene ikke bevisste, men falt naturlig for meg å spørre. Gjennom analysearbeidet og lesing av teori fant jeg funn på at jeg stilte mange åpne spørsmål der jeg brukte ulike spørreord i f.eks. spørsmål som "Hvordan vil det se ut?", "Hvorfor da?" og "Hva tror dere dere skal gjøre?". Disse spørsmålene bidro til lokke frem elevenes løsningsstrategier der de fortalte hvordan de tenkte og hvordan de løste oppgaven, samtidig som jeg fikk tak i hva elevene forsto og ikke forsto. De planlagte spørsmålene var med på å støtte elevenes begrepsforståelse f.eks. der jeg forklarer hva n betyr og fikk flere elevene videre til å generalisere muntlig og/eller skriftlig. Underveis i hele prosessen ble jeg viktig støtte for utvide elevenes matematiske tenkning, og der de lærte nye ting ut i fra det de forstår. Et eksempel på det var når elevene gikk fra gjentatt addisjon og over til å bruke multiplikasjon, for så å kombinere addisjon og multiplikasjon i uttrykkene i oppgave 2 og 3. I tillegg fant jeg funn på at jeg hjalp elevene til å skifte retning for å få fremdrift der jeg minnet dem på hva som var viktig, der jeg f.eks. minnet de på mønsteret de så i planten som også måtte komme frem i regneuttrykket.

Jeg fant flere sekvenser med funn der det benyttes et IRE-mønster i samtalen. Samtalen var da preget av at forsker tok initiativ ved for eksempel å stille spørsmål, elevene responderte og lærer evaluerte der det var liten grad deling av tanker og strategier (Drageset, 2016). Disse har jeg ikke gitt eksempel på i analysen dag de ikke bidro til fremdrift. Framdriften i intervjuene var derimot i flere sekvenser preget av det Drageset (2016) kaller refleksiv og rik kommunikasjon. Der elever presenterte sine ideer og strategier, som ble utfordret og drøftet der argumentasjon og logikk var fokuset. I denne prosessen var elevene aktive og utforskende der de fortsatte resonnement for hverandre, oppmuntret hverandre og gjentok det den andre sa for å holde fokus og klargjøre framgangen for seg selv og den andre. De var sekretær for hverandre og skrev ned strukturene de så i regneuttrykk og der jeg spurte mer enn ga forklaringer og definisjoner for å utvikle elevenes forståelse for matematikken de arbeidet med. Oppgavene som ble gitt var utfordrende for 3.trinnselever og fikk dem til å være i psykisk grense mellom komfort-og risikosone der de satt ord på sin tenkning (Stillmann et al.,2009).

6 Videre forskning innenfor feltet

Underveis i prosessen dukket det stadig opp spørsmål og tanker rundt mønstergeneralisering med yngre barn. Funnen min ga svar på noe av det jeg på forhånd hadde antatt, men mange nye interessante funn dukket opp. Analyse av mine funn viser at elever på 3.trinn er i stand til å arbeide med mønstergeneralisering gjennom en empirisk generalisering, der regneramma og den matematiske samtalen er en støtte i prosessen. Den videre forskningen innenfor feltet som hadde vært interessant å se på, er hvordan 4.-5.trinnselever over en lengere periode i klasseromsituasjonen kan mestre mønstergeneralisering gjennom arbeidsformen som beskrives i kjerneelementet "Abstraksjon og generalisering" i den nye fagfornyelse, og som knyttes opp mot alle de fem grunnleggende ferdighetene (Utdanningsdirektoratet, 2019). Å forske på 4.-5.trinnselever er interessant da de skal ha fått en mer utvidet forståelse for grunnleggende aritmetikk, der de blant annet har hatt formell undervisning om multiplikasjon. Innføring av mønstergeneralisering på dette nivået kan bidra til at elever får bedre forståelse for algebra og mestre den algebraen de møter på ungdomsskolen. I tillegg vil det å bli trygg på relasjonen mellom varierende menger, som være viktig for å øve opp evnen til å se mønster og strukturer som de kan ta i bruk i andre deler av matematikken.

7 Avslutning

I forhold til mønstergeneralisering mener Carraher et al.(2008) at vi trenger å forstå og fremme overgangen fra en matematikkbasert empirisk generalisering der elevenes forståelse av problemer, hvordan denne innsikten oppstår og hvordan læringen utvikler seg, for så å gå over til den teoretiske generaliseringen som har liten eller ingen fot i den empiriske verden. Dette begrunner de med at denne prosessen er viktig å undersøke i forhold til yngre elever og endringer innenfor utdanningspolitikk og nye arbeidsmåter for å fremme elevenes læring. Dette er interessant i forhold til endringene som kommer med den nye fagplanen som trer i kraft 2020. Her ligger et forslag på at lineære funksjoner skal innføres på 7.trinn (Utdanningsdirektoratet, 2019). Min studie og analyse av funn viser at yngre elever er i stand til å arbeide med mønstergeneralisering som kan forberede dem på mer utvidet arbeid med lineære funksjoner. Carraher et al.(2008) sier om at matematikk har iboende strukturer som krever at elever følger de samme generelle måter uansett alder, og yngre elever begynner med det grunnleggende og går videre noe saktere enn eldre elever. Da kreves tilrettelegging på riktig utvalg av oppgaver fra en kjent kontekst, og lærer som støtte i den matematiske prosessen. I denne tilretteleggingen må lærer bli bevisst på og ha kjennskap til ulike tilnærminger elever tar i bruk i arbeid med mønstergeneralisering, for å vurdere hvor de er i prosessen slik at de kan hjelpe dem videre til høyere nivå.

8 Litteratur

Carraher, D. W., Martinez, M.V & Schliemann, A. D. (2008). *Early Algebra and mathematical generalization.* Springer Link

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Education*. Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Drageset, O. (2016). Korleis lærarar leier ein matematisk samtale. I R. Herheim & M. Johnsen-Høines (Red.) *Matematikksamtaler Undervisning og læring – analytiske perspektiver* (s.169-181). Bergen: Caspar-Forlag AS

Gilje, N & Grimen, H (1993). Hermeneutikk: Forståelse og mening i *Samfunnsvitenskapens forutsetninger: Innføring i samfunnsvitenskapenes vitenskapsfilosofi*, Oslo: Universitetsforlaget, kap. 7, s. 142-174

Gudmundsdottir, Sigrun (1992). *Den kvalitative forskningsprosessen.* Norsk pedagogisk tidsskrift 5.

Kleven, T.A. & Hjardemaal, F.R. (2018). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode. En hjelp til kritisk tolkning og vurdering.* Bergen: Fagbokforlaget.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju.* Oslo: Gyldendal akademisk.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). *Problem solving and modeling.* Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2014). *Å lære algebraisk tenking.* Bergen: Caspar Forlag AS

Maxwell, J.A. (2013). *Qualitative Research Design. An Interactive Approach.* New York: Sage publications.

Nilssen, V. L.(2012). *Analyse i kvalitative studier: den skrivende forskeren.* Bergen: universitetsforlaget

Popper, K (1959/2002). *A survey of som Fundamental problems, i The Logic of Scientific Discovery*, London: Routledge

Postholm, M.B. (2010). *Kvalitativ metode: en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kausstudier.* Oslo: universitetsforlaget.

Radford, L (2010). *Layers of generality and types of generalization in pattern activities*. PNA 4(2), 37-62

Skrivesenteret: http://www.skrivesenteret.no/ressurser/skriverammer/ (Hentet 29.11.18)

Stacey, K (1989). *Finding and using patterns in linear generalising problems*. Educational studies in mathematics 20: 147-164

Stillman, G., Cheung, K. C., Mason, R., Sheffield, L., Sriraman, B., & Ueno, K. (2009). Challenging mathematics: Classroom practices. In *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom*. Springer US.

Sullivan, P., Knott, L., & Yang, Y. (2015). *The Relationships Between Task Design, Anticipated Pedagogies, and Student Learning.* In *Task Design In Mathematics Education* (pp. 83-114). Springer International Publishing.

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse: En innføring i kvalitativ metode* Bergen: Fagbokforlaget.

TIMSS (2015). *Vi kan lykkes i realfag.* Matematikk

https://www.idunn.no/vi-kan-lykkes-i-realfag/2-hovedresultater-i-matematikk

Utdanngsdirektoratet (2019). *Fagfornyelsen*
https://hoering.udir.no/Hoering/v2/343?notatId=686 Hentet 13.05.19

Utdanngsdirektoratet (2013). *Læreplanverket*

https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-2.-arssteget-
Hentet 14.05.19

Wilkie, K.J. & Clarke, D. (2015). *Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure.* Mathematics Education Research Journal. Springer US.

Wilkie, K.J. (2014). *Learning to like algebra through looking.* APMC 19(4)

8.1 Vedlegg 1

Invitasjon til å delta i masterprosjekt **"Tidlig algebra og voksende mønster"**

Presentasjon: I forbindelse med min master i matematikkdidaktikk ønsker jeg å invitere 3.trinnselever til å delta i prosjektet.

Mange elever har sitt første møte med algebra på ungdomsskolen, og da gjerne med manipulering av algebraiske symboler uten forståelse. I mitt prosjekt ønsker jeg å sette fokus på tidlig algebra og bevisstgjøring rundt dette temaet, og kanskje bidra til at overgangen til ungdomskolen og algebra kan bli lettere for elever.

Om opplegget og gjennomføring: De som ønsker å delta i prosjektet vil få noen timers undervisning med fokus på viktige begreper og regning i tidlig algebra. De som ikke deltar følger klassens vanlige undervisning. Deretter skal jeg intervjue to og to elever og se på hva kjennetegner løsningsmetodene og resonneringen til 3.trinns elever når de arbeider med to oppgaver med voksende mønster. Disse elevene blir tilfeldig utvalg (ca.10-16 elever). Jeg skal samle inn data ved hjelp av videoopptak og elevarbeid fra intervjuene.

Formelle avklaringer: Det er innhentet tillatelse fra skolens rektor og lærerne på 3.trinn til å gjennomføre undesøkelsen. Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Prosjektet er også meldt inn til Norsk samfunnsvitenskapelige datatjeneste (NSD) som ivaretar personvernet i forskning ved UiT.

Opptakene oppbevares i låst skap til prosjektet som etter planen avsluttes 31.12.2019. Etter dette blir datamaterialet anonymisert og videomaterialet slettet. Dersom det er gitt tillatelse til korte sekvenser til bruk i undervisning og presentasjoner, blir dette lagret på ekstern enhet i låsbart skap.

Frivillig deltakelse: Det er frivillig og delta i prosjektet, og foresatte kan når som helst trekke sitt samtykke uten å oppgi noen grunn. Da vil alle opplysninger om barnet bli fjernet, med mindre de allerede er brukt i presentasjoner.

Dersom det er spørsmål kan du/dere ta kontakte:

Mette Nilssen

Min veileder Geir Olaf Pettersen på UiT

Samtykke til deltakelse i prosjektet «Tidlig algebra og voksende mønster»

Elevens navn: ________________________

- [ ] Jeg samtykker i at korte lyd og videosekvenser der eleven deltar kan bli brukt i undervisning og presentasjoner. Dette innebærer og så deltakelse i prosjektet.

- [ ] Jeg samtykker i deltakelse i prosjektet.

Jeg/vi har mottatt informasjon om prosjektet, og tillater at mitt/vårt barn deltar.

___

(Signert av foresatte, dato)

8.2 Vedlegg 2

Intervjuguide

- Beskriv det du ser?
  - Hva skjer fra dag 1 til dag 2 og videre til dag 3?
  - Hvordan vil tallmønsteret se ut?
  - Hva skjer her?
  - Hva er likt og hva er ulikt?
  - Hvordan endrer det seg?
  - Kan du lage en utregning/regneuttrykk?

- Hvordan ser planten på dag fire ut?
  - Hvordan tenkte du og hvorfor?

- Hvordan vil planten se ut på dag 10 og 100?
  - Hvor mange blad er det på planten den dagen?
  - Hvordan kom du frem til antallet?
  - Hvordan vil regneuttrykket se ut?
  - Er det flere måter å gjøre det på?

- Kan du beskrive sammenhengen mellom planten og dagsnummeret?

- n står for hvilken som helst dag. Hvor mange blader er det på dag n?
  - Hvordan tenker du?
  - Kan du lage et uttrykk som vil gjelde for alle «n» dager?