



FYS-3921

MASTERGRADSOPPGAVE I KOMMUNIKASJON
OG MIKROELEKTRONIKK

Tidsreversert fokusering av ultralyd i sylindriske
bølgeledere

Torjus Færnsnes

Juni, 2008

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET
Institutt for fysikk og teknologi

Universitetet i Tromsø

FYS-3921
MASTERGRADSOPPGAVE I KOMMUNIKASJON
OG MIKROELEKTRONIKK

Tidsreversert fokusering av ultralyd i sylindriske
bølgeledere

Torjus Færnes

Juni, 2008

Sammendrag

I denne oppgaven ser vi nærmere på fenomenet tidsreversert fokusering som kan benyttes til å fokusere et signal i tid og rom. Mulighetene for tidsreversering er mange og prinsippet kan benyttes generelt ved overføring av både akustiske, elektromagnetiske og andre bølgeformer, der det er liten demping av signalet under overføringen. I korthet går tidsreversering ut på å få en bølge som går fra et punkt A til et punkt B gjennom et medie, til å følge nøyaktig samme bane tilbake fra B til A gjennom mediet. Dette kan oppnås ved å snu bølgen i tid og slik sende den baklengs i retur, med en resulterende fokusering av bølgen. Tidsreversering har en rekke mulige praktiske anvendelser innenfor felter som for eksempel kvantemekanikk, kommunikasjon, medisin. Det finnes eksempler på systemer der man har benyttet tidsreversering til å undersøke og behandle brystkreft, og andre systemer der man benytter prinsippet til å knuse galle- eller nyrestein. Et annet eksempel er et system for å oppdage landminer under bakken.

Spesielt i denne oppgaven ser vi på hvordan ultralyd kan fokuseres og tidsreverseres i elastiske bølgeledere med sylindrisk form. I den forbindelse ser vi på teori som kan karakterisere det akustiske systemet. Vi tar for oss teori som beskriver hvordan bølgene genereres i tynne piezoelektriske filmer og brer seg i den elastiske bølgelederen. Teorien ender opp med to numeriske modeller. Til slutt utfører vi forsøk med tidsreversering i flere bølgeledere. Teori, numeriske modeller og forsøk viser at det oppstår derivasjoner av signalet i de tynne piezoelektriske filmene. Under tidsreversering viser det seg at effekten av derivasjon ikke kan oppheves, men at graden av derivasjon øker med en faktor to. Disse derivasjonene sammen med en romlig undersampling i det studerte systemet, muliggjør kun en begrenset fokusering av den utsendte bølgen.

Forord

Denne oppgaven er skrevet som en avsluttende oppgave i forbindelse med masterstudiet i kommunikasjon og mikroelektronikk ved Universitetet i Tromsø. Arbeidet har vært spennende, men også bydd på mange utfordringer underveis både teoretiske og praktiske. Det har vært spennende å se at kjent teori fra elektriske systemer kan overføres til akustiske systemer og benyttes på en ny måte. Oppgaven er skrevet på norsk fordi jeg synes det er viktig å bruke språket vårt, men det faktum at nesten all litteratur om dette temaet er på engelsk, gjør det til en ekstra utfordring å få til et godt norsk fagspråk.

Takk til min veileder Frank som alltid har tatt tid til å hjelpe, gode faglige diskusjoner og veldig god og rask oppfølging underveis. Takk til Karl Magnus og Svein for gode tips som fikk meg videre. Takk til mekanisk verksted for rask og god hjelp. Takk til Josoph for godt samarbeid under ultralydeksperimentene, miniforelesningene og faglige diskusjoner. Takk til Hung for alle nyttige og unyttige forstyrrelser. Takk til resten av mine medstudenter som har vært med på å gjøre skriveperioden litt triveligere.

Takk til familie og venner som har støttet meg på forskjellig vis og fått meg til å stå på helt til slutt.

Torjus Færnes
Tromsø, juni 2008

Innhold

Sammendrag	v
Forord	vii
Innhold	viii
1 Innledning	1
I Teoridel	5
2 Bølger i elastiske bølgeledere	7
2.1 Elastiske bølgeledere	7
2.2 Bølgelikningen	7
2.2.1 Bølgelikningen i en dimensjon	7
2.2.2 Bølgelikningen i flere dimensjoner	7
2.3 Tøyning (strain)	8
2.4 Spenning (stress)	9
2.5 Hookes lov	10
2.6 Stivhetstensor for et fast, isotropt stoff	11
2.7 Akustisk impedans	11
2.8 Refleksjon	12
2.9 Potensialfunksjoner	12
2.10 Bølger i en sylindrisk, isotrop bølgeleder	13
2.10.1 Longitudinelle bølger	15
2.10.2 Torsjonsbølger	17
2.10.3 Bøyningsbølger	18
2.10.4 Dispersjonskurver	18
3 Piezoelektriske transdusere	21
3.1 Piezoelektriske materialer	21
3.2 Bølgemodell for transduser	23
3.2.1 Spesialtilfelle - transduser mot luft	24
3.2.2 Spesialtilfelle - transduser mot metall	25
3.3 Derivasjon i transdusere	26
4 Tidsreversering	29

4.1	Tidsreversert transformasjon	29
4.2	Tidsreversering	31
4.2.1	Tidsreversering i et LTI system	33
4.2.2	Tidsreversering, konvolusjon og korrelasjon	35
4.2.3	Tidsreversering i derivasjonsfunksjoner	36
4.2.4	Tidsreverserte speil	37
4.2.5	Tidsreversert fokusering	37
4.3	Andvendelsesområder	38
4.3.1	Kommunikasjon	38
4.3.2	Ekkodeteksjon	41
 II Numeriske modeller og eksperiment		43
 5 Metoder, modeller og eksperimentelt oppsett		45
5.1	Bakgrunn	45
5.2	Referansemodell	46
5.3	Bølgeutbredelse i en sylinderformet bølgeleder, Modell 1	47
5.3.1	Beskrivelse av modellen	48
5.3.2	Fysikk	48
5.3.3	Dempning	49
5.3.4	Transdusere	51
5.3.5	Signal	51
5.4	Endimensjonal bølgeutbredelse, modell 2	51
5.4.1	Akustisk kobling	52
5.4.2	Kapasitiv kobling	53
5.4.3	Oppsett	53
5.5	Eksperiment	54
5.5.1	Produksjon av transdusere og bølgeledere	54
5.5.2	Benyttet måleutstyr	57
5.5.3	Praktisk gjennomføring av eksperiment	59
 6 Resultater		65
6.1	Numeriske resultater	65
6.1.1	Resultat fra modell 1 (Comsol Multiphysics)	65
6.1.2	Resultater fra modell 2 (SPICE)	69
6.2	Eksperimentelle resultater	71
6.2.1	Bølgeleder A	72
6.2.2	Bølgeleder B	73
6.2.3	Bølgeleder C	74
6.2.4	Bølgeleder D	75
6.3	Sammenlikning av numeriske og eksperimentelle resultat	76
 7 Diskusjon og konklusjon		77
7.0.1	Praktiske begrensninger	77
7.1	Begrensninger i de numeriske modellene	77
7.1.1	Modell 1 (Comsol Multiphysics)	77
7.1.2	Modell 2 (SPICE)	78
7.2	Diskusjon av resultatene	78

7.2.1	Modell 1 (Comsol Multiphysics)	78
7.2.2	Modell 2 (SPICE)	80
7.2.3	Eksperiment	80
7.3	Konklusjon	84
	Bibliografi	87
	A Kapasitansberegninger	93
A.1	Kapasitiv last på forsterkeren	93
A.2	Kapasitans i transduser	94
	B Dispersjonskurver	95
	C Korrelasjon og konvolusjon	101
	D Dempning	103
	E SPICE modell	105
	F LabView applikasjon	109
	G Derivasjon	111
	Lister over symboler og forkortelser	113
	Figurer	115
	Tabeller	117

Kapittel 1

Innledning

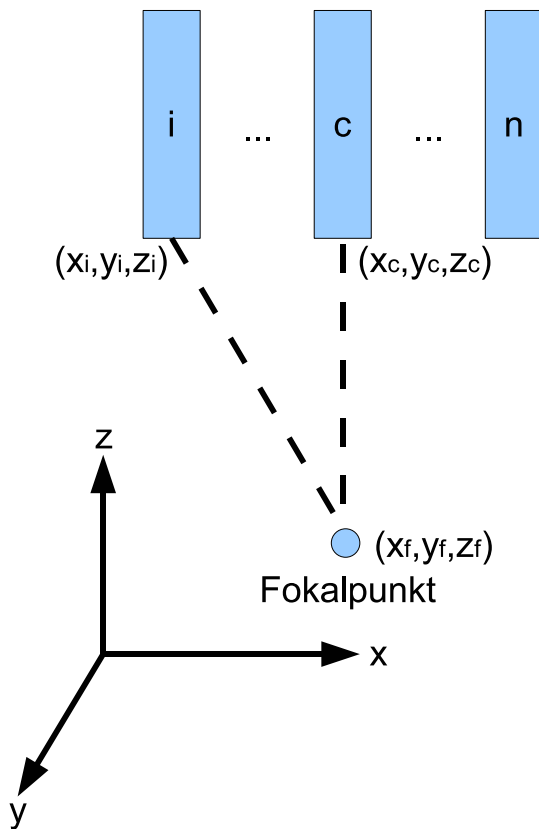
I en rekke applikasjoner innenfor kommunikasjon eller andre bruksområder der overføring av energi i bølgeform er nødvendig, ønsker man å sende et signal fra et punkt A gjennom et medium og fokusere dette mot et punkt B, helst i både tid og rom, slik at effekten overført til punktet er maksimal og båndbredden størst mulig. Dessverre fører fysiske fenomener som f.eks. dispersjon, dempning og spredning til at dette ikke blir optimalt ved normal overføring av signalet. Det finnes flere metoder for å veie opp for slike effekter f.eks. tilpassede (matched) filtere [1, 2] og geometrisk fokusering*. Felles for disse metodene er at de krever en form for beregning av parametere for å kunne fungere. I denne oppgaven ser vi på en forholdsvis ny metode, tidsreversert fokusering [3], og hvordan denne kan motvirke slike fenomener uten at man behøver å utføre kompliserte beregninger i sender- og mottakerutstyret. Oppgaven er knyttet opp til et praktisk eksperiment med ultralyd i en dispersiv elastisk bølgeleder der vi benytter oss av tidsreversering. For å kunne forstå de eksperimentelle resultatene er det også benyttet en del sider innledningsvis i oppgaven til å gjennomgå grunnleggende fysiske prinsipper for overføring av ultralyd. Det fysiske systemet forsøkene utføres i er karakterisert ved hjelp av analytisk teori og numerisk simulering.

Fokusering av ultralydstråler har tradisjonelt sett blitt gjort ved å benytte en matrise av transdusere og styre energien av ultralydbølgene mot et bestemt punkt, enten ved hjelp av akustiske linser, eller ved å avfyre transduserne tidsforsinket slik at disse superposisjonerer i et bestemt område. Begge disse metodene benytter seg av velkjente geometriske formler.

Tidsforsinkelse

I figur 1.1 er det tegnet opp et typisk system der tidsforsinkelse benyttes. Dette er kanskje den mest benyttede metoden for fokusering av lyd og er bl.a. beskrevet i ref. [4, 5]. Ved å benytte relasjonen $t = d/v$, der d er avstand og v er propageringshastigheten, kan vi beregne tida det tar for ultralydbølgen å bevege seg fra hvert enkelt transduserelement og til fokuspunktet. Tida fra et element ved posisjon (x_i, y_i, z_i) til

*Sendere på forskjellige geografiske punkter benyttes til å sende et signal, slik at det superposisjonerer i skjæringspunktet mellom disse.



Figur 1.1: Fokusering av ultralyd fra en matrise med transdusere

fokuspunktet ved (x_f, y_f, z_f) , vil være gitt ved

$$t_i = \frac{1}{v} \sqrt{(x_i - x_f)^2 + (y_i - y_f)^2 + (z_i - z_f)^2}, \quad (1.1)$$

mens tida fra senterelementet (x_c, y_c, z_c) til fokuspunktet vil være

$$t_c = \frac{1}{v} \sqrt{(x_c - x_f)^2 + (y_c - y_f)^2 + (z_c - z_f)^2}. \quad (1.2)$$

Fokus mot et punkt (x_f, y_f, z_f) kan da oppnås ved å tidsforsinke hvert element i , relativt til senterelementet med en tidsforsinkelse Δt_i gitt ved

$$\Delta t_i = t_i - t_c. \quad (1.3)$$

Dersom materialet som bølgen fra den enkelte transduseren må passere mot fokuspunktet har varierende egenskaper (ulik hastighet), kan det føre til ufokuserte bølger som ankommer fokuspunktet for tidlig eller for sent til å superposisjonere i fase. Dessuten forutsetter disse likningene at hver transduser fungerer som en perfekt punktkilde. For aperturer med endelig størrelse vil vi få korreksjoner pga. hovedlober og sidelover [5] på samme måte som for elektromagnetiske antenner. Dette vil kunne føre til at man

må korrigere likningene med en faktor både i forhold til bredden på transduseren og vinkelen i forhold til det ønskede fokuspunktet.

For å lage en avbildning av et område, kan man dele området opp i et rutenett og lage et bilde fra hvert punkt ved å sveipe fokuspunktet over hele rutenettet [6].

Akustiske linser

En annen måte å fokusere ultralyd på er å benytte de samme prinsippene som vi kjenner fra lys. Ved å lage akustiske linser, det vil si geometriske former i materialer der hastigheten er en annen enn i mediet rundt, kan vi få bølgene til å bøye seg i en bestemt retning. Fra lys er vi vant med at en linse med konkav form vil spre lyset, mens en konveks form vil fokusere det mot et punkt. Dette er en konsekvens av at lyset i en glass- eller polymerlinse alltid har lavere hastighet enn det innfallende lyset[†]. For akustiske bølger blir situasjonen en annen. Vi kan gjerne bygge en linse av materialer der hastigheten for akustiske bølger er raskere enn i det opprinnelige mediet. På denne måten kan vi få en konkav og konveks linse til å fungere motsatt av det vi er vant med for lys [6]. Akustiske linser lages gjerne av et materiale som er enkelt å forme som for eksempel epoksy eller termoplast. Akustisk hastighet i slike materialer er gjerne 2000 – 3000 *m/s*. [7], mens hastigheten i medisinsk vev gjerne ligger rundt 1500 *m/s* [8]. For stive materialer som metaller er den akustiske hastigheten typisk høyere, mens den er lavere i gasser [9].

Tidsreversert fokusering

De siste årene [3] er det foreslått å benytte akustiske tidsreverserte speil for å fokusere ultralyd. Metoden går i korthet ut på å sende ut et prøvesignal gjennom mediet for på den måten å få informasjon om transferfunksjonen. Ved å sende det mottatte signalet i retur baklengs vil dette oppheve transferfunksjonens påvirkning av signalet. Et enkelt tankeeksempel som illustrerer metoden er en stein som kastes i vannet. Like etter at steinen treffer vannflaten vil bølger begynne å bre seg utover fra punktet der steinen traff og påvirkes av eventuelle hindringer underveis. Dersom hele seansen filmes [10] og filmen spilles av baklengs, vil man observere at all energien til slutt samles i punktet steinen ble kastet ut i. Det henvises forøvrig til kapittel 4 for ytterligere detaljer om metoden.

Organisering av oppgaven

Denne oppgaven er delt opp i to hoveddeler; en teoridel og en eksperimentell del.

I del I ser vi nærmere på teorien rundt bølgeledere (kapittel 2) og transdusere (kapittel 3). Teorien er tatt med for å gi en fullstendig forståelse av hvordan bølgene vi ser nærmere på i den eksperimentelle delen, oppstår i transduseren og brer seg i bølgelederen. I kapittel 4 ser vi nærmere på teorien bak fenomenet tidsreversering.

Del II gjør en eksperimentell tilnærming til problemet vårt. I kapittel 5 beskriver vi først en referansemotell for systemet vi ønsker å undersøke nærmere. Deretter beskrives to numeriske modeller, som i hovedsak tar for seg teorien presentert i kapitlene

[†]Forutsatt at mediet foran linsa er luft/vakuum.

2 og 3. Til slutt beskrives oppsett og gjennomføring av fysiske forsøk med tidsreverse-
ring i en dispersiv bølgeleder. Resultatene fra de to modellene og forsøkene presenteres
i kapittel 6 og diskuteres i kapittel 7.

Deler av det som er utviklet i forbindelse med oppgaven, kode for modellene og enkelte
beregninger er samlet i en egen tilleggsdel på slutten av oppgaven.

Del I
Teoridel

Kapittel 2

Bølger i elastiske bølgeledere

2.1 Elastiske bølgeledere

Alle faste stoff vil deformeres når de utsettes for en ytre kraft. Dersom stoffet beholder sin opprinnelige form når den ytre kraften fjernes, sier vi at stoffet har elastiske egenskaper [11]. En elastisk bølgeleder er et stoff som kan lede (mekanisk genererte) bølger, men som ikke deformeres permanent av bølgene.

Før vi ser nærmere på de tre hovedtypene av bølger som oppstår i en elastisk bølgeleder; longitudinelle bølger, torsjonsbølger og bøyningsbølger, må vi definere noen sentrale begrep.

2.2 Bølgelikningen

2.2.1 Bølgelikningen i en dimensjon

Den generelle bølgelikningen i en dimensjon uttrykkes som

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

der v^2 er den kvadrerte bølgehastigheten og u er løsningsfunksjonen [12]. Løsningen til denne 2. ordens Partielle Differensiallikningen (PDL), vil være alle funksjoner på formen

$$u(x, t) = f^*(x - vt) + f^*(x + vt), \quad (2.2)$$

der f^* er en funksjon som har kontinuerlig andrederivert. En Fourierrekke kan benyttes til å uttrykke slike løsninger.

2.2.2 Bølgelikningen i flere dimensjoner

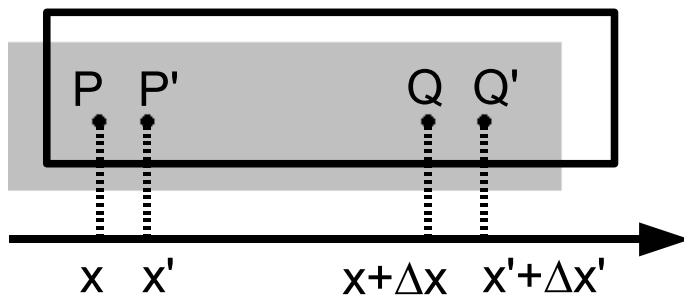
Den generelle bølgelikningen for flere dimensjoner er gitt ved

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 u(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad (2.3)$$

der ∇^2 er en multidimensjonal Laplaceoperator.

2.3 Tøyning (strain)

Når et fast stoff blir utsatt for ytre krefter, vil det oppstå en deformasjon. Dette er vist i figur 2.1, der vi ser på hvordan to punkter, P og Q, som ligger tett opptil hverandre blir påvirket under deformasjonen. Ved å følge utledningene gitt i ref. [13] kan vi definere en relasjon for denne deformasjonen som vi kaller tøyning, S .



Figur 2.1: Endimensjonal deformasjon i et fast stoff.

Punktet P vil etter deformasjonen ha forflyttet seg fra posisjon x til x' , slik at avstanden mellom disse blir

$$u(x) = x' - x.$$

Punktet Q vil ha flyttet seg tilsvarende fra posisjon $(x + \Delta x)$ til $(x' + \Delta x')$, eller

$$u(x + \Delta x) = (x' + \Delta x') - (x + \Delta x) = u(x) + \Delta u(x) \quad (2.4)$$

der $\Delta u(x) = \Delta x' - \Delta x$.

Deformasjonen S kan vi dermed definere som forskyvningen innenfor området Δx ved

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.5)$$

I det romlige tilfellet gjelder de samme utledningene, men vi må erstatte skalaren x , med en vektor $\vec{r}(x, y, z)$. Forskyvningen for punktet P blir da

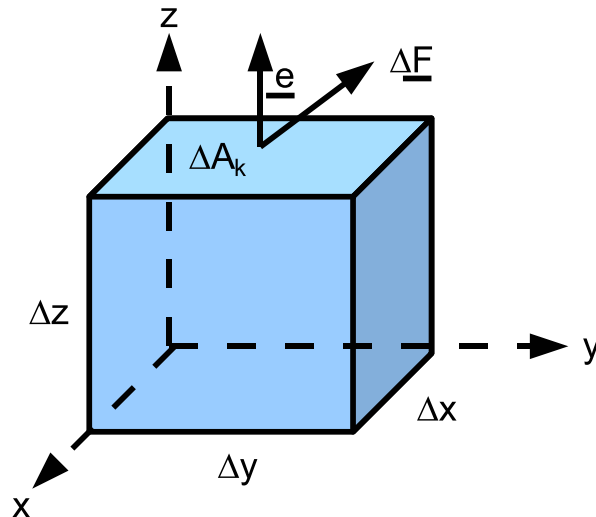
$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{r}' - \vec{r}.$$

I punktet Q får vi

$$\vec{u}(\vec{r} + \Delta \vec{r}) = (\vec{r}' + \Delta \vec{r}') - (\vec{r} + \Delta \vec{r}) = \vec{u}(\vec{r}) + \Delta \vec{u}(\vec{r}).$$

For små utslag kan vi linearisere denne modellen som for komponent i gir

$$\begin{aligned} u_i(\vec{r} + \Delta \vec{r}) &= u_i(\vec{r}) + \Delta u_i(\vec{r}) \\ &= u_i(\vec{r}) + \frac{\partial u_i}{\partial \vec{r}} \Delta \vec{r} = u_i(\vec{r}) + \frac{\partial u_i}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u_i}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u_i}{\partial z} \Delta z. \end{aligned} \quad (2.6)$$



Figur 2.2: Spenninger i et lite kubisk volum som følge av en ytre kraft.

På vektorform kan vi skrive systemet som

$$\begin{pmatrix} u_{x+\Delta x} \\ u_{y+\Delta y} \\ u_{z+\Delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

eller med forkortet notasjon [7] som

$$\vec{u}(\vec{r} + \Delta \vec{r}) = \vec{u}(\vec{r}) + J \Delta \vec{r}. \quad (2.8)$$

Komponentene i matrisa J kan skrives som en sum med symmetriske og asymmetriske ledd, eller

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.9)$$

Tøyningen S angis da som den symmetriske delen av J matrisa. Dermed har vi en S som er invariant både i forhold til translasjon og rotasjon

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.10)$$

2.4 Spenning (stress)

Mekanisk spenning i et materiale er i sin enkleste form definert [11] som

$$T = \frac{F \perp}{A} \quad (2.11)$$

der A er arealet som en normalkraft $F \perp$ virker på.

For å forklare hvordan spenning fungerer, ser vi på et lite kubisk volum, som vist på figur 2.2. Vi lar en liten kraft $\Delta \vec{F}$ virke på en av sideflatene A_k der

$$\Delta \vec{F} = \Delta F_1 \vec{e}_1 + \Delta F_2 \vec{e}_2 + \Delta F_3 \vec{e}_3. \quad (2.12)$$

Stresset som virker på en vilkårlig flate på kuben er da gitt som

$$T_{ik} = \lim_{\Delta A_k \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A_k},$$

og kraften som virker på volumet

$$F_i = \sum \Delta F_i = \sum_k T_{ik} dA_k. \quad (2.13)$$

Vi kan utvide dette til en hvilken som helst flate ved å benytte Gauss lov

$$\vec{F} = \int_s T \cdot \vec{n} ds = \int_v \nabla \cdot T dV. \quad (2.14)$$

Skriver vi om dette uttrykket, får vi

$$\nabla \cdot T = \frac{d\vec{F}}{dV}. \quad (2.15)$$

2.5 Hookes lov

Hookes lov uttrykker den lineære sammenhengen mellom tøyning og spenning. På grunn av lineariteten begrenser sammenhengen seg til små verdier av T og S . En spenning kan imidlertid være så kraftig at tøyningen forblir permanent etter at spenningen ikke lenger er tilstede.

I det endimensjonale tilfellet, kan Hookes lov skrives som

$$T = cS, \quad (2.16)$$

der c er en konstant som beskriver den lineære sammenhengen.

For det tredimensjonale tilfellet vil c generelt være en tensor av fjerde orden. Symmetri kan antas for c fordi både T og S som relateres av c er symmetriske som vist i ref. [7]. Ved symmetri er det derfor vanlig å benytte en forenklet notasjon [7] der c reduseres til en 6 x 6 matrise (tensor av andre orden)

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Koeffisientene i matrisen c er bestemt av egenskapene til materialet. Hookes lov kan nå skrives som

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

der T og S er overført til vektorer i den forenklede notasjonsformen.

2.6 Stivhetstensor for et fast, isotropt stoff

Et isotropt stoff skal ha de samme egenskapene uavhengig av koordinatsystemet det sees relativt til. Dette gir føringer om symmetri, og stivhetstensoren kan forenkles til formen [13]

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Istedenfor å bruke konstantene c_{11} , c_{12} og c_{66} (der kun to av disse er uavhengige) er det vanlig å benytte de såkalte Lamé koeffisientene λ og μ , der sammenhengen er gitt som

$$c_{11} = \lambda + 2\mu \quad (2.20)$$

$$c_{12} = \lambda \quad (2.21)$$

$$c_{66} = \mu. \quad (2.22)$$

Lamé koeffisientene kan videre relateres til andre mye brukte elastiske konstanter som f.eks. Youngs modulus E og Poissons forholdstall η ved [7]

$$\lambda = \frac{E\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)} \quad (2.23)$$

og

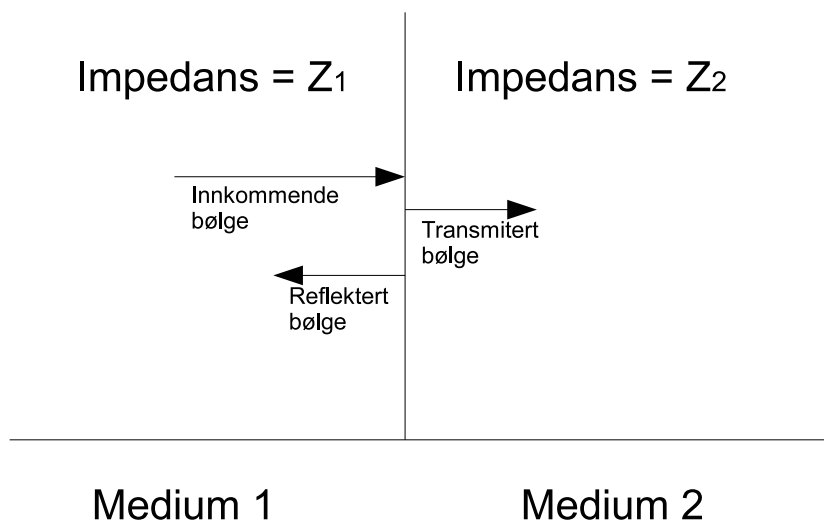
$$\mu = \frac{E}{2(1+\eta)}. \quad (2.24)$$

2.7 Akustisk impedans

Vi innfører begrepet akustisk impedans Z , som er gitt ved de fysiske parametrene ρ (tetthet) og v (hastighet)

$$Z = \rho v. \quad (2.25)$$

Analogt til elektrisitet og Ohms lov, forstår vi at tetthet da må tilsvare spenning, mens hastighet må tilsvare strøm.



Figur 2.3: Refleksjon og transmisjon av akustiske bølger fra en overgang mellom to medier.

2.8 Refleksjon

Det er vanlig å benytte seg av modeller fra transmisjonslinjeteori for elektromagnetiske bølger når man ser på hvordan akustiske bølger transmitteres og reflekteres i overgangen mellom to medier. Fra transmisjonslinjeteorien kjenner vi til begreper som refleksjonskoeffisient og transmisjonskoeffisient. Dette er begreper man også kan benytte for akustiske bølger. I overgangen mellom to medier må det være en kontinuitet i hastigheten. Om det er to faste stoff må dessuten stresset være kontinuerlig gjennom overgangen [7]. Dette gir

$$(v_1 = v_2) \text{ og } (T_1 = T_2).$$

Om man løser ut disse likningene med hensyn på partikkelhastigheten v , kan man sette opp et lineært likningssystem der man til slutt kommer fram til to likninger [5, 7] for refleksjons- og transmisjonskoeffisientene

$$RF = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (2.26)$$

og

$$TF = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (2.27)$$

Disse koeffisientene kan relateres gjennom relasjonen $TF = 1 + RF$.

2.9 Potensialfunksjoner

I en bølgeleder vil bølgene gi opphav til en ganske kompleks dynamikk, der flere ulike bølgemoder og bølgetyper vil eksistere samtidig. Teorien som forklarer disse komplekse

bevegelsene ble presentert av Pochhammer og Chree på 1800 tallet, men fordi løsningene inneholder en rekke Besselfunksjoner har det ikke vært særlig praktisk å utføre beregninger før numeriske løsningsmetoder ble tilgjengelig. I de følgende delkapitlene vil det bli gitt en enkel gjennomgang av teorien presentert i referansene [12, 13, 14, 15, 16]. Denne teorien ender opp med dispersjonsrelasjonen og analytiske uttrykk for de ulike bølgetypene.

For å kunne analysere den komplekse bølgebevegelsen i en bølgeleder analytisk, innfører vi potensialfunksjoner. En potensialfunksjon vil gi oss frihet til å kunne dekode moder i den enkelte retningen (ref. sylindervektorkoordinatsystem), noe vi ikke ville ha mulighet til om vi opererte direkte på forskyvningsfunksjonen u .

Vi innfører en potensialfunksjon ved å bruke Helmholtz dekomposisjon på forskyvningsvektoren \vec{u} , som sier at vektorfeltet kan skrives som en superposisjon av et divergensfritt og irrotasjonelt felt [13]. Dette gir

$$\vec{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \vec{\Psi}, \quad (2.28)$$

der Φ er et skalarpotensial og $\vec{\Psi}$ er et vektorpotensial. Det antas at $\Phi(\vec{x}, t)$ og $\vec{\Psi}(\vec{x}, t)$ er løsninger av henholdsvis bølgelikningene

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{v_L^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \quad (2.29)$$

og

$$\nabla^2\vec{\Psi} = \frac{1}{v_T^2} \frac{\partial^2\vec{\Psi}}{\partial t^2}. \quad (2.30)$$

v_L og v_T står for henholdsvis longitudinell og transversell hastighet. Funksjonene oppfyller også relasjonene $\nabla \times (\nabla\Phi) = 0$ og $\nabla(\nabla \times \vec{\Psi}) = 0$, slik at \vec{u} kan skrives som summen av en divergensfri vektor \vec{u}_T og en irrotasjonell vektor \vec{u}_L , eller

$$\vec{u} = \vec{u}_T + \vec{u}_L. \quad (2.31)$$

2.10 Bølger i en sylindrisk, isotrop bølgeleder

Potensialfunksjonene gir oss mulighet til å analysere hvordan en bølge kan bre seg i en sylindervektorformet bølgeleder. Vi ser på likningene (2.29) og (2.30) og antar en separabel løsning på formen

$$\Phi = f(r)g(\theta)e^{i(\omega t - kz)}.$$

Ved å benytte produktmetoden kan vi løse ut likningen og får to mulige løsninger, først

$$\frac{d^2g(\theta)}{d\theta^2} + n^2g(\theta) = 0, \quad (2.32)$$

der n er et heltall. Likningen gjenkjenner vi som pendellikningen [17], med den generelle løsningen på formen

$$g(\theta) = A_1 \cos(n\theta) + A_2 \sin(n\theta). \quad (2.33)$$

Den andre løsningen kan omskrives til

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} + \left[\left(\frac{\omega^2}{v_L^2} - k^2 \right) f(r) - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right] = 0. \quad (2.34)$$

Denne likningen gjenkjenner vi som den parametriske Bessellikningen [17] av orden n , med generell løsning

$$f(r) = C_1 J_n(\alpha r) + C_2 Y_n(\alpha r). \quad (2.35)$$

Her er C_1 og C_2 generelle konstanter, J_n er en Besselfunksjon av orden n og første type, mens Y_n er en Besselfunksjon av andre type og orden n . Konstanten α må tilfredsstill

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{v_L^2} - k^2}.$$

Siden vi har en massiv sylinder må løsningen være kontinuerlig ved $r = 0$, så løsningen kan bare inneholde en Besselfunksjon av første type (siden en Besselfunksjon av andre type går mot $-\infty$ ved $r = 0$). Likning (2.33) kan skrives som en ren cosinusfunksjon ved å inkludere et faseforskyvningsledd $e^{i(\omega t - kz)}$. Løsningen for Φ kan dermed reduseres til

$$\Phi = A J_n(\alpha r) \cos(n\theta) e^{i(\omega t - kz)}. \quad (2.36)$$

En tilsvarende metode kan benyttes for å finne en løsning for $\vec{\Psi}$, men siden dette er en vektor må vi løse likningen for hver delkomponent. Detaljer for løsning av Laplace kan finnes i ref. [13] - Appendix A. Det kan vises at hver av komponentene må tilfredsstill bølgelikningene

$$\nabla^2 \Psi_z + \frac{\omega^2}{v_T^2} \Psi_z = 0 \quad (2.37a)$$

$$\nabla^2 \Psi_r - \frac{\Psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\omega^2}{v_T^2} \Psi_r = 0 \quad (2.37b)$$

$$\nabla^2 \Psi_\theta - \frac{\Psi_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi_r}{\partial \theta} + \frac{\omega^2}{v_T^2} \Psi_\theta = 0. \quad (2.37c)$$

Likningen for Ψ_z har samme form som likningen for Φ og har derfor tilsvarende løsninger, slik at vi kan skrive

$$\Psi_z = B J_n(\beta r) \cos(n\theta) e^{i(\omega t - kz)}, \quad (2.38)$$

der B er en konstant og β er gitt ved

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega^2}{v_T^2} - k^2}.$$

De to andre komponentene Ψ_r og Ψ_θ må ha løsninger på formen

$$\Psi_r = \psi_r(r) \sin(n\theta) e^{i(\omega t - kz)} \quad (2.39a)$$

$$\Psi_\theta = \psi_\theta(r) \cos(n\theta) e^{i(\omega t - kz)}. \quad (2.39b)$$

Fra likningene (2.37b) og (2.37c) ser vi at den ene løsningen må ha et sinusledd og den andre et cosinusledd for å oppfylle fortegnsskiftet. Ved innsetting av løsningene får vi to nesten identiske likninger som vi kan legge til og trekke fra hverandre, resultatet blir to Bessellikninger,

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{(n+1)^2}{r^2}\right)\right][\psi_r(r) - \psi_\theta(r)] = 0 \quad (2.40)$$

med løsning

$$[\psi_r(r) - \psi_\theta(r)] = 2C_1 J_{n+1}(\beta r), \quad (2.41)$$

og

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{(n-1)^2}{r^2}\right)\right][\psi_r(r) + \psi_\theta(r)] = 0 \quad (2.42)$$

med løsning

$$[\psi_r(r) + \psi_\theta(r)] = 2C_2 J_{n-1}(\beta r). \quad (2.43)$$

Vi løser ut med hensyn på variablene i likning (2.41) og (2.43) og får

$$\psi_r(r) = C_2 J_{n-1}(\beta r) + C_1 J_{n+1}(\beta r) \quad (2.44)$$

$$\psi_\theta(r) = C_2 J_{n-1}(\beta r) - C_1 J_{n+1}(\beta r). \quad (2.45)$$

Det må nå innføres fysiske randbetingelser på problemet. Vi antar at sylindere har frie randbetingelser på overflaten. D.v.s. at stresset på overflaten ($r = a$) må være null ($T_{rr} = T_{rz} = T_{r\theta} = 0$). Siden vi jobber med potensialfunksjoner vil vi få samme resultat uavhengig av hvor vi gjør en måling. Vi velger derfor $C_2 = 0$, som gjør at vi får relasjonen $\psi_r(r) = -\psi_\theta(r)$. Vi ender da opp med fire potensiallikninger som beskriver hvordan bølger brer seg i sylindere

$$\Phi = A J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{Bmatrix} e^{i(\omega t - kz)} \quad (2.46a)$$

$$\Psi_r = C_1 J_{n+1}(\beta r) \begin{Bmatrix} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{Bmatrix} e^{i(\omega t - kz)} \quad (2.46b)$$

$$\Psi_\theta = -C_1 J_{n+1}(\beta r) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{Bmatrix} e^{i(\omega t - kz)} \quad (2.46c)$$

$$\Psi_z = B J_n(\beta r) \begin{Bmatrix} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{Bmatrix} e^{i(\omega t - kz)}. \quad (2.46d)$$

Disse likningene kan beskrive alle de tre hovedtypene av bølger i en sylindrisk bølgeleder og vi skal nå se nærmere på hver enkelt bølgetype.

2.10.1 Longitudinelle bølger

Longitudinelle bølger brer seg som fortettninger langs sylindere lengdeakse. Utslagene i u_r og u_z retningene er de samme for alle vinkler θ . Ved å velge $n = 0$ reduseres likningene i (2.46) til

$$\Phi = A J_0(\alpha r) e^{i(\omega t - kz)} \quad (2.47a)$$

$$\Psi_r = 0 \quad (2.47b)$$

$$\Psi_\theta = -C_1 J_1(\beta r) e^{i(\omega t - kz)} \quad (2.47c)$$

$$\Psi_z = 0. \quad (2.47d)$$

Vi skal se nærmere på hvordan longitudinelle bølger i sylindere kan bre seg. Newtons andre lov benyttes og vi antar at bølgen sendes vinkelrett inn i cylinderen. Bølgelikningen som framkommer blir dermed [14]

$$-\sigma A + \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx\right) A + q A dx = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.48)$$

Vi benytter Hookes lov og får den generelle bølgelikningen for en homogen stav

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.49)$$

som kan omskrives til

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ der } v_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.50)$$

når vi ser bort fra kildeleddet q . Så lenge bølgelengden er større enn diameteren på cylinderen er v_0 en god tilnærming for fasehastigheten. Når bølgelengden blir mindre enn diameteren på cylinderen oppstår det refleksjoner inne i bølgelederen. Vi kan beregne utslaget på bølgebevegelsene som da oppstår ved hjelp av potensialfunksjonene vi nettopp har utledet, relasjonen i likning (2.28) gir sammenhengene

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial z}, \quad (2.51a)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial r}, \quad (2.51b)$$

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r\Psi_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial \Psi_r}{\partial \theta} \right]. \quad (2.51c)$$

Derivasjonsreglene for en Besselfunksjon [17] sier at

$$\frac{d}{dx} [J_p(x)] = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x).$$

Innsatt fra likning (2.47) får vi de longitudinelle utslagene

$$u_r = -[\alpha A J_1(\alpha r) + ik C_1 J_1(\beta r)] e^{i(\omega t - kz)} \quad (2.52a)$$

$$u_z = -[ik A J_0(\alpha r) + \beta C_1 J_0(\beta r)] e^{i(\omega t - kz)}. \quad (2.52b)$$

Dilatasjonen* S er i sylinderkoordinater gitt ved

$$S = \nabla u = \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = -(\alpha^2 + k^2) A J_0(\alpha r) \quad (2.53)$$

På overflaten av cylinderen må stresset fremdeles være null, og i sylinderkoordinater er det gitt som

$$T_{rr} = \lambda S + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (2.54a)$$

$$T_{r\theta} = \mu \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right] \quad (2.54b)$$

$$T_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \quad (2.54c)$$

*Dilatasjon er et uttrykk som beskriver utvidelser, f.eks. i volum.

Ved å sette inn for størrelsene u_r , u_z og S ved overflaten av cylinderen, ($r = a$), og benytte likheten $\lambda(\alpha^2 + k^2) + 2\mu\alpha^2 = \mu(\beta^2 - k^2)$, får vi

$$T_{rr} = [-(\beta^2 - k^2)J_0(\alpha a) + 2\frac{\alpha}{a}J_1(\alpha a)]A + 2ik[-\beta J_0(\beta a) + \frac{1}{a}J_1(\beta a)]C = 0 \quad (2.55a)$$

$$T_{rz} = [2ik\alpha J_1(\alpha a)]A - [(\beta^2 - k^2)J_1(\beta a)]C = 0. \quad (2.55b)$$

Løsningen av likningssystemet finner vi bare når determinanten er null. Dette gir oss Pochhammer - Chrees dispersjonsrelasjon

$$\frac{2\alpha}{a}(\beta^2 + k^2)J_1(\alpha a)J_1(\beta a) - (\beta^2 - k^2)^2 J_0(\alpha a)J_1(\beta a) - 4k^2\alpha\beta J_1(\alpha a)J_0(\beta a) = 0. \quad (2.56)$$

Likning (2.56) avhenger altså av bølgetallet, frekvensen, hastigheten og radiusen. Ref. [18] viser hvordan dispersjonsrelasjonene kan utledes ved å ta utgangspunkt i hastighetsfeltet $\frac{\partial u}{\partial t}$, istedenfor utslaget u . Ref. [12] løser dessuten den generelle determinantlikningen fra likning (2.56) gitt som

$$|a_{ij}| = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.57)$$

der

$$a_{11} = \left\{ \frac{\lambda(\alpha^2 + k^2)(\alpha a)^2}{2\mu\alpha^2} + (\alpha a)^2 - n^2 \right\} J_n(\alpha a) + \alpha a J_n'(\alpha a), \quad (2.58a)$$

$$a_{12} = \{n^2 - (\beta a)^2\} J_n(\beta a) - \beta a J_n'(\beta a), \quad (2.58b)$$

$$a_{13} = 2n\{\beta a J_n'(\beta a) - J_n(\beta a)\}, \quad (2.58c)$$

$$a_{21} = n\alpha a J_n'(\alpha a) - J_n(\alpha a), \quad (2.58d)$$

$$a_{22} = -n\beta a J_n'(\beta a) - J_n(\beta a), \quad (2.58e)$$

$$a_{23} = -2n^2 - (\beta a)^2 J_n(\beta a) + 2\beta a J_n'(\beta a), \quad (2.58f)$$

$$a_{31} = -\alpha a J_n'(\alpha a), \quad (2.58g)$$

$$a_{32} = -\frac{\beta^2 - k^2}{k^2} \beta a J_n'(\beta a), \quad (2.58h)$$

$$a_{33} = n J_n(\beta a). \quad (2.58i)$$

2.10.2 Torsjonsbølger

Begrepet torsjon viser til vridninger i et fast stoff som følge av et kraftmoment. Kraftmomentet fører til skjærespenninger[†]. Torsjonsbølger gir utslag i θ retningen uavhengig av vinkelen θ . På samme måte som for longitudinelle bølger kan vi utlede en dispersjonsrelasjon. Ved å velge $n = 0$ og $C_1 = 0$ får vi

$$\Phi = 0 \quad (2.59a)$$

$$\Psi_r = 0 \quad (2.59b)$$

$$\Psi_\theta = 0 \quad (2.59c)$$

$$\Psi_z = B J_0(\beta r) e^{i(\omega t - kz)}. \quad (2.59d)$$

Ved å benytte likning (2.28) får vi utslaget

$$u_\theta = -B\beta J_1(\beta r) e^{i(\omega t - kz)}. \quad (2.60)$$

Tilsvarende longitudinelle bølger kan det da utledes en dispersjonsrelasjon.

[†]Spenninger parallellt eller tangentielt til overflaten av bølgelederen.

2.10.3 Bøyningsbølger

I motsetning til longitudinelle bølger er bøyningsbølgene ikke aksesymmetriske. Bøyningsbølger gir utslag langs alle sylinderens akser og utslaget er avhengig av både r , θ og z . Løsningene for disse kan skrives som

$$\Phi = AJ_1(\alpha r) \cos \theta \quad (2.61a)$$

$$\Psi_r = C_2 J_2(\beta r) \sin \theta \quad (2.61b)$$

$$\Psi_\theta = -C J_2(\beta r) \cos \theta \quad (2.61c)$$

$$\Psi_z = BJ_1(\beta r) \sin \theta. \quad (2.61d)$$

Benyttes likning (2.28) kan vi skrive

$$u_r = U_r(r) \cos \theta \quad (2.62a)$$

$$u_\theta = U_\theta(r) \sin \theta \quad (2.62b)$$

$$u_z = U_z(r) \cos \theta, \quad (2.62c)$$

når $U_r(r)$, $U_\theta(r)$ og $U_z(r)$ alle er funksjoner som kun avhenger av r . Tilsvarende som for longitudinelle bølger kan det også her nå utledes en dispersjonsrelasjon.

2.10.4 Dispersjonskurver

Som antydnet i forbindelse med utledning av likning (2.56), vil det oppstå dispersjon i en sylinderformet bølgeleder. Figurene 2.4 og 2.5 viser hvilke moder som kan oppstå i en bølgeleder med samme dimensjoner som de benyttet i de eksperimentelle forsøkene i kapittel 7. For detaljer om hvordan kurvene er beregnet og ytterligere figurer henvises det til tillegg B. På figur 2.4 ser vi at tre longitudinelle moder kan propagere, i tillegg kan en rekke torsjons og bøyningsmoder også propagere. Alle utenom den ene av torsjonsmodene er dispersive. At modene framkommer på figurene betyr bare at de kan eksistere i bølgelederen, ikke at de må gjøre det. Hvorvidt modene vil oppstå er avhengig av om de blir eksitert. Dersom en longitudinell transduser benyttes, vil bare de longitudinelle modene propagere, men ujevnheter i materialet eller overgangen mellom transduser og bølgeleder og randeffekter kan føre til at også bøynings eller torsjonsbølger eksiteres.

De tre horisontale linjene antyder fra øverst til nederst karakteristisk dilatasjons-, torsjons- og Rayleighhastighet. Der hastighetene er gitt i ref. [12]. Den karakteristiske dilatasjonshastigheten som

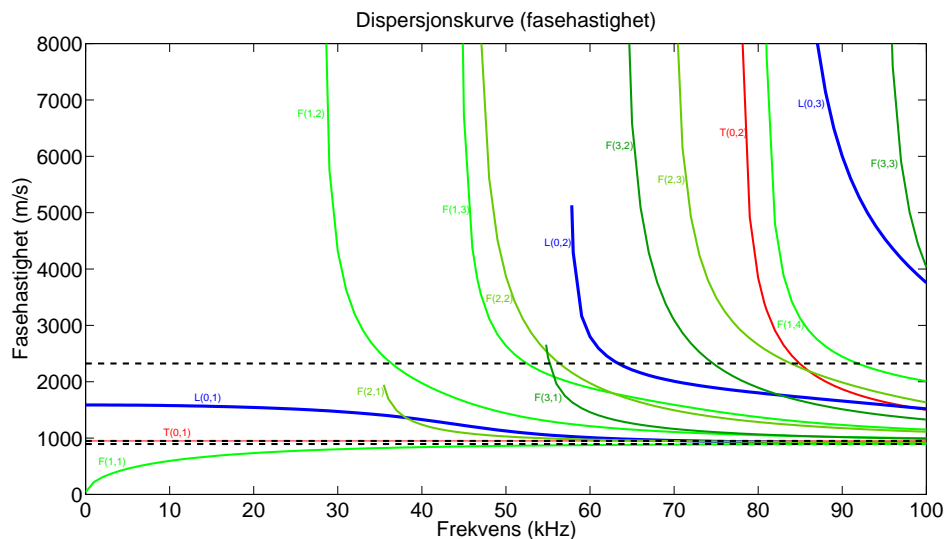
$$v_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \quad (2.63)$$

Torsjonshastigheten derimot er definert som

$$v_2 = \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (2.64)$$

mens Rayleighhastigheten defineres som

$$v_R = \frac{v}{v_2}, \quad (2.65)$$



Figur 2.4: Mulige moder og fasehastigheter i en sylindrerformet stav av PMMA med 10 mm radius. Longitudinelle bølger er merket med L, torsjonsbølger med T, og bøyningsbølger med F tallene i parentes er gitt som (orden,mode). De tre stiplete linjene på figuren antyder fra toppen hhv. dilatasjons-, torsjons- og Rayleighhastighet.

der forholdet v/v_2 finnes ved å løse ut røttene av likning (2.66)

$$\frac{v^2}{v_2^2} \left\{ \left(\frac{v}{v_2} \right)^6 - 8 \left(\frac{v}{v_2} \right)^4 + (24 - 16K^{-2}) \left(\frac{v}{v_2} \right)^2 - 16(1 - K^{-2}) \right\} = 0, \quad (2.66)$$

der K er kompresjonsmodulusen og v er fasehastigheten som den første longitudinelle moden har ved lave frekvenser. K kan relateres til Poissons forholdstall ved

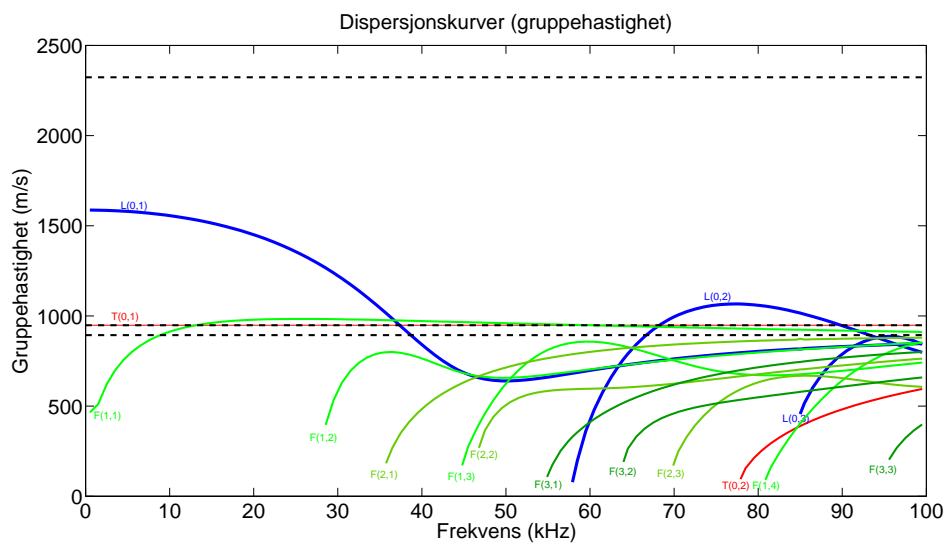
$$K^2 = \frac{2(1 - \eta)}{(1 - 2\eta)},$$

og v er gitt ved relasjonen

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2.67)$$

Ved høyere frekvenser nærmer den første longitudinelle moden seg imidlertid Rayleighhastigheten.

Figur 2.5 viser tilsvarende gruppehastighet for de samme modene som vist på figur 2.4. Vi ser at gruppehastigheten for longitudinelle bølger nærmer seg Rayleighhastigheten ved høye frekvenser og at den første torsjonsmoden ikke er dispersiv.



Figur 2.5: Mulige moder og gruppehastigheter i en sylindrerformet stav av PMMA med 10 mm radius. Longitudinelle bølger er merket med L, torsjonsbølger med T, og bøyingsbølger med F tallene i parentes er gitt som (orden,mode). De stiplede linjene har samme betydning som i figur 2.4.

Kapittel 3

Piezoelektriske transdusere

En transduser defineres som en innretning som kan omdanne en energiform til en annen. På tilsvarende måte defineres en sensor som en enhet som kan omdanne en fysisk parameter til et elektrisk signal og en aktuator som en enhet som kan konvertere et elektrisk signal til en fysisk parameter [19]. Transdusere lages hovedsakelig av fire hovedtyper materialer, nemlig krystaller, keramer, polymerer og halvledere [20].

3.1 Piezoelektriske materialer

Piezoelektriske materialer, er materialer som har den egenskapen at de ved mekanisk deformasjon skaper en elektrisk spenning og motsatt deformeres når en spenning påtrykkes. Det eksisterer altså en kobling mellom de elastiske og de elektriske egenskapene ved mediet. Den piezoelektriske effekten ble oppdaget av brødrene Curie i 1880 [6].

For å kunne gi en god forklaring på den piezoelektriske effekten, må vi gå tilbake til Gauss lov

$$Q_{fri} = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}. \quad (3.1)$$

På differensialform kan Gauss lov skrives som

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (3.2)$$

for det flerdimensjonale tilfellet, eller som

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial x} = 0 \quad (3.3)$$

for det endimensjonale tilfellet. Her er den elektriske forskyvningsvektoren

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

der \vec{E} er den permanente dielektriske effekten i materialet, \vec{P} er en ekstra polarisering fra elastisk bevegelse i materialet og ϵ_0 er permittiviteten i vakuum. Merk at variabelen E her uttrykker et elektrisk felt, mens den en del andre steder i oppgaven

er benyttet til å uttrykke Youngs modulus.

Notasjonsformen ϵ^S , brukes gjerne for å beskrive permittiviteten ved konstant eller ingen tøyning [7]. Om vi går ut fra at de mekaniske og elektriske utslagene er små, kan vi anta at polariseringen er lineært avhengig av tøyningen S , eller

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} = eS .$$

Konstanten e kalles den piezoelektrisk spenningskonstanten, slik at vi kan skrive forskyvningen som

$$D = \epsilon^S E + eS . \quad (3.4)$$

Videre har vi en liknende relasjon for spenningen

$$T = c^E S - eE \quad (3.5)$$

der c^E er stivhetstensoren når det elektriske feltet er null eller konstant.

Her er D og E elektriske variabler, mens T og S er mekaniske variabler og sammenhengen mellom disse er gitt ved likningene (3.4) og (3.5).

Innsatt i Gauss lov (3.3) gir likning (3.4)

$$\frac{\partial}{\partial x} [\epsilon^S E + eS] = 0 . \quad (3.6)$$

For at Gauss lov skal oppfylles, ser vi at den endimensjonale modellen krever at \vec{D} må være konstant i hele området. Løsningen av Gauss lov forteller oss dessuten at forskyvningen vil tilsvare en tetthet av frie ladninger σ_{fri} , gitt ved

$$\epsilon^S E + eS = \sigma_{fri} . \quad (3.7)$$

Bytter vi rundt på likning (3.7) og setter inn i likning (3.3) gir det oss relasjonen

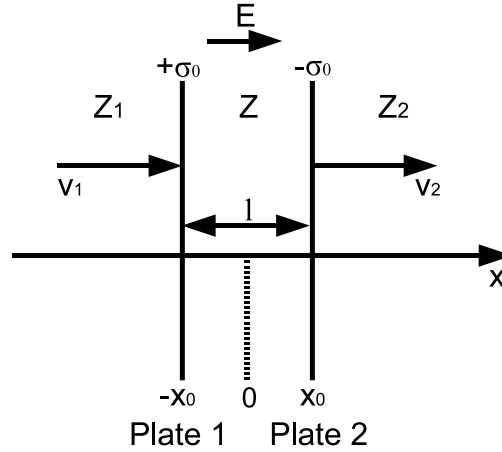
$$T = c^E S - e \left(\frac{\sigma_{fri}}{\epsilon^S} - \frac{eS}{\epsilon^S} \right) = c^E \left(1 + \frac{e^2}{c^E \epsilon^S} \right) S - \frac{e}{\epsilon^S} \sigma_{fri} = c^D S - h \sigma_{fri} , \quad (3.8)$$

der c^D er elektrisitetetskonstanten der det er tatt hensyn til den piezoelektriske effekten og h er en transmisjonskonstant.

Likning (3.8) inneholder en annen viktig størrelse, nemlig den piezoelektriske koblingsfaktoren [7]

$$K^2 = \frac{e^2}{c^E \epsilon^S} . \quad (3.9)$$

Dette er en dimensjonsløs størrelse som måler i hvilken grad de elastiske og elektriske egenskapene er koblet til hverandre. Denne faktoren framkommer bare når vi antar at forskyvningen D er null.



Figur 3.1: Bølger i en piezoelektrisk transduser.

3.2 Bølgemodell for transduser

Inne i transduseren kan bølger bre seg i begge retninger mellom platene. På utsiden av transduseren vil bølgene bare bevege seg ut fra transduseren hvis vi ser bort fra reflekterende lag. En slik forenklet modell er vist på figur 3.1. Vi benytter en generell løsning av bølgelikningen og ser bort fra den tidsharmoniske delen av bølgen, slik at hastigheten på bølgen kan skrives som

$$v = ae^{-ikx} + be^{ikx}. \quad (3.10)$$

Den mekaniske spenningen inne i transduseren kan dermed skrives som

$$T = -Zae^{-ikx} + Zbe^{ikx} - h\sigma_0 \quad (3.11)$$

der $h\sigma_0$ er et kildeledd som tilsvare det vi finner i likning (3.8).

For en transduser må hastigheten være en kontinuerlig størrelse gjennom transduserveggen. Spenningen (stresset) på randen av transduseren er dessuten gitt ved

$$T(x = -x_0) = Z_1v_1 \rightarrow Z_1(ae^{ikx_0} + be^{-ikx_0}) = -Zae^{ikx_0} + Zbe^{-ikx_0} - h\sigma_0 \quad (3.12a)$$

$$T(x = x_0) = -Z_2v_2 \rightarrow Z_2(ae^{-ikx_0} + be^{ikx_0}) = -Zae^{-ikx_0} + Zbe^{ikx_0} - h\sigma_0. \quad (3.12b)$$

Løser vi randbetingelsene med hensyn på amplitudene a og b får vi for likning (3.12a) løsningen

$$-a + \frac{Z - Z_1}{Z + Z_1}e^{-2ikx_0}b = \frac{1}{Z + Z_1}e^{-ikx_0}h\sigma_0. \quad (3.13)$$

Ved å innføre en hjelpestørrelse

$$R_1 = \frac{Z - Z_1}{Z + Z_1}e^{-2ikx_0},$$

kan likningen skrives som

$$-a + R_1b = \frac{1}{Z + Z_1}e^{-ikx_0}h\sigma_0. \quad (3.14)$$

Den andre randbetingelsen gitt i likning (3.12b) fører til likningssystemet

$$-a \frac{Z - Z_2}{Z + Z_2} e^{-2ikx_0} + b = \frac{1}{Z + Z_2} e^{-ikx_0} h\sigma_0, \quad (3.15)$$

Innfører vi hjelpestørrelsen R_2 , definert som

$$R_2 = \frac{Z - Z_2}{Z + Z_2} e^{-2ikx_0}$$

får vi

$$-R_2 a + b = \frac{1}{Z + Z_2} e^{-ikx_0} h\sigma_0. \quad (3.16)$$

Likningssystemet gitt ved likningene (3.14) og (3.16) gir oss

$$v_1 = \frac{-h\sigma_0}{2Z} T'_1 \frac{1}{1 - R'_1 R'_2} [1 - T'_2 e^{-2ikx_0} - R'_2 e^{-4ikx_0}] \quad (3.17a)$$

$$v_2 = \frac{-h\sigma_0}{2Z} T'_2 \frac{1}{1 - R'_1 R'_2} [1 - T'_1 e^{-2ikx_0} - R'_1 e^{-4ikx_0}] \quad (3.17b)$$

der konstantene som inngår er definert som

$$R'_1 = -\frac{Z - Z_1}{Z + Z_1}$$

$$R'_2 = \frac{Z - Z_2}{Z + Z_2}$$

$$T'_1 = -\frac{2Z}{Z + Z_1} = 1 - R'_1$$

$$T'_2 = -\frac{2Z}{Z + Z_2} = 1 - R'_2.$$

Merk at T' ikke henspeiler på mekanisk spenning (stress) T , men er en transmisjonskoeffisient.

3.2.1 Spesialtilfelle - transduser mot luft

Likningene over beskriver hvordan hastigheten på transduserveggen varierer som en funksjon av tid når denne kobles mot vilkårlige impedanser Z_1 og Z_2 som vist i figur 3.1. Vi har senere benyttet transduser som på den ene siden (plate 1) ligger mot luft, mens de på den andre siden (plate 2) er limt fast til et isotropt materiale som har omlag samme karakteristiske impedans som transduseren. Dette kan tilnærmes som spesialbetingelsene $Z_1 = 0$ og $Z_2 = Z$. Refleksjons og transmisjonskoeffisientene i hastighetslikningen blir dermed $R'_1 = -1$, $R'_2 = 0$, $T'_1 = 2$ og $T'_2 = 1$.

Ved å sette disse koeffisientene inn i likning (3.17) får vi hastighetslikningene*

$$v_1^0 = -\frac{h\sigma_0}{Z} [1 - e^{-2ikx_0}] \quad (3.18a)$$

$$v_2^0 = \frac{1}{2} \frac{h\sigma_0}{Z} [1 - 2e^{-2ikx_0} + e^{4ikx_0}]. \quad (3.18b)$$

*0 og ∞ benyttes som indekser oppe for å henvise til hhv. ingen og uendelig akustisk impedans på plate 1.

Løsningen i Fourierrommet

Videre kan vi benytte en dispersjonsrelasjon for å omforme uttrykkene til frekvensdomenet. Denne er gitt ved

$$k = \frac{\omega}{v_0},$$

der v_0 er bølgens fasehastighet mellom platene. Fasehastigheten kan relateres til tiden Δt det tar for en bølge å bevege seg mellom platene (avstand $l = 2x_0$) gjennom

$$\Delta t = \frac{l}{v_0}. \quad (3.19)$$

Dessuten kan vi relatere ladningstettheten σ_0 til en spenning U ved å benytte kondensatorlikningen $Q = C/U$. Når A er arealet av platene gir denne oss

$$\sigma_0 = \frac{Q}{A} = \frac{\epsilon A}{Al} U = \frac{\epsilon}{l} U. \quad (3.20)$$

Fra ref. [7] har vi dessuten at transmisjonskonstanten h for longitudinelle bølger er gitt som

$$h = \frac{e_{33}}{\epsilon S}. \quad (3.21)$$

Dermed kan vi skrive resultatet som

$$v_1^0(\omega) = -\frac{e_{33}}{Zl} [1 - e^{-i\Delta t\omega}] U(\omega) \quad (3.22a)$$

$$v_2^0(\omega) = \frac{1}{2} \frac{e_{33}}{Zl} [1 - 2e^{-i\Delta t\omega} + e^{-i2\Delta t\omega}] U(\omega). \quad (3.22b)$$

Vi gjenkjenner $e^{-i\Delta t\omega}$ leddene som forsinkelsesledd og gjør en invers Fouriertransform for å få resultatet i tidsdomenet. Dette gir oss hastighetene som en funksjon av tid og spenning

$$v_1(t)^0 = -\frac{e_{33}}{Zl} [U(t) - U(t - \Delta t)] \quad (3.23a)$$

$$v_2(t)^0 = \frac{1}{2} \frac{e_{33}}{Zl} [U(t) - 2U(t - \Delta t) + U(t - 2\Delta t)]. \quad (3.23b)$$

3.2.2 Spesialtilfelle - transduser mot metall

Et annet spesialtilfelle som også blir testet ut i den eksperimentelle delen, er at transduserne på den ene siden (plate 1) ligger mot et materiale med stor akustisk impedans (f.eks. et metall). Den andre siden (plate 2) er limt fast til et isotropt materiale som har omlag samme karakteristiske impedans som transduseren. Dette gir spesialbetingelsene $Z_1 = \infty$ og $Z_2 = Z$. Refleksjons og transmisjonskoeffisientene i hastighetslikningen blir dermed $R'_1 = 1$, $R'_2 = 0$, $T'_1 = 0$ og $T'_2 = 1$.

Innsatt i likning (3.17) gir dette hastighetslikningene

$$v_1^\infty = 0 \quad (3.24a)$$

$$v_2^\infty = \frac{1}{2} \frac{h\sigma_0}{Z} [1 - e^{4ikx_0}], \quad (3.24b)$$

eller som funksjon av elektrisk spenning i det fysiske rommet,

$$v_1^\infty(t) = 0 \quad (3.25a)$$

$$v_2^\infty(t) = \frac{1}{2} \frac{e_{33}}{Zl} [U(t) - U(t - 2\Delta t)]. \quad (3.25b)$$

3.3 Derivasjon i transdusere

Fra likning (3.19) ser vi at Δt i likning (3.23) kan uttrykkes som tykkelsen av transduseren på hastigheten i transduseren. Hvis vi i tillegg legger til Δt og Δt^{-1} under brøkstreken og antar at denne størrelsen nærmer seg null, vil vi få et uttrykk som likner definisjonen for henholdsvis den deriverte og andrederiverte [21, 22]. Dette er en gyldig approksimasjon så lenge bølgelengden er vesentlig større enn avstanden mellom platene ($\lambda \gg l$). Detaljer vedrørende uttrykk for den deriverte (til og med fjerde orden) er angitt i tillegg G. En omforming av likning (3.23) gir dermed

$$v_1^0(t) = \frac{-e_{33}}{Zv_0} \frac{[U(t) - U(t - \Delta t)]}{\Delta t} \quad (3.26a)$$

$$v_2^0(t) = \frac{1}{2} \frac{e_{33}}{Z \frac{v_0^2}{l}} \frac{[U(t) - 2U(t - \Delta t) + U(t - 2\Delta t)]}{\Delta t^2}. \quad (3.26b)$$

Når vi lar Δt gå mot null (langbølgetilnærming), kan vi benytte definisjonen for den deriverte og dobbeltderiverte slik at vi får

$$v_1^0(t) \simeq \frac{-e_{33}}{Zv_0} U_t \quad (3.27a)$$

$$v_2^0(t) \simeq \frac{1}{2} \frac{e_{33}}{Z \frac{v_0^2}{l}} U_{tt}. \quad (3.27b)$$

Vi kan benytte samme resonnement for en transduser som ligger mot et materiale med stor akustisk impedans som i likning (3.25). Dette gir

$$v_1^\infty(t) = 0 \quad (3.28a)$$

$$v_2^\infty(t) = \frac{e_{33}}{Zv_0} \frac{[U(t) - U(t - 2\Delta t)]}{2\Delta t}. \quad (3.28b)$$

Lar vi $2\Delta t = 2l/v_0$ gå mot null får vi igjen en derivasjon, slik at vi kan skrive

$$v_1^\infty(t) = 0 \quad (3.29a)$$

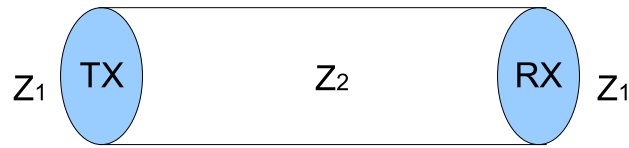
$$v_2^\infty(t) \simeq \frac{e_{33}}{Zv_0} U_t. \quad (3.29b)$$

Endimensjonal modell

La oss nå tenke oss en endimensjonal modell der vi sender et signal fra en transduser (TX) til en annen (RX) som vist i figur 3.2. Vi antar at bølgen kan passere uforstyrret mellom transduserne. For en transduser som ligger mot luft ($Z_1 = 0$) kan strømtettheten for tilstrekkelig lange bølgelengder da uttrykkes som

$$J^0(t) \approx \frac{e_{33}}{l} [v_2^0(t)] \approx \left(\frac{l}{v_0}\right)^2 \frac{e_{33}^2}{2Zv_0^2} U_{tttt}(t'), \quad (3.30)$$

der t' er tiden det tar å bevege seg fra sender- til mottakertransduseren. Det første leddet går mot null når hastigheten i transdusermaterialet er stor og avstanden mellom platene i transduseren liten, dermed blir amplituden på dette signalet svært liten. Det mottatte signalet er dessuten den fjerdederiverte av det opprinnelige.



Figur 3.2: Et system med to transdusere (i blått), en sendertransduser (TX) og en mottakertransduser (RX) med et medie med impedans Z_2 mellom seg.

For transdusere med stor impedans på baksiden ($Z_1 = \infty$), kan strømtettheten uttrykkes som

$$\begin{aligned} J^\infty(t) &\approx \frac{e_{33}}{l} [v_2^\infty(t)] \\ &\approx \frac{e_{33}^2}{Zlv_0} \frac{[U(t) - 2U(t - 2\Delta t) + U(t - 4\Delta t)]}{(\frac{v_0}{2l})(2\Delta t)^2} \approx \frac{2e_{33}^2}{Zv_0^2} U_{tt}(t'). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dette stemmer overens med resultatene presentert i ref. [23]. Her finnes det ingen ledd som går mot null, og amplituden blir dermed større for et system med stor akustisk impedans bak transduserne enn et system der transduserne ligger fritt.

Dersom transduseren er koblet til en forsterker, kan strømtettheten relateres til en spenning $U_r(t)$ ved å multiplisere med transduserens areal A og inngangsimpedansen R på forsterkeren.

$$U_r(t) = RJA. \quad (3.32)$$

Kapittel 4

Tidsreversering

Som nevnt i innledningen kan tidsreversering enkelt forklares ved å tenke seg et bølgeproblem som filmes og at filmen deretter spilles av baklengs. I dette kapitlet skal vi gå nærmere inn på hvordan tidsreversering fungerer, nevne noen mulige bruksområder og presentere en del av den teorien som finnes om emnet. I tillegg skal vi se nærmere på hvordan derivasjonsoperatoren fungerer under tidsreversering.

Tidsreversering er et viktig emne innenfor klassisk fysikk, men særlig viktig i kvantefysikken [24]. CPT-teoremet (Charge, Parity and Time Reversal symmetri) er et kjent teorem i partikkelfysikk. Teoremet sier at [25, 26] produktet av C (partikkel eller antipartikkel), P (høyre eller venstre) og T (fortid eller framtid) alltid vil være bevart. Dette gir opphav til ideen om at det kan eksistere en parallellverden med antipartikler. Ved partikkelakseleratorer som CERN eller SLAC ved Stanford er forsøk for å bevise eller motbevise CPT teoremet en viktig del av forskningen [27],[28]. Vi skal ikke gå mer i detalj på partikkel- eller kvantefysikk, eller hvorvidt tid er relativ eller faktisk kan gå baklengs i denne oppgaven, men heller konsentrere oss om hvilke praktiske anvendelser vi kan få av tidsinvariansen* som eksisterer i flere av likningene som beskriver vår fysiske virkelighet.

4.1 Tidsreversert transformasjon

Fysikken bak tidsreversering er grundig behandlet i ref. [24] som blant annet ser nærmere på hvordan den tidsreverserte transformasjonen fungerer.

Den tidsreverserte transformasjonen T er gitt ved

$$T : t \rightarrow t' = -t. \quad (4.1)$$

Tilsvarende kan hastighetsreversering defineres som

$$T : \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dx'}{dt} = -\frac{dx}{dt} \quad (4.2)$$

*Det faktum at likningene ville fungert like godt om fortegnet for tida var snudd.

eller

$$T : v \rightarrow v' = -v. \quad (4.3)$$

Tidsreversering er først og fremst et resultat av konvensjoner i likningssystemene vi benytter. På tross av dette, gir det oss likevel en del praktiske muligheter, siden det åpner opp for to gyldige løsninger av en rekke likninger basert på blant annet Newtons lover, deriblant bølgelikningen. Dette er altså to løsninger, en "normalløsning" og en tidsreversert løsning, som begge er gyldige. Løsningene av disse likningene beskriver de lovlige bevegelsene i systemet. Det vil si at vi ikke i prinsippet kan skille fra hverandre to systemer der tida går den ene eller andre veien, siden fortegnet på hastighet er en konvensjon som er definert ut fra et relativt system.

Kinematikk er bevegelser vi kan observere i et system. Ordet kinematikk kommer fra det greske ordet for bevegelse, kinema. *Dynamikk* er årsaken til at vi observerer bevegelser i systemet vårt [11]. Kinematikken kan altså brukes til å si noe om bevegelsene i et dynamisk system. La oss se hva som hender med en punktmasse som beveger seg med konstant hastighet[†] som utsettes for transformasjonen T .

Newtons andre lov gir oss

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ma = F = 0. \quad (4.4)$$

I et nytt system etter transformasjonene T og P (som gjerne kan benyttes sammen) i tid og rom gitt som

$$T : t \rightarrow \tau$$

og

$$P : x \rightarrow \xi,$$

må fremdeles likning (4.4) være på formen

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = 0. \quad (4.5)$$

Transformasjon i det romlige domenet

Før vi går videre og ser på transformasjonen T , ser vi først på hvordan den mer kjente romlige transformasjonen P oppfører seg. Gitt at $t \equiv \tau$ definerer vi en romlig transformasjon

$$x_i \rightarrow \xi_i = \sum_j a_{ij}x_j + b_i + c_it. \quad (4.6)$$

der $i = 1, 2, 3$ svarer til de tre romlige dimensjonene. Det første leddet kan føre til rotasjon av aksene i forhold til det opprinnelige koordinatsystemet. Det andre leddet svarer til et skifte av origo i forhold til det opprinnelige systemet, mens det siste leddet vil svare til et koordinatsystem som beveger seg med en hastighet relativt til det opprinnelige systemet. Slike transformasjonslikninger for posisjon, hastighet og akselerasjon mellom koordinatsystemer kalles gjerne Galileiske transformasjoner [11].

Vi kan se nærmere på noen spesialtilfeller.

[†]Kinematisk bevegelse, ingen ytre krefter påvirker massen.

1. $a_{ij} = I, c_i = 0, b = [x_1, x_2, x_3]$

Når det første leddet tilsvarende identitetsmatrisa I , og det siste leddet er null, vil transformasjonen kun føre til en forflytning av origo tilsvarende hva det andre leddet beskriver.

2. $a_{ij} = I, c_i \neq 0$

Når det tredje leddet ikke er null, vil det føre til at koordinatsystemene beveger seg med en hastighet relativt til hverandre.

3. $\det(a_{ij}) = 1, (\text{ortogonal})$

Fører til akserotasjon i forhold til det opprinnelige systemet.

4. $a_{ij} = -I$

Denne transformasjonen er en romlig reversering eller speiling, som vi kan kalle P .

$$P : x \rightarrow -x. \quad (4.7)$$

5. $\det(a_{ij}) \neq 0$

Alle slike former vil føre til en skalering av aksene relativt til det opprinnelige systemet med unntak av tilfelle 3.

Transformasjon i tidsdomenet

La oss nå se på hvordan vi kan definere en transformasjon for tidsdomenet. Gitt at $\xi = x$, setter vi dette inn i likningene (4.4) og (4.5) og bytter rundt, får vi at

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = 0 = \frac{d^2x}{dx^2}. \quad (4.8)$$

Gyldige transformasjoner vil dermed være på formen

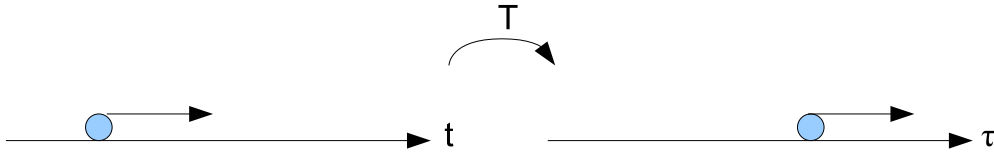
$$T : t \rightarrow \tau = At + B, \quad (4.9)$$

der det første leddet svarer til en tidsdilatasjon, mens det andre leddet kun justerer starttidspunktet (origo) relativt mellom de to systemene. Dersom A er en positiv konstant har vi vanlig tidsdilatasjon. Men dersom A er en negativ konstant, vil vi få tidsreversering. De to mulige utfallene er skissert på figurene 4.1 og 4.2.

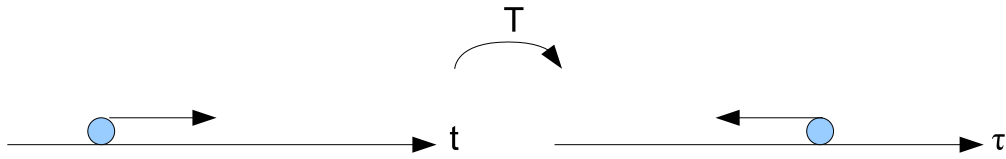
4.2 Tidsreversering

En av de første som har sett på tidsreversering i praktisk bruk er Matias Fink. I ref. [3] tar Fink for seg basisprinsippene for tidsreversering i ultralyd, mens i ref. [29] vises eksperimentelle resultater fra forsøk med ultralyd. For å forstå tidsreversering, må vi gå tilbake til bølgelikningen. Tidsreversering er nemlig et fenomen som oppstår når man løser bølgelikningen i sin generelle form. Det viser seg at en hvilken som helst løsning av bølgelikningen $u(x,t)$ vil ha en tvillingløsning $u(x,-t)$. Den enkleste måten å vise dette på er ved å sette inn løsningene i d'Alemberts formel [14]

$$u(x, t) = F(x - vt) + G(x + vt) \quad (4.10)$$



Figur 4.1: Tidsdilatasjon mellom to koordinatsystemer.



Figur 4.2: Tidsreversert dilatasjon

$$u(x, -t) = F(x - v(-t)) + G(x + v(-t)) = F(x + vt) + G(x - vt). \quad (4.11)$$

Vi ser at på tross av ulikt utgangspunkt, ender vi opp med å få samme type løsning (en sum av to enkle bølger).

Tidsreversering for Newtons lov kan enkelt vises ved å sette inn $-t$ for t og se at fortegnet oppheves [4] og at vi ender opp med den opprinnelige likningen

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{d(-t)^2} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{d(-1)^2 t^2} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}. \quad (4.12)$$

For en generell udempet akustisk bølge er også tidsreversering gyldig, vi får

$$\rho \nabla \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial (-1)^2 (t)^2}. \quad (4.13)$$

For en dempet bølge, som f.eks i likning (4.14)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v_0^2} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} \neq \frac{1}{v_0^2} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial (-1)^2 (t)^2} - \tau \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial (-t)} \quad (4.14)$$

som beskriver bølgepropagering i en termoviskøs modell [5], blir situasjonen annerledes. En bølge med demping har et oddederivert tidsledd som fører til at vi ikke har et system som er tidsinvariant[‡]. I alle fysiske systemer har vi slike dempningsledd som får oss til å miste energi til omgivelsene. Dette betyr i så fall at tidsreversering er en umulighet i praktiske systemer. Det viser seg likevel at teorien er anvendbar, fordi

[‡]Alle ledd må ende opp med samme fortegn på tidsleddet ved innsetting av $-t$ for tida.

dempningen i mange tilfeller er så liten at vi kan se bort fra den [3]. Det er lett å trekke den konklusjonen at tidsreversering er en effekt av at vi har en andrederivert av tiden tilstede. Ref. [4] viser imidlertid at tidsreversering også er gyldig for Maxwells likninger for E og B felt, der kun den førstederiverte av tida opptrer. Det vises også at Schrødingers likning er tidsinvariant og at tidsreversering også er gyldig for ikke-lineære systemer. Dette betyr at en mulig tidsreversering er knyttet opp mot de fysiske egenskapene til modellen, f.eks. om denne er irreversibel eller ikke.

4.2.1 Tidsreversering i et LTI system

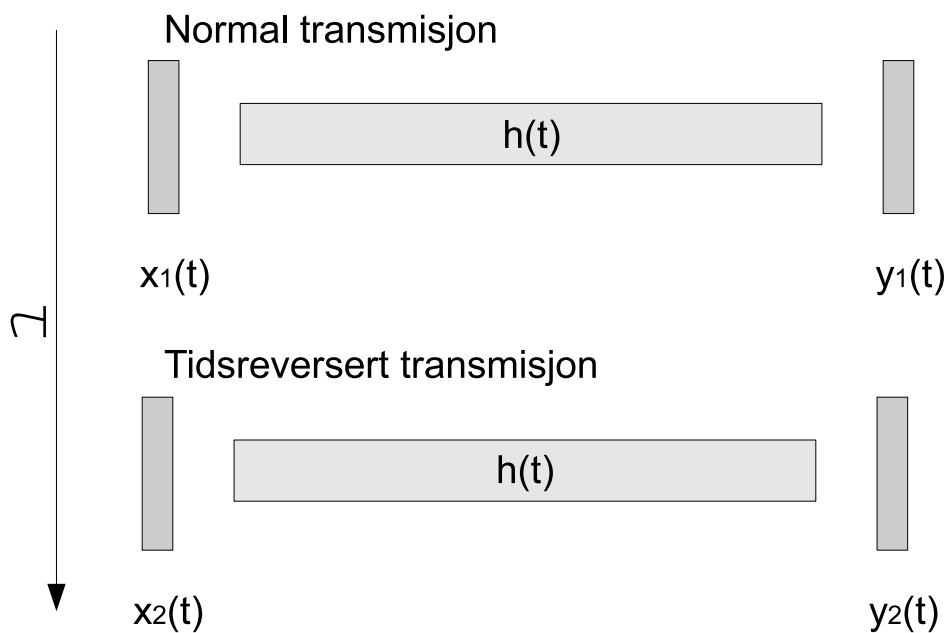
Tidsreversering kan beskrives i et Lineært TidsInvariant (LTI) system. I figur 4.3 er det vist et slikt system, der man antar at det sendes ut et signal $x_1(t)$. På utgangen av systemet vil vi da motta signalet $y_1(t)$ som er konvolusjonen mellom systemets transferfunksjon og det innsendte signalet

$$y_1(t) = h(t) * x_1(t). \quad (4.15)$$

Etter en forsinkelse τ sender vi inn et nytt signal $x_2(t)$ i systemet. Vi lar det innsendte signalet være det tidsreverserte signalet vi mottok etter den første transmisjonen, slik av $x_2(t) = y_1(\tau - t)$. Om vi setter inn for $y_1(t)$ gir dette oss

$$y_2(t) = h(t) * x_2(t) = h(t) * y_1(\tau - t) = [h(t) * h(\tau - t)] * x_1(\tau - t). \quad (4.16)$$

Vi kaller konvolusjonen $h(t) * h(\tau - t)$ for $g(t)$. Da kan likning (4.16) skrives som



Figur 4.3: Tidsreversert transmisjon i et LTI-system.

$$y_2(t) = x_1(\tau - t) * g(t). \quad (4.17)$$

Som vist i vedlegg C er da $g(t)$ ikke noe annet enn autokorrelasjon av transferfunksjonen $h(t)$. En av egenskapene ved auto- og krysskorrelasjon i et LTI system er at den alltid har sitt maksimum når forsinkelsen er null[§] [30]. I det videre eksempelet ser vi derfor på en idealisert situasjon der autokorrelasjonen er en deltafunksjon. Gitt at $g(t)$ er $\delta(\tau - t)$, kan vi skrive (4.16) som

$$y_2(t) = x_1(\tau - t) * \delta(\tau - t) = x_1(\tau - t) . \quad (4.18)$$

Vi står igjen med det tidsreverserte opprinnelige sendte signalet på mottakersiden.

Vi skal videre se på hva som hender om vi introduserer et støysignal på mottakersiden, vi antar at støyen er normalfordelt. Nå tenker vi oss at vi sender ut et signal $x_1(t)$, dette konvolueres med transferfunksjonen og støyen $n_1(t)$ adderes, så vi ender opp med

$$y_1(t) = h(t) * x_1(t) + n_1(t) . \quad (4.19)$$

Vi forsinket og tidsreverserer signalet igjen, vi antar også at ny støy, $n_2(t)$, adderes når signalet retransmitteres, så vi ender opp med

$$\begin{aligned} y_2(t) &= [h(t) * x_2(t)] + n_2(t) = [h(t) * y_1(\tau - t)] + n_2(t) \\ &= [h(t) * ((h(\tau - t) * x_1(\tau - t)) + n_1(\tau - t))] + n_2(t) \\ &= [h(t) * h(\tau - t) * x_1(\tau - t)] + [h(t) * n_1(\tau - t)] + n_2(t) . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Konvolusjonen mellom $h(t)$ og $n_1(\tau - t)$ vil gå mot null under forutsetning av at disse signalene er ukorrelerte. Dette gjelder for kontinuerlige signaler, for korte sekvenser kan vi ikke alltid gjøre denne antagelsen. Vi ender opp med

$$y_2(t) = [g(t) * x_1(\tau - t)] + n_2(t) , \quad (4.21)$$

som er summen av det tidsreverserte opprinnelige sendte signalet konvoluert med autokorrelasjonen av transferfunksjonen og et støysignal.

I praksis vil formen på $g(t)$ sjelden bli en ren deltafunksjon, men siden maksimum for en autokorrelasjonsfunksjon alltid er i origo og funksjonen er symmetrisk, vil den høyeste amplituden i tid og rom oppstå på samme tid og sted som om det var en ren deltafunksjon [30]. Formen på $g(t)$ vil altså bestemme hvor godt det er mulig å fokusere gjennom mediet. Samtidig er det verdt å merke seg at autokorrelasjonsfunksjonen for hvit støy er en deltafunksjon. Det betyr at jo mer "tilfeldig" transferfunksjonen $h(t)$ er, desto bedre vil tidsreversert fokusering fungere [31].

Frekvensdomenet

Vi skal videre se hvordan tidsreversering oppfører seg i frekvensdomenet. Når vi vet at konvolusjon i tidsdomenet er det samme som multiplikasjon i frekvensdomenet [17], og at tidsreversering tilsvare kompleks konjugering [3]. For et støyfritt system får vi

$$\begin{aligned} Y_2(j\omega) &= H(j\omega)X_2(j\omega) = H(j\omega)\overline{Y_1(j\omega)} \\ &= H(j\omega)[\overline{H(j\omega)X_1(j\omega)}] = H(j\omega)\overline{H(j\omega)X_1(j\omega)} \\ &= |H(j\omega)|^2 \overline{X_1(j\omega)} . \end{aligned} \quad (4.22)$$

[§]Forutsatt stasjonær andre ordens prosess.

Det mottatte signalet vil være det komplekskonjugerte av det opprinnelige signalet multiplisert med en faktor $|H(j\omega)|^2$. Om vi antar at transferfunksjonen er en deltafunksjon i tidsdomenet, vil dette gi et konstant spektrum i frekvensdomenet for alle frekvenser. Dette kan vi uttrykke som konstanten k , dermed får vi

$$Y_2(j\omega) = k\overline{X_1(j\omega)}. \quad (4.23)$$

Ser vi på autokorrelasjonsimpulsresponsen (AIR) i frekvensdomenet har vi at

$$G(j\omega) = H(j\omega)\overline{H(j\omega)} = |H(j\omega)|^2. \quad (4.24)$$

Vi ser forøvrig at dersom vi forsøker å gå fra AIR tilbake til impulsresponsen, går noe av informasjonen tapt siden

$$|H(j\omega)| = \sqrt{G(j\omega)}. \quad (4.25)$$

Bare amplituden av signalet er bevart, mens fasen forsvinner [30, 32].

4.2.2 Tidsreversering, konvolusjon og korrelasjon

Det finnes en matematisk sammenheng mellom konvolusjon og korrelasjon som kan beskrives ved hjelp av tidsreversering. Denne sammenhengen er beskrevet i detalj i tillegg C. Vi definerte tidligere i kapittelet en størrelse $g(t)$ som konvolusjonen $h(t) * h(-t)$ som oppstår i forbindelse med tidsreversering, dette tilsvarer autokorrelasjonen R_{hh} av transferfunksjonen. Denne størrelsen kalles av åpenbare grunner for AIR [30]. Sammenhengen mellom tidsreversering og AIR er også nevnt i ref. [33] og [34].

Fra analyser av autokorrelasjon og systemidentifikasjon drar man kanskje kjensel på en operator som oppstår i tidsreversering. Det kan vises at [30]

$$R_{yx}(\tau) = h(\tau) * R_{xx}(\tau) \quad (4.26)$$

$$R_{yy}(\tau) = \overline{h(-\tau)} * R_{yx}(\tau), \quad (4.27)$$

der R_{yx} står for krysskorrelasjonen mellom inngangssignalet x og utgangssignalet y og R_{xx} står for autokorrelasjonen av et signal x , slik at

$$R_{yy}(\tau) = \overline{h(-\tau)} * h(\tau) * R_{xx}(\tau), \quad (4.28)$$

som også kan skrives som

$$R_{yy}(\tau) = R_{hh}(\tau) * R_{xx}(\tau). \quad (4.29)$$

Her dukker AIR også opp, så selv om fremgangsmåtene er ulike, ender vi opp med den samme matamatikken om vi benytter tidsreversering eller autokorrelasjon.

Siden både autokorrelasjon og Fouriertransformen av autokorrelasjonen inneholder både den tidsreverserte og normal tid vil både autokorrelasjonen og spekteret bli det samme for tidsreversert og normalt signal. Ref. [35] har sett på en utvidet definisjon av autokorrelasjonsbegrepet som kan ta høyde for å finne statistiske forskjeller i støysignaler for forover og tidsreverserte signaler. Han benytter dette videre til å undersøke hvorvidt et støysignal i et system er i termodynamisk likevekt eller ikke.

Ref. [36] diskuterer hvilke forskjeller det er mellom tidsreversering og invers filter

(matched filter). I prinsippet fungerer tidsreversering som et invers filter i tidsdomenet. Et invers filter maksimerer signalet med en bestemt energi til et bestemt sted og en bestemt tid. Tidsreversering derimot optimaliserer bare trykkamplituden i fokuspunktet. Artikkelen viser imidlertid at tidsreversering også lager et romlig invers filter og dermed fokuserer i rommet.

4.2.3 Tidsreversering i derivasjonsfunksjoner

Siden transducersystemet vi behandlet i kapittel 3.3 gjør en derivasjon av det elektriske signalet, må vi se nærmere på hva som skjer med derivasjonsoperatoren under tidsreversering. Inngangssignalet $x(t)$ på transduseren må kunne relateres til et utgangssignal $y(t)$ gjennom en transferfunksjon $h(t)$. Det betyr at derivasjon må kunne beskrives ved hjelp av en transferfunksjon. Teori for lineære systemer og Laplace transformasjoner sier at derivasjon er gitt ved $s^{(n)}$ for en kontinuerlig funksjon, der (n) er 1., 2., 3., ..., n . deriverte [17]. Tilsvarende kan det vises at i Fourierrommet er derivasjon gitt som [37]

$$F\{f^{(n)}(t)\} = (j\omega)^n F\{f(t)\} \quad (4.30)$$

eller

$$F\left\{\frac{d^n}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n. \quad (4.31)$$

Gitt likning (4.24) trekker vi ut transferfunksjonsleddet og får

$$G(j\omega) = (j\omega)^n (-j\omega)^n = j^n (-j)^n (\omega^n)^2 = \omega^{2n} \quad (4.32)$$

når vi setter inn derivasjonsoperatoren. Ved tidsreversering av transferfunksjonen for derivasjonsoperatoren, sitter vi igjen med et uttrykk for derivasjon, der faseendringen er forsvunnet og derivasjonsgraden er kvadrert. Vi ser videre at deriverte av grad $n = 4, 8, 12, 16, \dots$ vil være uten faseleddet også ved vanlig derivasjon. Likevel betyr dette resultatet at tidsreversering gjennom en transferfunksjon som realiserer en derivasjon av grad n , vil ikke tidsreversering føre til rekonstruksjon av det opprinnelige signalet ved integrasjon, men snarere en derivasjon av grad $2n$ i forhold til det opprinnelige signalet. Der n er graden av derivasjon i systemet når vi ser bort fra tidsreversering. Denne egenskapen vil ha stor betydning for de praktiske eksperimentene vi har utført senere i oppgaven.

Tidsreversering i et system med derivasjonsledd

Transferfunksjonen for et komplekst system er satt sammen av konvolusjonen mellom transferfunksjonene i hver enkelt del av systemet. For å vise at tidsreversering kan være gyldig og refokuserer signalet i de resterende delene av et system selv om det inngår et derivasjonsledd i en av transferfunksjonene viser vi et enkelt eksempel.

Anta at vi har et sammensatt system med to deltransferfunksjoner $h_1(t)$ og $h_2(t)$. Den totale transferfunksjonen er dermed $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$. Anta at $h_1(t)$ realiserer et derivasjonsledd av grad n , mens $h_2(t)$ er en tilfeldig transferfunksjon slik at den vil tidsreverseres til en deltafunksjon. Videre er det definert et inngangssignal $x(t)$ og et utgangssignal $y(t)$, dette er gitt som

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] \quad (4.33)$$

Ved tidsreversering får vi

$$y(t) = x(-t) * [(h_1(t) * (h_2(t)) * (h_1(-t) * h_2(-t)))] \quad (4.34)$$

$$y(t) = x(-t) * [(h_1(t) * (h_1(-t)) * \delta(t))] \quad (4.35)$$

$$y(t) = x(-t) \frac{d^n}{dt^n} \frac{d^n}{d(-t)^n} * [\delta(t)] \quad (4.36)$$

$$y(t) = \frac{d^{2n}x(-t)}{d(t)^{2n}} \quad (4.37)$$

Leddene som gis av $h_2(t)$ vil føre til tidsreversert fokusering, men signalet som fokuseres tilbake vil være det reverserte utsendte derivert med graden $2n$. Det finnes selvsagt signaler som er sin egen $2n$ deriverte med eventuelt fortegnsskifte, slik som sinus og cosinus, så disse vil i prinsippet kunne fokuseres tilbake også i dette systemet. Problemet er imidlertid at det da er en forutsetning om at disse da må være kontinuerlige i tid, mens vi må ta ut en tidsbegrenset sekvens for tidsreversering.

4.2.4 Tidsreverserte speil

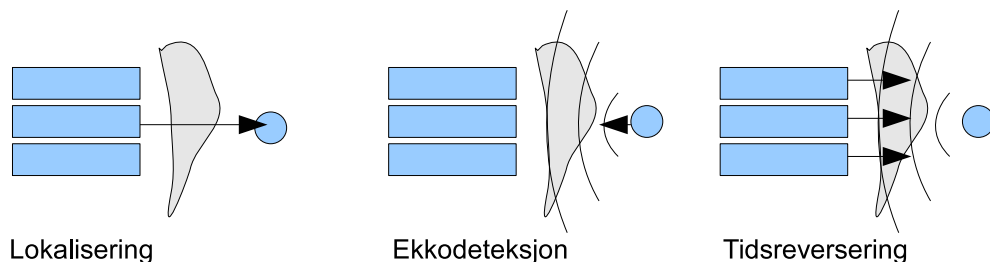
Et tidsreversert speil (TRS), kan lages med en matrise av transdusere som benyttes til å ta opp et signal. For lysspeil kjenner vi til at vi får et speilbilde som er geometrisk omvendt. Et tidsreversert speil fungerer slik at man sender inn et signal mot speilet, tar dette opp og sender det ut igjen ved å spille det av baklengs. I et tidsreversert speil er det tida som blir invertert og ikke de romlige koordinatene. Det betyr selvsagt også at et tidsreversert speil ikke kan operere i "samtidig". For å benytte et uttrykk fra telekommunikasjon kan man si at speilet fungerer som om det opererte i half duplex. ¶ Først i kapittel 4.2 satt vi inn løsningen $u(x, -t)$ i d'Alemberts formel. I praksis er det vi utfører i et tidsreversert speil at vi ser på en løsning $u(x, \tau - t)$ der τ er den relative forovergående tida (en forsinkelse). Ref. [3] påpeker at mens et vanlig akustisk speil produserer et virtuelt bilde av et akustisk objekt, produserer et tidsreversert speil et ekte akustisk bilde av den opprinnelige kilden.

4.2.5 Tidsreversert fokusering

TRS kan benyttes for å fokusere energi mot et bestemt punkt. I og for seg ønsker man å oppnå det samme med tidsreversert fokusering som med tradisjonell fokusering, nemlig å superposisjonere bølger i et bestemt punkt, men metoden for å oppnå fokus er annerledes. I tidsreversert fokusering kan man også benytte seg av en matrise med transdusere. Prosedyren er at man fra senteret sende ut en puls mot mediet man ønsker å undersøke. Eventuelle refleksjoner i mediet blir deretter tatt opp. Deretter tidsinverterer man det reflekterte signalet og sender det tilbake inn i mediet. På denne måten kan man fokusere mot en bestemt refleksjon, matematisk kan denne prosedyren uttrykkes på følgende måte som i ref. [3].

$$\sum_i h_i^a(\tau - t) * h_i(\mathbf{r}_0, \tau - t) * h_i^a(t) * h_i(\mathbf{r}_0, t), \quad (4.38)$$

der h_i^a er transferfunksjonen til den enkelte transduseren, og h_i er mediets transferfunksjon. Disse vil alle nå sitt maksimum ved tiden τ og vi får konstruktiv interferens.



Figur 4.4: Tidsreversert fokusering.

Et slikt system er vist på figur 4.4.

For å kunne tidsreversere signalet og fokusere det, er man imidlertid avhengig av å ha så mye informasjon om det reflekterte signalet som mulig. Det vil si at man ønsker å kunne samle opp all energi fra ekkoet, fordi man da vil ha det fullstendige bildet av hvordan signalet har spredt seg i mediet og dermed kan få all energien til å fokusere tilbake til punktet det opprinnelig kom fra.

I ref. [10] ser man nærmere på hvordan et område i et inhomogent stoff teoretisk sett kan avgrenses og signalgangen fullstendig tidsreverseres. Det beskrives også en iterativ algoritme som kan benyttes dersom det er flere ekko i mediet vi ser på. Dette er mulig dersom punktkildene i mediet som skaper ekkoene er plassert med noe avstand, slik at vi ihvertfall delvis kan plukke ut ett av ekkoene og fokusere spesielt mot dette. For hver iterasjon vil energien fokuseres mer og mer mot den punktkilden vi har valgt oss ut.

4.3 Andvendelsesområder

Tidsreversering kan tenkes benyttet i en rekke anvendelser. Fenomenet tidsreversering gjelder ikke bare for ultralyd, men kan benyttes på bølger generelt. Bruksområdene kan sammenfattes i to hovedgrupper: *Kommunikasjon* og *ekkodeteksjon*.

4.3.1 Kommunikasjon

Undervannskommunikasjon

Tidsreversert signalprosessering av akustisk undervannskommunikasjon ble først demonstrert av ref. [38] under forsøk tidlig på 60-tallet. Bakgrunnen den gangen var å finne en billig og enkel måte å komme unna korrelasjonsberegninger på. Beregninger viste at å korrelere to akustiske signaler med 40 sekunders lengde ville ta om lag 10 dager med datidens tilgjengelighet på datakraft. Et kort signal ble sendt mellom to hydrofoner over flere nautiske mil og signalet ble deretter sendt tilbake på radio og sendt ut på nytt tidsreversert. Ref. [39] har tatt utgangspunkt i teorien for fasekonjugerte speil for lys og overført dette til lyd og akustisk undervannskommunikasjon. Dette er nøyaktig samme teori som benyttes i vanlig tidsreversering, men utført i

[¶]Sending og mottak skjer asynkront.

frekvensdomenet tilsvarer tidsreversering fasekonjugering. Ref. [40] tar også for seg en metode som kalles passiv fasekonjugering i forbindelse med undervannskommunikasjon. Det vil si at man ikke gjør selve tidsreverseringen eller fasekonjugering, men istedenfor benytter informasjonen til å beregne et filter som simulerer denne. Ref. [41] har vist hvordan man kan bruke tidsreversering i frekvensdomenet^{||} for å realisere akustisk kommunikasjon under vann.

Digital kommunikasjon

Tidsreversering fører i hovedsak til to typer fokusering. Den ene i tid og den andre i rom. Signalet fokuseres mot et bestemt punkt til en bestemt tid. Ved å benytte tidsreversering i en kommunikasjonskanal vil signalet kunne fokuseres mot et bestemt punkt og dermed kan effekten av det utsendte signalet minskes. Utglidning av signalet i tid intersymbolinterferens (ISI) vil dessuten føre til at mottakeren ikke behøver være så avansert, fordi et filter kan unngås.

Ref. [31] tar for seg hvordan en digital sekvens $x(t)$ kan sendes ved hjelp av tidsreversering

$$x(t) = \sum_{k=1}^N \delta_k f_0(t - kT_b), \quad \delta_k \in \{0, 1\}. \quad (4.39)$$

For å oppnå Nyquistrespons i kanalen kan det digitale signalet moduleres inn i en Nyquistfunksjon**, for eksempel en sinc,

$$f_0(t) = \frac{\sin(\frac{\pi t}{T_b})}{\frac{\pi t}{T_b}}, \quad (4.40)$$

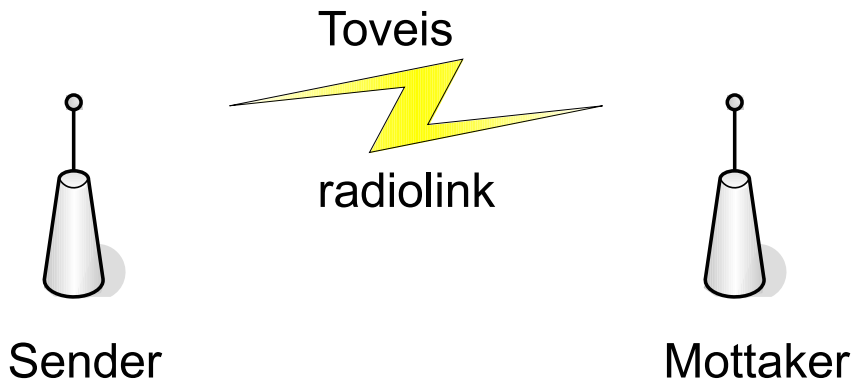
der T_b er symbolperioden.

Et slikt system er vist på figur 4.5. Likningene fra LTI systemet gjelder fremdeles og beskriver hvordan signalet påvirkes av kanalresponsen. For å sende det digitale signalet er prosedyren som følger:

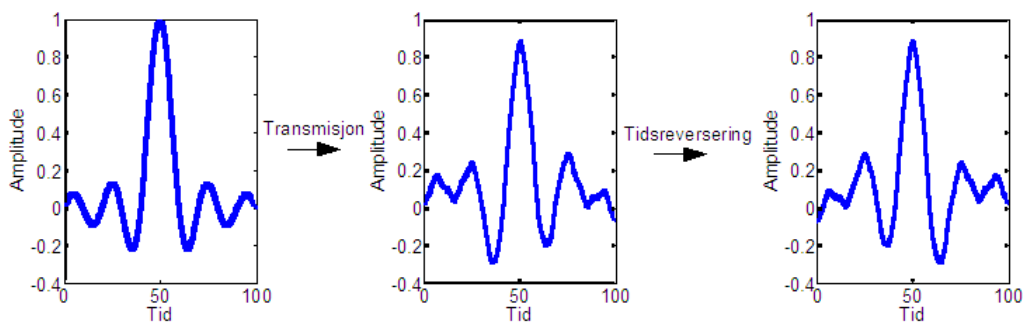
1. Mottakeren sender ut en Nyquistfunksjon.
2. Senderen mottar Nyquistfunksjonen påvirket av kanalens transferfunksjon og støy.
3. Istedenfor å modulere signalet inn i en Nyquistfunksjon, benyttes den tidsreverserte mottatte Nyquistfunksjonen fra mottakeren som basisfunksjon.
4. Det digitale signalet moduleres inn i basisfunksjonen og sendes til mottakeren.
5. Mottakeren mottar et tidsreversert signal. Det bør imidlertid presiseres at siden det er modulert inn et digitalt signal er det ikke et problem at det analoge bæresignalet er tidsreversert. Den digitale informasjonen i signalet vil fremdeles være gyldig og i normal rekkefølge.

^{||}fasekonjugering

**En symmetrisk funksjon som har nullpunkter for multipler av symbolperioden.



Figur 4.5: Toveis kommunikasjonssystem for radiobølger. Begrepene sender og mottaker refererer her til den endelige mottakeren av informasjon. Begge nodene har mulighet for både sending og mottak av data.



Figur 4.6: Tidsreversert kommunikasjon: 1.) det sendes ut en Nyquistpuls, 2.) Pulsen påvirkes av kanalen og støy, 3.) Pulsen tidsreverseres og et digitalt signal kan moduleres inn i pulsen.

Ref. [42] gjør en forenkling av tidsreverseringsalgoritmen som de kaller "en-bits-tidsreversering". Ref. [43] gjør videre forsøk med "en-bits-tidsreversering" i et WLAN radiosystem. Forenkling av tidsreverseringsalgoritmen gjøres ved å bare se på fortegnet av den reelle delen og imaginærdelen av den tidsreverserte kanaltransferfunksjonen. For et enkelt transduserelement kan tidsreverseringen da uttrykkes som

$$g_m^{1BitTR} = \text{fortegn}[\text{Re}\{h^*(-t)\}] - j\text{fortegn}[\text{Im}\{h^*(-t)\}]. \quad (4.41)$$

Dette betyr i praksis at man bare bevarer faseinformasjonen i kanalens transferfunksjon. Denne forenklingen gjør det enklere å implementere algoritmen i et digitalt system og forventes også å være mer robust mot feilestimering av kanalresponsen.

Vi har tidligere nevnt at tidsreversering i tidsdomenet kan sees på som en kompleks konjugering i frekvensdomenet (forutsatt at man ser på et bredbåndet frekvensspektrum). Ref. [44] har vist hvordan man kan benytte dette til å automatisk kompensere for kanalresponsen i et kommunikasjonssystem. Tradisjonelt sett benytter man en kjent

treningsssekvens i protokollen og estimerer kanalresponsen ut i fra dette kjente signalet. Man benytter deretter en equalizer til å sette inn et tilpasset (matched) filter slik at den totale responsen i kanalen blir en Nyquistrespons. Istedenfor å benytte treningsssekvenser kan man la senderen få vite hvordan kanalresponsen ved forrige sending var ved å sende en kompleks konjugert kopi av det mottatte signalet i retur. Fordelene med denne metoden er todelt. For det første sparer man overhead i protokollen ved å utelate treningsssekvensene, som igjen fører til at man kan øke overføringshastigheten i kanalen. For det andre gjør den kontinuerlige strømmen av data at kanalen til en hver tid vil være optimalt tilpasset kanalresponsen. Ref. [45] påpeker at en reduksjon av ISI vil forekomme ved bruk av tidsreversering framfor tradisjonelle metoder.

4.3.2 Ekkodeteksjon

Medisinske anvendelser

Utnyttelse av ultralyd innenfor medisin er godt kjent, tidsreversert fokusering åpner imidlertid for at denne teknologien kan utnyttes bedre.

Lithotripsy

Lithotripsy er en felles betegnelse på metoder som kan benyttes til å knuse forsteininger i kroppen uten å utføre et kirurgisk inngrep (ikke-innvasiv metode). Ref. [46] har vist at tidsreversert fokusering kan fungere svært effektivt for knusing av både galle- og nyrestein. Ultralyd benyttes allerede for knusing ved at man sender inn en sjokkbølge mot et bestemt punkt. Problemet er at man ved tradisjonelle fokuseringsmetoder (se kaptittel 1) lett kan miste fokus når pasienten puster eller beveger seg, og dermed skader omkringliggende vev og skaper lokale indre blødninger. Ved å benytte iterativ tidsreversert fokusering, kan man følge den enkelte steins posisjon også når pasienten beveger seg.

Brystkreft

Tidsreversering er forsøkt benyttet både til behandling og oppdagelse av brystkreft. Ref. [47] har presentert en metode for å fokusere energi i en bredbåndet mikrobølge mot en svulst ved å benytte tidsreversering. Ref. [48] har gjort innledende forsøk med avbildingsmetoder for å oppdage svulster på et tidlig stadie basert på tidsreversert fokusering av mikrobølger. Ref. [49] har gjort lignende forsøk som ref. [48] men har konsentrert seg om å finne ut hvilke pulstyper som egner seg best for å finne en svulst når tidsreversert fokusering benyttes.

Andre anvendelser

Lokalisering av landminer

Tidsreversert fokusering er også utnyttet i et landminedeteksjonssystem som er under utvikling ved Georgia Institutt for teknologi i Atlanta. Ref. [50] viser hvordan man kan lokalisere landminer ved å benytte Rayleigh overflatebølger. Ved å benytte tidsreversert fokusering, kan man fokusere ekstra energi mot områder det er interessert å undersøke nærmere. Det viste seg imidlertid at tidsreversert fokusering ikke alltid hadde fordeler i forhold til tradisjonell fokusering benyttet til dette formålet.

Del II

Numeriske modeller og eksperiment

Kapittel 5

Metoder, modeller og eksperimentelt oppsett

Vi ønsker å få bekreftet teorien presentert i tidligere kapitler ved å gjennomføre eksperimenter med ulike bølgeledere og transduserkonfigurasjoner. Både numeriske metoder og fysiske eksperiment er benyttet for å teste ut den presenterte teorien. I dette kapitlet presenteres metodene samt teori som er spesielt relevant for utviklingen av modellene og det eksperimentelle oppsettet som er benyttet for å få fram resultatene presentert i kapittel 6.

5.1 Bakgrunn

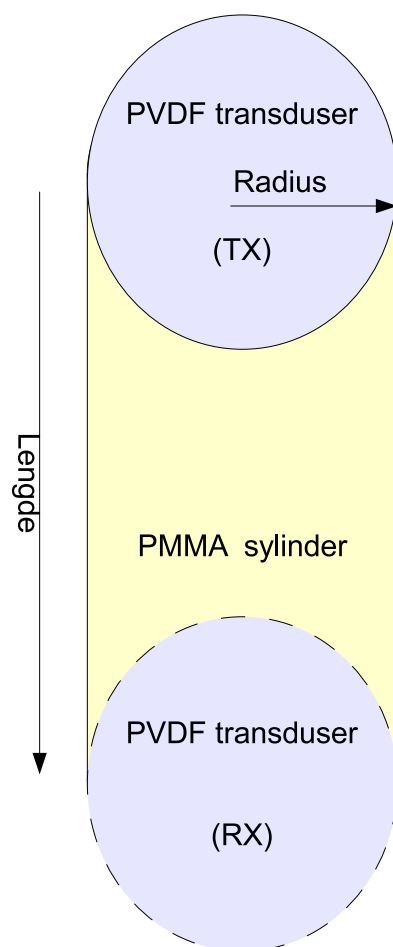
Som tidligere nevnt i kapittel 4 kan tidsreversert fokusering benyttes til en rekke formål, og mange har gjort forsøk med tidsreversering i ulike geometrier. Vi vil her konsentrere oss om noen forsøk som benytter tidsreversering av ultralydbølger i bølgeledere.

I ref. [51] benyttes på den ene siden en enkelt transduser og på den andre siden en matrise med flere transdusere. Bølgelederen som benyttes består av en ramme av stål fylt med vann, der vannet benyttes som medium. Et liknende oppsett benyttes også i ref. [52]. I ref. [53] er det gjort forsøk med tidsreversering i en bølgeleder med enkle transdusere og en sylinderformet kvartsstav med lengde 485 mm og radius 5 mm som bølgeleder. To keramiske transdusere med radius på 19 mm var festet, en på hver ende av sylindere, med en koblingsvæske i mellom. Et bredbåndet signal med senterfrekvens på 1 MHz ble forsterket og sendt ut på en av transduserne slik at seks longitudinelle moder ble satt i sving i bølgelederen. Signalet ble tatt opp på den andre transduseren og et tidsvindu ble lagt på slik at ingen multiple refleksjoner (ekko) ble tatt opp. Signalene ble gjentatt med en frekvens på 10 Hz og 20 signaler ble addert for å fjerne støy. Deretter ble signalet tidsreversert og sendt tilbake gjennom bølgelederen. Den samme transduseren ble hele tiden benyttet som sender og den andre som mottaker gjennom alle forsøkene, siden de to sidene og sylindere var antatt å være resiproke. Et signal som sendes fra en signalgenerator blir påvirket av impulsresponsen i de enkelte delene av systemet (forsterkere etc.), slik at den akustiske pulsen som faktisk sendes ut er den opprinnelige pulsen konvoluert med impulsresponsen til

det øvrige systemet. Systemresponsen for hvert enkelt element i systemet ble derfor målt i ref. [53] (transdusere, forsterker og forforsterker), slik at det faktisk utsendte signalet kunne beregnes og sammenliknes med det som til slutt ble mottatt.

5.2 Referansemodell

Vi vil benytte en modell og et eksperimentelt oppsett i våre eksperimenter som har likheter med det som er beskrevet i ref. [53]. Vi vil imidlertid benytte transdusere av PVDF* og sylindere av PMMA[†] som bølgeledere. Fordelen med å velge disse materialene er at det er materialer som har forholdsvis lik akustisk impedans, med resulterende små refleksjoner i overgangen mellom materialene (se kapittel 2.8). Materialene er også forholdsvis lett tilgjengelig. Figur 5.1 viser en skisse av det valgte eksperimentelle systemet. På grunn av praktiske begrensninger vedrørende utstyret vi



Figur 5.1: Referansemodell for bølgeleder der tidsreversert fokusering skal testes ut.

har tilgang til vil sylindrene som benyttes i forsøkene være vesentlig kortere (maks

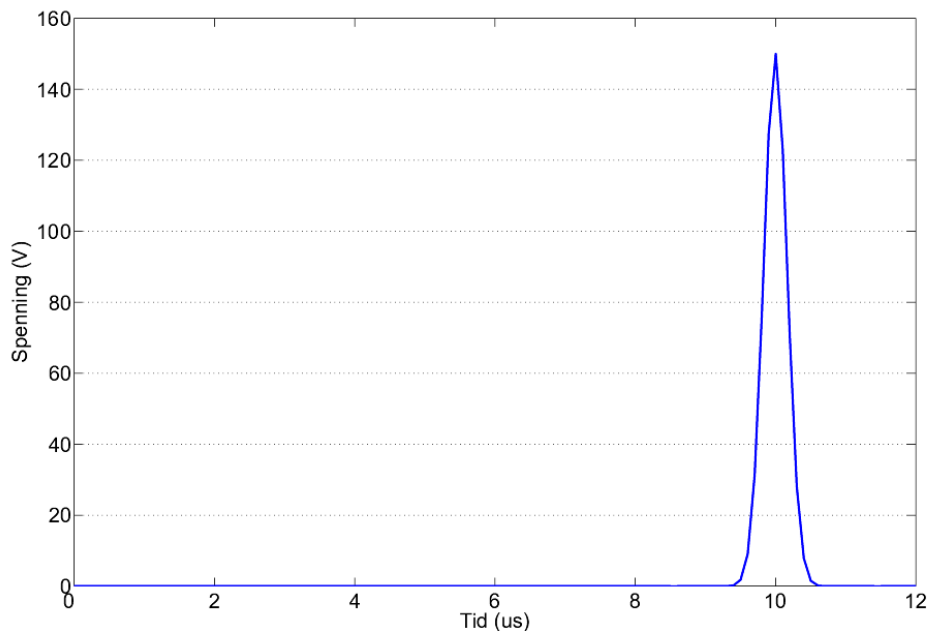
*PVDF eller PVF_2 står for Poly(vinylidene fluoride) og har kjemisk formel $-(CH_2CF_2)_n-$ [54].

[†]PMMA er forkortelse for Poly(methyl methacrylate), også kalt pleksiglass og har kjemisk formel $(C_5H_8O_2)_n$ [54].

120 mm) enn de som er benyttet av ref. [53]. Andre praktiske begrensninger fører til at vi må benytte lavere frekvens (100 kHz) og dessuten har PMMA betydelig lavere akustisk hastighet enn kvarts[7]. Dette betyr at pulsen som sendes i vårt system vil bevege seg færre bølgelengder enn i referansesystemet. Vi må dermed forvente at det vil være vanskeligere å skille mellom hovedpulsen og multiple ekkoer.

Signal

Sendertransduseren i referansemodellen tilføres en spenningspuls formet som et Gaussisk signal med parametrene $(\mu; \sigma)$ og amplitude A . Bredden er tilpasset slik at hoveddelen av signalet (3σ) ligger innenfor det som tilsvarer periodetiden for en sinus på 100kHz. Parameteren μ varierer av praktiske årsaker litt mellom de numeriske modellene og forsøkene våre. Et eksempel på et slikt signal er vist på figur 5.2.



Figur 5.2: Gaussisk puls med amplitude 150 V, $\mu = 10\mu s$ og $\sigma = 1.67\mu s$.

5.3 Bølgeutbredelse i en sylinderformet bølgeleder, Modell 1

Den første numeriske modellen som presenteres har som hensikt å vise hvordan de dispersive effektene beskrevet i kapittel 2 opptrer i en sylinder med transdusere med frie randkrav (ref. figur 3.2 $Z_1 = 0$). Slike randkrav vil være en god approksimasjon for overgangen mellom PMMA og luft. En slik modell kan gi viktige indikasjoner på hvordan informasjonsflyten i systemet er og kan eventuelt fortelle om informasjon som skal benyttes til tidsreversering går tapt. Modellen er implementert i Comsol Multiphysics, som er en kommersielt tilgjengelig programvare for løsning av Partielle Differensial Likninger (PDL). Comsol benytter seg av Finite Element Method (FEM) algoritmer for å beregne en numerisk løsning av et sett med PDL [55]. Ytterligere informasjon

om virkemåten til FEM-algoritmen kan finnes i dokumentasjonen som følger med programvaren eller i bøker som for eksempel ref. [56].

Beregningene i denne oppgaven er gjort med versjon 3.4 med akustisk modul installert. Grunnprinsippet i Comsol er at man velger en eller flere løsningsmoduler for å løse en eller flere PDL. Deretter tegnes det opp en geometrisk struktur for det området likningen skal løses over. Det settes opp rand og initialbetingelser på geometrien, samt materialbetingelser. Comsol kan løse problemer i opp til tre romlige dimensjoner inkludert tidsavhengige problemer. Løsning av tredimensjonale problemer er imidlertid svært beregningskrevende, da det raskt blir store matriser som skal behandles. Det kreves derfor en kraftig datamaskin med både rask prosessor og mye minne tilgjengelig. En måte å unngå problemet på er at man i mange tilfeller kan benytte seg av symmetriegenskaper i geometrien, slik at modellen kan løses i to dimensjoner.

5.3.1 Beskrivelse av modellen

For en isotrop sylinder av PMMA og konsentriske PVDF transdusere er det åpenbart at aksesymmetri kan benyttes. Transdusere er plassert både i topp og bunn av sylindren. Modellen som er benyttet i simuleringen er tegnet opp med samme dimensjoner som en av de virkelige sylindrene vi senere benyttet i de fysiske forsøkene, med lengde på 50 mm og diameter på 20 mm . I hver ende er det modellert inn en transduser med tykkelse $40\text{ }\mu\text{m}$ som dekker hele arealet av sylindrens endeflater. Modellen er delt inn i et maskenett av triangulære geometrier som er typisk for FEM beregninger i to dimensjoner. Parametrene for beregning av maskenettet er gitt i tabell 5.1. Fordi tykkelsen på transduserne er så liten, må oppløsningen på maskenettet være stor her. Modellen består av 10710 geometriske elementer, fordelt med 710 elementer innenfor hver av transduserne og de resterende 9278 elementene i sylindren, som vist på figur 5.3.

Konstant	Verdi
Elementstørrelse	$6E - 4$
Skaleringsfaktor	1
Vekstrate	1.4
Krumningsfaktor	0.3
Krumningscutoff	0.001
Oppløsning	1

Tabell 5.1: Parametre for beregning av maskevidden i Comsol modellen.

5.3.2 Fysikk

For å løse problemet er det benyttet to moduler fra Comsol Multiphysics. Piezo Axial Symmetry (smpaxi) modulen er benyttet for å simulere transduserne, mens Axial Symmetri, Stress-Strain (acaxi) er benyttet for å simulere sylindren. Hver av modellene krever at de fysiske parametrene for materialet som skal simuleres er oppgitt. Parametrene som er benyttet i de to modulene er gitt i tabellene 5.2 og 5.3.

Konstantene λ og μ inngår som ledd i elastisitetmatrisa c som gitt av likning (2.19). I Comsol benyttes variabelen c_E for denne matrisa. I tillegg må en piezoelektrisk

Konstant	Verdi	Enhet	Beskrivelse
e_{31}	0,036	C/m^2	Piezoelektrisk koblingskonstant
e_{32}	0,036	C/m^2	Piezoelektrisk koblingskonstant
e_{33}	-0,096	C/m^2	Piezoelektrisk koblingskonstant
E_0	$2E9$	Pa	Youngs modulus
ρ_0	1780	kg/m^3	Massetetthet
η_0	0,40		Poissons forholdstall
ϵ_r	12,5		Relativ permittivitet
λ	$\frac{E_0\eta_0}{(1+\eta_0)(1-2\eta_0)}$		Lamé konstant
μ	$\frac{E_0}{(2(1+\eta_0))}$		Lamé konstant

Tabell 5.2: Materialkonstanter for PVDF film. Verdiene er hentet fra ref. [57, 23, 54].

koblingsmatrise defineres på formen

$$e_{rS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

og en tilsvarende matrise for den relative permittiviteten

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_r \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Randkrav må også spesifiseres for problemet. Her er alle randene utenom de punktene

Konstant	Verdi	Enhet	Beskrivelse
E	$3E9$	Pa	Youngs modulus
η	0,40	-	Poissons forholdstall
ρ	1190	kg/m^3	Massetetthet

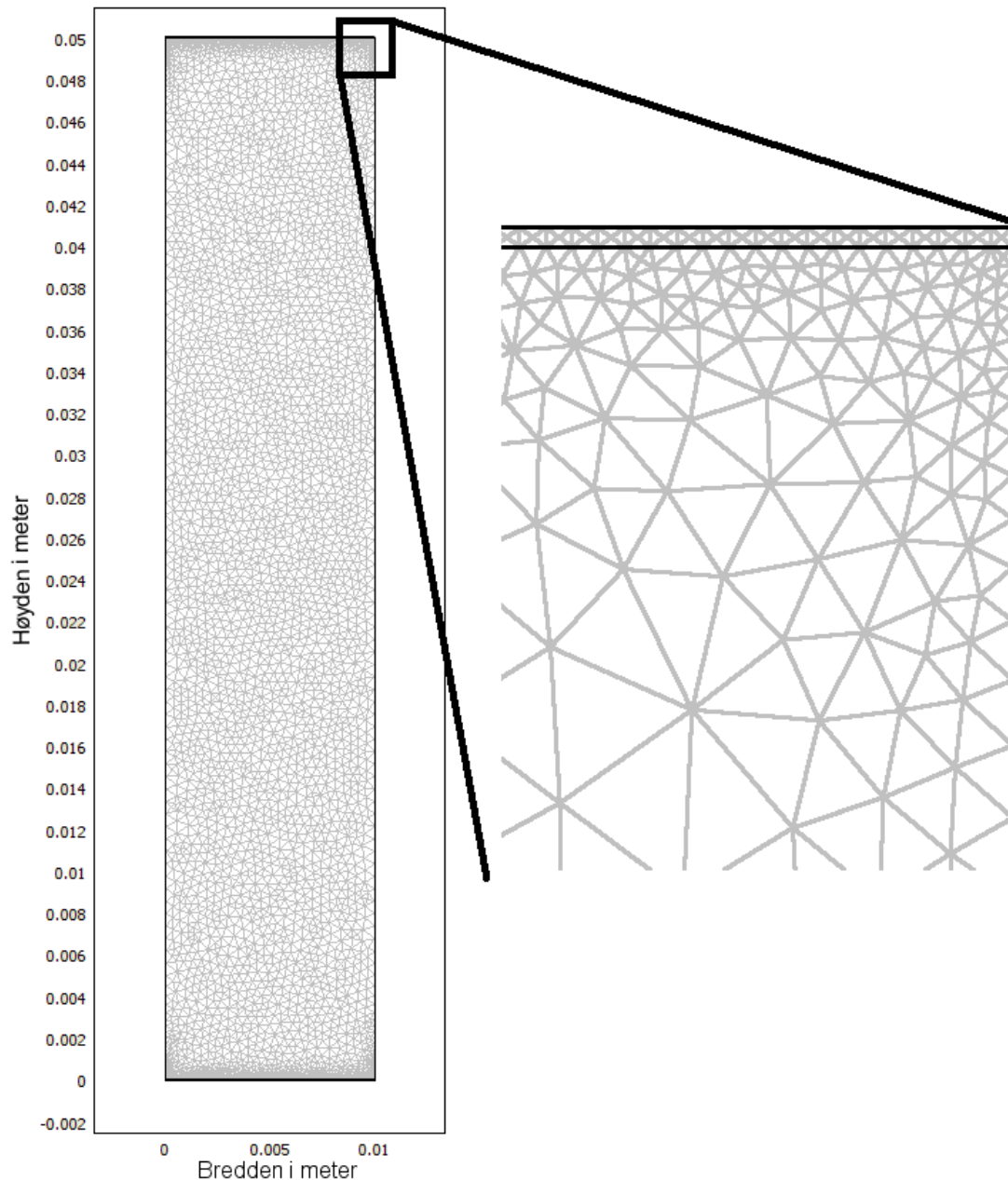
Tabell 5.3: Materialkonstanter for PMMA sylinder. Verdiene er hentet fra ref. [54, 58].

som skal ha aksesymmetri ($r = 0$) satt til å være fri ($Z_1 = 0$). Når det gjelder elektriske randkrav i transduseren, er platen som vender inn mot sylindere satt til jord. På sendertransduseren er den andre platen koblet til et elektrisk signal (figur 5.2 for modell 2 illustrerer dette prinsippet), mens den andre platen på mottakertransduseren er satt til å være kontinuerlig.

5.3.3 Demping

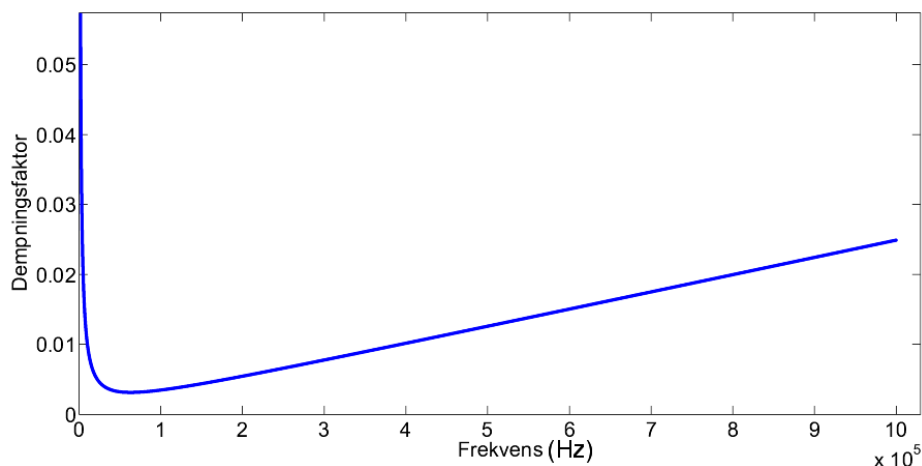
For selve bølgelederen ble PMMA valgt til forsøkene blandt annet fordi det er et materiale som har liten demping og dermed egner seg godt til tidsreversering (se kapittel 4.2). Det er likevel inkludert en dempningsmodell i den numeriske modellen for å få et mest mulig realistisk resultat. Som modell for elastisk demping benytter Comsol en Rayleighmodell [59]. Denne modellen, andre modeller for demping og sammenhengen mellom disse er beskrevet i tillegg D. Som vist i tillegg D kan Rayleigh dempningsmodellen knyttes til demping pr. bølgelengde gjennom relasjonen

$$\xi = \frac{\alpha^* \lambda}{2\pi}. \quad (5.3)$$



Figur 5.3: Figuren viser geometrien og hvordan maskestørrelsen på den aksesymmetriske FEM modellen som er benyttet varierer. Til høyre vises et utsnitt nær en av transduserne.

Denne størrelsen kan benyttes til å beregne dempningsfaktorene α og β i Rayleighmodellen. I følge ref. [60] er $\alpha^* \lambda = 0,19dB$ for longitudinelle bølger i PMMA. Omregnet til Neper gir dette ξ verdien 0,0035. For frekvensene 40kHz og 100kHz kan vi da regne ut faktorene $\alpha = 1250$ og $\beta = 7,9E - 9$. Dette gir en Rayleigh dempningskurve som vist på figur 5.4.



Figur 5.4: Rayleigh dempningskurve som funksjon av frekvens, benyttet i modell 1.

5.3.4 Transdusere

For simulering av transdusere bør det nevnes at modellen som benyttes ikke simulerer et metallisk lag på topp og bunn av transduserne. Dermed vil spenningen som genereres i det piezoelektriske materialet som følge av en innkommende bølge, ikke kunne strømme over til nabopunktene. Fordelen med å bygge modellen slik er at vi kan se variasjoner i spenningen som funksjon av radius og tid $U(r, t)$, fordi modellen viser den genererte spenningen i hvert punkt. Dessuten kan vi enkelt finne den totale spenningen generert på hele transduseren kun som funksjon av tid $U(t)$, slik som ville være tilfellet om vi hadde et ledende lag i modellen. Dette kan vi gjøre ved å integrere spenningsfunksjonen over hele arealet og deretter dele med arealet. I polarkoordinater er dette gitt som

$$U(t) = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a U(r, t) r dr d\theta = \frac{2}{a^2} \int_0^a U(r, t) r dr. \quad (5.4)$$

5.3.5 Signal

Et Gaussisk formet signal med parametere $\mu = 10 \mu s$ og $\sigma = 1,67 \mu s$ og amplitude $A = 150V$ benyttes i modellen.

For resultater fra modell 1 vises det til kapittel 6.1.1.

5.4 Endimensjonal bølgeutbredelse, modell 2

I kapittel 3.3 tok vi utgangspunkt i en endimensjonal modell og viste at det kunne oppstå derivasjon i transduserne. En modell for endimensjonal bølgeutbredelse som kan benyttes til å bekrefte denne teorien er derfor implementert ved hjelp av SPICE. Til forskjell fra modellen presentert i kapittel 5.3, som utelukkende tok for seg akustisk overføring i et aksesymmetrisk todimensjonalt system, bruker denne en endimensjonale modell for bølgefeltet. I tillegg til akustisk overføring tar modellen også for seg elektromagnetiske koblingseffekter som oppstår mellom transduserne.

SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis) benyttes vanligvis til å modellere elektriske kretser. SPICE ble opprinnelig utviklet ved Berkley på 1970 tallet, men er nå tilgjengelig i en rekke versjoner, både som open-source og kommersiell programvare [61]. Vi har benyttet LTSpice/SwitcherCADIII versjon 2.16v fra Linear Technology[‡].

Modellen vi her presenterer er ikke ny, men baserer seg på at vi har satt sammen moduler andre har utviklet tidligere, slik at modulene til sammen kan simulere en endimensjonal modell av systemet vi presenterte i kapittel 5.2. Transdusermodellen vi benytter er basert på teori og modeller presentert i referansene [62, 63, 64]. I korte trekk kan vi si at siden akustiske signaler i likhet med elektromagnetiske signaler er bølger, er det mulig å utlede en ekvivalent telegraflikning for et akustisk system og modellere dette ved hjelp av SPICE. Disse modellene baserer seg på å kalkulere akustiske impedansverdier for forsinkelseslinja i transduseren og materialet. Vi har i vår implementasjon inkludert teori presentert i kapittel 2 og 3 samt ytterligere noe teori fra ref. [7] for å beregne impedans i transduserne, forsinkelseslinjene og den piezoelektriske koblingseffekten. Siden LTSpice ikke kan beregne med Laplacetransformer, benyttes integratoren presentert i ref. [63]. Det henvises forøvrig til originalpublikasjonene for ytterligere detaljer omkring transdusermodellen. Den akustiske forsinkelseslinja er hentet fra en tilsvarende modell utviklet av Frank Melandsø[§]. Verdiene for akustisk impedans i luft og kobber er hentet fra ref. [7]. Hovedelementene i modellen er vist på figur 5.5, mens en fullstendig presentasjon av modellen (kode og grafisk modell) finnes i tillegg E.

5.4.1 Akustisk kobling

Figur 5.5 viser SPICE implementasjonen av et system tilsvarende det som tidligere er vist i figur 5.1. Modellen er bygget opp av to transdusere på hver sin side av en forsinkelseslinje som implementerer PMMA sylindren. Transduserne er på den ene siden koblet til PMMA sylindren, mens de er koblet til en akustisk impedans på den andre siden. Impedansen kan reguleres slik at ulike materialer kan modelleres inn på baksiden av transduserne og dermed realisere ønskede randbetingelser. Den akustiske forsinkelseslinja både mellom transduserne og inne i transduserne kan modelleres med tap, men dette er ikke gjort i denne implementasjonen. Ref. [62] bemerker dessuten at det er knyttet en del problemer rundt frekvensavhengig impedans om SPICE benyttes for å modellere tapseffekter i PVDF transdusere for bredbåndede signaler. I vårt program er transduserne og mediet kodet i hver sin subrutine. De akustiske og elektriske telegraflikningene gir oss relasjonene

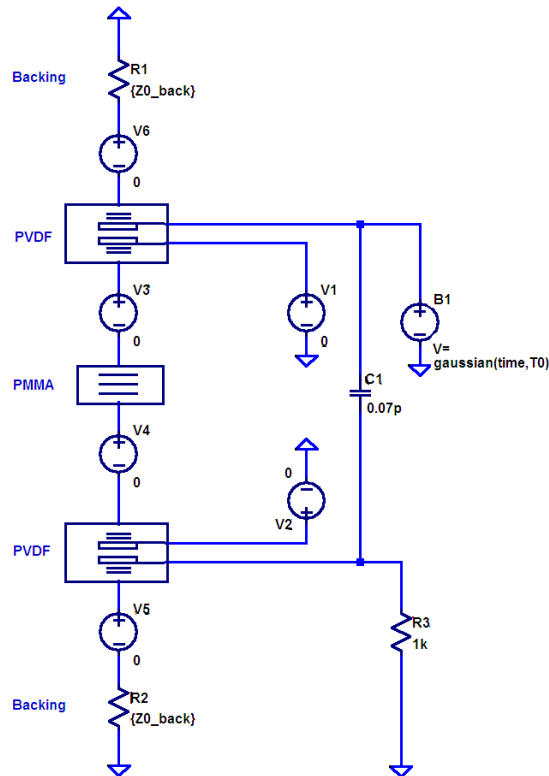
$$kraft = spenning, \quad (5.5)$$

$$hastighet = strøm. \quad (5.6)$$

Det er satt inn spenningskilder uten potensial slik at hastighet og kraft kan måles i den akustiske delen av modellen. I tillegg til å være fritt for demping, er mediet mellom transduserne modellert som ikke-dispersivt.

[‡]<http://www.linear.com/designtools/software/>

[§]Universitetet i Tromsø



Figur 5.5: Modell for transducersystem implementert i SPICE.

5.4.2 Kapasitiv kobling

I et system som vist på figur 5.1, vil det alltid oppstå en kapasitiv kobling mellom de to transduserne. En kondensator er derfor plassert mellom sendertransduseren og mottakertransduseren for å modellere den elektrostatiske koblingen mellom transduserne, som typisk er godt synlig i det eksperimentelle systemet.

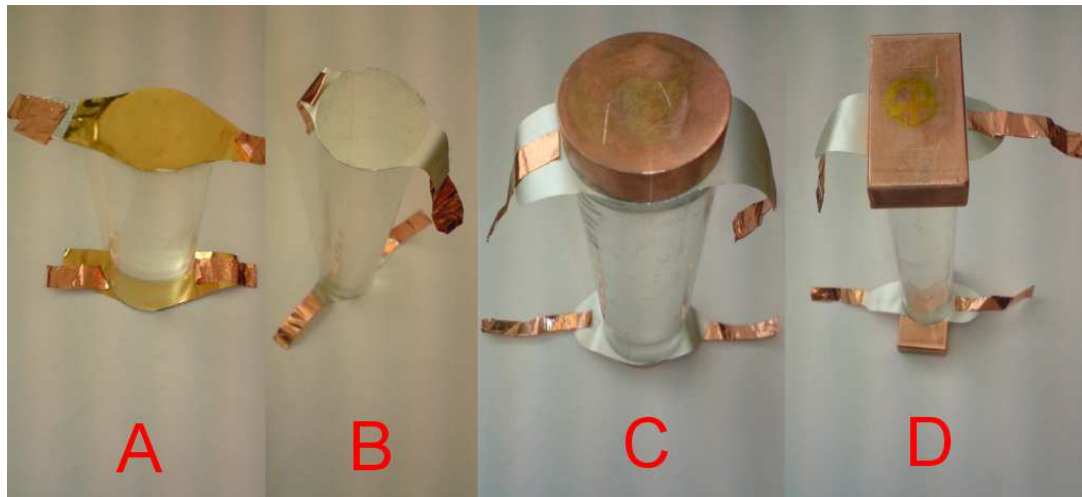
5.4.3 Oppsett

Inngangsimpedansen på forsterkeren på mottakersiden er modellert som en $1\text{ k}\Omega$ motstand[¶]. Utgangsimpedansen i senderforsterkeren er ikke modellert. Det sendes igjen inn en Gaussfunksjon som vist på figur 5.2 på sendertransduseren, denne gangen med amplitude $A = 150\text{ V}$, bredde $1,67\text{ }\mu\text{s}$ men middelværdi $\mu = 100\text{ }\mu\text{s}$. De to randbetingelsene vi benytter i den endimensjonale modellen i kapittel 3.3 er her modellert ved å benytte impedansverider for luft og kobber, materialene vi senere benytter i forsøkene. Det er gjort en separat kjøring av modellen for hver av disse randbetingelsene. Mediet som modelleres har forøvrig en lengde på 50 mm og transduserne en tykkelse på $40\text{ }\mu\text{m}$. Verdier for Youngs modulus og Poissons forholdstall er identisk med de benyttet i modell 1. Resultatene er vist i kapittel 6.1.2.

[¶]En verdi vi antok som realistisk for utstyret vi benyttet i forsøkene, dette diskuteres forøvrig mer senere i oppgaven.

5.5 Eksperiment

Mens de numeriske modellene har tatt for seg teorien presentert i kapittel 2 og 3 og hjelper oss til å få en bedre forståelse av bølgeutbredelsen, har vi fremdeles til gode å bevise teorien fra kapittel 4 eksperimentelt. Et eksperiment ikke ulikt det presentert i ref. [53] men med endringer som tidligere beskrevet i kapittel 5.1 ble derfor utført med fire forskjellige bølgeledere. Vi vil her kort presentere hvordan eksperimentet ble satt opp, hvordan transdusere og bølgeledere ble produsert og hvilket måleutstyr som ble benyttet.



Figur 5.6: Eksempler på bølgeledere benyttet i eksperimentene. Transduserne er festet til sylindere av forskjellige dimensjoner. Kobberklosser er limt på noen av transduserne for å realisere forskjellige randbetingelser. Sylinder A har limte PVDF transdusere fra Piezotech S.A., mens sylindrene B,C og D er utstyrt med transdusere av ferdigtrykket PVDF film fra Measurement Specialties Inc. Ytterligere detaljer om bølgelederne på figuren finnes i tabell 5.5.

5.5.1 Produksjon av transdusere og bølgeledere

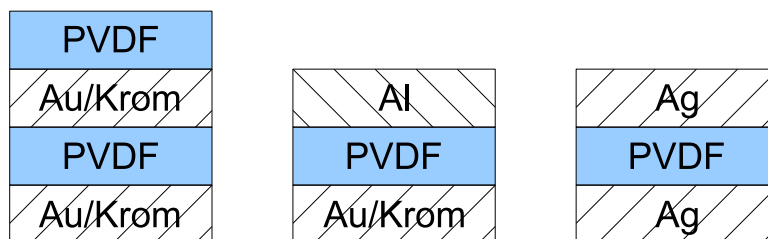
Mange PVDF transdusere ble produsert med tanke på bruk i forsøkene, og flere metoder ble benyttet for å produsere dem. Figur 5.7 viser oppbyggingen av de ulike transduserne. De første var mindre vellykket, og en del måtte kasseres, da manuell produksjon krever en del erfaring før man får et godt resultat. Sensorene ble produsert ved å benytte 40 μm PVDF substrat fra Piezotech S.A.* belagt med et tynt ledende lag av gull og krom på den ene siden. For å få en komplett transduser ble det limt på et lag med metallfolie (aluminium kjøkkenfolie) på den andre siden. I arbeidet med de første prototypene ble både PVDF filmen og metallfolien skåret til og limt sammen før de ble plassert i en 400 bars hydraulisk presse (også referert som limpresse); modell P400 fra Sirio Dental SNC[†] utstyrt med vannavkjølte varmeelementer fra International Crystal Laboratories[‡]. Elementene ble kontrollert av en CN8200

*<http://www.piezotech.fr>

†<http://www.siriodental.it>

‡<http://www.internationalcrystal.net>

temperatur- og prosesskontroller fra Omega Engineering Inc[§]. Under limingen ble det benyttet en temperatur på ca. 60 °C og et trykk på ca. 30 bar. Når pressa ble satt på, ble noe av limet klemt ut langs kanten av transduseren slik at denne delvis limte seg fast mot pressa. For å forhindre dette ble PVDF filmen kuttet til i ettertid, slik at eventuelt overskuddslim som måtte komme ut under pressing ville feste seg til den delen av filmen som likevel skulle skjæres bort, istedenfor til pressa.



Figur 5.7: Til venstre: Transdusere ble produsert ved å legge to Piezotech filmer mot hverandre slik at de ledende lagene dekket PVDF filmen på hver sin side. I midten: Aluminiumsfolie ble først benyttet som ledende lag på den ene siden av transduseren. Til høyre: Oppbyggingen til en ferdigtrykket transduser fra MSI. Det er et ledende lag av sølv på hver side av PVDF filmen.

Det ble også eksperimentert med to ulike limtyper (se tabell 5.4). Det viste seg at Polyuretanlimet var enklest å jobbe med fordi tørketiden var mye raskere enn for epoksy-limet. Dessuten var det enklere å blande til det polyuretanbaserte limet. Kjøkkenfolien var ikke særlig egnet fordi den lett ble revet i stykker. For å forhindre dette ble det forsøkt å lime fast en kobberteip, men heller ikke dette fungerte tilfredsstillende, flere av de første prøvene gikk i stykker når de ble forsøkt koblet til forsterkeren. For å løse problemet ble transduseren istedenfor laget ved å legge to PVDF filmer mot hverandre slik at filmen ble dekket av et ledende lag på hver side. De to PVDF filmene ble deretter limt til sylindere slik at det ekstra laget med piezoelektrisk materiale vendte ut fra sylindere. Transduseren ble deretter limt fast til en sylinder av PMMA. For å fjerne eventuelle luftlommer og få herdet limet, ble sylindere og transduserne satt i den hydrauliske pressa.

Betegnelse	Base	Resultat	Kommentar
Epotek 301-2	Epoksy	Egnet	Gode akustiske egenskaper, lang tørketid
Loctite U-09 FL	Polyuretan	Velegnet	Kort tørketid, gode limeegenskaper

Tabell 5.4: Limtyper benyttet til produksjon av transdusere og bølgeledere.

Tabell 5.5 viser en oversikt over de fire bølgelederne som til slutt ble benyttet i forsøkene, hvilke randbetingelser de har, type transdusere og fysiske dimensjoner. Lengden på bølgelederne var begrenset av de fysiske dimensjonene på limpressa, de lengste bølgelederne vi kunne produsere var 120 mm. Av de bølgelederne som til slutt

[§]<http://www.omega.com>



Figur 5.8: En transduser limes fast mellom en PMMA-sylinder og en kobberplate i limpressa. Limpressa holder en temperatur på 60 °C.

ble vurdert som gode nok til å benyttes i eksperimentet, var det bare sylinder A som benyttet transdusere produsert som nevnt i forrige avsnitt. Lengden på sylinder A er kortere enn de andre fordi vi i første omgang ikke var sikre på hvor kraftig signal vi ville få ut på mottakertransduseren. Vi antok at amplituden ville bli større i en kort bølgeleder. Det er forøvrig bølgeleder A som er simulert i de to numeriske modellene. Sylinderne på 120 mm ble utstyrt med PVDF film fra Measurement Specialties Inc.[¶] som var ferdig belagt med sølv på begge sider. Tykkelsen på denne filmen var 28 μm . Det var dermed unødvendig å lime sammen to filmer for å lage en transduser, den ferdigtrykte filmen kunne limes direkte på sylinderen. Prosedyren for liming og

[¶]<http://www.meas-spec.com>

produksjon var ellers den samme. Under tilklipping av PVDF filmen på $28 \mu\text{m}$ var det uunngåelig at det oppstod kortslutninger langs randen av transduseren. Disse ble effektivt fjernet ved å tilføre en spenning på 40V fra en spenningsgenerator med 1,25 amperes strømbegrensning på den ene siden, mens den andre siden av filmen var koblet til jord. (Når spenningskilden kobles til vil det gå stor strøm gjennom sølvsponet som skaper kortslutning slik at dette brenner bort og kortslutningen forsvinner). På bølgelederne A og B ble transduserne lagt åpent mot luft på baksiden, mens det på bølgeleder C og D ble limt på en kobberkloss med tykkelse 10 mm. Dette ble gjort for å kunne gjenskape de to ulike randbetingelsene som er benyttet i teorien i kapittel 3. Bølgeleder D har dessuten en radius som er 5 mm større enn de andre bølgelederne, dispersjonskurver tilsvarende de som er vist på figurene 2.4 og 2.5 for denne kan finnes på slutten av vedlegg B.

Navn	Lengde	Radius	Randbetingelse	Transduser, tykkelse
A	50 mm	10 mm	Luft	Piezotech, $40 \mu\text{m}$
B	120 mm	10 mm	Luft	MSI, $28 \mu\text{m}$
C	120 mm	10 mm	Kobber	MSI, $28 \mu\text{m}$
D	120 mm	15 mm	Kobber	MSI, $28 \mu\text{m}$

Tabell 5.5: Oversikt over de fire bølgelederne benyttet i eksperimentene.

Det bør forøvrig nevnes at PVDF filmer i tillegg til piezoelektriske egenskaper også har pyroelektriske^{||} og ferroelektriske^{**} egenskaper [54]. Alle forsøkene ble utført ved romtemperatur, vi antar at disse effektene ikke har hatt noen praktisk innvirkning under eksperimentene våre. Det kan forøvrig nevnes at disse andre egenskapene gjør at PVDF filmer også egner seg og benyttes til applikasjoner som sensorer i infrarøde kamera og fingeravtrykkslesere [57].

5.5.2 Benyttet måleutstyr

Oppsettet for eksperimentene er vist på figurene 5.9 og 5.10. Det ble utviklet en kode i LabView*, som vist i tillegg F, for å kommunisere med et datainnsamlingskort fra Ad-Link[†] via PCI interfacet. Dette kortet var den største begrensningen m.h.t. båndbredde i forsøkene og burde med fordel vært skiftet ut med et raskere kort om dette hadde vært tilgjengelig for oss. Maksimal samplingsfrekvens på kortet var nemlig 1 MHz. I følge Nyquistteoremet er det da ikke mulig å sample frekvenser høyere enn 500 kHz uten at det oppstår aliasing og et sinussignal med denne frekvensen vil samples som et trekantsignal [2, 65]. I disse forsøkene er det imidlertid viktig å bevare mer informasjon fra signalet slik at formen kan gjengis med større nøyaktighet. En praktisk øvre grense ble derfor satt til 100 kHz. D/A omformerer på datainnsamlingskortet ble koblet til en 50x forsterker fra Falco Systems[‡]. Denne hadde en båndbredde på hele 2 MHz og en inngangsimpedans på 50Ω . Utgangen på forsterkeren var koblet til sendertransduseren. Utgangen på forsterkeren var 50Ω , mens transduseren var beregnet til å ha en

^{||}Et pyroelektrisk materiale endrer den elektriske polarisasjonen proporsjonalt med endring i temperaturen.

^{**}Et ferroelektrisk materiale er et materiale som har en naturlig permanent elektrisk polarisering.

*<http://www.ni.com/labview>

[†]<http://www.adlinktech.com>

[‡]<http://www.falco-systems.com>

impedans på omlag $2,2 \text{ k}\Omega$ ved 100 kHz. Detaljer omkring impedansberegninger kan finnes i tillegg A.

På den andre siden av sylindren var mottakertransduseren koblet til en forforsterker. Igjen hadde transduseren en impedans på omlag $2,2 \text{ k}\Omega$. Til å begynne med ble det benyttet en AD8331 forsterker fra Analog Devices[§]. Forforsterkeren hadde i utgangspunktet en impedans på 50Ω . Dette gav svært lav amplitude på det mottatte signalet, derfor ble inngangen modifisert som beskrevet i databladet [66] slik at inngangsimpedansen ble $6 \text{ k}\Omega$. Dessverre ble denne forsterkeren ødelagt underveis og det måtte byttes til en tilsvarende forsterker; VCA2611 [67] fra Texas Instruments[¶]. Denne forsterkeren er oppgitt å ha en inngangsimpedans på $600 \text{ k}\Omega$. En så høy inngangsimpedans vil føre til at ladning samler seg på transduserplatene slik at signalet integreres opp^{||}. Modell 2 fra kapittel 5.4 kan justeres til å simulere en slik situasjon og bekrefter dette. Dette var imidlertid ikke tilfellet i forhold til det vi så i praksis. Grunnen til at impedansen er lavere enn det som står i databladet skyldes oppkoblingen på evalueringkortet. Forsterkeren er koblet opp med en positiv tilbakekobling, men det er ikke oppgitt noen verdi på inngangsimpedansen i databladet [68] for denne konfigurasjonen eller metoder for å beregne inngangsimpedansen. Ut fra simuleringer som ble gjort med modell 2 og sammenliknet med signalformen vi observerte i det fysiske systemet kan vi anta at impedansen likevel ligger i området rundt $1 \text{ k}\Omega$.

Forforsterkeren var forøvrig satt opp med en forsterkning på 25 dB på LNA-en og en total forsterkning på 24 dB på VCA/PGA-en. Utgangen ble terminert med en 500Ω motstand og koblet opp differensielt mot inngangen på A/D omformerens. En oppkobling som i følge databladet ville gi ytterligere 6 dB forsterkning. Den totale teoretiske forsterkningen skulle da være 55 dB. Begge kortene er grundigere evaluert i ref. [69].

Forøvrig ble en signalgenerator, 33220A og et DSO3102A digitalt oscilloskop, begge fra Agilent Technologies* benyttet under oppkoblingen for å kalibrere systemet. I tillegg ble et multimeter, UT60E fra Uni Trend[†] og et LCR-meter MIC-4070D fra Motech Industries[‡] benyttet. En kontroll av den totale forsterkningen i forforsterkeren med disse instrumentene presentert på figur 5.11 viste et resultat nært opp til det teoretiske. Ideelt sett burde et antialiasingfilter vært koblet mellom forforsterkeren og A/D-omformerens, men dette var dessverre ikke tilgjengelig. En signalgenerator ble koblet direkte på forforsterkeren og testsignaler opp til 500 kHz kunne uten problemer leses av i LabView. Det ble derfor antatt at denne svakheten i oppsettet ikke ville skape nevneverdige problemer under forsøkene, så lenge signalet var frekvensbegrenset oppad til omkring 100 kHz. Systemet ble forsynt med strøm fra en spenningsregulator med tre justerbare utganger, Powerbox[§] 3000A. Denne ble konfigurert til å levere

[§]<http://www.analog.com>

[¶]<http://www.ti.com>

^{||}Når motstanden koblet på transduseren (som fungerer som en kapasitans) blir stor, vil svært få ladninger kunne strømme ut fra transduseren, og de samles opp i denne. Med andre ord får vi en RC krets med stor tidskonstant som dermed vil fungere som en integrator.

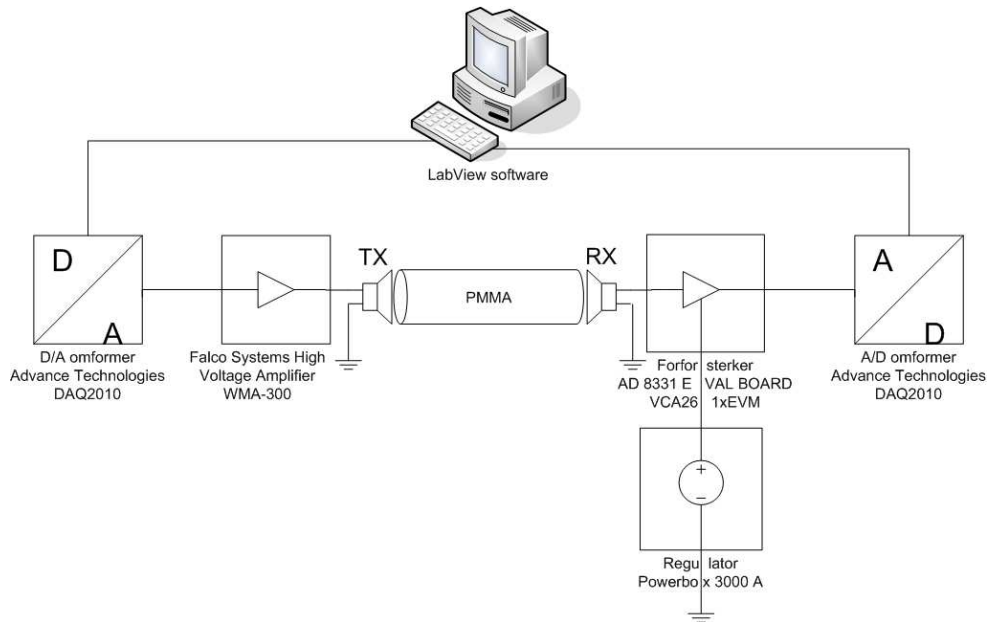
*<http://www.agilent.com>

†<http://uni-trend.com.hk>

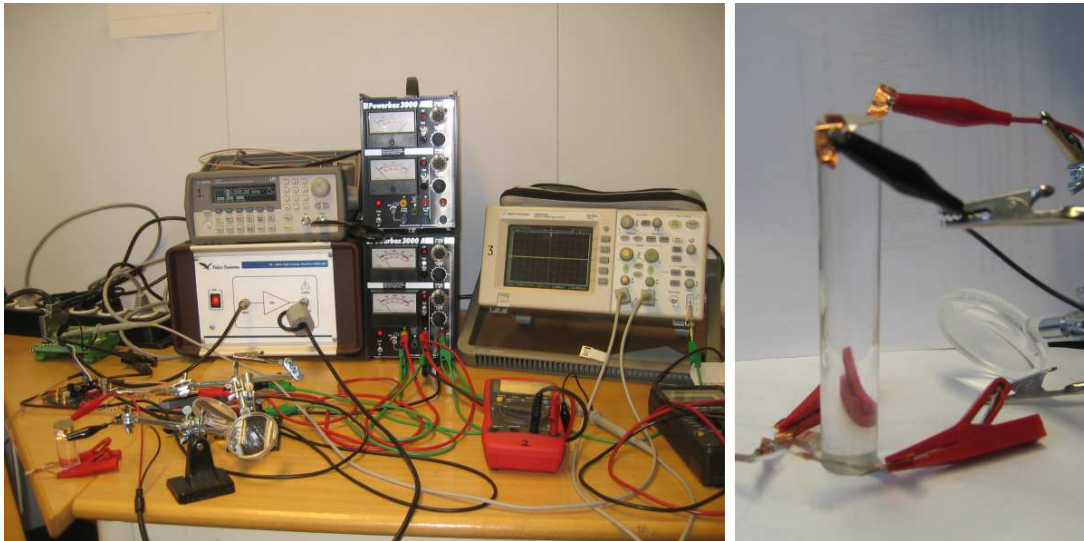
‡<http://www.motechind.com>

§<http://www.powerbox.se>

spenningene +5V, +3V og -5V.



Figur 5.9: Utstyrets oppkobling under eksperimentene.



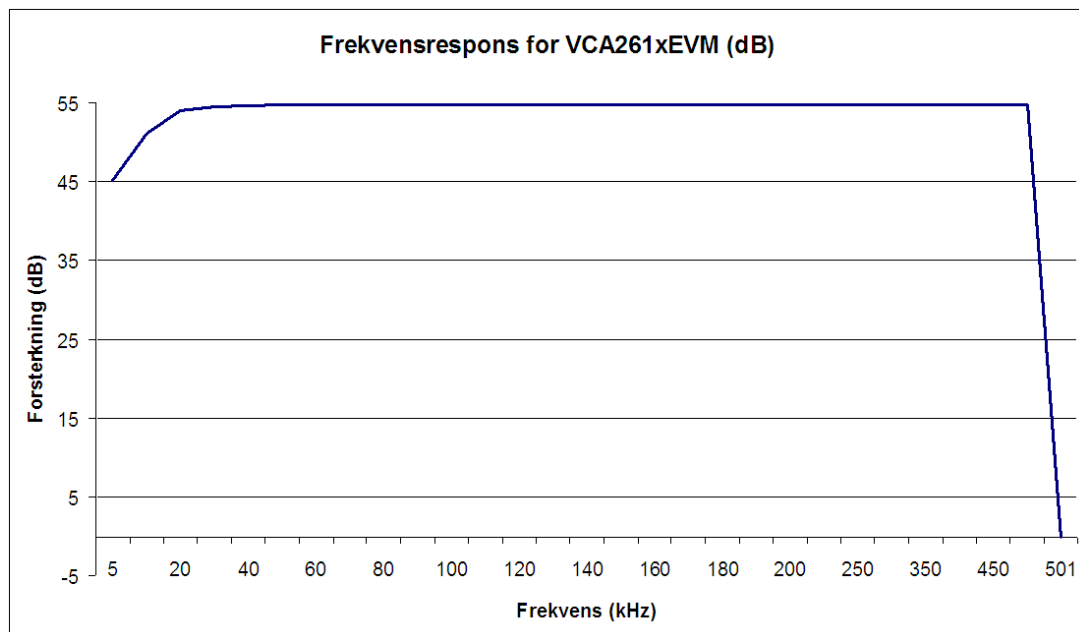
Figur 5.10: Til venstre: Oppsett av utstyret på laboratoriet. Til høyre: Pleksiglassylinder under test, transduasere er limt på i topp og bunn av sylindere.

5.5.3 Praktisk gjennomføring av eksperiment

En Gaussisk formet puls som vist på figur 5.2, men med $\mu = 2000\mu s$ men fremdeles bredde på $\sigma = 1.67\mu s$ og amplitude $A = 150V$, ble sendt ut fra forsterkeren og inn på transduseren. For å fjerne støy på det mottatte signalet, ble eksperimentet gjentatt 20 ganger og deretter midlet. Signalene ble tatt opp med LabView (se tillegg F) og

Utstyr	Modell	Produsent	Kommentar
Datainnsamlingskort	DAQ-2010	Advance Technologies	A/D og D/A kort
Utgangsførsterker	WMA-300	Falco Systems	50x forsterker
Forforsterker	VCA261xEVM	Texas Instruments	Testkort
Forforsterker	AD8331-EVAL	Analog Devices	Testkort
Signalgenerator	33220A	Agilent Technologies	20 MHz
Oscilloskop	DSO3102A	Agilent Technologies	Digitalt, 100MHz
Strømforsyning	Powerbox 3000A	Powerbox	3 utganger
Multimeter	UT60E	Uni-Trend Group	Digitalt
LCR-meter	MIC-4070D	Motech Industries	Digitalt, 1 kHz
Hydraulisk presse	P400	Sirio Dental SNC	Max 400 bar
Varmeelement	-	Int Crystal Labs	Vannavkjølte
Temp. kontrollor	CN8200	Omega Engineering	Digital

Tabell 5.6: Oversikt over utstyr benyttet i forbindelse med eksperimentene.



Figur 5.11: Målt frekvensrespons for forforsterkeren VCA 2611.

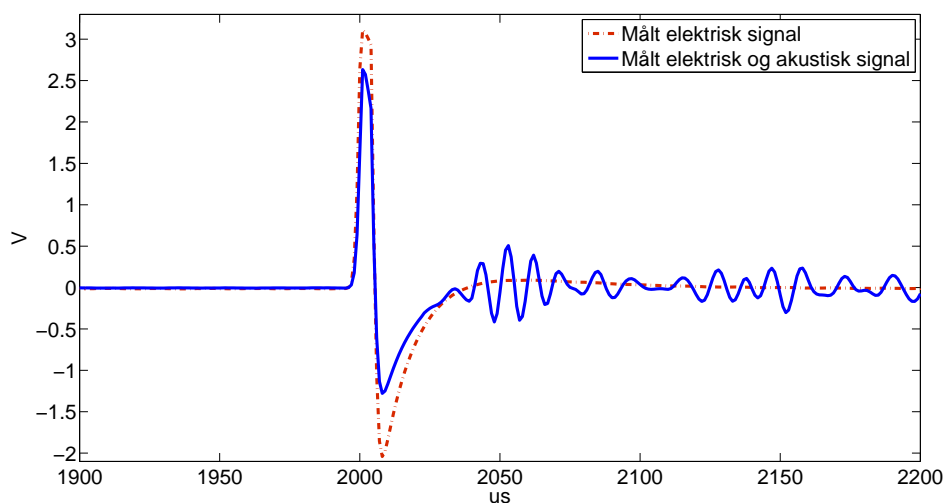
overført til Matlab[¶] for videre analyse.

Som tidligere nevnt vil det umiddelbart oppstå en ganske kraftig puls på mottakertransduseren som følge av kapasitiv kobling mellom transduserne. Pulsen har form som den deriverte av det utsendte signalet (siden forsterkeren på mottakersiden måler strømmen som strømmer ut fra transduserplatene). Den kapasitive koblingen viser seg umiddelbart som et signal på mottakertransduseren fordi elektromagnetiske bølger beveger seg med lyshastigheten i fritt rom, mens den akustiske hastigheten er mye lavere. Vi kaller heretter den delen av signalet som oppstår på grunn av den kapasitive koblingen for den elektriske delen av signalet. Den andre delen kaller vi fremdeles for

[¶]<http://www.mathworks.com>

det akustiske signalet. Før tidsreversering av det mottatte signalet gjøres, ønsker vi å fjerne den elektriske delen av signalet. Dette er viktig fordi det, som vi skal se senere, vil oppstå et problem når vi tidsreverserer og sender tilbake et dispersivt signal. Siden det dispersive signalet har mye lengre tidsutstrekning enn pulsen vi først sendte, og bølgelederne er så korte, kan den første delen av det akustiske signalet nå fram mens det fremdeles overføres signal som følge av kapasitiv kobling. Vi behøver derfor en metode som kan skille disse to fra hverandre. Ved å bryte den elektriske kontakten fra forsterkeren til elektrodene på sendertransduseren fjerner vi muligheten til å produsere et akustisk signal. Det vil likevel oppstå et elektrisk felt mellom kablene og mottakertransduseren slik at vi fremdeles får overført størsteparten av det elektriske signalet. Som følge av at transduseren ikke er koblet til lengre er signalet faktisk noe økt i amplitude^{||}, men formen er omtrent den samme.

Figur 5.12 viser hvordan signalet ser ut med og uten en akustisk del. Ved å trek-

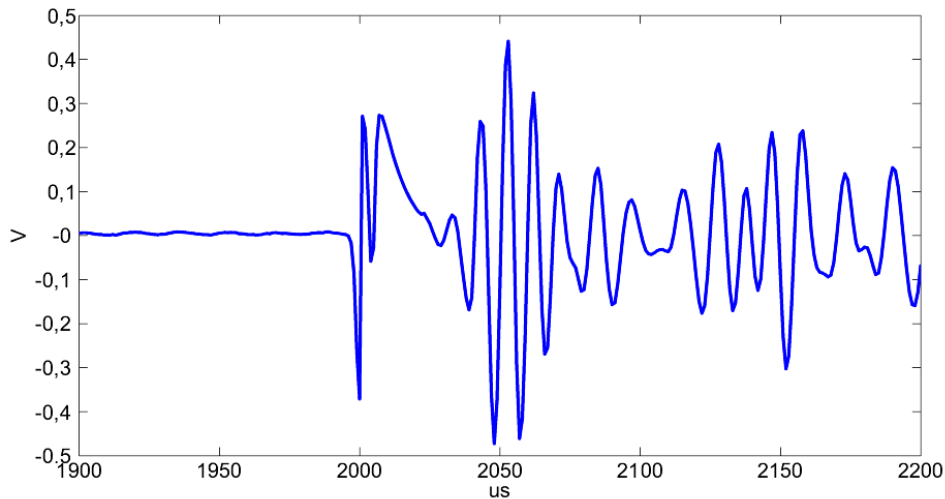


Figur 5.12: Signalet som mottas vil inneholde en akustisk del og en elektrisk del som følge av kapasitiv kobling mellom transduserne.

ke fra hverandre de to signalene kan vi fjerne mesteparten av det uønskede elektriske signalet. Amplituden på det elektriske signalet ble først skalert ned slik at det stemte overens med amplituden i det elektriske signalet. Deretter ble de trukket fra hverandre, med resultatet vist på figur 5.13. En liten del av det elektriske signalet er fremdeles synlig, men kan effektivt fjernes med en vindusfunksjon før tidsreverseringen gjøres. Forøvrig kan det se ut som om hovedpulsen og senere mottatte ekko glir over i hverandre, men at hovedpulsen ender ved omlag $2100 \mu s$.

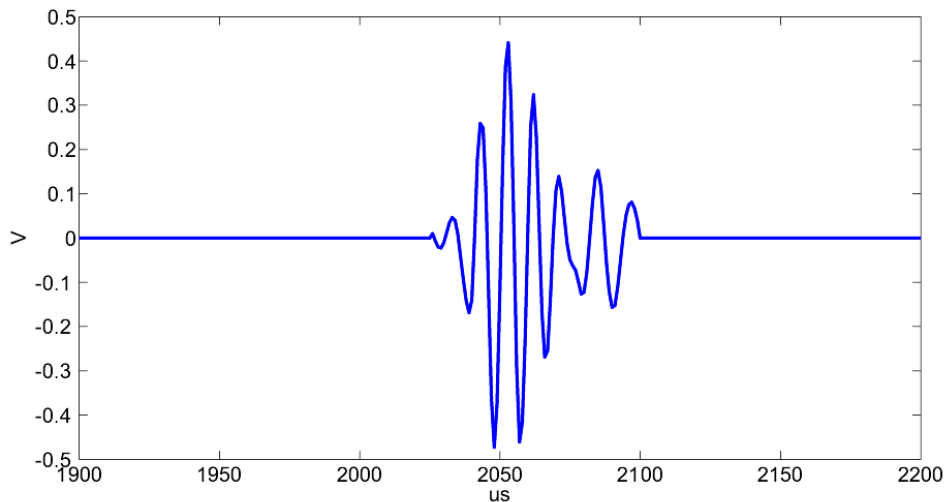
I figur 5.14 har vi tatt ut den delen av signalet som vi antar hører til den akustiske hovedpulsen. Det er dette signalet vi senere tidsreverserer og sender gjennom sylindere nok en gang. Før signalet sendes tilbake blir det forsterket slik at høyeste

^{||}Transduserplatene som vender inn mot sylindere er koblet til jord (illustrert på figur 5.5) slik at det elektriske feltet ikke kan gå gjennom sylindere. Når den ene transduseren kobles fra, er ikke lenger platen på denne jorden, dermed kan feltet også bre seg gjennom sylindere og dette kan være en naturlig forklaring på at koblingen øker i amplituden.



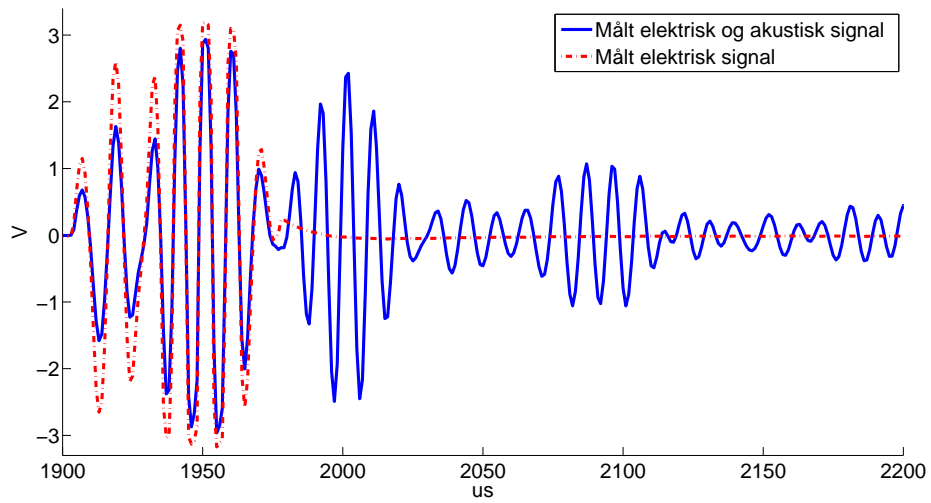
Figur 5.13: Når signalene på figur 5.12 skaleres og trekkes fra hverandre, kan meste-parten av det elektriske signalet som stammer fra den kapasitive koblingen mellom transduserne fjernes.

amplitude er 150V. Signalet som mottas etter tidsreverseringen vil igjen være et signal



Figur 5.14: Signalet som antas å være direkte overført (uten ekko) tas ut for å forsterkes og tidsreverseres.

som består av en elektrisk del og en akustisk del, som vist på figur 5.15. For å komme fram til resultatene vist i kapittel 6 benytter vi samme metode som tidligere for å fjerne så mye av den elektriske delen av signalet som mulig. På figur 5.15 ser vi at forskjellen i amplitude mellom de to signalene er størst mellom 1900 og 1940 μs , mens den er forholdsvis lik etterpå, derfor vil det være umulig å fjerne hele bidraget av den elektriske koblingen med denne metoden.



Figur 5.15: Mottatt signal etter tidsreversering.

Kapittel 6

Resultater

I dette kapitlet presenterer vi kort resultatene fra de to numeriske modellene og de eksperimentelle forsøkene våre, mens resultatene er diskutert i kapittel 7.

6.1 Numeriske resultater

Resultatene fra de to numeriske modellene er presentert i de påfølgende delkapitlene. De numeriske resultatene er sammenliknet med de eksperimentelle resultatene på slutten av kapitlet.

6.1.1 Resultat fra modell 1 (Comsol Multiphysics)

Vi benyttet en maskin fra HP med 2 GB RAM og en Intel Centrino Duo T2400 prosessor med klokkefrekvens på 1.83 GHz i hver prosessorkjerne. Modellen er løst ved å benytte dynamisk tidssteg, men løsningen er lagret for hvert μs .

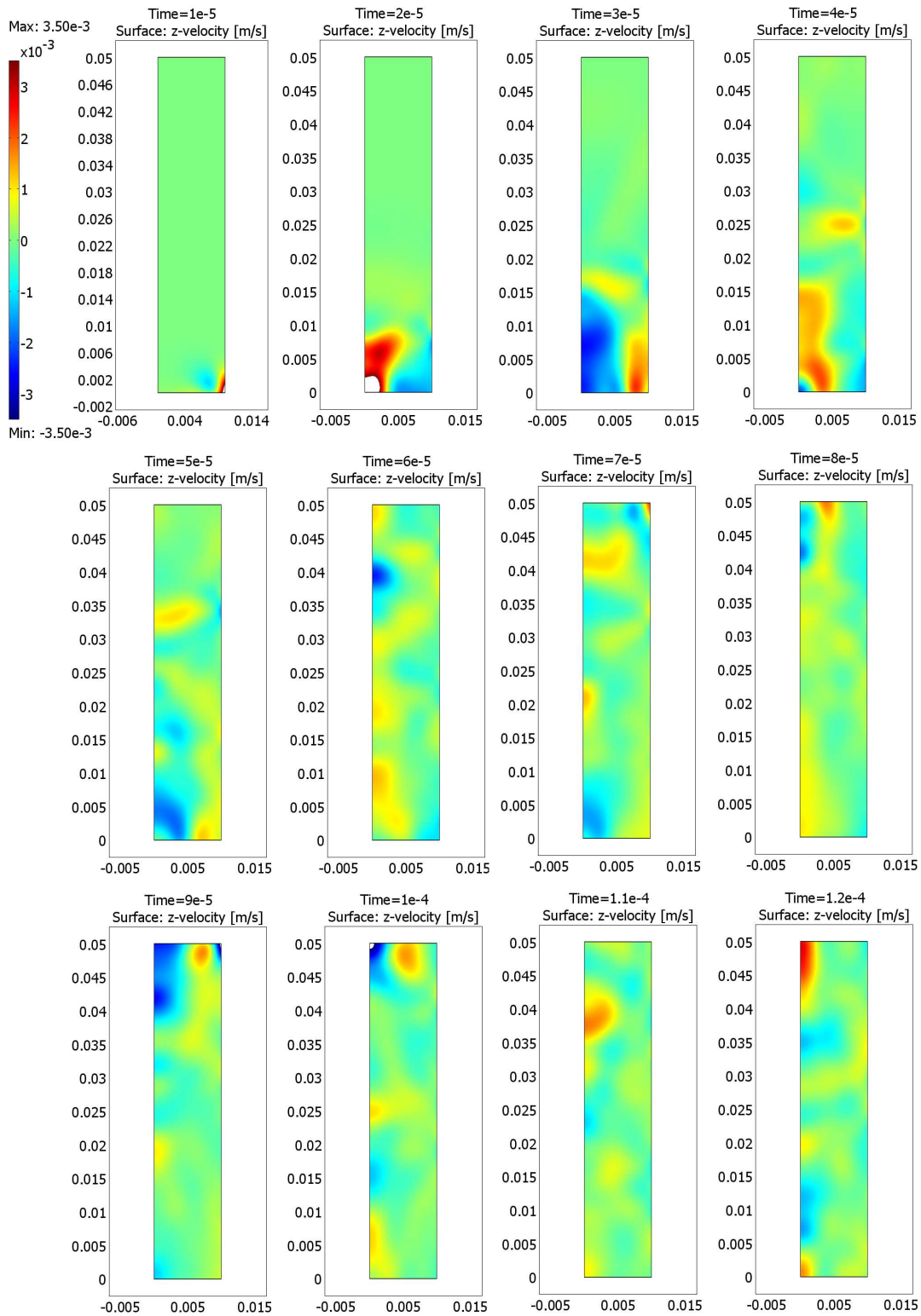
I figur 6.1 er den transverselle hastigheten ved utvalgte tidspunkt i sylindere vist. Hastigheten har stort sett størst amplitude mot midten av sylindere, mens den er lavere langs randen.

Figur 6.2 viser den elektriske spenningen på mottakertransduseren plottet som en funksjon av tid og radius, $U(r, t)$. Legg merke til at det største potensialet skapes mot midten av transduseren, i tråd med at hastigheten også er størst her.

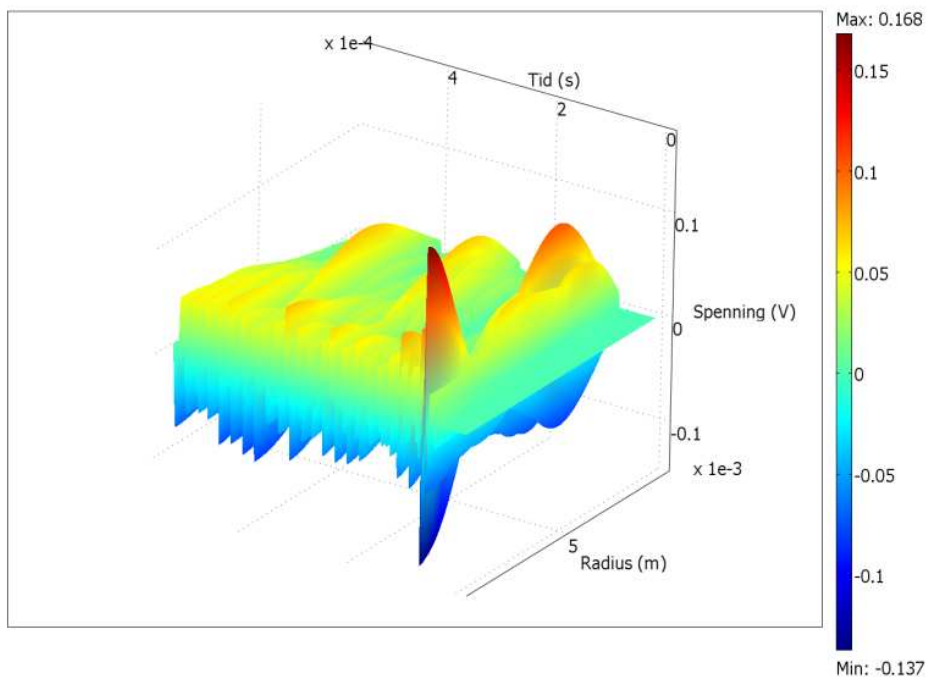
Ved å benytte likning (5.4) og integrere opp løsningen presentert i figur 6.2, får vi et resultat som svarer til at det var et ledende metallisk lag på hver side av transduserne. Resultatet av integrasjonen i Comsol er vist på figur 6.3. Dette resultatet vil i motsetning til resultatene presentert de andre figurene være sammenliknbart med resultatene fra eksperimentene.

Figurene 6.4 og 6.5 viser henholdsvis den longitudinelle og transverselle hastigheten i PMMA sylindere i nærheten* av sendertransduseren som funksjon av tid og radius.

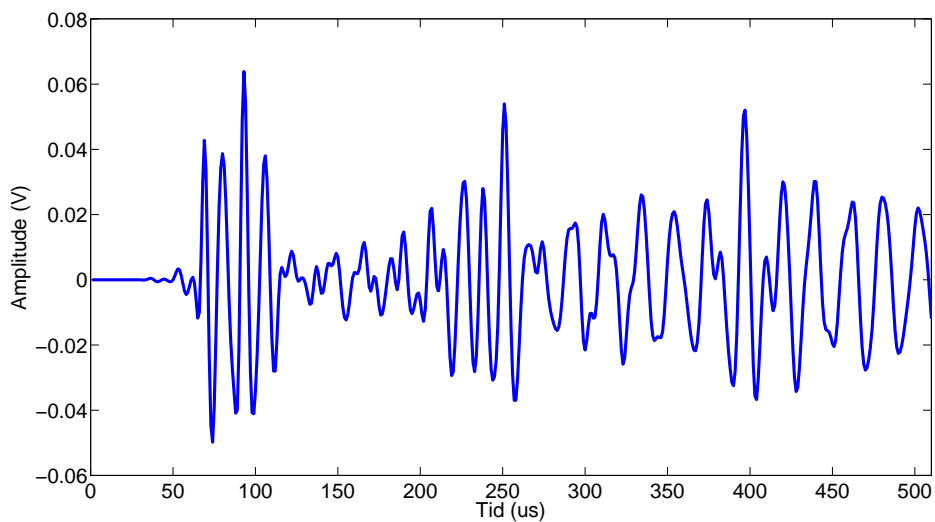
*Plottet er tatt ved $z = 10 \mu m$ der $z = 0$ tilsvarer begynnelsen av PMMA sylindere.



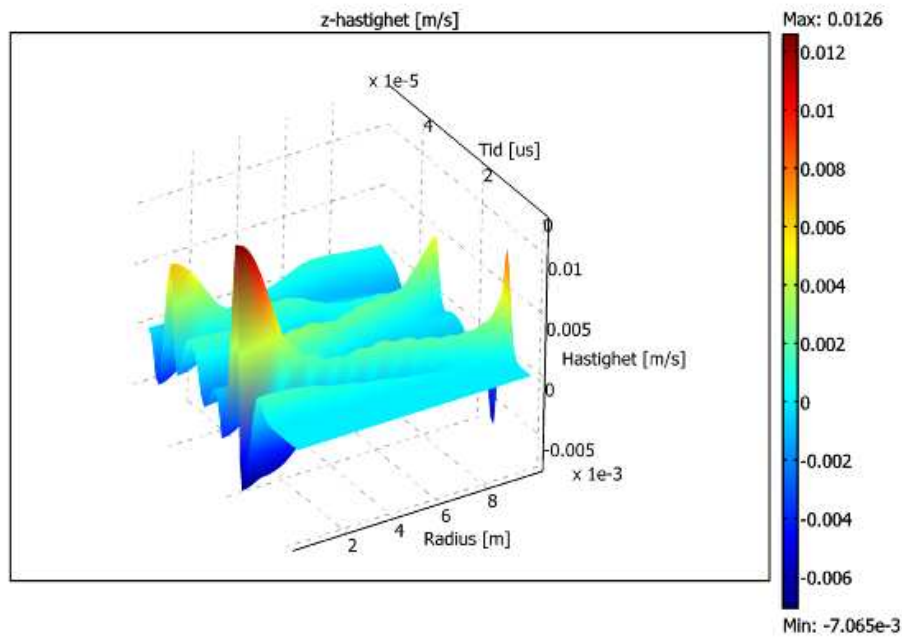
Figur 6.1: Simulering av longitudinell hastighet i en 50 mm lang sylinder med radius 10 mm ved utvalgte tidspunkt. Tid er angitt i μs . Merk at figuren viser den aksesymmetriske løsningen, det vil si kun et tverrsnitt langs radius og ikke over hele diameteren av sylindren.



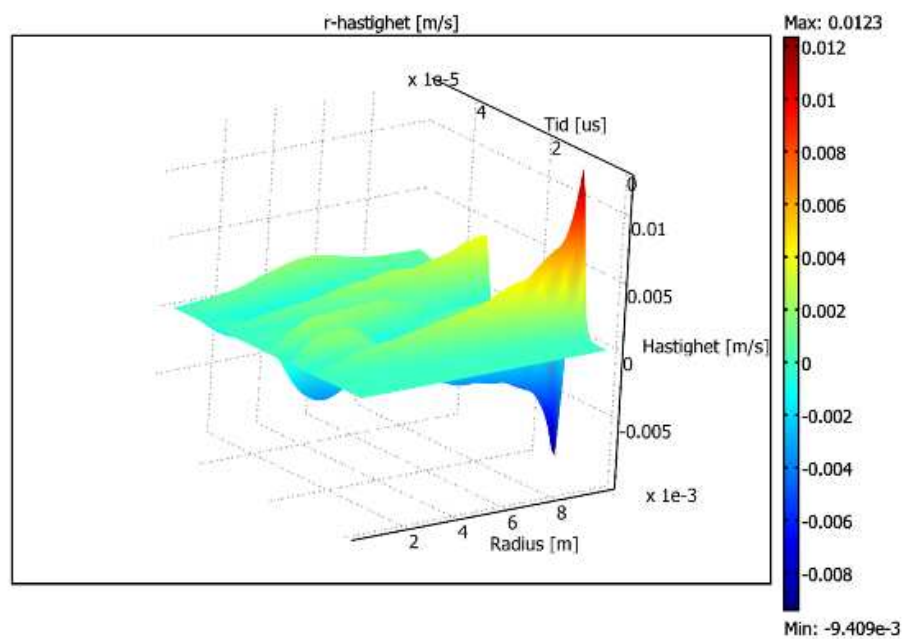
Figur 6.2: Simulering av generert spenning på mottakertransduseren som en funksjon av tid og radius.



Figur 6.3: Simulering av spenning generert på mottakertransduseren som funksjon av tid.



Figur 6.4: Hastighetsfeltet forbundet med de longitudinelle bølgene. Legg merke til hvordan formen på signalet endrer seg som en funksjon av radius. Plottet er tatt som et tverrsnitt ved $z = 10 \mu\text{m}$.



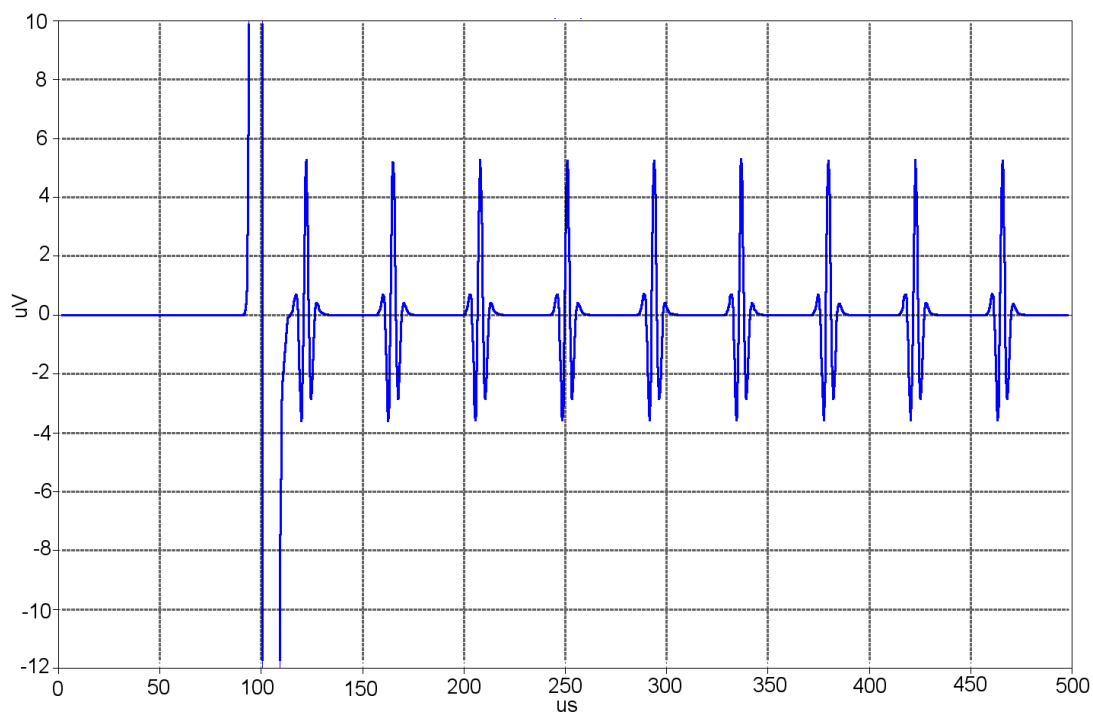
Figur 6.5: Hastighetsfeltet forbundet med transverselle bølger. Figuren viser hvordan formen på signalet endrer seg som en funksjon av radius. Plottet er tatt som et tverrsnitt ved $z = 10 \mu\text{m}$.

6.1.2 Resultater fra modell 2 (SPICE)

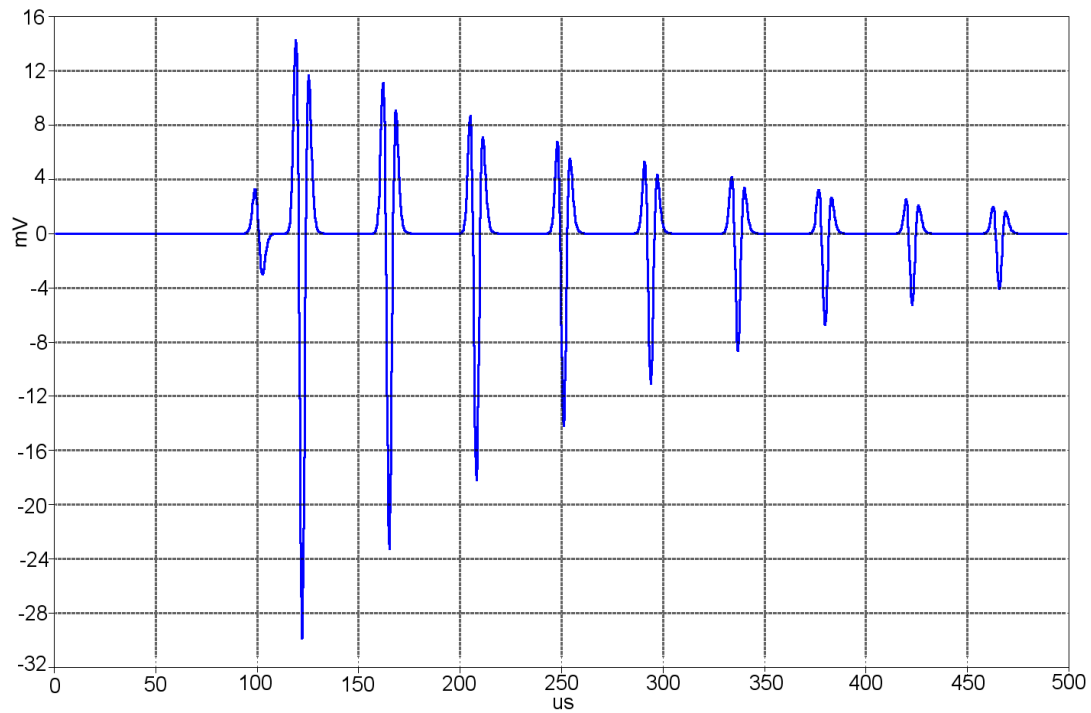
En Gaussisk puls som vist på figur 5.2 er generert på systemets sendertransduser. Figur 6.6 viser bølgeformen på spenningen generert over mottakertransduseren når både sender- og mottakertransduserne ligger fritt mot luft på den ene siden, tilsvarende bølgeleder A og B benyttet i forsøkene.

Figur 6.7 viser bølgeformen på spenningen generert over mottakertransduseren når det benyttes en modell med kobber på baksiden av både sender- og mottakertransduserne, tilsvarende bølgeleder C og D.

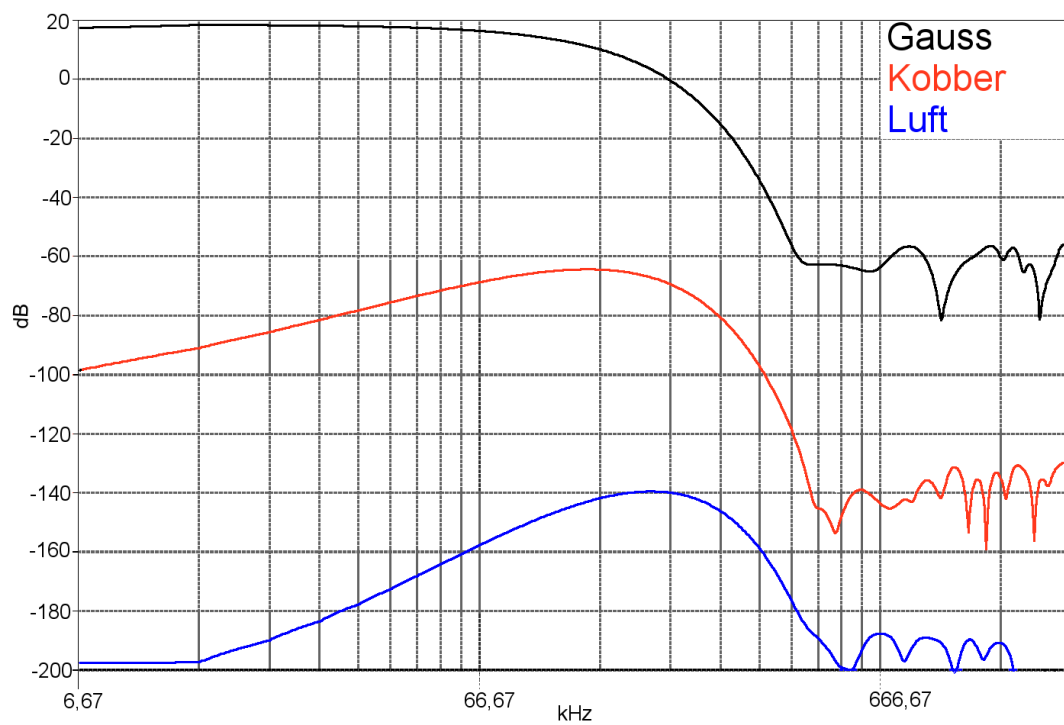
På figur 6.8 vises frekvensinnholdet i en Gaussisk puls sammen med frekvensplott for en enkelt av pulsene vist på hver av figurene 6.6 og 6.7. Plottet er laget ved å benytte den innebygde FFT funksjonen i LTSpice. Transformen er kjørt med 16384 datapunkter på tidsskalaen og et Hamming vindu er benyttet.



Figur 6.6: Utgangsspenning for en transduser med luft på baksiden.



Figur 6.7: Utgangsspenning for en transduser med metall på baksiden.



Figur 6.8: FFT plot av frekvensinnholdet i en Gaussisk puls (sort), puls i sylinder med kobber (rødt) og puls i sylinder med luft (blått).

6.2 Eksperimentelle resultater

Det ble utført forsøk med tidsreversering i fire ulike bølgeledere. Lengde, diameter og akustisk impedans på baksiden av transduserne var parametere som ble variert i de fire prøvene som beskrevet i tabell 5.5. For alle resultatene presentert her er metoden beskrevet i 5.5.3 for å fjerne den elektriske delen av signalet (generert av den kapasitive koblingen mellom transduserne) benyttet.

Bølgeleder A

Figur 6.9 viser resultatet etter tidsreversering. I tillegg er signalet som ble mottatt på mottakertransduseren vist i rødt på figuren. Figur 6.10 sammenlikner den opprinnelig sendte Gaussiske pulsen, det tidsreverserte signalet og den åttendederiverte av den Gaussiske pulsen.

Bølgeleder B

Figur 6.11 viser det tidsreverserte signalet. I tillegg er signalet som ble mottatt på mottakertransduseren vist i rødt på figuren. Figur 6.12 sammenlikner den opprinnelig sendte Gaussiske pulsen, det tidsreverserte signalet og den åttendederiverte av den Gaussiske pulsen.

Bølgeleder C og D har kobber på baksiden av transduserne. Kobber er et metall med relativt høy akustisk impedans, og ut ifra teorien i kapittel 3, er det naturlig å forvente at vi mottar et signal som har lavere grad av derivasjon enn hva vi har sett for tilfellene med luft (bølgeleder A og B). Disse resultatene er derfor sammenliknet med den fjerdederiverte av Gaussiske pulsen, i motsetning til den åttendederiverte som ble benyttet til å sammenlikne de to første.

Bølgeleder C

Figur 6.13 viser signalet etter tidsreverseringen. I tillegg er signalet som ble mottatt på mottakertransduseren vist i rødt på figuren. På figur 6.14 er det målte resultatet sammenliknet med den opprinnelig sendte Gaussiske pulsen og den fjerdederiverte av denne.

Bølgeleder D

I figur 6.15 vises det tidsreverserte resultatet. I tillegg er signalet som ble mottatt på mottakertransduseren vist i rødt på figuren. Figur 6.16 sammenlikner det målte signalet med den opprinnelig sendte Gaussiske pulsen og den fjerdederiverte.

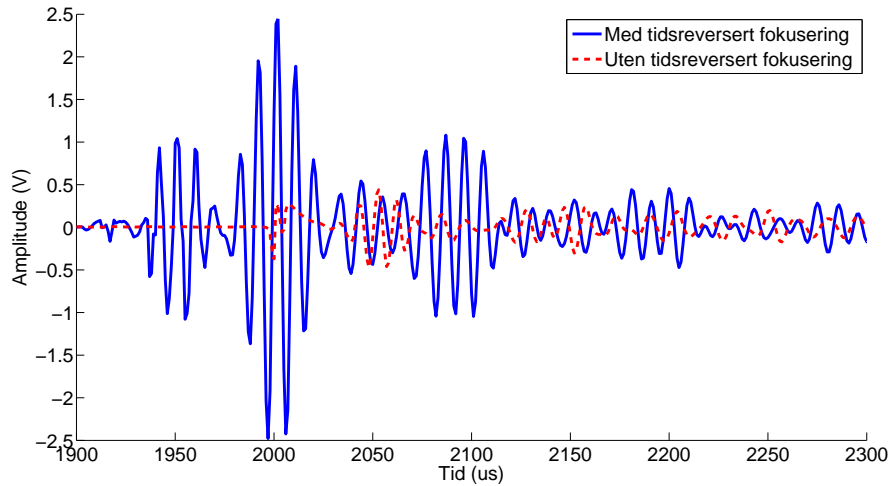
Når det gjelder amplituder på signalene i de påfølgende figurene må det bemerkes at disse ikke er sammenliknbare størrelser. Når signalet er mottatt første gang forsterkes det opp slik at den største amplituden på det mottatte signalet er det maksimale av hva forsterkeren kan levere. Avhengig av formen på signalet (som skal tidsreverse-res) tilføres det litt ulik energi i prøvene A, B, C og D.

For figurene 6.10, 6.12, 6.14 og 6.16 er verdiene på amplitudeskalaen fjernet, fordi signalene som vises som referanse kun er ment for å sammenliknes på form (først og

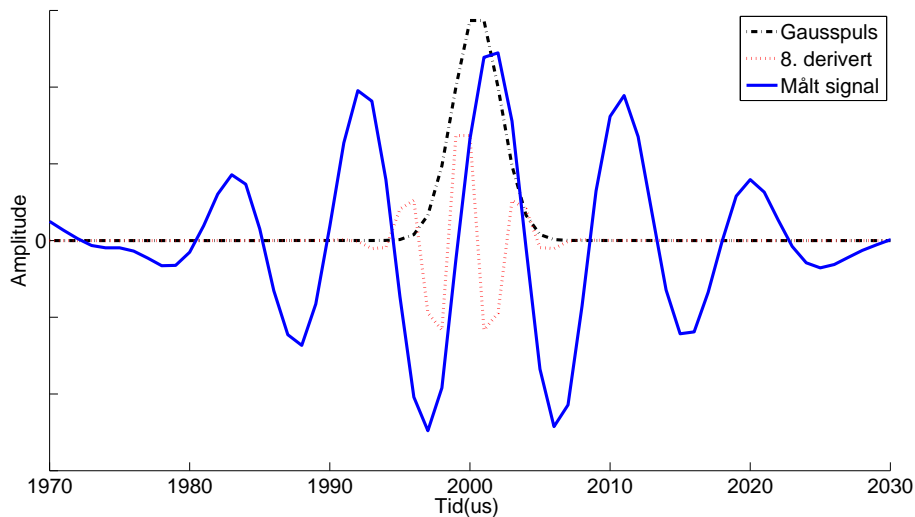
fremst antall nullpunkter i de deriverte og de målte).

For alle figurene presentert i dette delkapittelet gjelder også at signalet er midlet over 20 sendinger, for å fjerne støy. Det må bemerkes at støy ikke ble opplevd som noe stort problem i systemet vårt og at det så ut til at 20 kjøringar var tilstrekkelig for å fjerne de små fluktasjonene som var synlig ved kun en gjennomkjøring.

6.2.1 Bølgeleder A

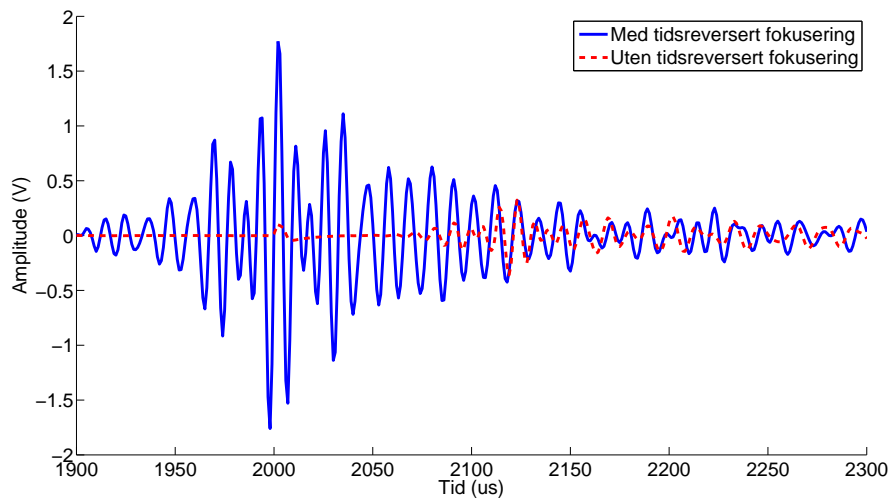


Figur 6.9: Bølgeleder A: Det akustiske tidsreverserte signalet i en sylinder med radius 10 mm, lengde 50 mm og luft bak transduserne (blått). Signal mottatt på mottakertransduseren etter sending av en Gaussisk puls (rødt).

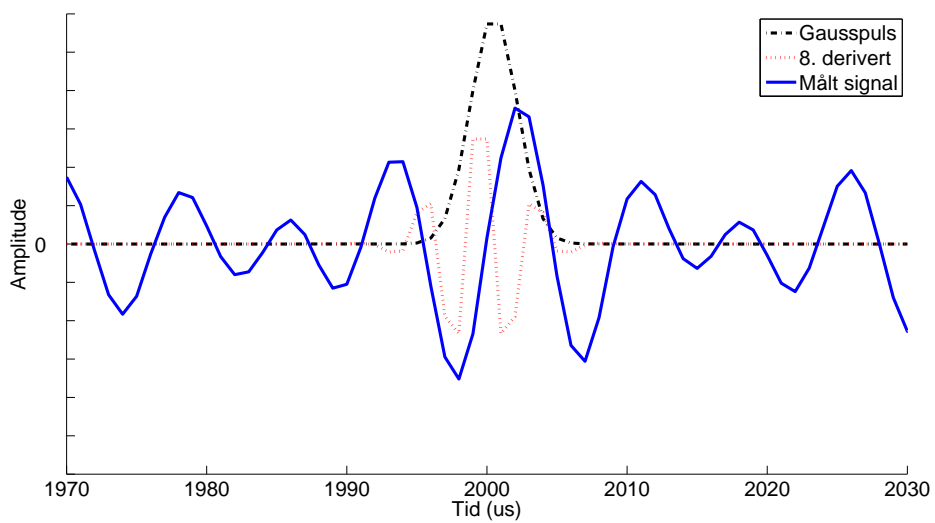


Figur 6.10: Sammenlikning mellom Gaussisk puls, åttendederivert og målt tidsreversert signal fra bølgeleder A.

6.2.2 Bølgeleder B

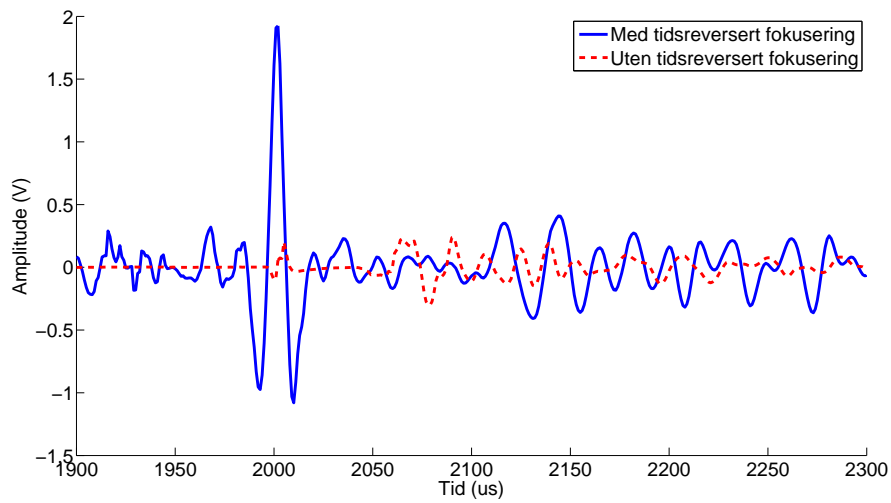


Figur 6.11: Bølgeleder B: Tidsreversert fokusering av en Gaussisk puls i en sylinder med radius 10 mm, lengde 120 mm med luft på baksiden av transduserne (blått). Signal mottatt på mottakertransduseren etter sending av en Gaussisk puls (rødt).

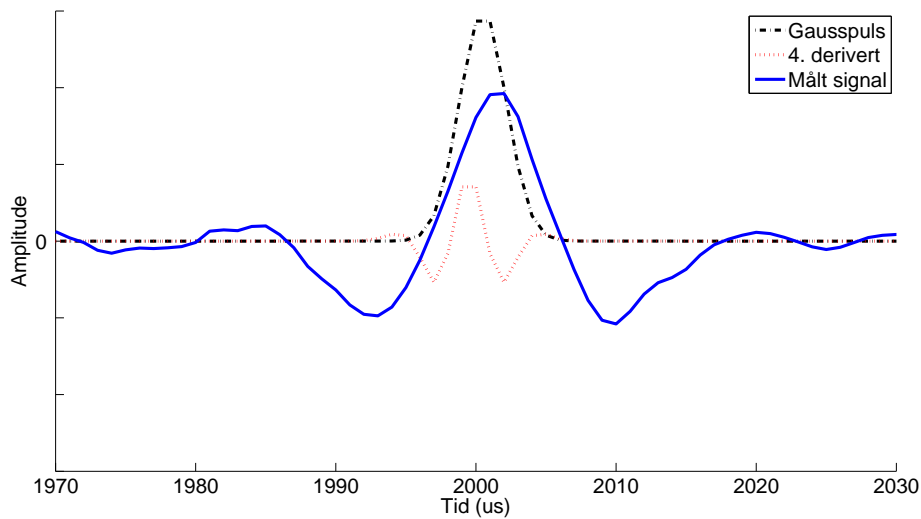


Figur 6.12: Sammenlikning mellom Gaussisk puls, åttendederivert og målt tidsreversert signal fra bølgeleder B.

6.2.3 Bølgeleder C

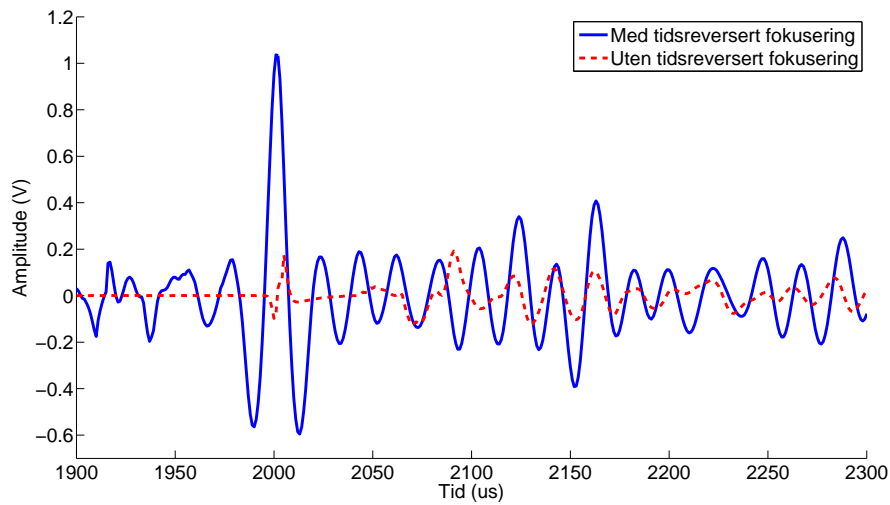


Figur 6.13: Bølgeleder C: Tidsreversert fokusering av en Gaussisk puls i en sylinder med radius 10 mm, lengde 120 mm med et tykt kobberlag på baksiden av transduserne (blått). Signal mottatt på mottakertransduseren etter sending av en Gaussisk puls (rødt).

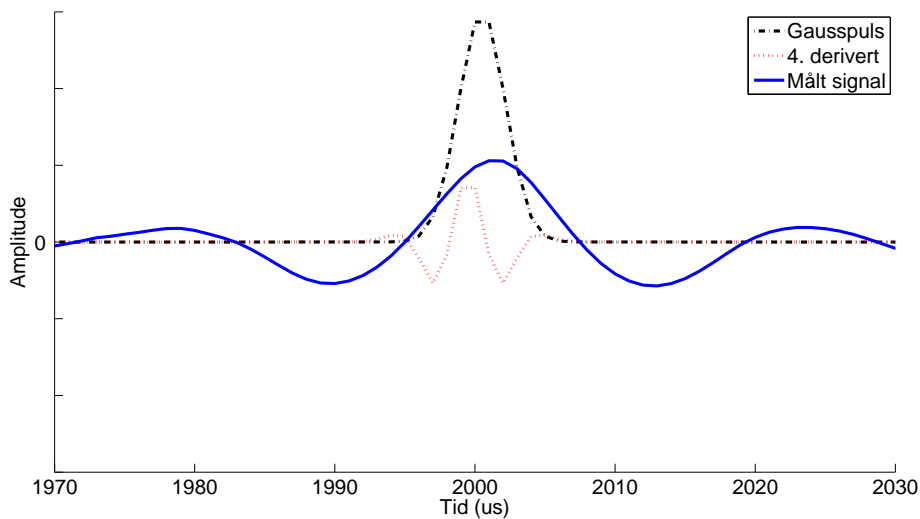


Figur 6.14: Sammenlikning mellom Gaussisk puls, fjerdederivert og målt tidsreversert signal fra bølgeleder C.

6.2.4 Bølgeleder D



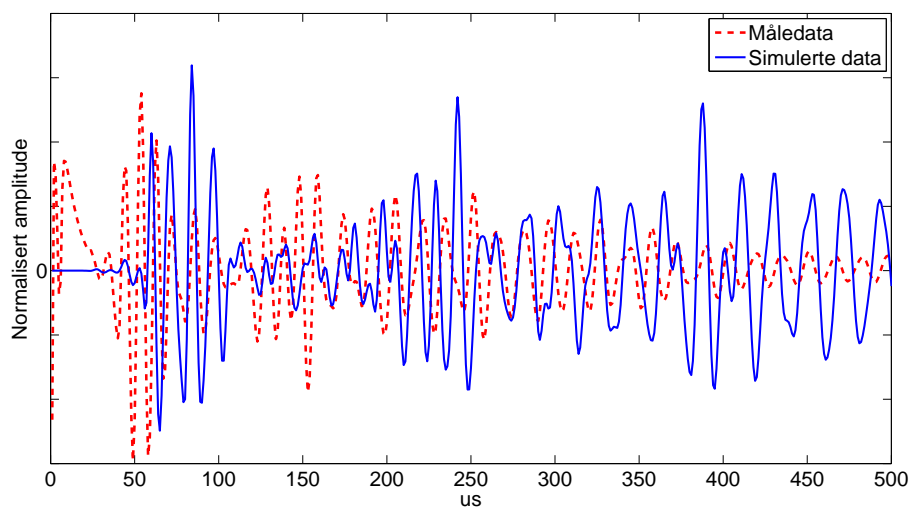
Figur 6.15: Bølgeleder D: Tidsreversert fokusering av en Gaussisk puls i en sylinder med radius 15 mm, lengde 120 mm med et tykt kobberlag på baksiden av sylindrene (blått). Signal mottatt på mottakertransduseren etter sending av en Gaussisk puls (rødt).



Figur 6.16: Sammenlikning mellom Gaussisk puls, fjerdederivert og målt tidsreversert signal fra bølgeleder D.

6.3 Sammenlikning av numeriske og eksperimentelle resultat

Signalet mottatt på mottakertransduseren før tidsreversering ble sammenliknet med det numeriske resultatet fra modellen presentert i 5.3 for å kunne evaluere gyldigheten av den numeriske modellen. Amplitudene måtte normaliseres før formen kunne sammenliknes, siden det var forholdsvis stor forskjell i amplituden mellom det simulerte og det faktisk målte signalet. Det numeriske resultatet er forøvrig tidligere vist med amplitude i figur 6.2. Amplituden til det målte signalet er tidligere vist i figur 5.13, men man må her ta høyde for forsterkningen på 55 dB ($\approx 560 \times$) i forforsterkeren. Det blir da omtrent en faktor 80 i forskjell mellom amplituden på signalene, der det simulerte har den høyeste amplituden. Tidsskalaen er også justert, slik at $0 \mu s$ tilsvarende μ for den Gaussiske pulsen i begge tilfellene.



Figur 6.17: Sammenlikning av simulerte og målte verdier.

Kapittel 7

Diskusjon og konklusjon

7.0.1 Praktiske begrensninger

Vi vil her ta for oss resultatene presentert i kapittel 6 og forsøke å tolke disse og knytte dem sammen med teorien presentert i tidligere kapitler. Før vi går i gang med å diskutere resultatene skal vi si litt om hvilke begrensninger som ligger i de to numeriske modellene vi har benyttet. Kapittelet avsluttes med en konklusjon og forslag til videre arbeid.

7.1 Begrensninger i de numeriske modellene

Ingen modeller kan gjengi virkeligheten perfekt, modeller benyttes tvert imot som regel til å forenkle virkeligheten slik at vi lettere kan forstå den. I forhold til det fysiske måleoppsettet er det gjort forenklinger i begge de numeriske modellene.

7.1.1 Modell 1 (Comsol Multiphysics)

Modellen beskriver for det første bare randbetingelsene som benyttes i bølgeleder A og B. Geometrien i modellen forøvrig tilsvarende bølgeleder A (lengre sylindere ville ført til flere maskepunkter og vi ville fått problemer med for lite minne i datamaskinen). Vi antar at all spenning fra forsterkeren overføres til transduseren slik at vi sender ut en perfekt Gausskurve med amplitude på 150V. I det fysiske måleoppsettet er dette neppe tilfellet i og med at transduserne og forsterkerne ikke er helt impedanstilpasset. Videre ser vi i den numeriske modellen bort fra at et limlag som i bølgeleder A vil øke avstanden mellom elektrodene og at dielektrisitetskonstanten er annerledes i limlaget. Vi ser også bort fra eventuelle dempnings- og spredningseffekter av limlaget mellom transduseren og PMMA sylindere. I sum vil disse forenklingene føre til at amplituden på det mottatte signalet i denne modellen sannsynligvis vil være høyere enn hva vi kan forvente i virkeligheten. Vi antar også at transduserne har en bakside som er helt fri, mens de i virkeligheten vil ligge mot luft, som har en liten akustisk impedans. Det er videre benyttet typiske tabellverdier for de akustiske egenskapene i den numeriske modellen og noen av disse verdiene har forholdsvis stor usikkerhet. I ref. [54] varierer som et eksempel Youngs modulus for PMMA fra 2,5 til 3,3 *GPa*. Det kan ikke garan-

teres at materialene benyttet i det fysiske eksperimentet har de samme verdiene som de benyttet i den numeriske modellen.

7.1.2 Modell 2 (SPICE)

SPICE modellen er for det første en endimensjonal modell. Dette gjør at modellen egner seg dårlig til å sammenliknes direkte med resultatene i fra modell 1 og resultatene fra det fysiske måleoppsettet. Til gjengjeld kan modellen fint benyttes til å beskrive resultatene fra kapittel 3, og vi kan trekke viktige konklusjoner med oss videre inn i to og tre dimensjoner.

7.2 Diskusjon av resultatene

Vi vil først diskutere resultatene fra de numeriske modellene og knytte disse opp mot teorien presentert i tidligere kapitler, før vi til slutt knytter sammen resultatene fra alle modellene og benytter disse til å forklar det vi ser i forsøkene.

7.2.1 Modell 1 (Comsol Multiphysics)

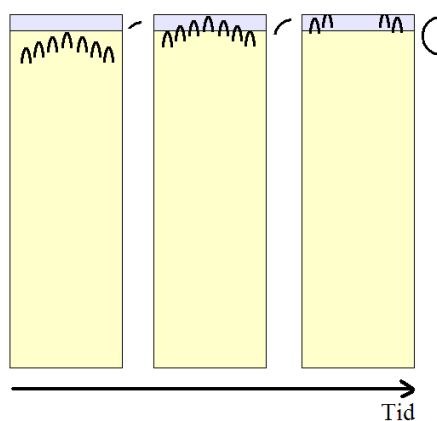
Fra teorien presentert i kapittel 2 vet vi at bølgene i sylindren vil være svært disperse. Kapittel 3 sier videre at en transduser kan fungere som et derivasjonsfilter for konvertering mellom en spenning og en akustisk puls og motsatt. I denne modellen har vi antatt at transduserne ligger fritt på baksiden, dermed vil vi forvente at en Gaussisk puls vil deriveres to ganger i sendertransduseren og ytterligere 2 ganger i mottakertransduseren. Siden signalet vi sender ut er bredbåndet og vil utsettes for både dispersjon og derivasjon, vil det være vanskelig å tolke signalet på mottakertransduseren. Ser vi derimot på et område nær sendertransduseren vil vi kunne få ut en del interessant informasjon.

I figur 6.4 er det longitudinelle hastighetsfeltet ved sendertransduseren vist. Vi ser her at signalet har en form som minner om en andrederivert mot midten av sylindren. Når vi nærmer oss randen av sylindren ser vi at signalet endrer form og nærmer seg formen til den første deriverte av signalet. Ser vi nærmere på figur 6.5 ser vi at det også settes i gang transversell bevegelse langs randen av sylindren. Dette tyder på at det i tillegg til longitudinelle moder også eksiteres betydelige transverselle moder. At hastighetsfeltet har form som en andre derivert stemmer overens med resultatet fra den endimensjonale modellen i kapittel 3.3 vist i likning 3.26b. At signalet langs randen av sylindren har en annen form kan vi ikke forklare med teorien vi har vært igjennom så langt, men vi må anta at det skyldes effekter som oppstår langs randen av transduseren. I ref. [53] benyttes for eksempel transduserer med vesentlig større radius enn sylindren, i den hensikt at man ønsker å være sikker på at trykkdistribusjonen over hele arealet på enden av sylindren skal være konstant med radius.

Figur 6.2 viser signalet på mottakertransduseren som funksjon av tid og radius. Vi ser at signalet endrer seg som en funksjon av radius, og har høyest amplitude nær midten av sylindren. Dette kan delvis forklare med figur 6.1, der den longitudinelle hastigheten er plottet. Figuren viser at de største hastighetene oppstår langs midten av transduseren, mens langs randen ser hastigheten ut til å være lavere. Dermed er det naturlig at også det største potensialet skapes midt i transduseren. På figur 6.3 er

gjennomsnittet av spenningen over mottakertransduseren vist. Figuren er framkommet ved at resultatet vist i figur 6.1 er integrert opp over hele arealet. Vi ser her at hovedpulsene treffer transduseren rundt $70 \mu\text{s}$ og dør ut etter ca. $120 \mu\text{s}$. Med en enkelt transduser over store deler av sylindrens endeflate vil man ikke kunne oppfatte at signalet egentlig er en funksjon av radius, men kun få et gjennomsnitt av signalet over hele arealet.

Hvis vi forutsetter at en bølge kommer inn mot en transduser som en planbølge som ikke varierer med radius, vil all informasjonen være bevart. Dette er imidlertid ikke mulig i vårt system. Når bølgen først når midten av sylindren vil den generere en spenning på transduseren, det vil fortsette å genereres spenning til hele bølgen har passert transduseren. Langs randen vil bølgen da på grunn av lavere hastighet ankomme senere. Prinsippet er forsøkt illustrert på figur 7.1. Vi kan se på dette fenomenet som en



Figur 7.1: Romlig aliasing. En opprinnelig planbølge forsinkes som en funksjon av radius.

romlig undersampling eller aliasing, siden den romlige oppløsningen er for dårlig til å oppfatte alle delene av signalet. Nyquist samplingsteoremet presenteres gjerne i forbindelse med tidssampling av signaler fra et kontinuerlig tidssignal som i ref. [2], men kan like gjerne utvides til å gjelde romlig sampling av et kontinuerlig romlig signal. Et digitalkamera med dårlig romlig oppløsning (få pixler på CCD eller CMOS brikken) er et godt eksempel for å illustrere hva som skjer. Tar vi et bilde med kameraet vil vi miste en del av informasjon som følge av at den romlige oppløsningen er for lav og at aliasing har oppstått[70]. I vårt tilfelle tyder den numeriske modellen på at kravet til romlig oppløsning ikke er oppfylt når vi bare har en enkelt transduser over hele sylindren. Dermed vil den resulterende kurven være vesentlig mer utstruktet i tid. Sammenlikner vi med teorien gitt ved likning (2.52) varierer utslaget for longitudinelle bølger med radius og har form som en Besselfunksjon. Tilsvarende må også fasehastigheten da variere som en funksjon av radius. På figur 6.4 ser vi at feltet i midten av transduseren har beveget seg lenger enn langs randen, altså er fasehastigheten størst mot midten av sylindren.

I ref. [51] og [52] benyttes en matrise med transduserer på mottakersiden. Også i de fleste andre artikler som omhandler tidsreversering benyttes en matrise med transduserer. Det er likevel ikke et krav i seg selv at vi må ha en matrise med transduserer for at tidsreversering skal fungere i prinsippet, men det kreves at vi må være i stand til å

ha tilstrekkelig oppløsning til at vi kan ta opp alle deler av signalet på mottakersiden før det tidsreverseres. Tidsreversering vil ikke kunne reversere effekten av et for dårlig samplet signal. I ref. [10] diskuteres det i detalj hvordan man teoretisk kan bygge et system der all informasjon kan tas opp i et tredimensjonalt problem og en perfekt tidsreversering mot et punkt kan gjøres i både homogene og inhomogene medier.

7.2.2 Modell 2 (SPICE)

Ser vi på figur 6.6, er det tydelig at den Gaussiske kurven vi opprinnelig sendte inn har forandret seg. Sammenlikner vi kurven med en fjerdederivert av Gausskurven, ser vi imidlertid stor likhet på formen. I figur 6.7 får vi imidlertid noe som likner mye mer på en andre derivert. Den numeriske modellen verifiserer dermed teorien presentert i kapittel 3. Til venstre på begge figurene ved $100 \mu s$ sees et signal. Dette er som følge av kapasitiv kobling mellom transduserne og har form som en første derivert av en Gaussisk puls.

Figur 6.8 viser en Fouriertransform av de mottatte og det utsendte signalet. Der som vi ser nærmere på den deriverte av en Gaussisk puls kan det først se ut som om frekvensen i signalet øker. Denne figuren viser at en slik antagelse er gal. Derivasjon fungerer som et høypassfilter, lave frekvenser dempes og høye frekvenser forsterkes. Grunnen til at det kan virke som det deriverte signalet har en høyere frekvens, er rett og slett bare at lave frekvenser er dempet slik at de høyfrekvente delene av signalet kommer tydeligere fram.

Som forventet fra teorien i kapittel 3 er amplituden på det mottatte signalet størst når transduserne har metall på baksiden. Et signal i mV området er forventet for et system med slike transdusere, mens signalet på mottakertransduseren der transduserne ligger mot luft må forventes å ha en amplitude som ligger i μV området. I figur 6.7 ser det ut som det akustiske signalet dør ut etter hvert. Grunnen til dette er at impedansen i kobber som er valgt i modellen ikke er høy nok til å gi fullstendig refleksjon i transduserveggen, slik at en del av signalet sendes inn i kobberplaten (som antas uendelig tykk). Ved å eksperimentere med høyere verdi for impedansen i kobber i modellen vil man se at signalet ikke dør ut (i hvert fall ikke så raskt).

7.2.3 Eksperiment

Fra resultatene i modell 1 har vi sett at det elektriske potensialet i transduseren egentlig er en funksjon av både tid og radius. Dermed må vi forvente at signalet ved tidsreversering ikke kan gjenskapes fullstendig i og med at informasjon er tapt som følge av romlig aliasing og filteregenskapene til transduseren. Vi må for eksempel, som følge av romlig aliasing, forvente at det tidsreverserte signalet har fått en betydelig lavere frekvens.

Som antydnet i kapittel 4 vil tidsreversering ikke påvirke derivasjonsoperatoren, og det tidsreverserte signalet må forventes å være en derivert av grad $2n$ i forhold til det som er vist for de to randbetingelsene i kapittel 3.

Figurene 6.9 og 6.11 viser resultatene for de to sylindrene med luft bak transduserne. Vi legger tydelig merke til at det er en topp ved $2000 \mu s$ på begge figurene, som betyr

at vi har klart å fokusere mest energi tilbake til det tidspunktet vi sendte ut Gaussiske pulsen på. Signalet på figurene inneholder tydelig mange flere svingninger rundt det fokuserte punktet enn det opprinnelige Gausssignalet, noe som kan tyde på at det har foregått en derivasjon, slik teorien i kapittel 3.3 og modell 2 antyder. I figurene 6.10 og 6.12 er det tatt ut et mindre utsnitt av resultatene og gjort en sammenlikning med den opprinnelig sendte Gaussiske pulsen og den åttendederiverte av signalet. Resultatene fra bølgeleder A og B viser begge tydelig en form som likner det deriverte signalet. Resultatet fra bølgeleder B ser ut til å passe best på formen. Bølgeleder A ser ut til å ha en ekstra pukkel på hver side. Vi kan anta at dette skyldes at signalet som ble tidsreversert i bølgeleder A var vanskeligst å skille fra ekkoene. Dermed er det sannsynlig at det inneholder litt ekstra informasjon fra senere refleksjoner som er ødeleggende for refokuseringen. For bølgeleder B var det enklere å skille hovedpulsene fra multiple ekko, siden bølgelederen var mer enn dobbelt så lang. Det må nevnes at det ser ut til å være litt ulik praksis rundt hvorvidt man fjerner multiple refleksjoner av signalet i bølgelederne. I ref. [52] ser det ut til at man velger å inkludere multiple refleksjoner, mens man i ref. [53] kun tidsreverserer hovedpulsene. Vi har valgt den siste tilnærmingen, da vi antar at multiple refleksjoner vil være enda mer sårbare for effekten av den romlige undersamplingen i systemet*, og dermed bidra til at signalet defokuseres ytterligere.

Resultatene for de to siste bølgelederne vist på figurene 6.13 og 6.15 viser også en tydelig refokusering omkring $2000 \mu s$. I dette tilfellet er det helt tydelig færre svingninger rundt nullpunktet. Sammenlikner vi med det deriverte signalet som i figurene 6.14 og 6.16, der Gaussiske pulsen og den fjerdederiverte tegnet inn, ser vi igjen en tydelig likhet mellom signalene.

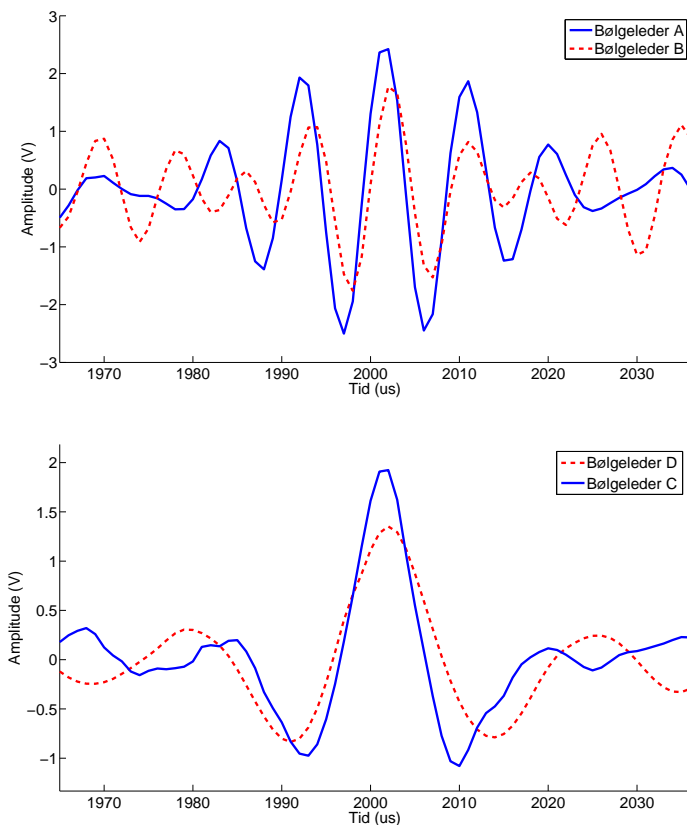
I alle figurene ser vi tydelig at den deriverte ligger litt forskjøvet mot venstre i forhold til Gaussiske pulsen, mens det tidsreverserte ligger til høyre. Dette er likevel riktig fordi den deriverte er signalet riktig vei $x(t)$, mens det tidsreverserte er signalet baklengs $x(-t)$. Det deriverte signalet flytter seg til venstre som en følge av at det benyttes derivasjon med "backward difference". Detaljer for den deriverte finnes i tillegg G.

Sammenlikner vi resultatene fra bølgelederne A og B og C og D slik det er gjort på figur 7.2 ser vi at signalet i sylindere D har glidd mest ut. Signalene i A og B ser ut til å være nokså like, til tross for at lengden på bølgelederen er økt. Det kan igjen tyde på at tankeeksperimentet vårt vist på figur 7.1 er riktig. En sylindere med større radius, vil naturlig nok kunne ha enda større variasjon i hastigheten fra midten til kanten av sylinderen, dermed er det naturlig at effekten av romlig aliasing blir enda større.

Sammenlikning mellom numeriske og målte data

Dersom vi sammenlikner den numeriske modellen med virkelige resultater (se figur 6.17), oppdager vi noen forskjeller. Det ser ut til at hovedpulsene fra modellen ankommer mottakertransduseren mye tidligere enn i de virkelige forsøkene våre. Dette kan tyde på at hastigheten i det virkelige materialet er større enn i materialet vi simulerer. Som nevnt innledningsvis i kapitlet er det benyttet tabellverdier for å lage modellen. Fase- og gruppehastigheten til bølgen henger først og fremst sammen med

*Siden bølgen beveger seg en lengre avstand, vil tidsforskjellen langs radius økes ytterligere.



Figur 7.2: Sammenlikning av resultatene fra de fire bølgelederne. Kurvene er tidligere vist hver for seg i figurene 6.10, 6.12, 6.14 og 6.16

Youngs modulus og Poissons forholdstall, som igjen er avhengig av f.eks. temperaturen i materialet. Hastigheten gitt av likning (2.63) og påfølgende likninger vil f.eks. gi økt hastighet når verdien av Youngs modulus øker. Dette vil igjen påvirke hastigheten i hver enkelt mode og formen på det endelige signalet vil dermed også påvirkes. Denne forskjellen vil likevel ikke endre på det faktum at spenningen på mottakertransduseren og hastigheten i mediet er en funksjon av radius. Så selv om den numeriske modellen ikke gir samme resultater som det fysiske systemet, betyr ikke dette at vi nødvendigvis må forkaste den.

Amplituden mellom det målte signalet og modellen varierer mye. Som nevnt innledningsvis forventer vi lavere amplitude på de målte signalene enn fra modellen. Forskjellen er likevel i største laget. Forøvrig når det gjelder amplitude kunne vi ikke observere noen særlig forskjell i amplituden om vi hadde transdusere med kobber eller luft, slik teori fra kapittel 2 og modell 2 antydte. Dette har vi imidlertid ikke klart å finne noen god forklaring på.

Sammenlikner vi resultatene med gruppehastigheten i figur 2.5 får vi forholdsvis sammenfallende resultater med de målte verdiene. Gruppehastigheten for den første longitudinelle moden er på sitt høyeste ca. 1690 m/s og ved sitt laveste ca. 700 m/s. Det vil si at det vil ta omtrent mellom 30 μ s og 70 μ s for alle komponentene i den Gaussiske

pulsen å propagere gjennom en sylinder på 50 mm dersom bare den første longitudinelle moden eksiteres. Flere av de andre bølgetypene og høyere ordens longitudinelle moder har lavere hastighet for flere av frekvensene enn den første longitudinelle moden. I modellen ser det imidlertid ut til å være et betydelig bidrag av transverselle komponenter (ref figur 6.5, noe som kanskje kan forklare årsaken til at pulsen i modellen ser ut til å være mer forsinket. Utglidningen kan eventuelt forklares med at det i en bølger med større radius vil eksiteres flere moder (se figurer i tillegg B) enn i en med mindre radius (se figurene 2.4 og 2.5) dette vil føre til at hastigheten kan variere mer.

7.3 Konklusjon

Vi har vist at det er mulig å få til en betydelig bølgefokusering i en sylinderformet bølgeleder med to transdusere, men at fullstendig fokusering ikke er mulig p.g.a. undersampling i rom og derivasjonsegenskaper i transduserne. Spesielt oppnås høye deriverte gjennom transdusere når avstanden mellom platene og hastigheten i det piezoelektriske materialet nærmer seg null og baksiden ligger mot et materiale som har svært utilpasset impedans slik at det skapes refleksjoner. Vi har også vist at funksjonen til en derivasjonsoperator ikke vil bli påvirket av tidsreversering, men at graden av derivasjon istedenfor økes med en faktor 2.

Vi har også sett på bølgeutbredelse i elastiske bølgeledere og sett nærmere på hvordan tidsreversering kan benyttes for å fokusere bølgene. Bølgeoppførselen i systemet er simulert med to numeriske modeller. De numeriske modellene gir oss mulighet til å forklare hvordan bølgene brer seg. De multidimensjonale resultatene fra den første numeriske modellen (Comsol) og målinger viser også som forventet at bølgene er dispersive, den numeriske modellen viser i tillegg at hastigheten varierer med radius. For å få til en fullstendig tidsreversering måtte vi hatt en transdusermatrise på mottaker-siden slik at vi kunne målt variasjoner i hastighetsfeltet som en funksjon av radius. Bølgen som mottas på mottakertransduseren vil med en transduser glattes ut som følge av romlig aliasing. Signalet vi mottar med en stor transduser blir dermed bare et gjennomsnitt.

Vi har også sett nærmere på hvordan teorien med tidsreversering kan benyttes i flere sammenhenger der det benyttes bølger, både elektromagnetiske og akustiske bølger. I tillegg til å kunne benytte teorien til å fokusere ultralydbølger, finnes det en rekke interessante anvendelser innen kommunikasjon, i tillegg til flere interessante medisinske anvendelser.

Videre arbeid

Hva angår den eksperimentelle delen av oppgaven, kan det gjøres en del forbedringer med måleoppsettet som kan føre til at vi får bedre måleresultater. Dette gjelder først og fremst at det anskaffes utstyr som gjør at frekvensen målingene utføres på kan økes. Et alternativ er å få tak i utstyr som tillater liming av transdusere på lengre sylindere. Dette vil føre til at det blir enklere å skille fra hverandre signal og ekko, slik at vi får en bedre refokusering.

Mens vi her har konsentrert oss om et system med separate transdusere for sending og mottak, bør det sees nærmere på aktuelle bruksområder i forbindelse med puls ekko systemer. Dette vil kreve at man utvikler en form for matrise på minst en av sylindersidene. Utvikling av en matrisetransduser vil også være nødvendig for å verifisere en del av de mulige forklaringene vi viser til i diskusjonen.

For den numeriske delen, bør det arbeides videre med å lages en numerisk modell i Comsol som også kan ta for seg tidsreversering av bølgefeltet. En slik modell vil imidlertid kreve mer kjennskap til bruk av Comsol og Comsol Script/Matlab og hvordan man kan legge inn en diskret løsning som et signal i modellen. Den diskrete løsningen fra modellen i denne oppgaven bør kunne benyttes som inngangssignal i en ny modell

som realiserer tidsreversering. I tillegg bør det arbeides med å justere de fysiske parametrene i modellen slik at de stemmer bedre overens med det fysiske systemet.

Vi kan også tenke oss at numeriske integrasjonsmetoder kan implementeres på mottakersiden for å veie opp for effekten av derivasjon i transduserne.

I den teoretiske delen av oppgaven bør man forsøke å se nærmere på hvilke egenskaper som gjør at derivasjonsoperatoren fortsetter å fungere som en derivasjonsoperator under tidsreversering. I tillegg bør man se på teori som kan forklare at det i den numeriske modellen observeres at hastigheten på randen av sylindere har form som den deriverte av en grad lavere enn hva gjelder for hastigheten i sentrum av sylindere.

Bibliografi

- [1] Andy Bateman. *Digital Communications: design for the real world*. Pearson Education Ltd, 1998.
- [2] Alberto Leon-Garcia and Indra Widjaja. *Communication Networks Fundamental concepts and key architectures*. McGraw-Hill, 2. edition edition, 2004.
- [3] Mathias Fink. Time reversal of ultrasonic fields - part i : Basic principles. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control*, 39(5), September 1992.
- [4] Fink et al. *Imaging of Complex Media with Acoustic and Seismic Waves*, volume 84 of *Topics in Applied Physics*. Springer, 2002.
- [5] Thomas L. Szabo. *Diagnostic ultrasound imaging: inside out*. Academic Press Series in biomedical engineering. Elsevier Academic Press, 2004.
- [6] Wiliam R. Hendee and E. Russell Ritenour. *Medical Imaging Physics*. Wiley-Liss, 4. edition, 2002.
- [7] J. David N. Cheeke. *Fundamentals and applications of Ultrasonic Waves*. CRC Series in PURE and APPLIED PHYSICS. CRC Press, 2002.
- [8] J. E. Dowdey E. E. Christensen, T. S. Curry. *Introduction to the Physics of Diagnostic Radiology*. Lea and Febeger, 2. edition, 1978.
- [9] S. N. Sen. *Acoustics waves and oscillations*. John Wiley, 1990.
- [10] Didier Cassereau and Mathias Fink. Time reversal of ultrasonic fields - part iii: Theory of the closed time-reversal cavity. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control*, 39(5), September 1992.
- [11] J. R. Lien and G. Løvholden. *Generell fysikk for universiteter og høyskoler Bind 1*. Universitetsforlaget, 2001.
- [12] Karl F. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids*. Oxford University Press, 1975.
- [13] Daniel Royer and Eugène Dieulesaint. *Elastic waves in Solids I, Free and Guided Propagation*, volume I. Springer, 2000.
- [14] Joseph L. Rose. *Ultrasonic Waves in Solid Media*. Cambridge University Press, 1999.
- [15] Julius Miklowitz. *The theory of elastic waves and waveguides*. North-Holland Publishing Company, 1978.
- [16] H. Kolsky. *Stress waves in solids*. Dover Publications, 1963.
- [17] C. Henry Edwards and David E. Penney. *Differential equations and boundary value problems*. Prentice Hall, 2. edition, 1996.

- [18] B. A. Auld. *Acoustic fields and waves in solids volume II*. Krieger, 2. ed edition, 1990.
- [19] John G. Webster. *Medical instrumentation, application and design*. Addison Wesley, 3. edition, 1998.
- [20] Vegar Hallgrim Skildheim. Modelling av akustiske signaler i faste og piezoelektriske medier. Master's thesis, Universitetet i Tromsø, Høst 2003.
- [21] Manuel J. Páez Rubin H. Landau and Christian C. Bordeianu. *Computational Physics*. WILEY-VCH, 2. edition, 2007.
- [22] John Haugan. *Formler og tabeller*. NKI forlaget, 1. edition, 1992.
- [23] Brodal et al. Design characteristics related to performance of pvdF transducers used in non-destructive pulse-echo testing. *Preprint submitted to Elsevier Science*, April 2008.
- [24] Robert G. Sachs. *The Physics of TIME REVERSAL*. The Universtiy of Chicago Press, 1987.
- [25] Marco Mamone Capria. *Physics Before and After Einstein*. IOS Press, 2005.
- [26] John C. Taylor. *Hidden unity in nature's laws*. Cambridge university press, 2001.
- [27] Angelopoulos et al. T-violation and cpt-invariance measurements in the cplear experiment: a detailed description of the analysis of neutral-kaon decays to $e\pi\nu$. *The European Physical Journal C - Particles and Fields*, 22(1):55–79, September 2001.
- [28] Virtual visitor centre; Stanford Linear Accelerator Center. Time reversal invariance. <http://www2.slac.stanford.edu/VVC/theory/timereversal.html>, April 2008.
- [29] Jean-Lois Thomas Francois Wu and Mathias Fink. Time reversal of ultrasonic fields - part ii: Experimental results. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control*, 39(5), September 1992.
- [30] Henry Stark and John W. Woods. *Probability and Random Processes with application to Signal Processing*. Prentice-Hall, 3. edition, 2002.
- [31] G. Papanicolaou J.-P. Fouque, J. Garnier and K. Sølna. *Wave propagation and time reversal in randomly layered media*. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer, 2007.
- [32] Henry Stark and Yongyi Yang. *Vector Space Projections A numerical approach to signal and image processing, neural nets, and optics*. John Wiley and Sons, 1998.
- [33] Emami et al. Predicted time reversal performance in wireless communications using channel measurements. *IEEE COMLET*, XX(Y), 2002.
- [34] Kyritsi et al. Miso time reversal and delay-spread compression for fwa channels at 5 ghz. *IEEE Antennas and wireless propagation letters*, 3:96 – 99, 2004.
- [35] Izchak Z. Steinberg. On the time reversal of noise signals. *Biophys Journal*, 50:171–179, July 1986.
- [36] Tanter et al. Time reversal and the inverse filter. *Acoustical Society of America*, 108(1):223–234, July 2000.
- [37] Eric W. Weisstein. Fourier transform. from mathworld—a wolfram web resource. <http://mathworld.wolfram.com/FourierTransform.html>, May 2008.
- [38] Antares Parvulescu. Matched-signal (“mess”) processing by the ocean. *Acoustical Society of America*, 98(2):943 – 960, August 1995.
- [39] Darrell R. Jackson and David R. Dowling. Phase conjugation in underwater acoustics. *Acoustical Society of America*, 89(1):171 – 181, January 1991.

- [40] David R. Dowling. Acoustic pulse compression using passive phase-conjugate processing. *Acoustical Society of America*, 95(3):1450 – 1458, March 1994.
- [41] M. B. Porter et al. Point-to-point underwater acoustic communications using spread-spectrum passive phase conjugation. *Acoustical Society of America*, July 2006.
- [42] Philippe Roux Arnaud Derode and Mathias Fink. Ultrasonic pulse compression with one-bit time reversal through multiple scattering. *Journal of applied physics*, 85(9), May 1999.
- [43] Persefoni Kyritsi and George Papanicolaou. One-bit time reversal for wlan applications. *Proc. Personal Indoor and Mobile Radio Communications Conference 2005*, 1:532 – 536, 2005.
- [44] Tobias Dahl and Jan Egil Kirkebø. Blind beamforming in frequency division duplex miso systems based on time reversal mirrors. <http://folk.uio.no/janki/BlindBeamform.pdf>.
- [45] Philippe Roux W. J. Higley and W. A. Kuperman. Relationship between time reversal and linear equalization in digital communications (1). *Acoustical Society of America*, July 2006.
- [46] Gabriel Montaldo Mathias Fink and Mickael Tanter. Ultrasonic time reversal mirrors. [http://www.hlsresearch.com/High_Frequency_Conf/HFFINALPapers\(PDFs\)/Final-Fink.pdf](http://www.hlsresearch.com/High_Frequency_Conf/HFFINALPapers(PDFs)/Final-Fink.pdf), May 2008.
- [47] Luzhou Xu Bin Guo and Jian Li. Time reversal based microwave hyperthermia treatment of breast cancer. *IEEE Signals, Systems and Computers, 2005. Conference Record of the Thirty-Ninth Asilomar Conference on*, pages 290–293, October 2005.
- [48] Yi Jiang Yuanwei Jin and José M.F: Moura. Time reversal beamforming for microwave breast cancer detection. *IEEE International Conferences on Image Processing*, September 2007.
- [49] Chen et al. Pulse design for time reversal method as applied to ultrawideband microwave breast cancer detection: A two-dimensional analysis. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, 55(1):194–204, January 2007.
- [50] Pelham D. Norville and Jr. Waymond R. Scott. Time-reversal focusing of elastic surface waves. *Acoustical Society of America*, August 2005.
- [51] Benoit Roman Philippe Roux and Mathias Fink. Time reversal in an ultrasonic waveguide. *American Institute of Physics*, April 1997.
- [52] Philippe Roux and Mathias Fink. Time reversal in a waveguide: Study of the temporal and spatial focusing. *Acoustical Society of America*, May 2000.
- [53] Anthony D. Puckett and M. L. Peterson. A time-reversal mirror in a solid circular waveguide using a single, time reversal element. *Acoustical Society of America*, April 2003.
- [54] James E. Mark. *Physical Properties of Polymers Handbook*. AIP Press, 1996.
- [55] Comsol AB. Comsol multiphysics v3.4 quick start and quick reference. Documentation bundled with installation, April 2008.
- [56] P.E. Lewis and J.P. Ward. *The finite element method - principles and applications*. Addison-Wesley, 1991.
- [57] Inc. Measurement Specialties. Piezo film sensors - technical manual rev d. <http://www.meas-spec.com>, March 2006.

- [58] Mousavi et al. Identification of complexmoduli and poissons ratio from measured strains on an impacted bar. *Journal of Sound and Vibration*, 277:971 – 986, September 2003.
- [59] COMSOL AB. *Acoustics Module User's Guide*. COMSOL AB, 2007. Comsol Multiphysics 3.4.
- [60] Bruce Hartmann and Jacek Jarzynski. Ultrasonic hysteresis absorption in polymers. *Journal of applied physics*, 43(11):4304 – 4312, November 1971.
- [61] Wikipedia. Spice. <http://en.wikipedia.org/wiki/SPICE>, May 2008.
- [62] Alf Püttmer et al. Spice model for lossy piezoceramic transducers. *IEEE Transactions on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control*, 44(1), Januar 1997.
- [63] W. Marshall Leach Jr. Controlled-source analogus circuits and spice models for piezoelectric transducers. *IEEE Transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 41(1):60–66, January 1994.
- [64] Van Deventer et al. Pspice simulation of ultrasonic systems. *IEEE Transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 47(4):1014–1024, July 2000.
- [65] Emmanuel C. Ifeachor and Barrie W. Jervis. *Digital Signal Processing - a practical approach*. Prentice-Hall, 2. edition, 2002.
- [66] Analog Devices Inc. Ad8331 datasheet rev. f. http://www.analog.com/UploadedFiles/Data_Sheets/AD8331_8332_8334.pdf, May 2008.
- [67] Texas Instruments. Vca2611 datasheet. <http://focus.ti.com/lit/ds/symlink/vca2611.pdf>, May 2008.
- [68] Texas Instruments. Vca261xevm datasheet. <http://focus.ti.com/lit/ug/sbou015a/sbou015a.pdf>, May 2008.
- [69] Tim Valio. En eksperimentell studie av gjennopprettingstider til støysvake bredbåndede ultralydforsterkere. Master's thesis, Universitetet i Tromsø, Oktober 2007.
- [70] Ronald H H Kröger. Anti-aliasing in image recording and display hardware: lessons from nature. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, (6):743 – 748, June 2004.
- [71] Falco Systems. High voltage amplifier wma-300 user manual 1.3. http://www.falco-systems.com/Amplifier_wma-300_manual.pdf, July 2007.
- [72] Wei Luo and Joseph L. Rose. Phased array focusing with guided waves in viscoelastic coated hollow cylinder. *Acoustical Society of America*, 121(4):1945 – 1955, April 2007.
- [73] A. Benatar et al. Theoretical and experimental analysis of longitudinal wave propagation in cylindrical viscoelastic rods. *Journal of the Mechanics and Physics of solids*, 51:1413 – 1431, 2003.

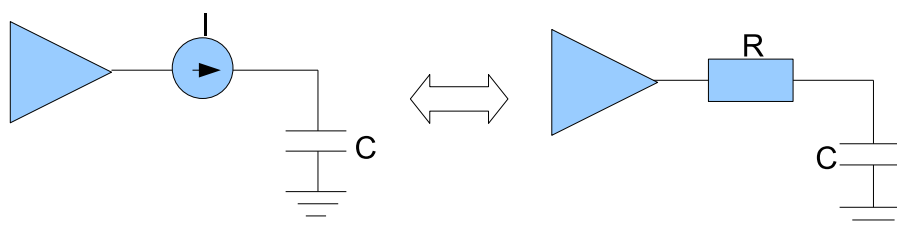
Tillegg

Tillegg A

Kapasitansberegninger

A.1 Kapasitiv last på forsterkeren

WMA-300 forsterkeren fra Falco Systems har en strømbegrensning på 300 mA [71]. Forsterkeren har et operasjonsområde på $\pm 150V$. Når transduseren kobles til forsterkeren vil systemet oppføre seg som en RC krets. Dersom hele spenningsområdet benyttes, vil det tilsvare en motstand på omlag 90Ω .



Figur A.1: Forsterkeren har en strømbegrensning som kan sees på som en ekvivalent motstand relativ til spenningen. Dermed kan systemet sees på som en RC krets.

$$R = UI = 300V * 300mA = 90\Omega$$

Tidskonstanten i en RC krets er gitt ved uttrykket $\tau = RC$, en tidskonstant tilsvarer en oppladning på 63,2%. Slewrate er definert* som et utslag på 80%, det vil tilsvare en faktor 1,65 for τ for å oppnå en oppladning på 80% i en RC krets.

Et signal med frekvens på 100 kHz har en periodetid på $10 \mu s$. Om vi tillater en stighetid tilsvarende 1/10 av periodetiden betyr det at stighetiden ikke bør overskride $1 \mu s$. Om vi fremdeles tar utgangspunkt i 80% stigning innenfor stighetiden får vi

*Slewrate er i databladet til forsterkeren [71] definert som stegresponsen fra 10% til 90% signalamplitude.

følgende formel

$$C \leq \frac{\tau}{1,65 * R},$$

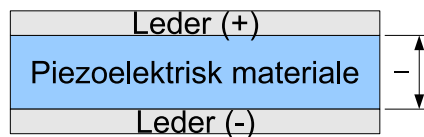
der R er motstanden og τ er stigetid. Tar vi utgangspunkt i eksempelet over, får vi at maksimal kapasitans ikke bør overskride 6,7 nF.

A.2 Kapasitans i transduser

Transduserne er bygget som platekondensatorer, der platene har sirkelform. Den generelle formelen for kapasitansen i en platekondensator er gitt som

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{l},$$

der A er arealet og l beskriver avstanden mellom platene. ϵ_0 og ϵ_r beskriver henholdsvis den absolutte og den relative permittivitetskonstanten. For en sirkelformet



Figur A.2: En transduser er bygget opp som en platekondensator, der substratet har piezoelektriske egenskaper

kondensator får vi dermed uttrykket

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\pi r^2}{l},$$

der r er radiusen på transduseren.

Den relative permittivitetskonstanten for PVDF materialet er omlag 12,5. En transduser med 10 mm radius og 40 μm substrat vil dermed få en kapasitans på omlag 0,87 nF. Den målte verdien for transduserne ligger imidlertid noe lavere, på om lag 0,7 nF. Grunnen er at det blir et tynt limlag som gjør avstanden mellom platene større og har lavere permittivitet. En total tykkelse på 50 μm gir et resultat som ligger nært opptil det målte. For transduserne med 28 μm tykkelse er den teoretiske verdien 1,24 nF når radius er 10 mm og 2,8 nF når radius økes til 15 mm.

Tillegg B

Dispersjonskurver

PCDISP er en spanskutviklet Matlab kode for å gjøre ulike beregninger på bølger i sylinderformede bølgeledere, deriblant beregning av dispersjonskurver. Koden er fritt tilgjengelig og kan gratis lastes ned fra adressen:

<http://www.iai.csic.es/users/fseco/pcdisp/pcdisp.htm>

Koden for å løse Pochhammer-Chree likningene finnes i fila `pcdisp.m`. PCDISP benytter Ridder metoden, som er en videreutvikling av bisection metoden, for å finne nullpunktene. For å komme fram til resultatene som er vist i kapittel 2.10.4 og i dette tillegget er følgende tilpassninger gjort.

```
c0 = 1587;           % bar speed (m/s)
nu = .40;           % Poisson's ratio
rho = 1191;         % density (kg/m^3)
a = 0;             % internal radius (m)
b = 10e-3; %b = 15e-3 % external radius (m)

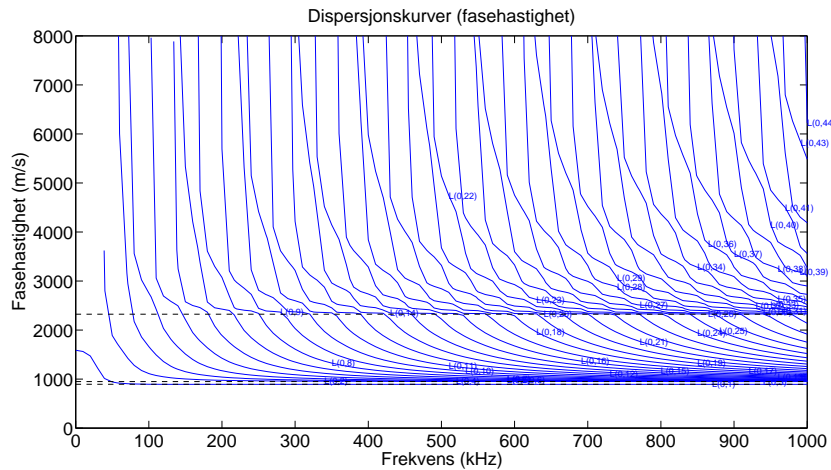
nvect = 0; %calculate longitudinal modes only, added by TF
nvect = -1; %calculate torsional modes only, added by TF
nvect = 1; %calculate flexural modes only, added by TF
nvect = 2; %calculate flexural modes only, added by TF
nvect = 3; %calculate flexural modes only, added by TF

100kHz plots:
fmin = 0;           % minimum frequency (Hz)
fmax = 100e3;      % maximum frequency (Hz)
fstep = 1e3;       % frequency step (Hz)
ftol = 1e-3;       % tolerance (for cutoff frequencies) (Hz)
                    % default = 1 mHz is a good value

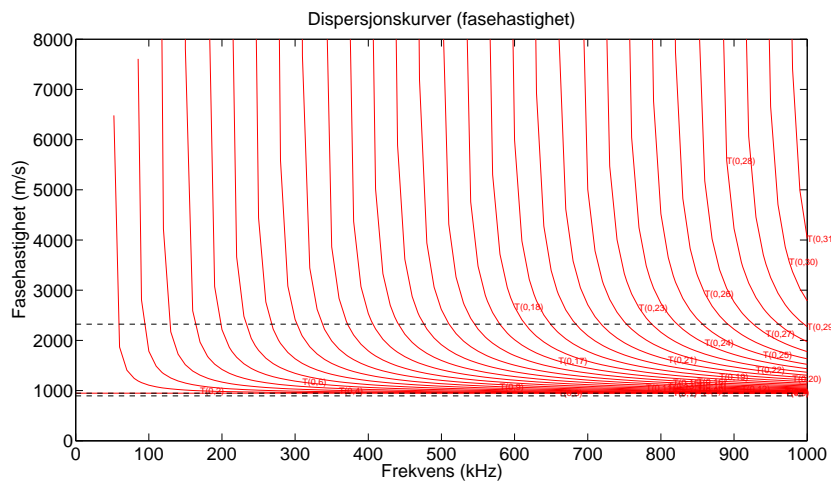
1MHz plots:
fmin = 0;           % minimum frequency (Hz)
fmax = 1e6;        % maximum frequency (Hz)
fstep = 10e3;      % frequency step (Hz)
ftol = 1e-3;       % tolerance (for cutoff frequencies) (Hz)
                    % default = 1 mHz is a good value
```

Kurvene på de følgende sidene viser at det kan eksiteres en rekke ulike moder selv i en relativt enkel bølgeleder i et forholdsvis smalt frekvensområde.* Vi må i vårt system anta at det først og fremst er de longitudinelle modene som eksiteres, men langs randen og på grunn av ujevnheter i limingen er det naturlig å tro at også andre typer moder vil eksiteres.

Figurene B.6 og B.7 viser alle moder opp til 100 kHz og tilsvarer figurene 2.4 og 2.5 men istedenfor 10 mm radius er disse løst for sylindere med radius 15 mm.

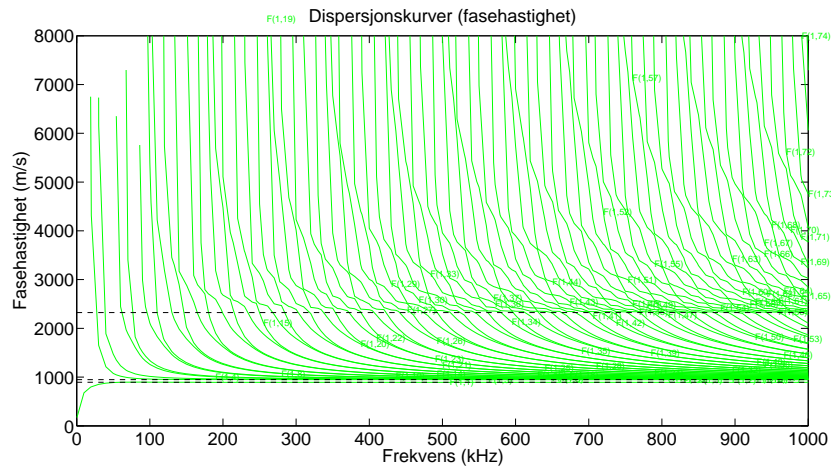


Figur B.1: Mulige longitudinelle moder i en sylindereformet stav av PMMA med radius 10 mm.

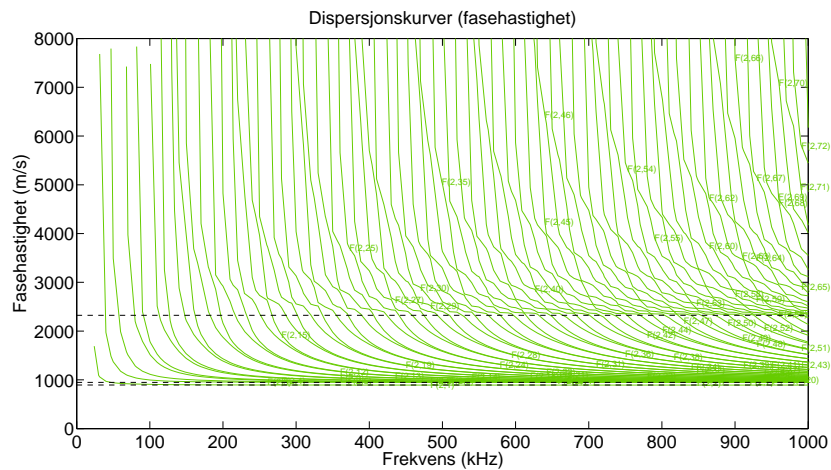


Figur B.2: Mulige torsjonsmoder i en sylindereformet stav av PMMA med radius 10 mm.

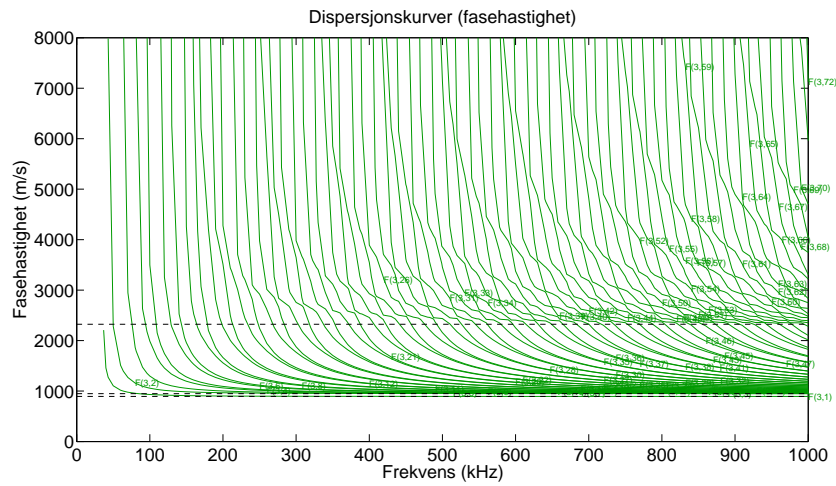
*sett i forhold til frekvensspekteret som defineres som ultralyd.



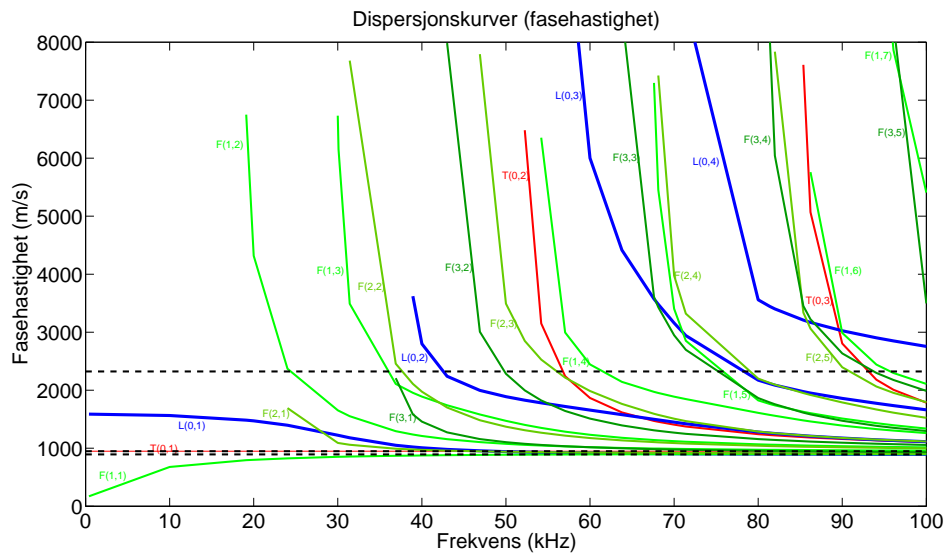
Figur B.3: Mulige 1. ordens bøjningsmoder i en cylinderformet stav av PMMA med radius 10 mm.



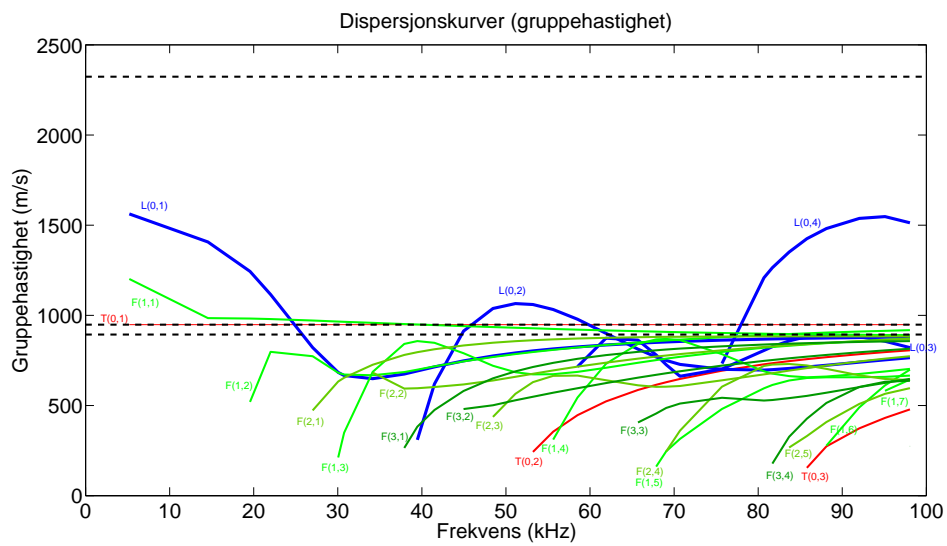
Figur B.4: Mulige 2. ordens bøjningsmoder i en cylinderformet stav av PMMA med radius 10mm.



Figur B.5: Mulige 3.ordens bøyingsmoder i en sylindrerformet stav av PMMA med radius 10 mm.



Figur B.6: Fasehastighet og mulige moder i en 15 mm sylinder opp til 100 kHz.



Figur B.7: Grupperhastighet og mulige moder i en 15 mm sylinder opp til 100 kHz.

Tillegg C

Korrelasjon og konvolusjon

Korrelasjon

Krysskorrelasjon benyttes gjerne for å kunne gi et mål på i hvor stor grad to ulike signaler likner på hverandre. Krysskorrelasjon er definert som [30]

$$R_{xy}(m) = E\{x_{(n+m)}\overline{y_n}\} \quad (\text{C.1})$$

I praksis utfører man korrelasjon ved å sammenlikne to signaler x og y ved at man tar produktet av dem punkt for punkt og deretter summerer over alle punktene og dividerer med antallet.

$$R_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n) \quad (\text{C.2})$$

Dersom x og y er to tilfeldige signaler, vil $E\{x(n)y(n)\} = 0$ og krysskorrelasjonen gir en tallverdi i nærheten av null. Dersom de to signalene er identiske, vil alle produktene få en høy verdi og likeledes vil krysskorrelasjonen få en høy verdi.

Dersom to signaler er formlike, men faseforskjøvet i forhold til hverandre, kan vi avhengig av signalets utseende oppleve at korrelasjonen forblir 0. For å rette på dette kan vi innføre en forsinkelse j slik at vi kan sammenlikne de to signalene med ulik forsinkelse [65].

$$R_{xy}(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n+j) \quad (\text{C.3})$$

Dette innfører imidlertid et ekstra problem. Dersom signalene x og y er sekvenser som har samme lengde, kan vi ikke sammenlikne hele signalet uten å sette inn ekstra data på slutten av hver sekvens. Den vanligste metoden er selvsagt nullinnsetting og det er denne metoden som benyttes i Matlab.

Det er også vanlig å benytte normalisering av signalet slik at korrelasjonsfunksjonen gir en verdi mellom -1 og 1 . I Matlab er normalisering definert slik at den gir verdien 1 for autokorrelasjon uten tidsforsinkelse.

Konvolusjon

Definisjonen på konvolusjon er gitt som [65]

$$y = h * x = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (\text{C.4})$$

På diskret form får vi

$$y(n) = \sum_{m=0}^n h(m)x(n - m) = h(0)x(n) + h(1)x(n - 1) + \dots + h(n)x(0) \quad (\text{C.5})$$

Definisjonen på krysskorrelasjon i det diskrete tilfellet er gitt som likning (C.3), vi kan dermed skrive

$$\begin{aligned} R_{hx}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n + m) \\ &= \frac{1}{N} [h(0)x(n) + h(1)x(n + 1) + \dots + h(N - 1)x(n + N - 1)] \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Dersom vi velger $n = 0$ i krysskorrelasjonen ender vi opp med

$$R_{hx}(0) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(m) = \frac{1}{N} [h(0)x(0) + h(1)x(1) + \dots + h(N - 1)x(N - 1)] \quad (\text{C.7})$$

Om vi nå sammenlikner likningene (C.5) og (C.7) ser vi for det første at krysskorrelasjon er skalert med faktoren $1/N$ i forhold til konvolusjonen. For det andre ser vi at h i begge likningene er multiplisert med x , men at rekkefølgen på sekvensene er motsatt i de to definisjonene [65]. Ser vi bort fra skaleringsfaktoren kan vi si at krysskorrelasjon og konvolusjon er relatert til hverandre ved tidsreversering av den ene sekvensen. Dette kan uttrykkes som

$$R_{hx} = h(-t) * x(t) \quad (\text{C.8})$$

Tillegg D

Dempning

Comsol benytter seg av en Rayleigh dempningsmodell. Denne bygges opp som en lineær kombinasjon av masse- og stivhetsmatrisen på formen [72]

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (\text{D.1})$$

der α og β er konstanter, C er dempningsmatrisen, M er massematrisen og K er stivhetsmatrisen. α -leddet er et dempeledd som er uavhengig av frekvens, mens β -leddet demper med en faktor tilsvarende kvadratet av frekvensen. I det følgende skal vi vise hvordan Rayleigh dempningsmodellen kan knyttes opp mot andre dempningsmodeller.

En kritisk dempningsfaktor ξ er gitt som

$$\xi_n = \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha}{\omega_n} + \beta \omega_n \right], \quad (\text{D.2})$$

med vinkelfrekvens ω . Denne dempningsfaktoren uttrykker sammenhengen mellom Rayleighmodellen og standardmodellen for dempede svingninger, her som en faktor for kritisk dempning [72]. Standardmodellen for dempede svingninger er beskrevet i bl.a. ref. [11]. For et system der vi ønsker å tilpasse dempningsmodellen til to frekvenser, er det enkelt å løse ut faktorene α og β ved å løse likningssystemet [59]

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi f_1} & \pi f_1 \\ \frac{1}{4\pi f_2} & \pi f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.3})$$

Dempningsfaktoren i et viskoelastisk materiale er definert [73] som

$$\delta \approx \tan \delta = \frac{E''}{E'}, \quad (\text{D.4})$$

for $\tan \delta \ll 1$, der E'' er den komplekse og E' den reelle delen av Youngs modulus. Sammenhengen mellom de to dempningsfaktorene er gitt som [72]

$$\delta = 2\xi. \quad (\text{D.5})$$

En lineær dempningsmodell kan uttrykkes som [60]

$$\alpha^* = A + Bf \quad (\text{D.6})$$

der A og B er konstanter og f er frekvens. I en slik modell vil dempning pr bølgelengde være konstant

$$\alpha^* \lambda = \textit{konst.} \quad (\text{D.7})$$

Den viskoelastiske dempningsmodellen kan relateres til absorpsjon pr bølgelengde [54] gjennom relasjonen

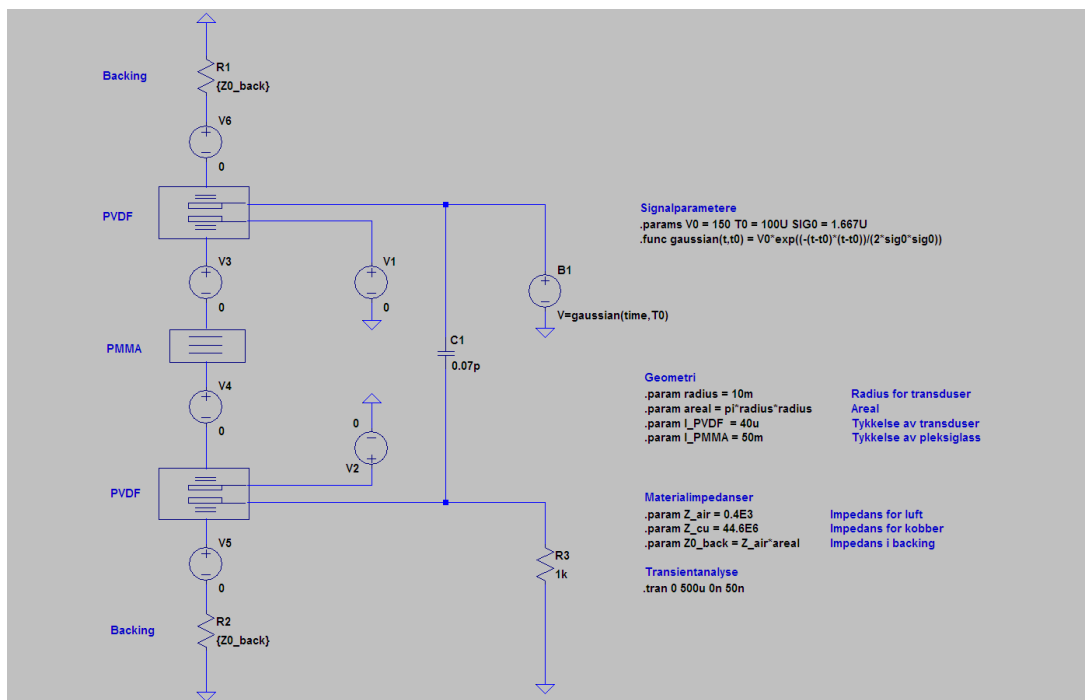
$$\delta = \frac{\alpha^* \lambda}{\pi}. \quad (\text{D.8})$$

For $\delta \leq 0,2$ kan da Rayleighmodellen kobles [54, 72, 73] til absorpsjon pr bølgelengde ved

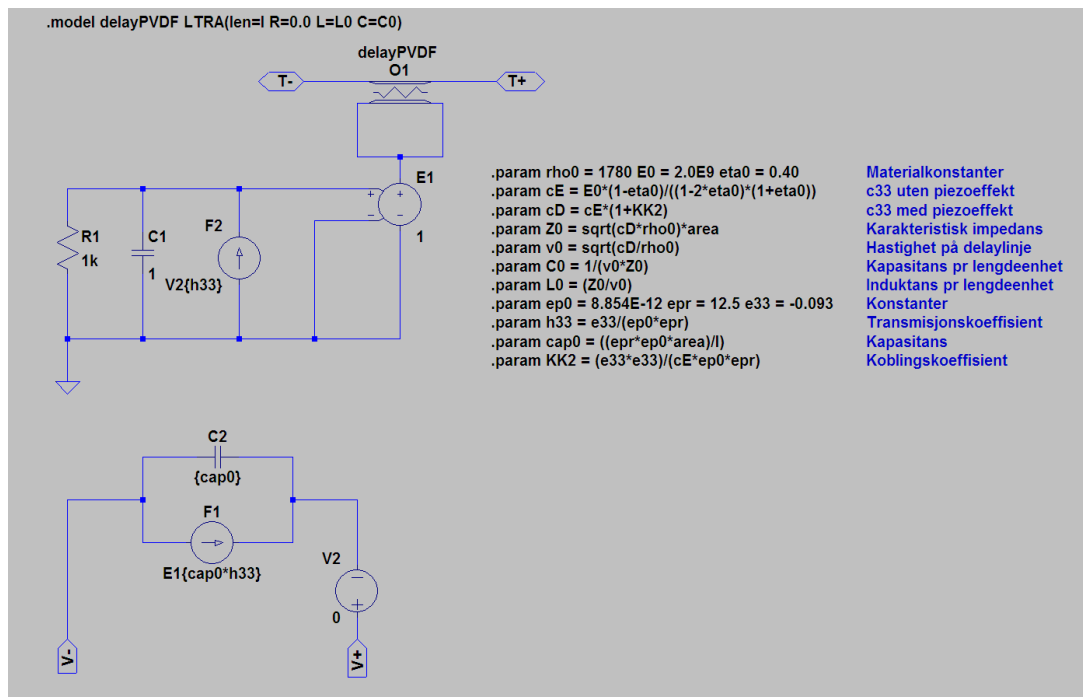
$$\xi = \frac{\delta}{2} = \frac{\alpha^* \lambda}{2\pi}. \quad (\text{D.9})$$

Tillegg E

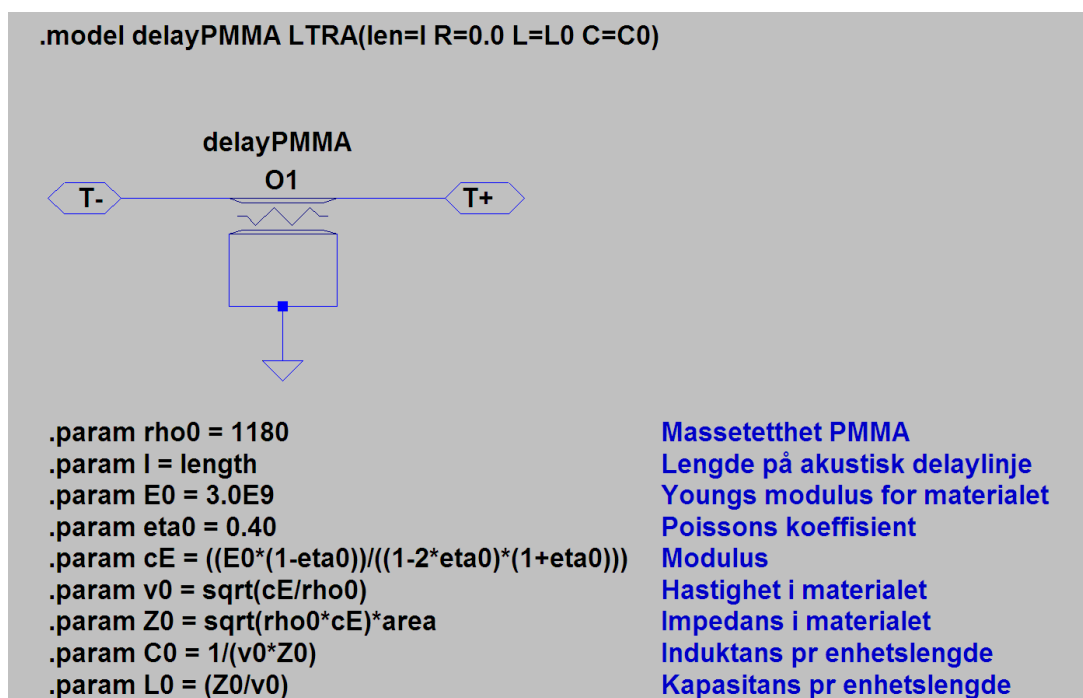
SPICE modell



Figur E.1: Hovedloop og parametere for SPICE-koden. Last kan reguleres ved å endre den akustiske impedansen i R1 og R2. Spenningskilder er satt inn på den akustiske linja for å kunne måle både hastighet og kraft.



Figur E.2: Subrutine for piezoelektrisk transduser. Kobling mellom akustisk og elektrisk energi modelleres her ved hjelp av kontrollerte spennings og strømkilder og en elektrisk transmisjonslinje. Modellen er en modifisert Mason modell. C2 er kapasitansen i transduseren. C1 og R1 danner et integrasjonsledd.



Figur E.3: Akustisk forsinkelseslinje for PMMA materiale.

```

*Automatisk generert SPICE kode fra grafisk SPICE-modell
C1 N011 N012 0.07p
R1 0 N001 {Z0_back}
R2 N008 0 {Z0_back}
V1 N009 0 0
V2 N010 0 0
B1 N011 0 V=gaussian(time,T0)
XX1 N011 N009 N002 N003 transducer params: area = areal l = l_PVDF
XX2 N012 N010 N007 N006 transducer params: area = areal l = l_PVDF
R3 N012 0 1k
XX3 N004 N005 acoustictransm params: area = areal length = l_PMMA
V3 N003 N004 0
V4 N005 N006 0
V5 N007 N008 0
V6 N001 N002 0

* block symbol definitions
.subckt transducer V+ V- T- T+
O1 T- N003 T+ N003 delayPVDF
E1 N003 0 N001 0 1
V2 V+ N002 0
F2 0 N001 V2{h33}
F1 V- N002 E1{cap0*h33}
R1 N001 0 1k
C1 N001 0 1
C2 N002 V- {cap0}
.model delayPVDF LTRA(len=l R=0.0 L=L0 C=C0)
.param rho0 = 1780 E0 = 2.0E9 eta0 = 0.40
.param cE = E0*(1-eta0)/((1-2*eta0)*(1+eta0))
.param cD = cE*(1+KK2)
.param Z0 = sqrt(cD*rho0)*area
.param v0 = sqrt(cD/rho0)
.param C0 = 1/(v0*Z0)
.param L0 = (Z0/v0)
.param ep0 = 8.854E-12 epr = 12.5 e33 = -0.093
.param h33 = e33/(ep0*epr)
.param cap0 = ((epr*ep0*area)/l)
.param KK2 = (e33*e33)/(cE*ep0*epr)
.ends transducer

.subckt acoustictransm T+ T-
O1 T- 0 T+ 0 delayPMMA
.model delayPMMA LTRA(len=l R=0.0 L=L0 C=C0)
.param rho0 = 1180
.param l = length
.param E0 = 3.0E9
.param eta0 = 0.40
.param cE = ((E0*(1-eta0))/((1-2*eta0)*(1+eta0)))
.param v0 = sqrt(cE/rho0)
.param Z0 = sqrt(rho0*cE)*area
.param C0 = 1/(v0*Z0)
.param L0 = (Z0/v0)
.ends acoustictransm

* PMMA
* PVDF
* PVDF
* Signalparameterere
.params V0 = 150 T0 = 100U SIG0 = 1.667U
.func gaussian(t,t0) = V0*exp(-(t-t0)*(t-t0))/(2*sig0*sig0)

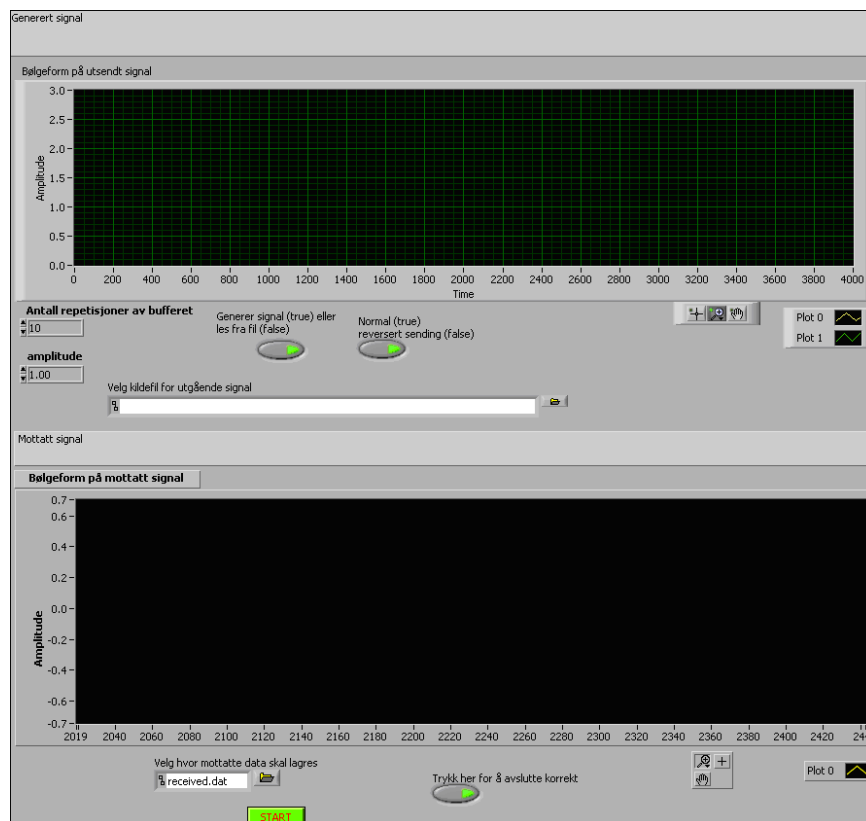
```

```
.param radius = 10m
.param areal = pi*radius*radius
.param l_PVDF = 40u
.param l_PMMA = 50m
.tran 0 500u 0n 50n
.param Z_air = 0.4E3
.param Z_cu = 44.6E6
.param Z0_back = Z_air*areal
* Backing
* Backing
* Materialimpedanser
* Geometri
* Radius for transduser\nAreal\nTykkelse av transduser\nTykkelse av pleksiglass
* Impedans for luft\nImpedans for kobber\nImpedans i backing
* Transientanalyse
.backanno
.end
```

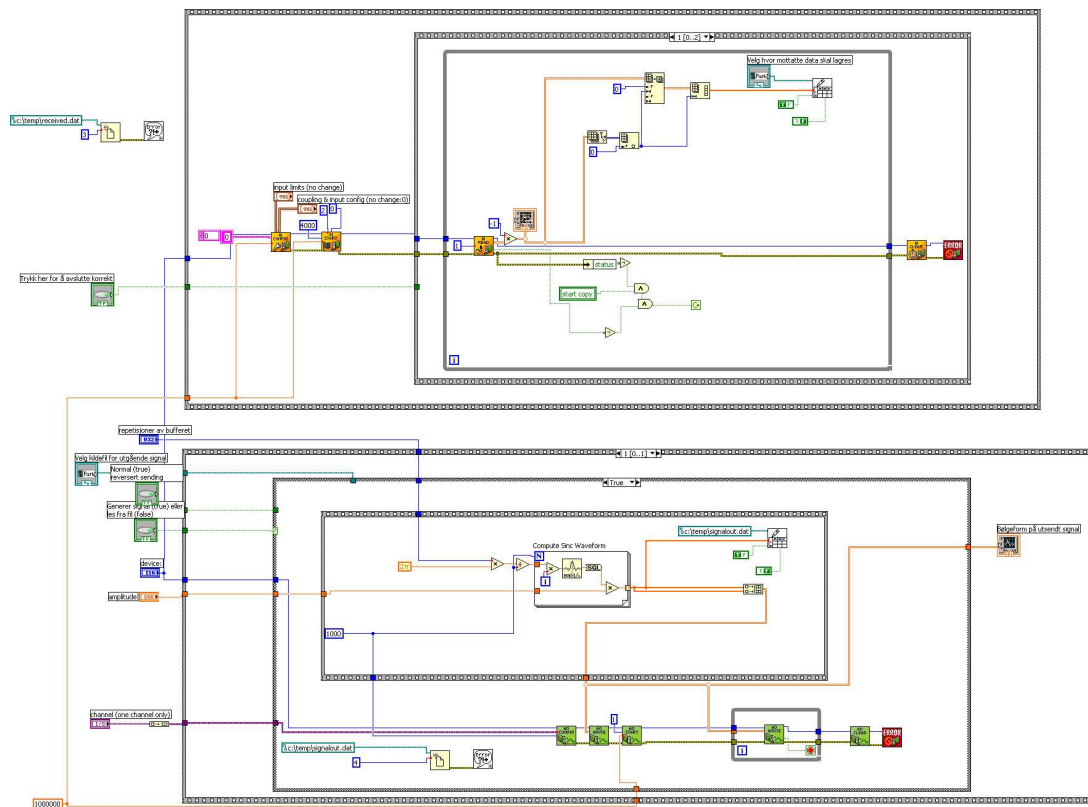
Tillegg F

LabView applikasjon

Kode for å kommunisere med A/D kortet ble utviklet i LabView. Det grafiske brukergrensesnittet for å lagre data fra A/D kortet er vist på figur F.1. LabView baserer seg i hovedsak på et grafisk programmeringsgrensesnitt, flytskjema for koden er vist på figur F.2.



Figur F.1: Grafisk brukergrensesnitt for LabView program.



Figur F.2: Flytskjema for LabView program.

Tillegg G

Derivasjon

Ved å benytte definisjonen for derivasjon vist i likning (G.1) som gitt i ref. [22], kan en ekvivalent likning (G.2) utformes. Benyttes denne på seg selv eller en iterasjon n av seg selv, kan man finne uttrykk for den $(n + 1)$ deriverte. Nedenfor er uttrykkene for den første til og med den fjerde deriverte vist.

$$f^{(1)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (\text{G.1})$$

For alle likningene nedenfor er det antatt at $\lim h \rightarrow 0$.

$$f^{(1)}(x) \simeq \frac{f(x) - f(x - h)}{h} \quad (\text{G.2})$$

$$f^{(2)}(x) \simeq \frac{f^{(1)}(x) - f^{(1)}(x - h)}{h} \simeq \frac{f(x) - 2f(x - h) + f(x - 2h)}{h^2} \quad (\text{G.3})$$

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &\simeq \frac{f^{(2)}(x) - f^{(2)}(x - h)}{h} \\ &\simeq \frac{f(x) - 3f(x - h) + 3f(x - 2h) - f(x - 3h)}{h^3} \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &\simeq \frac{f^{(3)}(x) - f^{(3)}(x - h)}{h} \\ &\simeq \frac{f(x) - 4f(x - h) + 6f(x - 2h) - 4f(x - 3h) + f(x - 4h)}{h^4} \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

Liste over symboler og forkortelser

Forkortelse	Beskrivelse	Definisjon
CPT	Charge, Parity and Time Reversal	side 29
AIR	Autokorrelasjonsimpulsrespons	side 35
TRS	Tidsreversert speil	side 37
ISI	Intersymbolinterferens	side 39
PVDF	Poly(vinylidene fluoride)	side 46
PMMA	Poly(methyl methacrylate)	side 46
LNA	Low noise amplifier	side 58
VCA	Voltage controlled attenuator	side 58

Nedenfor er en liste med forklaring på symboler benyttet i oppgaven. Enkelte symboler kan ha flere forklaringer, det kommer da fram av teksten i forbindelse med hver likning eller sammenhengen de står i hvilken betydning disse har. Enkelte av symbolene vil også kunne ha indekser utover det som er nevnt i tabellen.

Symbol	Beskrivelse
k	bølgetall
v_T	transversell hastighet
v_L	longitudinell hastighet
v_0	hastighet
r	radius
J_n	Besselfunksjon, type 1
Y_n	Besselfunksjon, type 2
A	Areal, konstant
ρ	tetthet
ω	vinkelfrekvens
f	frekvens
α	konstant
β	konstant
D	elektrisk forskyvning
E	dielektrisk forskyvning, forventning, Youngs modulus

Symbol	Beskrivelse
ϵ_0	permittivitet
K^2	piezoelektrisk koblingsfaktor
K	kompresjonsmodulus
a	konstant
b	konstant
τ	tidsforsinkelse, tidskonstant
*	konvolusjon
η	Poissons forholdstall
R_{xy}	krysskorrelasjon
R_{xx}	autokorrelasjon
N	antall
T	spenning (stress)
S	tøyning (strain)
F	kraft
Z	akustisk/elektrisk impedans
σ	ladningstetthet, varians
u	utslag
i	$\sqrt{-1}$, irrasjonelt tall
Ψ	vektorpotensial
Φ	skalarpotensial
h	transmisjonsfaktor
λ	bølgelengde, Lamé koeffisient
μ	forventningsverdi, Lamé koeffisient
ξ	dempningsfaktor
d	avstand
l	avstand
C	konstant, kapasitans
R	motstand
R'	refleksjonskoeffisient
T'	transmisjonskoeffisient
n	mode, normalvektor, støy
$h(\cdot)$	transferfunksjon
$y(\cdot)$	utgangsfunksjon
$x(\cdot)$	inngangsfunksjon
$g(\cdot)$	funksjon
$f(\cdot)$	funksjon
δ	deltafunksjon, dempningsfaktor
Q	punkt, ladning
P	punkt, forskyvning
θ	vinkel
c_{xx}	stivhetstensor
$-$	kompleks konjugert
\rightarrow	vektor

Figurer

1.1	Fokusering av ultralyd	2
2.1	Endimensjonal deformasjon i et fast stoff	8
2.2	Spennning som følge av ytre kraft	9
2.3	Refleksjon av akustiske bølger	12
2.4	Moder og fasehastighet	19
2.5	Moder og gruppehastighet	20
3.1	Bølger i en piezoelektrisk transduser	23
3.2	Endimensjonal modell med to transdusere	27
4.1	Tidsdilatasjon mellom to koordinatsystemer.	32
4.2	Tidsreversert dilatasjon	32
4.3	Tidsreversert transmisjon i et LTI-system.	33
4.4	Tidsreversert fokusering.	38
4.5	Tidsreversert radiokommunikasjon	40
4.6	Tidsreversert radiokommunikasjon II	40
5.1	Referansemodell	46
5.2	Gaussisk puls	47
5.3	Maskenett i modell 1	50
5.4	Dempningskurve	51
5.5	Modell 2	53
5.6	Transdusere benyttet i prosjektet	54
5.7	Limte transdusere	55
5.8	Produksjon av transdusere	56
5.9	Utstyrets oppkobling under eksperimentene.	59
5.10	Utstyrets oppkobling under eksperimentene II	59
5.11	Målt frekvensrespons for forforsterkeren VCA 2611.	60
5.12	Akustisk og elektrisk signal	61
5.13	Mottatt signal etter fratrekk	62
5.14	Mottatt signal før tidsreversering	62
5.15	Mottatt signal etter tidsreversering	63
6.1	Numerisk simulering av hastighetsfeltene i en sylinder	66
6.2	Numerisk modell for spenning, 3D	67

6.3	Numerisk modell for spenning, 1D	67
6.4	Longitudinellt hastighetsfelt	68
6.5	Transverselt hastighetsfelt	68
6.6	Transduser med luft	69
6.7	Transduser med metall	70
6.8	Frekvensinnholdet i Gauss og deriverte av Gauss	70
6.9	Bølgeleder A: Mottatt akustisk tidsreversert signal	72
6.10	Formlikhet mellom beregnet og målt signal, bølgeleder A	72
6.11	Bølgeleder B: Tidsreversert signal med luft bak transduserne	73
6.12	Formlikhet mellom beregnet og målt signal, bølgeleder B	73
6.13	Bølgeleder C: Tidsreversert signal med kobber bak transduserne	74
6.14	Formlikhet mellom beregnet og målt signal, bølgeleder C	74
6.15	Bølgeleder D: Tidsreversert signal med kobber bak transduserne	75
6.16	Formlikhet mellom beregnet og målt signal, bølgeleder D	75
6.17	Sammenlikning av simulerte og målte verdier.	76
7.1	Romlig aliasing	79
7.2	Sammenlikning av resultater	82
A.1	Modell for forsterker	93
A.2	Modell for transduser	94
B.1	Longitudinelle moder	96
B.2	Torsjonsmoder	96
B.3	Bøyningsmoder I	97
B.4	Bøyningsmoder II	97
B.5	Bøyningsmoder III	98
B.6	Fasehastighet og moder i 15 mm sylinder	98
B.7	Gruppestabilitet og moder i 15 mm sylinder	99
E.1	Spicemodell I	105
E.2	Spicemodell II	106
E.3	Spicemodell III	106
F.1	Grafisk brukergrensesnitt for LabView program.	109
F.2	Flytskjema for LabView program.	110

Tabeller

5.1	Parametre for beregning av maskevidden i Comsol modellen.	48
5.2	Materialkonstanter for PVDF film i modell 1	49
5.3	Materialkonstanter for PMMA i modell 1	49
5.4	Limtyper benyttet til produksjon av transdusere og bølgeledere.	55
5.5	Oversikt over de fire bølgelederne benyttet i eksperimentene.	57
5.6	Oversikt over utstyr benyttet i forbindelse med eksperimentene.	60