UiT Norges arktiske universitet

Fakultet for naturvitenskap og teknologi
Institutt for matematikk og statistikk

Matematisk resonnering og argumentasjon

En kvalitativ studie av elevers resonnering i ulike nivåer av undersøkende undervisning

Julie Astrid Rundmo Bratteng

Masteroppgave i Lektor i realfag, trinn 8. – 13. MAT – 3907. Mai 2020.

Sammendrag

Hensikten med studien er å få et innblikk i hvordan elever resonnerer og argumenterer i ulike nivåer av åpenhet i undersøkende matematikkundervisning. I denne studien har jeg besvart på følgende problemstilling: *Hvordan resonnerer og argumenterer elever i videregående skole i undersøkende undervisning av ulike nivåer av åpenhet?*

Studien har en kvalitativ tilnærming og bygger på observasjonsnotater, lyd- og videoopptak i to ulike klasser ved en videregående skole. Utvalget består av ti elever, fordelt på to ulike undervisningsopplegg med ulike nivåer av åpenhet. Undervisningsopplegget *påfølgende heltall* kan karakteriseres som nivå 3 av undersøkelse, mens *palindromer* kan karakteriseres som nivå 5 av undersøkelse.

I studien er det gjennomført en analyse av elevenes resonnering og argumentasjon ved bruk av Lithners (2008) rammeverk for resonnementsstrukturer og Balacheffs (1988) taksonomi av bevisstrategier. Videre ble de ulike resultatene sammenlignet, og det ble sett på likheter og ulikheter i elevenes resonnering og argumentasjon.

Resultatene preges av naiv empirisme og lavt argumentasjonsnivå på tvers av undervisningsoppleggene. Grad av åpenhet i undervisningen, elevenes måloppnåelse og det matematiske innholdet i undervisningen er faktorer som kan påvirke elevenes resonnering og argumentasjon. Ut ifra resultatene kan man se at de ulike faktorene vil i liten grad påvirke resonnering og argumentasjonen til elevene.

Forord

Denne masteroppgaven markerer mitt punktum ved lektorutdanningen i realfag. Å skrive en masteroppgave har både vært interessant, utfordrende og lærerikt. I den forbindelse ønsker jeg å takke alle som har gitt støtte i denne tiden.

Først og fremst vil jeg rette en takk til veileder Per Øystein Haavold, Institutt for lærerutdanning og pedagogikk, for gode tilbakemeldinger og innspill.

Min kjære samboer Eirik – tusen takk for at du har vært klippen min gjennom hele studiet. Jeg vil også rette en stor takk til mamma og pappa for all støtte og gode ord gjennom alle år. Tusen takk til min lillesøster Sofie for at du har lest korrektur og gitt meg gode råd. Takk til Siri og Tonje for at dere har gjort studietiden spesiell med mye kaffe, latter, støtte og gode råd.

Takk til alle medstudenter for alle innspill og morsomme stunder.

Tromsø, mai 2020.
Julie Astrid Rundmo Bratteng

Innholdsfortegnelse

Tabelliste

Figurliste

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

I arbeidet med den nye læreplanen har det vært fokus på at den norske skolen må fornye seg for å forberede elevene på den nye teknologiske verden. Ludvigsen – utvalget (NOU 2015: 8) peker på at den norske skolen er med på å utvikle eleven til å ta del i samfunnets utvikling både sosialt, kulturelt, økonomisk og teknologisk. Den nye teknologiske verden krever at flere elever må velge matematiske, naturvitenskapelige og teknologiske studier slik at Norge kan hevde seg i fremtiden. Rocard – rapporten (Rocard et al., 2007) viser hvordan Europa behøver flere studenter innenfor matematiske, naturvitenskapelige og teknologiske studier. Rapporten konkluderer med at ved å endre den pedagogiske trenden i Europa fra tradisjonell tavleundervisning til en mer utforskende undervisning i matematikk og naturfag vil kunne føre til en økning av søknader til matematiske, naturvitenskapelige og teknologiske studier. I lys av denne rapporten har flere andre land valgt å gjennomføre en endring, og Norge har valgt å gjøre denne endringen gjennom Kunnskapsløftet 2020.

Den nye læreplanen trer i kraft fra høsten 2020. I den nye læreplanen er det presentert ulike kjerneelementer i fag som skal representere det viktigste og mest sentrale elevene skal lære i hvert fag. Endringen i læreplanen skal føre til at elevene skal arbeide med metoder og tenkemåter slik at elevene får en større forståelse og kompetanse i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2018). De seks kjerneelementene representert i den nye lærerplanen i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2019) er:

- Utforskning og problemløsning
- Modellering og anvendelser
- Resonnering og argumentasjon
- Representasjon og kommunikasjon
- Abstraksjon og generalisering
- Matematiske kunnskapsområder

Som lektor i matematikk er hovedmålet å bidra til å utvikle elevenes matematiske kompetanse slik at elevene skal være best mulig rustet for livet etter skolen. Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) beskriver den matematiske kompetansen til elevene ved fem komponenter:

begrepsforståelse, beregning, strategisk kompetanse, engasjement og resonnering. Kilpatrick et al. (2001) beskriver resonnering ved at man skal kunne forklare og begrunne tankegang, følge og vurdere et logisk resonnement, argumentere gyldigheten av en hypotese ved logiske resonnement og kunne forklare og begrunne sammenhenger mellom ulike begreper og fremgangsmåter. Resonnering er sammen med argumentasjon, ett av kjerneelementene i den nye læreplanen:

> Elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Elevene må kunne følge og vurdere matematiske resonnementer. Elevene må også lære å utforme sine egne resonnementer både for å løse problemer og for å argumentere for framgangsmåter og løsninger. (Kunnskapsdepartementet, 2018, s.15)

Ut ifra kjerneelementet kan man tyde at eleven skal bevege seg bort fra den instrumentelle læringen (Mellin-Olsen, 1984), og mot en helhetlig matematisk forståelse og kompetanse. Instrumentell læring vil kunne føre til en ensformig matematisk forståelse hos elevene, og tradisjonell matematikkundervisning vil kunne underbygge denne læringen hos elevene (Mellin-Olsen, 1984).

Flere forskningsstudier (f. eks. Artigue & Blomhøj, 2013; Bruder & Prescott, 2013) sammen med den nye læreplanen peker på at en endring i undervisningspraksisen vil kunne føre til økt motivasjon og læring hos elevene. Endringen vil ligge i å la elevene få føle på økt selvstendighet og i større grad være ansvarlig for egen læring og kunnskap enn tidligere. Elevene skal bevege seg mot induktiv læring gjennom undersøkende matematikkundervisning (Engeln, Euler & Maass, 2013).

Undersøkende matematikkundervisning er en undervisningsform der læreren skal stille åpne spørsmål eller problemer, og invitere elevene til å løse de slik som matematikere arbeider (Artigue & Blomhøj, 2013; Blomhøj, 2013). Læreren spiller en veiledende rolle i klasserommet, der læreren skal støtte og utfordre elevene. De ulike rollene til læreren og elevene i undersøkende undervisning vil kunne føre til påvirkning av nivå av åpenhet i et undersøkende undervisningsopplegg. Lazonder og Harmsen (2013) peker på en effekt av undersøkende undervisning ved tett veiledning fra læreren i undervisningsøyeblikket, men man kan ikke vise til effektiv læring i det lange løp. Det kan derfor være interessant å undersøke hvordan ulike undervisningsopplegg med ulike grader av åpenhet kan påvirke positivt og negativt elevenes læring.

De åpne spørsmålene i undersøkende matematikkundervisning vil kunne gi muligheter for alle elever å delta om de har ulike matematiske utgangspunkt. I møte med et problem vil elevene kunne bruke tidligere lært kunnskap for å undersøke og utforske et problem. I problemløsningen må elevene velge, implementere og evaluere ulike strategier for å finne en best mulig løsning (Polya, 2014). Utgangspunktet til en elev vil være ulik, og derfor vil eleven ha ulike strategier hvordan løse et problem. En strategi omfatter alt fra tilnærminger til konkrete strategier (Lithner, 2008). Elevene vil implementere og evaluere strategier på ulik måte, og ved bruk av Balacheffs (1988) taksonomi vil man kunne undersøke i hvilken grad elevene argumenterer i form av å overbevise seg selv og andre.

Elevenes tanker i møte med et problem i undersøkende undervisning, og hvordan de velger å løse et problem kan gi meg som lektor et verdifullt innblikk i hvordan det er å være ungdom i dagens skole. Forskning på elevers tanker i problemløsning med tanke på resonnering og argumentasjon i undersøkende matematikkundervisning kan også være et bidrag og interesse for matematikkdidaktisk forskning.

1.2 Formål og problemstilling

Formålet for denne studien er å kunne få en økt innsikt om hvordan elevene resonnerer og argumenter i undersøkende matematikkundervisning. Ved å undersøke to ulike undersøkende undervisningsopplegg av ulike grad av undersøkelse, ønsker jeg å avdekke eventuelle trekk ved elevenes resonnering og argumentasjon. Det har ført til problemstillingen:

Hvordan resonnerer og argumenterer elever i videregående skole i undersøkende undervisning av ulike nivåer av åpenhet?

For å besvare problemstillingen vil jeg undersøke hvordan elever resonnerer og argumenter i to ulike undersøkende undervisningsopplegg. Jeg har valgt å formulere to forskningsspørsmål for å belyse problemstillingen ytterligere:

1) Hvilke strategier og tilnærminger benytter elevene i to ulike undervisningsopplegg av ulike nivåer av undersøkelse? Hvordan evaluerer elevene strategiene?
2) Hvilke faktorer kan påvirke elevenes resonnering og argumentasjon?

Studien baserer seg på to undersøkende undervisningsopplegg med ulike grad av åpenhet i to klasser i videregående skole. Elevgruppene i de to klassene har ulik måloppnåelse. Studien kan karakteriseres som en multippel case-studie der observasjon og lyd- og videoopptak blir benyttet som dokumentasjonsmetode.

1.3 Oppgavens oppbygging

Masteroppgaven består av seks kapitler. Det første kapitlet redegjør for bakgrunnen for prosjektet, formål, problemstilling og oppgavens oppbygging. I kapittel 2 vil teorien og rammeverket for oppgaven presenteres for å best mulig belyse problemstillingen.

Det tredje kapitlet vil handle om metodiske valg for studien. Metodiske valg vil omfatte vitenskapssyn, forskningsdesign og hvilket utvalg og undervisningsopplegg studien baserer seg på. I tillegg redegjør kapitlet for hvordan datainnsamlingen foregår, hvordan dataen er analysert og presentert. Til slutt presenteres metodiske utfordring, drøfting av kvaliteten av studien og etiske hensyn som er ivaretatt i studien.

I fjerde kapittel vil resultater og funn presenteres på bakgrunn av studiens rammeverk. Deretter i kapittel fem vil jeg drøfte funnene i lys av ulike påvirkende faktorer, tidligere beskrevet teori og forskning.

Deretter vil jeg i kapittel 5 oppsummere studien, samt konkludere problemstillingen. Til slutt vil jeg reflektere over studiens relevans og videre forskning.

2 Teori

I dette kapitlet vil jeg redegjøre for ulike sentrale begreper i problemstillingen, som videre er bakgrunnen for analysen. I første delkapittel redegjør jeg for begrepet undersøkende matematikkundervisning, og drøfter for læringseffekten undervisningen kan ha. Deretter presenterer jeg ulike kjennetegn for undersøkende matematikkundervisning. I andre delkapittel vil jeg redegjøre for det teoretiske rammeverket som er bakgrunnen for analysen ved rammeverk av Lithner (2008) og Balacheff (1988). Det tredje og siste delkapittel vil jeg redegjøre for definisjon av tallteori og hvilken rolle tallteorien har i norsk skolematematikk.

2.1 Undersøkende matematikkundervisning

Rocard - rapporten (Rocard et al., 2007) konkluderer med at Europa har behov for en pedagogisk endring. Den pedagogiske endringen skal føre til at undervisningen går fra tradisjonell lærebokstyrt undervisning til en mer undersøkende undervisning som skal skape og utvikle forståelsen i matematikk hos elevene. I kapittel 2.1.1 vil jeg redegjøre for ulike definisjoner av undersøkende matematikkundervisning. Deretter vil jeg kapittel 2.1.2 presenterer hvordan man kan vurdere grad av åpenhet i undersøkende matematikkundervisning. I kapittel 2.1.3 vil jeg presentere likheten mellom undersøkende matematikkundervisning og problemløsning.

2.1.1 Definisjon av undersøkende matematikkundervisning

I engelsk faglitteratur er undersøkende matematikkundervisning beskrevet som inquiry-based mathematic education [IBME]. I norsk faglitteratur brukes undersøkende eller utforskende matematikkundervisning som beskrivelse. Denne studien vil bruke undersøkende matematikkundervisning som et begrep for å beskrive IBME.

Begrepet *inquiry* (undersøkende undervisning) stammer fra den amerikanske pedagogen og filosofen John Dewey (1859 – 1952). Dewey mente at læring skjer gjennom aktiviteter som er virkelighetsnære og praktiske, ofte kjent bak parolen: *learning by doing.* Aktivitetene skal føre til at elevene får erfaringer som skal til for å skape koblinger mellom faglige ideer og elevenes opplevelser. Det foregår i en kontrollert og reflektert prosess Dewey beskriver som *reflective inquiry* (Artigue & Blomhøj, 2013).

I flere forskningsartikler (f. eks. Bruder & Prescott, 2013; Engeln et al., 2013) presenteres en utfordring knyttet til undersøkende matematikkundervisning: det finnes mange ulike definisjoner eller beskrivelser av undersøkende matematikkundervisning. Jeg vil nå presentere ulike definisjoner eller beskrivelser av undersøkende undervisning for å belyse likheter og ulikheter.

Artigue og Blomhøj (2013) definerer undersøkende undervisningspedagogikk som en undervisningsmetode der man inviterer elevene til å arbeide på den samme måten som matematikere og naturvitere arbeider. Det fremheves at undersøkende undervisning bygger på en undervisningsfilosofi der utdanning er for alle, stimulerer elevenes interesse for læring og dyrke selvstendigheten deres, og forme elevene til å spille en viktig rolle for samfunnet. For at elevene skal få en innsikt i hvordan matematikere arbeider er det viktig at aktivitetene som benyttes er virkelighetsnære og praktiske eksempler. Dette vil kunne gi elevene et inntrykk av hvordan forskere arbeider og hvorfor matematikk er meningsfull.

Viktigheten av å vise elevene hvordan matematiker arbeider handler om rekrutteringen til matematiske, naturvitenskapelige og teknologiske fagfelt i fremtiden. Rocard-rapporten (Rocard et al., 2007) er en av de som har påpekt viktigheten av rekruttering innenfor realfag i likhet med Artigue og Blomhøj (2013). Undervisningen skal forme elevene til å spille en viktig rolle for samfunnet. Som følge av Rocard-rapporten (Rocard et al., 2007) ble det oppnevnt ulike forskningsprosjekter for å få undersøkende undervisning ut i Europa. Et av disse prosjektene er PRIMAS (Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education across Europe). I prosjektet har man forsket på hvordan man kan implementere undersøkende undervisning og prosjektet presenterer fem hovedaspekter ved undersøkende undervisning (Abril et al., 2013); læringsmiljø, klasseromskultur, verdifulle utfall, læreren og elever.

PRIMAS (Abril et al., 2013) beskriver elevenes rolle i undervisningen gjennom fem faser: stille spørsmål, undersøke og utforske, forklare, utdype og evaluere. Undersøkende undervisning er drevet av åpne spørsmål som er virkelighetsnære for eleven. Spørsmålene kan gi flere rette svar, og man kan bruke ulike muligheter til å komme frem til svaret. Læreren er nødt til å gi veilede ved å stille de riktige spørsmålene til elevene for å hjelpe de videre i prosessen, uten å gi dem svaret. Læreren må da kunne hjelpe elevene med å koble gammel kunnskap opp mot ny kunnskap. Dette gjør at elevene kan engasjere seg i læringsprosessen, og få et ønske om å undersøke videre ved at de møter oppgaver som er virkelighetsnære og virker meningsfulle.

Blomhøj (2016) beskriver undersøkende matematikkundervisning ved hjelp av tre faser: iscenesettelse, elevens selvstendige arbeid og felles refleksjon og læring. Fasene trenger ikke komme i rekkefølge og kan gjentas flere ganger i samme undervisningsøkt (Blomhøj, 2016).

Iscenesettelsen handler om på hvilken måte læreren presenterer problemet til elevene. Læreren etablerer et felles rammeverk for elevene med tidsaspekt for bruk av oppgaven, hvilke produktkrav som kreves og hva er suksesskriteriene for oppgaven. Fase to, *elevenes selvstendige arbeid*, krever tilstrekkelig tid, frihet og støtte til at elevene kan arbeide selvstendig med problemet. Støtten handler om etablering av samarbeid mellom elevene og går gjennom dialog. Den siste fasen, *felles refleksjon og faglig læring* medfører at erfaringer og resultater systematiseres og gjøres felles (Blomhøj, 2016). Læreren hjelper elevene med å peke ut faglige poenger i elevenes arbeid. Det vil si at læreren må hjelpe elevene å systematisere de faglige poengene de har oppnådd i undervisningen. Ved å systematisere de faglige poengene kan elevene forbinde og sammenfatte ny viten med etablert viten. Videre kan læreren utpeke nye spørsmål og nye mulige undersøkelser for videre arbeid.

Disse tre fasene vil føre til at det oppstår et dialogisk samspill i klasserommet der prosessen i undervisningen verdsettes høyere enn riktig svar. For at elever skal utvikle positive følelser rundt matematikken må læreren fremheve læring og forståelse fremfor riktig svar (Wæge og Nostrati, 2018). Blomhøj (2020) peker på ulike essensielle elevaktiviteter i IBME: stille spørsmål, avgrense og strukturere, observere systematikk, klassifisere, utvikle definisjoner, innføre og anvende symboler, anvende algebra, resonnere og bevise, representere og visualisere, danne og teste hypoteser, eksperimentere, kontrollere variabler, fortolke og vurdere resultat, kommunisere. Disse elevaktivitetene kan sees i sammenheng med elevens rolle i undersøkende undervisning (Abril et al., 2013).

Engeln et al. (2013) peker på at undersøkende undervisning innebærer et skifte fra deduktiv læring til en mer aktiv form for undervisning og læring der eleven må være selvstendig i prosessen. Det vil si at eleven skal bevege seg mot induktiv læring. Rocard-rapporten (Rocard et al., 2007) viser til to ulike tilnærminger for læring i undersøkende undervisning: deduktiv læring og induktiv læring. I deduktiv læring vil læreren benytte logiske slutninger ved bruk av definisjoner, aksiomer og allerede beviste setninger, og vil deretter vise til eksempler på anvendelse. Deduktiv læring vil derfor være vanskelig å oppnå for matematikken i videregående skole fordi det krever at eleven behersker et visst nivå av abstrakt notasjon. Induktiv læring vil gi rom for at elevene undersøker og eksperimenterer på egenhånd ved hjelp av kunnskap eleven selv har bygget opp (Engeln et al., 2013). Deduktiv læring vil være preget av instruksjoner fra læreren, mens induktiv læring vil gi eleven rom for egne undersøkelser der eleven i større grad selv må utvikle sin egen kunnskap og forståelse.

Instruksjoner fra læreren kan derfor påvirke effektiviteten av læringsutbytte hos elevene. Lazonder og Harmsen (2016) viser i sin artikkel til ulike forskningsstudier som måler effektivitet av undersøkende matematikkundervisning, og peker på faktorer for hvordan undersøkende undervisning er mer effektiv. En avgjørende faktor er veiledning og tilgjengelighet fra lærer. Effektiviteten av veiledning avhenger mer av kunnskapen eleven har utviklet enn fra selve aktiviteten som elevene gjennomfører (Lazonder & Harmsen, 2016). Det vil si at en tett veiledning fra læreren vil kunne gi bedre elevprestasjoner i undervisningen. Forskningen viser at det er mer usikkert hvilken faktor veiledning er i undersøkende undervisning.

Ut ifra de ulike definisjonene av undersøkende matematikkundervisning kan man karakterisere undervisningen som oppgaveløsning som skal gi rom for undersøkelser, problemløsning og mer selvstendig læring hos elevene. Elevene må undersøke, forklare og evaluere strategier og metoder for å utvikle kunnskapen i matematikk. Dette skal skje gjennom veiledning fra læreren ved at læreren skal være nysgjerrig, stille kritiske spørsmål og knytte kunnskapen til elevene.

2.1.2 Nivåer av åpenhet

Veiledning i undersøkende matematikkundervisning være en påvirkende faktor for nivåer av åpenhet i undervisningsopplegget. For å klassifisere undersøkende matematikkundervisning viser Fradd, Lee, Sutman og Saxton (2001) til et teoretisk rammeverk. Rammeverket skal være til hjelp for å klassifisere undersøkende matematikkundervisning i form av undersøkende nivå. Klassifiseringen består av seks ulike nivåer av grad av åpenhet fra 0 til 5.

Tabell 1.

Nivåer i undersøkende undervisning til Fradd et al. (2001, s.489)

Undersøkende nivå	Spørsmålstilling	Planlegging	Implementering	Konkludering		Rapportering	Anvende
			Gjennomføre plan	Analysere data	Trekke konklusjon		
0	Lærer	Lærer	Lærer	Lærer	Lærer	Lærer	Lærer
1	Lærer	Lærer	Elever/Lærer	Lærer	Lærer	Elever	Lærer
2	Lærer	Lærer	Elever	Elever/Lærer	Elever/Lærer	Elever	Lærer
3	Lærer	Elever/Lærer	Elever	Elever	Elever	Elever	Elever
4	Elever/Lærer	Elever	Elever	Elever	Elever	Elever	Elever
5	Elever	Elever	Elever	Elever	Elever	Elever	Elever

Tabell 1. viser en klassifisering av hvilke deler av undervisningen som læreren og eleven tar ansvar for i de ulike nivåene. Klassifiseringen kan brukes av lærere for å få en forståelse av hvilken grad av åpenhet det er i undervisningsopplegget (Walker, 2007). Klassifiseringen kan sees i sammenheng med når eleven oppnår deduktiv læring, der elevene i større grad selv må utvikle sin egen kunnskap og læring. I undersøkende nivå 0 vil det være læreren som styrer undervisningen, og det kan sees i sammenheng med induktiv læring. Ved undersøkende nivå 5 vil læreren gi hele ansvaret over til eleven, og eleven må utvikle sin egen kunnskap og læring på egen hånd.

Bruder og Prescott (2013) klassifiserer i likhet med Fradd et al. (2001) undersøkende undervisning ved tre ulike nivåer: strukturert undersøkelse, veiledet undersøkelse og åpen undersøkelse. De ulike nivåene avhenger av hvordan læreren formulerer oppgaven og veileder elevene. Strukturert undersøkelse karakteriseres av at læreren gir elevene et problem som skal løses, i tillegg til en passende metode for å løse problemet. Dette nivået kan ses i lys av nivå 0 i modellen til Fradd et al. (2001) der læreren har alt ansvar for læringen til eleven.

Veiledet undersøkelse identifiseres ved at læreren gir elevene et problem og nødvendig materiale for å løse oppgaven, mens elevene selv må finne problemløsningsstrategier og metoder (Bruder & Prescott, 2013). Dette nivået av undersøkelse kan sees i sammenheng med nivå 1 til 4 med ulike karakteristika. Det som skiller de ulike nivåene vil være iscenesettelsen, grad av veiledning fra læreren og selvstendigheten til elevene. I iscenesettelsen vil det skille hvordan oppgaveformuleringen er og om læreren presenterer en form for eksempel eller metode i overdragelsen av problemet. Veiledning fra læreren vil kunne skille oppleggene ved hvilken grad læreren veileder elevene, og det vil også gjenspeile selvstendigheten til elevene.

Det siste nivået er åpen undersøkelse, der eleven må selv finne problem de ønsker å få et svar på, og i tillegg bestemme metode for å løse problemet (Bruder & Prescott, 2013). Åpen undersøkelse kan ses i sammenheng med undersøkende nivå 5 der læreren gir hele ansvaret for kunnskap og læring til eleven.

Ut fra de ulike karakteristikaene til Bruder og Prescott (2013) vil det ikke være gitt at alle undervisningsopplegg kan karakteriseres som strukturert, veiledet eller åpen undersøkelse. Ved hjelp av Fradd et al. (2001) sitt teoretiske rammeverk vil det være mulig å karakterisere undersøkende matematikkundervisning innenfor de ulike nivåene av undersøkelse.

2.1.3 Problemløsning i undersøkende matematikkundervisning

Ofte vil undersøkende matematikkundervisning ses i sammenheng med problemløsning. I problemløsning vil eleven utfordres til å velge hvilke strategier som er passende for å løse problemet. Polya (2014) beskriver problemløsning som en praktisk ferdighet (skill) som oppnås gjennom øving. Det er ikke mulig å trene elevene i en bestemt strategi, men øvelse vil kunne gi en større bredde av strategier. Polya (2014) demonstrerer en firestegs-modell for problemløsningsprosessen. Modellen er basert på hvordan matematikere arbeider med problemer:

1. Forstå problemet
2. Lage en plan
3. Gjennomføre planen
4. Se tilbake

Stegene kan være et hjelpemiddel for å løse matematiske problemer. Det første steget beskrives som en vanskelig del for enkelte elever. Hvis eleven ikke kan lese og forstå problemet vil eleven stanse opp (Polya, 2014). Derfor er læreren nødt til å legge opp til at eleven skal forstå problemet. Når eleven forstår problemet kan eleven lage en plan ved å benytte informasjon fra fase en. Det vil være viktig at eleven klarer å hente ut informasjon fra fase en og knytte denne informasjonen opp mot noe kjent. Det vil kunne være behov for veiledning av læreren. Gjennomføringen av planen vil være den enkleste fasen i prosessen hvis eleven har laget en god plan. Den siste fasen er å se tilbake på hva man har gjort, og deretter verifisere løsningen (Polya, 2014).

2.2 Argumentasjon

I denne delen vil rammeverket for analysen presenteres. Først blir det redegjort for bevis og dets rolle i skolematematikken. For å kunne redegjøre hvordan elevene resonnerer i undersøkende matematikkundervisning er rammeverket bygget på Lithners (2008) resonnementsstruktur og de fire ulike nivåene av bevisstrategier fra taksonomien til Balacheff (1988). De fire ulike nivåene av bevisstrategier fra Balacheff (1988) blir benyttet i analysen for å analysere hvordan elevene argumenterer i resonneringen.

2.2.1 Bevis i skolen

Det finnes mange måter å definere bevis, argumentasjon og resonnering, og de ulike begrepene brukes på ulike måter (Hanna, 2014). Et bevis kan tilby felles kriterier for alle som bruker matematikk for å akseptere og generere matematisk kunnskap ved å koble gammel teori opp mot ny teori (Hemmi, 2010; Hanna, 2014). Matematiske beviser har ulike roller i skolematematikken, og beviser kan være med på å skape en helhet i skolematematikken. Hemmi (2010) argumenterer for hvordan matematiske bevis er med på å styrke den matematiske kompetansen til elevene siden bevis er en kjerne i matematikken som er stabil fra generasjon til generasjon. Dette medfører at man kan benytte matematiske bevis i undervisningen for at elevene skal utvikle den matematiske kompetansen sin.

Stylianides (2007) definerer et bevis som et matematisk argument, en sammenhengende sekvens av antakelser for og mot en matematisk påstand, med tre kriterier:

1. Alle definisjoner, aksiomer og teoremer skal være akseptert av elevene;
2. All resonnering skal være sann og kjent for elevene;
3. Beviset skal presenteres på en forståelig måte for elevene;

Definisjonen av et bevis til Stylianides (2007) kan sees i sammenheng med Harel (2014) sin definisjon av deduktiv resonnering. Deduktivt resonnement er en tenkemåte som ofte er karakterisert som en sekvens av forslag, der eleven må akseptere at noen av forslagene er sanne hvis eleven har akseptert sannheten til tidligere forslag i sekvensen (Harel, 2014). Som følge av definisjonene til Stylianides (2007) og Harel (2014) kan man si at bevis er et sammensatt begrep som omfatter både matematisk resonnement og argument. Resonnement er en tenkemåte for å løse et problem, som vil ta i bruk matematiske argumenter for å overbevise seg selv og andre.

2.2.2 Matematisk resonnement

Niss og Højgaard Jensen (2002) definerer resonnementskompetanse som elevenes forståelse av hva et bevis er, hvordan følge og bedømme resonnementer, samt hvordan kunne overbevise seg selv og andre om gyldigheten til matematiske påstander. Dette vil omhandle både gyldigheten av matematiske regler, men også gyldighet av svar på spørsmål, problemer eller oppgaver. Lithner (2008) beskriver resonnering som et produkt av en tankeprosess som oppstår i en sekvens av resonnering. Resonneringen starter i en oppgave og ender i en konklusjon. Ut ifra definisjonene til Niss og Højgaard Jensen (2002) og Lithner (2008) kan man definere resonnering som en prosess som handler om overbevisning av seg selv og andre om gyldigheten til matematiske påstander.

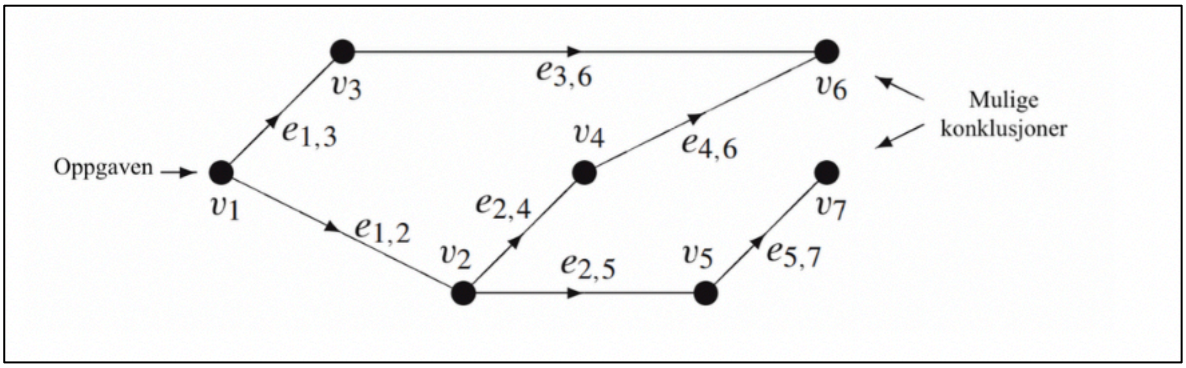
Analysen i denne studien vil overordnet bygge på Lithners (2008) resonneringsstruktur. Strukturen er et hensiktsmessig rammeverk for å undersøke hvordan elever resonnerer. Lithner (2008) deler inn resonnering i fire steg:

1) Eleven møter en oppgave. Dersom oppgaven ikke umiddelbart er åpenbar for eleven for hvordan man kan løse oppgaven, betegnes oppgaven som et problem.
2) Eleven foretar et strategivalg. Strategi omfatter alt fra prosedyrer til tilnærminger. Valget som eleven foretar omfatter bevisste valg, oppdagelse, gjetning, etc. Steget kan støttes av logisk argumentasjon: *Hvorfor vil denne strategien fungere?*
3) Gjennomføring av strategi, og kan støttes opp av argumentasjonen: *Hvorfor fungerte strategien?*
4) En konklusjon oppnås.

Lithner (2008) viser hvordan resonneringsstrukturen kan representeres ved en sti (figur 1). Kanten v_n representerer et tidspunkt i resonneringen. Det blir foretatt et strategivalg ut fra v_n, og pilen $e_{m,n}$ representerer gjennomføringen av strategi. Tilgjengelig kunnskap som ikke var tilgjengelig i v_n, blir benyttet for å danne ny kunnskap i v_m. Det vil alltid foreligge argumentasjon til grunne for forflytning fra en kant til en annen, selv om den er vag eller overfladisk (Lithner, 2008).

Figur 1.

Graf som representasjon av resonneringsstruktur. (Lithner, 2008, s.258)



I elevenes resonnementsprosess er matematiske ideer, begreper og utsagn sentrale i møte med et problem, og for å kunne overbevise seg selv og andre. Matematiske ideer defineres av Ascher (2002, s.3) som ideer som omfatter tall, logiske og romlig form, og en kombinasjon og organisering av disse i systemer av strukturer. Det vil si at matematikk består av systemer av ideer som er uttrykt ved bruk av ulike matematiske representasjoner. Goldin (2014) beskriver den matematiske representasjonen som handlingen eller prosessen ved å produsere representasjoner, slik at matematisk representasjon er noe eleven gjør. Enten kan det være en fysisk produksjon av representasjoner eller de kognitive prosessene hos eleven som er involvert i konstruksjon av representasjoner.

Matematiske ideer omfatter også matematiske begreper. Brekke (2002) karakteriserer matematiske begreper gjennom at begrepene ikke har vokst frem isolert, men eksisterer i et nettverk av enkelte ideer. Disse strukturene av begreper gjør at elevene kan bruke begreper for å støtte opp under ferdighetene sine, som vil føre til at matematikken gjøres mer nyttig og meningsfull for eleven. Strukturene gjør at elevene kan knytte tidligere lærte begreper eller ferdigheter mot nye begreper eller situasjoner som elevene møter. Brekke (2002) beskriver at elevene kan skape seg en rik begrepsstruktur gjennom å utvide de opprinnelige matematiske begrepene som de har skapt gjennom tidligere erfaringer, og knytte disse sammen.

I et matematisk resonnement spiller matematiske utsagn en rolle for at eleven skal kunne overbevise seg selv og andre. Matematiske utsagn karakteriseres av Johnsen (2000, s.3) som en påstand om matematiske objekter av en viss type slik at:

1. Setningen er meningsfull for alle objekter av den omtalte typen.
2. Det setningen sier er sant eller ikke sant for alle objekter av den oppgitte typen.

Eksempler på matematiske utsagn kan være: *tallet 3 er større enn 1* eller *2 + 4 = 6*. De matematiske uttrykkene vil stå i direkte kontakt med matematisk begreper og ideer. Elevene vil benytte utsagn for å uttrykke matematikk. De ulike definisjonene av matematiske ideer, begreper og utsagn kan være med på å vurdere hvordan elevene resonnerer og argumenterer i undersøkende matematikkundervisning.

2.2.3 Bevisstrategier

Bevisstrategier (*proof schemes*) beskrives av Harel og Sowder (2007) som en evne til å overbevise seg selv og andre om riktigheten av en påstand. Beskrivelsen er basert på tre definisjoner: formodning versus faktum, bevis og konstatere versus overtale.

Første steg er formodning versus faktum. Elever kan fremme antakelser og fakta, og eleven er nødt til å overbevise seg selv om at antakelsen er korrekt. Antakelsen er endelig om eleven lykkes i overbevisning av seg selv og andre rundt seg. Dette fører til det andre steget i prosessen, bevis. Dette steget handler ikke om tradisjonelle bevis som er benyttet innenfor matematikken, men overbevisningsprosessen til menneske (Harel & Sowder, 2007). Harel og Sowder (2007) deler overbevisningsprosessen inn i to prosesser: konstatering og overtalelse. Overtalelse handler om evnen til å fjerne andres tvil, mens konstatering omfavner individets egen overbevisning.

Balacheff (1988) sin taksonomi av bevisstrategier vil bli benyttet for å beskrive ulike nivåer av bevisstrategier i denne studien. Taksonomien av bevisstrategier til Balacheff (1988) er benyttet som rammeverk for å beskrive elevenes strategievaluering i resonnementsstrukturen til Lithner (2008). Balacheff (1988) er brukt til fordel for rammeverket til Harel og Sowder (2007) siden matematikken i studien til Balacheff kan relateres mot matematikken i denne studien. Harel og Sowder (2007) benytter matematikk på formelt og høyt nivå for å beskrive taksonomien.

Balacheff (1988) deler bevisføring i to kategorier: pragmatisk bevisføring og konseptuell bevisføring. Pragmatisk bevisføring kjennetegnes av prosessen der eleven benytter faktiske handlinger og konkretisering. Det kan være bruk av tegninger, fysiske gjenstander eller annen form av fysisk representasjon. Balacheff presenterer tre undergrupper i pragmatisk bevisføring: naiv empirisme, avgjørende eksperiment og generisk eksempel. Konseptuell bevisføring krever en distansering fra handlinger og konkretiseringer, og er dermed en kontrast til pragmatisk bevisføring. Strategiene til elevene hviler på formuleringer av egenskaper det stilles spørsmål om og forholdet mellom dem (Balacheff, 1988, Varghese, 2011). Balacheff (1988) presenterer to undergrupper til konseptuell bevisføring: tankeeksperiment og beregning av påstand. Kategorien *beregning av påstand* vil ikke bli benyttet i denne studien, da den kan være vanskelig å skille fra tankeeksperiment. Kategorien er også over elevenes forventede matematiske nivå.

I studien til Balacheff (1988) undersøkte han hvordan 13 og 14 år gamle elever genererer bevis ved å gi oppgaven: *lag en regel for å beregne antall diagonaler i en mangekant, når du vet hvor mange hjørner mangekanten har.* Den samme oppgaven ga Varghese (2011) i sin studie til lærerstudenter. Eksempler fra begge studiene er brukt til å beskrive de ulike nivåene av bevisstrategier: naiv empirisme, avgjørende eksperiment, generisk eksempel og tankeeksperiment.

2.2.3.1 Naiv empirisme

Naiv empirisme omfatter strategier der elever vil verifisere sin teori gjennom få, tilfeldig valgte eksempler. Balacheff (1988) beskriver naiv empirisme som det første steget i prosessen mot generalisering, og derfor er strategien ofte motstandsdyktig for generalisering. Kategorien omfatter strategier der elever forkaster en hypotese uten noe form for utprøving. Strategier der elevene ikke tar i bruk generelle egenskaper som de allerede har oppdaget kan også karakteriseres som naiv empirisme.

For å illustrere naiv empirisme trekker Varghese (2011, s. 185) frem følgende eksempel: *Et rektangel har fire hjørner og to diagonaler: hjørner = h = 4, diagonaler = d = 2. En mangekant har fem sider og fem diagonaler, h = 5 og d = 5. Følgelig, hvis h er et partall vil antall diagonaler være lik d = h / 2. Hvis h er et oddetall vil antall diagonaler være lik d = v.*

Balacheffs (1988) naive empirisme kan sees i sammenheng med Harel og Sowders (1998) induktive bevisstrategi. Kjennetegnene til den induktive bevisstrategien er at elevene evaluerer ett eller flere konkrete tilfeller for å kunne overbevise seg selv eller andre. Elevene bruker erfaringer i argumentasjonen for å validere og underbygge påstander (Harel & Sowder, 1998).

2.2.3.2 Avgjørende eksperiment

Balacheff (1988) beskriver avgjørende eksperiment som en skillevei. Det betyr at eleven må foreta et valg mellom to eller flere hypoteser. For å hjelpe eleven med å bestemme seg for en hypotese, velger eleven et utvalgt eksempel som vil forutse ulike utfall. De ulike utfallene vil være så ulike hverandre at eleven kan bestemme seg for en hypotese. Balacheff (1988) beskriver denne argumentasjonsformen til slike resonnementer ved: *Det funker her, derfor vil det alltid virke.* I studien til Balacheff (1988) blir denne typen resonnement brukt for å sjekke validitet opp mot det elevene allerede har gjort, og som en argumentasjonsform med andre elever.

For å eksemplifisere avgjørende eksperiment viser Varghese (2011, s. 185) til følgende eksempel: *Jeg antar at antall diagonaler er lik antall hjørner og vil bruke en femkant for å verifisere antakelsen. Grunnen til at jeg bruker en femkant er siden figuren har størst antall hjørner som fortsatt er enkel å tegne. En femkant har fem hjørner og fem diagonaler: $h = 5$, $d = 5$. Derfor vil $h = d$.*

I likhet med naiv empirisme kan avgjørende eksperiment sees opp mot induktive bevisstrategier til Harel og Sowder (1998). I argumentasjonen bruker elevene erfaringer for å underbygge og validere påstander.

2.2.3.3 Generisk eksempel

Ifølge Balacheff (1988) karakteriseres generisk eksempel som et utvalgt eksempel som representerer helheten i form av karakteristikker som kan representere en klasse tilfeller. Det vil si at eleven benytter karakteristika som ikke presenteres i oppgaven for å velge ut et eksempel. Eksempelet vil benyttes som generalisering, som vil si at eksempelet vil representere karakteristika for en rekke eksempler. Et eksempel kan være: *Noen hus er røde, derfor er rekkehuset rødt.* Denne argumentasjonsformen kan sees i sammenheng med avgjørende eksperiment, der formen bli benyttet for å overbevise andre og seg selv (Balacheff, 1988).

Varghese (2011) peker derimot på at det er umulig å lese om et eksempel er nøye utvalgt eller tilfeldig valgt. Derfor er eksempler som omfatter ekstreme eksempler, for eksempel høye tall, plassert under generisk eksempel. Varghese (2011, s. 185) legger frem følgende eksempel for å belyse generisk eksempel: *En femkant har fem sider og fem diagonaler: $n = 5$, $d = 5$. Fra hvert hjørne kan man tegne bare to diagonaler: siden det er ingen diagonaler fra et hjørne og* *tilbake til hjørnet, og det er ingen diagonaler fra de to nærliggende hjørnene. Følgelig vil det være det være tre færre diagonaler enn det totale antall av sider. Siden det er fem sider og fem diagonaler kan man tegne totalt 10 (5 x 2 = 10) diagonaler. Diagonaler har to ender, og ved å telle begge ender av samme diagonal vil gi totalt 10 diagonaler, men bare en ende trenger å bli telt. Antall diagonaler vil være 10/2, som er lik 5 hjørner.*

Generisk eksempel kan sees i sammenheng med Harel og Sowders (1988) *transformational proof scheme.* Remodelleringsstrategi beskrives av Harel og Sowder (1998) gjennom tre ulike nivåer: generaliserbarhet, mål og delmål, logiske slutninger. Generaliserbarhet handler om hvordan elevene argumenterer på en måte slik at ingen unntak vil godtas i prosessen. Både remodelleringsstrategi og generisk eksempel vil underveis i prosessen ta for seg mål og delmål. Kravet til argumentasjon og logiske slutninger kan karakteriseres som hovedskillet mellom generisk eksempel og remodelleringsstrategi. I generisk eksempel vil elevene basere seg på et hverdagsspråk, og det logiske for eleven. I remodelleringsstrategien krever det et høyere nivå for språket i argumentasjonen og logiske slutninger i form av aksepterte sannheter.

2.2.3.4 Tankeeksperiment

Tankeeksperiment beskrives av Balacheff (1988) som eksempler der argumentasjonen beveger seg fra pragmatisk til konseptuell argumentasjon. Det vil si at argumentasjonen beveger seg bort fra det praktiske og mot den intellektuelle argumentasjonen. Eleven benytter seg av argumentasjon der eleven distanserer seg fra handling og bruker logiske slutninger på bakgrunn av egenskaper (Balacheff, 1988). Argumentasjonsformen setter krav til at elevene bruker språk som tar for seg abstrakte egenskaper. Elevenes evne til å distansere seg fra eksempler, beskriver Balacheff (1988) som et kjennetegn ved tankeeksperiment.

For å demonstrere tankeeksperiment trekker Varghese (2011, s. 185-186) frem følgende eksempel: *Se for deg en mangekant med antall sider, v. Hvis det er v antall sider, er det v hjørner. Ved å begynne i hvert hjørne kan man skrive (v - 3) siden: det er ingen diagonaler fra et hjørne og tilbake til hjørnet, og det er ingen diagonaler fra de to nærliggende hjørnene. Følgelig vil det være tre færre diagonaler enn antall sider, (v – 3), fra hvert hjørne. Siden det er v antatall sider vil det være totalt v(v - 3) diagonaler. Men denne tilnærmingen teller begge ender av diagonalen. Det betyr at hver diagonal er telt to ganger. Følgelig for å få korrekt antall diagonaler, divider v(v-3) med 2. Derfor vil formelen for antall diagonaler være d = (v(v – 3)) / 2.*

Harel og Sowder (1998) beskriver i deres taksonomi referensiell-symbolsk bevisstrategi. Denne bevisstrategien ligner på tankeeksperiment, og inkluderer bevisstrategier der elevene tar i bruk symbolsk matematikk som en representasjonsform. Referensiell-symbolsk bevisstrategi har høyere krav til formell argumentasjon enn tankeeksperiment til Balacheff (1988). Likheten mellom tankeeksperiment og referensiell-symbolsk bevisstrategi er hvordan elevene tar i bruk det konseptuelle ved å distansere seg fra eksempler og til det generelle.

2.2.4 Bevisstrategier og resonnering

På bakgrunn av definisjonen av resonnering til Lithner (2008) og de ulike bevisstrategiene til Balacheff (1988) vil det være hensiktsmessig å redegjøre hvordan begrepene henger sammen.

I denne studien er Lithners (2008) definisjonen av resonnering utgangspunktet for å kunne karakterisere elevenes resonnering. Resonnementsstrukturen til Lithner (2008) vil derfor være hensiktsmessig for å kunne avdekke strategier som elevene bruker for å løse problemer. Det vil kunne føre til at man kan si noe om elevenes resonnementsstruktur.

I en situasjon der elevene møter et problem vil man kunne karakterisere møte som det første steget i Lithners (2008) resonnementsstruktur. Hvis eleven ikke forstår problemet må elevene undersøke og utprøve strategier for å løse oppgaver. Strategivalgene elevene foretar seg må deretter utprøves, evalueres og deretter konkluderes. I disse ulike stegene fra Lithners (2008) resonnementsstruktur må elevene benytte argumentasjon og bevisstrategier for å kunne overbevise seg selv og andre.

I *valget av strategi* må eleven ta valg på bakgrunn av tidligere lært kunnskap. Strategien eleven velger vil basere seg på bevisste valg, oppdagelser og gjetninger som igjen vil basere seg i en viss grad på tidligere lært kunnskap (Brekke, 2002; Lithner, 2008). Den tidligere lærte kunnskapen som brukes i argumentasjon vil ofte basere seg på tidligere lærte bevis, strategier, tilnærminger, uttrykk, ideer og begreper. Elevene vil benytte tidligere lært kunnskap som et våpen i argumentasjonen som en strategi for å overbevise seg selv og andre. Den tidligere lærte kunnskapen vil bygges opp av matematiske ideer, begreper og uttrykk.

Etter at valget på strategi er tatt, må elevene utprøve strategien. Evalueringen av strategien vil kunne avdekkes ved å benytte Balacheffs (1988) taksonomi. Taksonomien vil være hensiktsmessig for å karakterisere de ulike strategivalgene til elevene. De ulike strategivalgene til elevene kan karakteriseres som bevisstrategier. I denne studien vil bevisstrategier karakteriseres som bevis, strategier, bevisføring, resonnement og generelle tilnærminger. De ulike nivåene av bevisstrategier vil kunne avdekke hvilket nivå av matematisk argumentasjon elevene benytter. Bevisstrategiene vil også komme til syne i steg to og fire i resonnementsstrukturen til Lithner (2008).

2.3 Tallteori – generelt og i skolematematikken

Tallteori handler om delen av matematikken som studerer tall og deres egenskaper (Rinvold, 2014). Tallteorien eksemplifiserer matematisk struktur, og er ifølge Barbeau (2007) en viktig bro til algebra. Ofte kan tallsammenhenger konkretiseres ved abstraksjon og generalisering. I den nye læreplanen i matematikk under kjerneelementet abstraksjon og generalisering står det:

> Elevene skal forstå representasjoner og fremgangsmåter av økende abstraksjonsgrad. Elevene bør derfor oppdage sammenhengene og strukturene selv og ikke blir presentert for en ferdig løsning. Dette foregår gjennom å utforske med tall, utregninger og figurer for å finne sammenhenger og deretter formalisere ved bruk av algebra og hensiktsmessige representasjoner. (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15)

I tallteori i likhet med matematikkundervisning må elevene bruke et symbolspråk for å uttrykke seg. I matematikken er vanlig å bruke symboler og notasjon for å beskrive tall. I tallteorien vil man beskrive de naturlige heltallene som

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

De naturlige heltallene symboliseres med bokstaven N, slik at

$$N = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

I tallteorien beskriver man en mengde som en samling av objekter, som tenkes som en helhet (Rinvold, 2014). Mengdens elementer er objektene som mengden består av, som ofte er tall. Vi kan si «4 er et naturlig tall» ved å si «4 er et element i mengden *N*.» I tallteori bruker man symbolikk, og derfor kan man si at « $4 \in N$ ». Det er en forkortelse for å si at tallet 4 er et element i mengden *N* (Rinvold, 2014).

Et av de nye kjerneelementene i den nye læreplanen i matematikk er *matematiske kunnskapsområder*. Matematiske kunnskapsområder omfavner tall og tallforståelse, algebra, geometri, funksjoner, statistikk og sannsynlighet (Utdanningsdirektoratet, 2019). Tall og tallforståelse beskrives som det mest sentrale temaet i norsk skolematematikk, og er en viktig grunnmur i hva eleven skal kunne. For at elevene skal kunne abstrahere og generalisere er tallforståelsen en viktig grunnmur. I det tidlige skoleløpet er elevene nødt til å få et godt tallbegrep og kunne variere regnestrategiene sine for å legge grunnsteinen i utviklingen av kompetanse i matematikk. I skolematematikken er tallteori representert i dette kjerneelementet gjennom hele skolegangen. Barbeau (2007) i likhet med læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2019) peker på at tallteori er en viktig grunnstein i matematikken i form av at elevene har behov for grunnleggende erfaringer med tall for å bygge videre kunnskap i matematikken.

3 Metode

Kapitlet tar for seg studiets vitenskapssyn og forskningsdesign. Videre beskriver jeg utvalget og undervisningsoppleggene. Deretter redegjør jeg for metoden for datainnsamlingen og hvordan jeg har valgt å analysere og presentere datamaterialet. Deretter tar kapitlet for seg metodiske utfordringer. Til slutt redegjør jeg for studiets kvalitet gjennom validitet, reliabilitet og etiske overveielser ved studien.

3.1 Vitenskapssyn

Denne studien handler om hvordan elever resonnerer og argumenterer i to ulike undersøkende undervisningsopplegg i matematikk. Problemstillingen i denne studien er: «*Hvordan resonnerer og argumenterer elever i videregående skole i undersøkende undervisning av ulike nivåer av åpenhet?*»

For å belyse problemstillingen har jeg valgt en kvalitativ tilnærming. Ifølge Bjørndal (2017) gir kvalitativ tilnærming forskeren en helhetlig forståelse av prosesser og sammenhenger i et lite utvalg. En kvalitativ tilnærming tar for seg et lite utvalg, men om man ønsker å undersøke et større utvalg på en systematisk måte er ofte en kvantitativ tilnærming en bedre tilnærming. Studien handler om å undersøke hvordan elever resonnerer og argumenterer i undersøkende matematikkundervisning, og ikke der ofte elever resonnerer og argumenter. Derfor vil en kvalitativ tilnærming passe bedre enn en kvantitativ tilnærming.

For å besvare forskningsspørsmålet ønsker jeg å undersøke hvordan elever resonnerer og argumenterer ved å se nærmere på 1) elevens indre tanker og forståelse, og 2) elevers samspill i klasserommet. På grunn av studiens fokus på elevenes resonnering og argumentasjon kan studien plasseres innenfor kognitiv psykologi. Kognitiv psykologi omfatter hvordan de kognitive prosessene som oppfatning, hukommelse og informasjonsbruk prosesseres hos mennesker (Cobb, 2007; Imsen, 2014). Studier innenfor kognitiv psykologi vil ifølge Cobb (2007) redegjøre for resonneringsprosesser. Derfor kan man indikere at man ved kognitiv psykologi vil kunne undersøke elevens indre tanker og forståelse ved å tolke elevene ut ifra hva de sier og gjør. Ved bruk av distribuert kognisjon vil man kunne forstå elevers samspill i klasserommet. Cobb (2007) beskriver distribuert kognisjon som at fokuset på elevenes aktivitet i klasserommet kan knyttes opp mot elevenes læring.

I denne studien er en pragmatisk tilnærming valgt som et overordnet perspektiv. Cresswell (2014) beskriver fire ulike paradigmer innenfor forskningsdesign: postpositivisme, konstruktivisme, transformativ og pragmatisk. En pragmatisk tilnærming antar at undersøkelsen er betraktet som en interaksjon mellom en deduktiv og en induktiv tilnærming (Postholm & Jacobsen, 2011). En induktiv tilnærming vil si at analysekategoriene skapes ut fra materialet, mens en deduktiv tilnærming vil si at kategoriene i analysen tar utgangspunkt i teori og tidligere forskning. Analysen i denne studien veksler mellom en induktiv og en deduktiv tilnærming. Dette vil bli redegjort nærmere i kapittel 3.6 Analysemetode.

3.2 Forskningsdesign

Casestudier brukes i dag i ulike forskningsfelt, deriblant skoleforskning (Ringdal, 2018). I skoleforskning kan en case klassifiseres som for eksempel en klasse, en elevgruppe eller en lærer. En casestudie kan gi mulighet for å kunne gå i dybden, og for å få en ytterligere analyse av en enhet (Andersen, 2013; Cresswell, 2014).

I denne studien ønsker jeg å undersøke hvordan elever resonnerer og argumenterer i undersøkende matematikkundervisning. Studien gjennomføres i to ulike klasser med to ulike undervisningsopplegg. Hver klasse kan betegnes som en case, og derfor kan studien betegnes som en multippel case-studie. Yin (2012) karakteriserer en multippel case-studie som en studie der forskeren tillater å utforske likheter og ulikheter mellom caser. Studien kan ytterligere karakteriseres som en *beskrivende multippel case-studie* siden jeg som forsker ikke ønsker å utvikle nye teorier eller modeller (Christoffersen og Johannessen, 2012).

I studien vil jeg ved hjelp av observasjonsnotater og lyd- og videoopptak gi en beskrivende analyse av hvordan elevene resonnerer og argumenterer i de ulike undervisningsoppleggene. I de to ulike klassene er det to elevgrupper i hver klasse som skal undersøkes, og derfor kan studien karakteriseres som en beskrivende multippel case-studie.

3.3 Utvalg

I denne studien er det valgt ut to faglærere i matematikk fra samme videregående skole i Troms og Finnmark fylke. Den videregående skolen er en mellomstor skole med ulike studietilbud, med blant annet tilbud om studiespesialiserende linje. Informantene ble innhentet gjennom faglærers deltakelse i SUM-prosjektet. Utvalget består av fire elevgrupper fra to ulike klasser der faglærerne skulle gjennomføre hvert sitt undervisningsopplegg med utgangspunkt i undersøkende matematikkundervisning. I starten av undervisningsøktene valgte læreren tilfeldige grupper i klassen som skulle arbeide sammen. Informantene kan karakteriseres som tilgjengelighetsutvalg siden informantene er valgt ut fordi de er tilgjengelig for forskeren (Thagaard, 2009). Datagrunnlaget fra de ulike elevgruppene har spilt en rolle for valg av utvalg. Elevgrupper som hadde godt lydbilde og dermed større datagrunnlag, er valgt foran andre elevgrupper med dårligere lydbilde. Det er også tatt hensyn til at elevene skal representere klassen med tanke på at elevgruppene skal være representativ med tanke på måloppnåelse for de ulike klassene. De valgte elevene kan også karakteriseres som muntlige aktive i klasserommet, og det vil kunne styrke datagrunnlaget.

Den ene klassen er en andreklasse i matematikk S1. Matematikk S1 er det første av to programfag i matematikk for samfunnsfag i utdanningsprogrammet for studiespesialisering. Klassen består av 25 elever, hvorav seks elever er valgt ut for å ta del i studien. Disse seks elevene har middels måloppnåelse, som etter nasjonale kjennetegn på måloppnåelse er karakter 3 eller 4 (Utdanningsdirektoratet, 2016). De seks elevene består av to elevgrupper, der den første gruppen består av tre jenter (Lise, Astrid og Anne), og den andre gruppen består av en jente og to gutter (Sofie, Per og Martin).

Den andre delen av utvalget er en klasse på syv elever i matematikk R2. Matematikk R2 er et programfag i matematikk for realfag i utdanningsprogrammet for studiespesialisering. Elevene velger dette faget i tredje klasse i videregående skole, og faget bygger på matematikk R1. Fire av elevene er valgt ut til å ta del i studien, og disse elevene har høy måloppnåelse i faget som etter nasjonale kjennetegn på måloppnåelse er karakter 5 eller 6 (Utdanningsdirektoratet, 2016). I undervisningen var de fire elevene delt inn i to elevgrupper. Den første gruppen består av en jente og en gutt (Kari og Petter), mens den andre gruppen består av to gutter (Ole og Kai).

Kjønnsbalansen i utvalget er fem jenter og fem gutter, men studien vil ikke basere seg på kjønn. Det ville i midlertidig vært interessant å se på kjønnsforskjeller, men det vil det ikke være rom for i denne studien.

3.4 Undervisningsopplegg

Det er gjennomført to ulike undervisningsopplegg. Begge undervisningsoppleggene er utarbeidet av lærerne og er tilpasset deres klasse. Undervisningsøktene er beskrevet etter de tre fasene etter Blomhøj (2016) sin definisjon for undersøkende matematikkundervisning.

3.4.1 Påfølgende heltall

Undervisningsopplegget *påfølgende heltall* er inspirert av en artikkel av Parker (1998). I den valgte matematikk S1-klassen ønsket læreren å gjennomføre et undersøkende opplegg som handlet om tallforståelse og ga rom for argumentasjon. Undervisningsopplegget er planlagt og gjennomført av læreren. Hensikten med undervisningen er at elevene skal bygge erfaring med å jobbe med tallforståelse, tallmønstre og algebra. Ved en slik undersøkende undervisningsaktivitet, som påfølgende heltall, der elevene skal samarbeide for å finne en løsning, vil elevene kunne tilegne seg erfaringer som argumentasjon, resonnering og strukturert arbeid.

I den innledende fasen, iscenesettelsen, deler læreren klassen inn i grupper på tre elever. Elevene skal arbeide med skriveflater på veggen etter gruppenummer. Hver elev får en tusj hver for å skrive med. Læreren demonstrerer for elevene hvordan tallet 18 kan skrives som summen av tre påfølgende heltall: 5 + 6 + 7 = 18. Elevene får oppgaven: «Hvilke andre tall kan skrives som summen av tre påfølgende heltall?» Denne delen der elevene arbeider med denne oppgaven er ikke en del av studien. Elevenes selvstendige arbeid karakteriseres som fase to i undersøkende matematikkundervisning (Blomhøj, 2016). Elevgruppene arbeider med oppgaven i 5 minutter før læreren i plenum gjennomgår noen eksempler fra de ulike gruppene i klassen. Gjennomgangen kan karakteriseres som den tredje fasen, felles refleksjon, der læreren hjelper elevene å koble kunnskapen mot tidligere lært kunnskap.

I den andre delen av undervisningen viser læreren eksempler på hvordan tallen 9 og 15 kan skrives på henholdsvis to og tre ulike måter:

$$4 + 5 = 9$$

$$2 + 3 + 4 = 9$$

$$7 + 8 = 15$$

$$4 + 5 + 6 = 15$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

Dette kan karakteriseres som den innledende fase, iscenesettelsen. Læreren presenterer oppgaven til elevene: «Kan alle tall skrives som summen av påfølgende heltall?» Læreren presiserer for elevene at det er naturlige heltall de skal arbeide med. Elevenes arbeid med denne oppgaven er grunnlaget for en del av resultatet og analysen. I fase to, elevenes selvstendige arbeid, veileder læreren elevene ved å gi innspill til gruppene underveis.

I fase tre av undervisningen oppsummerer læreren strategier og funn av mønstre. Læreren velger ut grupper for å presentere sin strategi etter læreren sin mening om vanskelighetsgrad av strategi. Presentasjonene til elevene foregikk fra vanskeligst til enklest strategi. Læreren begrunnet dette for at elevene skulle kunne se at for hver presentasjon kunne man gjøre oppgaven på en enklere måte enn først presentert.

Undervisningsopplegget kan klassifiseres til undersøkende nivå 3 etter Fradd et al. (2001) sine nivåer av undersøkende undervisning. I undervisningen velger læreren å presentere problemet med spørsmålsstilling og viser til ulike eksempler i forkant av elevenes selvstendige arbeid. I den selvstendige fasen får elevene selv hvordan de vil undersøke problemet. I denne fasen av undersøkelsen kan det oppstå problemer for enkelte elevgrupper, og derfor er det i modellen til Fradd et al. (2001) presisert at lærer og elev kan bidra i fasen. Læreren kan veilede elevene i strategivalg. I fasene implementering, konkludering og rapportering er elevene selvstendig i dette undervisningsopplegget. Derfor kan undervisningen klassifiseres som nivå 3 etter modellen.

Undervisningsopplegget kan sees opp mot tema innen matematikken som tallforståelse, rekker og algebra. Elever som skal gjennomføre dette undervisningsopplegget må beherske tallforståelse i form av ulike former å presentere et tall på og ulike karakteristika ved tall. Elevene må ha en forståelse av hvordan summen av ulike ledd for eksempel kan bli lik 6, der $1 + 2 + 3 = 6$. Deretter må elevene benytte den tidligere kunnskapen for å skape en ny kunnskap ved å engasjere, utforske, forklare, utdype og evaluere i tråd med PRIMAS (Abril et al., 2013) sin definisjon for elevenes rolle i undersøkende undervisning. Elevene må derfor benytte resonnering og argumentasjon, både ovenfor seg selv og andre, for å kunne finne en løsningsstrategi på problemet. En løsning kan være at elevene undersøker systematisk hvilke tall som ikke kan skrives som påfølgende heltall. Tall som 2, 4, 8, 16 og 32 kan ikke skrives som påfølgende heltall. Eksempelvis kan elevene undersøke hvorfor tallet 4 ikke kan skrives.

$$1 + 2 = 3$$

$$2 + 3 = 5$$

I dette tilfellet må elevene se at det er ingen andre tall som er påfølgende som vil gi sum lik tallet 4. Dette kan elevene undersøke videre ved å jobbe seg systematisk ved å se på alle tall. De kan derfor oppdage at tallene 8, 16 og 32 ikke kan skrives som påfølgende heltall. Ut ifra disse tallene kan elevene se et mønster, og lage en formel. Formelen $f(n) = 2^n$ vil gi tall som ikke kan skrives som påfølgende heltall.

3.4.1.1 Bevis

Summen av påfølgende heltall kan aldri skrives på formen 2^n. I undervisningsopplegget ønsket læreren at elevene skulle undersøke tall som ikke kan skrives som summen av påfølgende heltall og oppdage at disse tallene kan skrives på formen 2^n. Beviset baserer seg på Parker (1998) sitt bevis av summen av påfølgende heltall, og kan deles inn i to deler: odde antall påfølgende heltall og partalls antall påfølgende heltall.

1. Odde antall påfølgende heltall kan skrives som gjennomsnittet multiplisert med antall ledd. Det kan skrives som:

$$\begin{aligned} \text{sum} &= \text{gjennomsnitt} \times \text{antall ledd} \\ &= \text{heltall} \times \text{oddetall} \end{aligned}$$

Eksempelet 3 + 4 + 5 = 12 er summen av tre påfølgende heltall. Ved å omforme likningen vil

$$\text{gjennomsnitt} = \frac{\text{sum}}{\text{antall ledd}}$$

Det vil føre til at gjennomsnittet til eksempelet er lik $\frac{12}{3} = 4$. Dette impliserer at $3 \times 4 = 12$. Summen kan derfor skrives som et heltall multiplisert med et oddetall. Tallene som kan skrives som 2^n kan ikke ha et oddetall som faktor, så produktet av et odde påfølgende tall kan aldri bli et tall på formen 2^n.

2. I en tallrekke der det er partall antall påfølgende heltall er summen lik gjennomsnittet være lik summen av de to midterste tallene dividert på to. Kan skrives som:

$$\text{sum} = \text{sum av to midterste tall } \times \frac{1}{2} \times \text{ antall ledd}$$

$$= \text{sum av to påfølgende tall } \times \left(\frac{1}{2} \times \text{ partall}\right)$$

$$= \text{sum av to påfølgende tall } \times \text{ heltall}$$

$$= \text{oddetall } \times \text{ heltall}$$

I eksempelet 3 + 4 + 5 + 6 = 18 er summen av de to midterste tallene lik 9. Det er fire påfølgende heltall slik at man kan skrive $\frac{4}{2} = 2$. Slik at $2 \times 9 = 18$. Derfor kan summen skrives som et oddetall multiplisert med et heltall (antall ledd multiplisert med $\frac{1}{2}$). Siden en av faktorene er oddetall kan ikke denne summen være på formen 2^n.

Ut fra bevisene for odde- og partalls antall ledd kan man si at summen av påfølgende heltall aldri kan skrives på formen 2^n.

3.4.2 Palindrom

Undervisningsopplegget palindromer er inspirert av en artikler av Roksvold (2018), i tillegg til Sriraman og Dickman (2017). Læreren i matematikk R2 ønsket å gjennomføre et undersøkende opplegg som var helt åpent for elevene, og skulle skape en undring hos elevene. Opplegget er planlagt og gjennomført av læreren selv. Undervisningsopplegget kan knyttes opp mot mønster, tallforståelse og algebra. Hensikten med undervisningsopplegget er at elevene skal utforske mønstre ved bruk av algebra, men også øve seg på resonnering og argumentasjon overfor seg selv og andre for å produsere et bevis på en løsning.

Økten starter med at læreren tilfeldig deler inn elevene i grupper på to til tre elever. Elevene får utdelt flater på veggen der de skal arbeide med en tusj per elev. Læreren skriver *36 x 21 = 12 x 63* på tavlen og sier at de skal arbeide med dette uten noe videre introduksjon. Dette er iscenesettelsen i undervisningstimen. Elevene arbeider deretter med oppgaven, der læreren veileder elevene. I løpet av denne fasen, elevenes selvstendige arbeid, veileder læreren elevene ved å ta tak i informasjon som de enkelte gruppene har funnet og deler den med resten av klassen. I den tredje fasen, felles refleksjon, oppsummerer læreren hva gruppene har funnet. Læreren velger også å fortelle om historien bak palindromer og matematisk arbeid som kan knyttes opp mot palindromer for å avslutte undervisningsøkten. Man kan antyde at det er gjort for at elevene skal oppleve undervisningsopplegget som relevant og meningsfull.

Undervisningsopplegget kan etter Fradd et al. (2001) sine nivåer av undersøkende undervisning klassifiseres til undersøkende nivå 5. I starten av undervisningen presenterer læreren på tavlen et stykke: *36 x 21 = 12 x 63.* Deretter sier læreren at de skal arbeide med dette uten noe annen introduksjon. Derfor vil elevene måtte finne ut hva som er problemet og hvordan de skal undersøke det. Læreren veiledet elevene underveis, men elevenes arbeid med spørsmålstilling, valg av strategi, evaluering og refleksjon kan karakteriseres som selvstendig arbeid. Derfor kan undervisningen klassifiseres som nivå 5 etter modellen.

Sriraman og Dickman (2017) definerer begrepet *mathematical pathologies,* der eksempler motsetter matematiske egenskaper som er akseptert som gyldige. Man kan se begrepet i sammenheng med åpne undervisningsopplegg der elevene møter noe som er kjent, men på en annen måte er ukjent. Roksvold (2018) peker i artikkelen på der eksempelet 13 x 62 = 62 x 13 vil tilsi at faktorenes orden er likegyldig, men som regel er ikke sifrenes rekkefølge gitt slik som i undervisningsopplegget. Dette vil føre til at elevene vil møte noe ukjent og som ikke er gitt.

For å løse problemet er det flere ulike tilnærminger elevene kan benytte for å komme frem til en løsning. En løsning er å finne ulike egenskaper ved palindromet som læreren presenterer på tavlen, *36 x 21 = 12 x 63,* for å kunne skape et nytt palindrom med like egenskaper. Ved å undersøke produktene på hver side av likhetstegnet vil man oppdage at produktet er lik 756 på hver side. Deretter må elevene velge hvilke egenskaper de ønsker å undersøke videre. De kan for eksempel undersøke hvordan de ulike faktorene er speilet fra venstre til høyre. Det vil si at tallet 36 er speilet til 63, og 21 til 12. Ved å undersøke de ulike faktorene kan man oppdage at *21 x 3 = 63* og *12 x 3 = 36*, som vil si at de ulike faktorene har lik felles faktor. En annen egenskap elevene kan oppdage er egenskapene ved de ulike sifrene i faktorene. I faktorene *36 x 21*, vil *3 x 2 = 6* og *6 x 1 = 6*. Det samme vil gjelde for høyre side av likhetstegnet. Elevene kan benytte disse egenskapene som er nevnt til å skape formelen $ac = bd$ som vil være tall som kan skrives som palindromer. For å bevise denne formelen må elevene beherske algebra og tallforståelse. Elevene må kunne forklare forskjellen mellom sifre og tall i palindromet, og kunne bruke det for algebraisering av uttrykket. Det vil si at elevene må abstrahere og generalisere i tråd med kjerneelementet i den nye læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2019).

3.4.2.1 Bevis

I introduksjonen velger læreren å skrive eksempelet:

$$36 \times 21 = 12 \times 63$$

Eksempelet kan karakteriseres som et palindrom siden man kan lese sifrene likt fra venstre til høyre som fra høyre til venstre. Jerome H. Manheim (1979) beskriver palindromer der man skal søke etter produkter der man kan reversere sifrene slik at det ikke påvirker produktet. I eksempelet over er produktet lik 756 på begge sider av likhetstegnet.

To tall som skal danne et speilprodukt krever at produktene at tiersifrene må være lik produktet av enersifrene. Et vilkårlig, tosifret tall kan skrives som 10a + b, der a er tiersiffer og b er enersiffer. Palindromet til dette tallet er 10b + a. Dette gir:

$$(10a + b)(10c + d) = (10b + a)(10d + c)$$

$$100\mathrm{ac} + 10\mathrm{ad} + 10\mathrm{bc} + \mathrm{bd} = 100\mathrm{bc} + 10\mathrm{bc} + 10\mathrm{ad} + \mathrm{ac}$$

$$100\mathrm{ac} + \mathrm{bd} = 100\mathrm{bd} + \mathrm{ac}$$

$$99\mathrm{ac} = 99\mathrm{bd}$$

$$\mathrm{ac} = \mathrm{bd}$$

Omformingen ac = bd kan gjennomføres baklengs noe som medfører at betingelsen er tilstrekkelig (Manheim, 1979). I eksempelet læreren presenterte på tavlen er a = 3 og c = 2. Produktet ac = 6, der 6 også kan skrives som 6 x 1. Derfor vil b = 6 og d = 1. Det vil gi 36 x 21 = 12 x 63, som er et palindrom.

3.5 Datainnsamling

I forkant av datainnsamlingen ble alle lærere som er en del av forskningsprosjektet SUM (Haavold & Blomhøj, 2019), kontaktet angående en forespørsel om observasjon av en undersøkende matematikkøkt, der det også skulle foregå intervju av lærer og elever. Det ble informert om mulighet for lyd- og videoopptak under undervisningsøkten. Strukturen på datainnsamlingen besto av fire steg:

1. Intervju med lærer i forkant av undervisningsøkten.
2. Observasjon og video-og lydopptak av undervisningsopplegget.
3. Intervju med elever etter undervisningsøkten
4. Intervju med lærer etter undervisningsøkten.

Intervjuene er ikke en del av denne studien, og vil ikke bli nærmere beskrevet. Innsamlingsmetoden for denne studien er observasjon og video- og lydopptak av undervisningsoppleggene. I tillegg vil det bli benyttet vilder av elevarbeid som supplerende metode.

Marshall og Rossman (2006) karakteriserer observasjon som systematisk beskrivelse og registrering av hendelser som er ønskelig å observere. Bjørndal (2017) definerer observasjon som «oppmerksom iakttakelse», og skiller mellom to ulike former for observasjon i forhold til grad av åpenhet og deltakelse: observasjon av første orden og observasjon av andre orden. En økt der observasjon er den primære oppgaven til observatør, vil karakteriseres som observasjon av første orden. Observasjon av andre orden er når observatør er delaktig i undervisningen. Det vil si der undervisning og veiledning er sidestilt med observasjon. I denne studien er observasjon av første orden benyttet. Det var lav grad av deltakelse i form av at rollen min som observatør kun var observasjon.

Observasjonene ble registrert underveis i undervisningsøktene i et observasjonsskjema (vedlegg 1). Postholm og Jacobsen (2011, s.50) peker på at: «En systematisk innsamling av data ved hjelp av observasjon forutsetter at observasjonen har et fokus.» Observasjonsskjemaet tar utgangspunkt i Blomhøj sine (2016) tre faser. I hver fase i undervisningen ble det notert ned interessante hendelser og utsagn fra lærer og elever for å kunne styrke datagrunnlaget.

I undervisningsøktene ble det benyttet lydopptak hos utvalgte elevgrupper. Disse elevgruppene samtykket til lydopptak både muntlig og i form av samtykkeskjema. En lydopptaker ble plassert i gruppen gjennom hele økten. I en av klassene ble det benyttet videoopptak i tillegg til lydopptaker. Det er ikke benyttet bilder fra videoopptaket, men bare lyd, på grunn av lydkvaliteten fra kameraet i forhold til lydopptakerens lydkvalitet.

I etterkant av undervisningsøktene ble det tatt bilde av det skriftlige arbeidet til elevene, det vil si bilder av tavlene elevene hadde skrevet på. Bilder fra elevarbeid og data fra observasjonsskjemaene sammen med lydopptakene danner grunnlaget for dataanalysen.

Hovedgrunnlaget for dataen er fra lydopptakene, men i de tilfellene der for eksempel elevene diskuterer en strategi og skriver ned noe som kan karakteriseres som viktig, vil man kunne bruke observasjonsnotatene og bilder fra elevarbeid som supplerende metode. Bjørndal (2017) peker på to fordeler med lydopptak i observasjonssammenheng: et opptak vil kunne holde fast observasjoner, og det vil befinne seg en stor rikdom av detaljer. En observatør vil ha vanskeligheter med å få med alle observasjoner. I et opptak vil man i etterkant kunne spole fram og tilbake slik at man kan få flere inntrykk fra økten enn man vanligvis ville ha gjort.

3.6 Analysemetode

Tematisk analyse er en analysemetode som er hensiktsmessig for å identifisere, analysere og rapportere mønstre i kvalitativt datamateriale. Braun og Clarke (2006) beskriver en trinnvis modell i seks faser: bli kjent med materialet; generere innledende koder; søke etter temaer; evaluere temaer; definere temaer; produsere skriftlig arbeid. Modellen er et verktøy for å kunne gi en oversikt og innsikt i et komplekst forskningsmateriale (Braun & Clarke, 2006). De ulike stegene i modellen er veiledende noe som gjør at modellen gir en fleksibilitet for forskeren. Mangelen av klare retningslinjer vil kunne være en styrke og svakhet i metoden. En måte å kunne forsterke metoden er å benytte et eksisterende rammeverk som en føring for analysen. I denne studien er rammeverket om resonnementsstruktur til Lithner (2008) og Balacheff (1988) sin taksonomi benyttet som ytterligere føring for analysen.

Den første fasen i den trinnvise modellen til Braun & Clarke (2006) er å bli kjent med datamaterialet. I tråd med den første fasen valgte jeg å bli kjent med datamaterialet gjennom transkribering. Transkribering handler om å høre gjennom lydopptakene og skrive ned ord for ord i sin helhet. I transkriberingsprosessen ble språket normalisert ved å skrive om språket fra dialekt til bokmål. Normalisering kan fungere som anonymisering (Tjora, 2013). Enkelte dialektord er benyttet i transkriptene for at utsagnene til elevene ikke skal miste betydning. Jeg markerte lengre pauser i transkripsjonsprosessen for å tydeliggjøre der elevene brukte litt lengre tid i samtalen for å komme med et svar. Transkriptene ble gjennomlest ved å høre på opptakene samtidig som jeg leste gjennom. Dette ble gjort for å sikre at jeg hadde fått med alt i sin helhet. Jeg valgte å lese gjennom transkriptene ytterligere en gang der jeg markerte interessante utsagn og hendelser. Det ble notert ulike matematiske temaer elevgruppene snakket om i arbeidet sitt basert på matematiske begreper som elevene brukte i de ulike strategiene.

I tråd med den andre fasen i modellen til Braun og Clarke (2006) genererte jeg koder for å kode datamaterialet. Når Braun og Clarke (2006) skal beskrive kodingen handler den om å systematisere materialet, der kodene involverer interessante ideer og egenskaper.

Første del av kodingen tar utgangspunkt i resonnementsstrukturen til Lithner (2008), der jeg ønsket å identifisere strategivalgene til elevene med utgangspunkt i fase to og tre i resonnementsstrukturen. Lithner (2008) karakteriserer strategivalg som alt fra prosedyrer til tilnærminger og utgjør strategier, ideer, hypoteser, argumenter, gjetninger og lignende. Strategivalgene ble kategorisert etter matematiske temaer der jeg navnga temaene elevene snakket om. Dette er i tråd med den tredje fasen i modellen til Braun og Clarke (2006). Braun og Clarke (2006) fremhever viktigheten av å generere klare definisjoner og navn for hvert tema, slik at man kan få frem historien bak temaene i analysen. De matematiske temaene tar utgangspunkt i matematiske begreper, ideer og uttrykk som elevene benytter i generaliseringsprosessen. For eksempel de situasjonene der elevene hadde en ide som omfattet partall, ble kategorien navnsatt til partall. I denne sammenhengen vil kategorinavnet partall reflektere det matematiske begrepet, uttrykket og innholdet som elevene benyttet i generaliseringsprosessen. Dermed vil navnet på kategorien handle om det samme som elevene ytret. Denne avdekkingen gjorde at jeg fikk oversikt over det matematiske innholdet og nivået i elevenes arbeid.

Den andre delen av kodingen tar utgangspunkt i taksonomien til Balacheff (1988) for å avdekke elevenes evaluering av strategier. Det ble utarbeidet koder for de fire ulike kategoriene i Balacheff sin taksonomi: NE (naiv empirisme), AE (avgjørende eksperiment), GE (generisk eksempel) og TE (tankeeksperiment). Kodingen ble gjennomført fire ganger for å sammenlikne resultatene ved å sjekke kodingen opp mot hverandre. Ved enkelte tilfeller ble noen resonnementer kodet om på bakgrunn av teorien om taksonomien til Balacheff (1988). Varghese (2011) fremhever at det er liten forskjell mellom pragmatiske bevis, og det derfor kan det være vanskelig å skille mellom naiv empirisme, avgjørende eksperiment og generiske eksempel. Balacheff (1988) peker på at ved tilfeller der det er vanskelig å skille bevisstrategiene kan man karakterisere etter høyest bevisstrategi. I enkelte tilfeller var det vanskelig å skille mellom naiv empirisme og avgjørende eksperiment, men da ble strategien karakterisert som avgjørende eksperiment.

Etter kodingen satt jeg igjen med 15 matematiske temaer og 91 kodede bevisstrategier. Fra undervisningsopplegget om påfølgende heltall ble det kategorisert 47 bevisstrategier, mens 44 bevisstrategier var fra undervisningsopplegget om palindromer. I det videre arbeidet måtte jeg evaluere meningen bak de ulike matematiske temaene og bevisstrategiene: Var navnene til de matematiske dekkende for hva elevene snakket om? Var kodingen og navnsettingen representativ for å kunne si noe om elevenes resonnement og argumentasjon? Denne fasen av arbeidet er i tråd med den fjerde fasen *evaluere temaer* i modellen til Braun og Clarke (2006).

Ut ifra de kodede matematiske temaene og bevisstrategiene ble det valgt ut eksempler for å representere resultatet på en hensiktsmessig måte. Dette skjedde i tråd med den femte fasen i modellen til Braun og Clarke (2006). Den femte fasen *definere temaer* beskriver Braun og Clarke (2006) som en pågående analyse for å kunne avgrense detaljer i hvert tema og den samlede historien analysen forteller. Ved å velge ut eksempler for å representere de ulike matematiske temaene ble eksemplene sett i sammenheng med Lithner (2008) sin resonnementsstruktur: møte et problem, strategivalg, evaluering av strategi og konklusjon. Eksempler på matematiske temaer som representerte Lithner (2008) sin resonnementsstruktur på en hensiktsmessig måte ble valgt for å presentere de ulike elevgruppers generaliseringsprosess.

3.7 Presentasjon av data

Den siste fasen i modellen til Braun og Clarke (2006) er å utarbeide en resultatoversikt ved å fremstille datamaterialet. For å presentere og forklare funnene har jeg valgt en tilnærming presentert i Cohen, Manion og Morrison (2007). Ifølge Cohen et al. (2007) er det fem måter å organisere og presentere data: to er temabasert, to er personbasert og den siste instrumentbasert. I denne studien har jeg valgt med utgangspunkt i personbasert fremstilling for å legge frem resultatet ved hjelp av tre hoveddeler: påfølgende heltall, palindromer og sammenhenger i datamaterialet. Kapitlene påfølgende heltall og palindromer er delt videre inn i grupper, basert på elevgrupper i de ulike undervisningsoppleggene.

Under hver elevgruppe blir funnene for hver elevgruppe presentert fra både den induktive og deduktive analysen. Fra den induktive analysen fremstilles de ulike matematiske temaene i strategiene som elevene benytter i resonnementsprosessen.. Deretter blir de ulike matematiske temaene presentert ved hjelp av utsagn fra elevene. Utsagnene er videre delt inn etter: beskrivelse og analyse av strategi. I beskrivelsen blir elevenes ord og handlinger beskrevet. I analysen av strategi blir strategiene, også karakterisert som tilnærminger, analysert ved bruk av Lithner (2008) sitt rammeverk for resonnementsstruktur og Balacheff (1988) sin taksonomi. Ved bruk av Lithner (2008) blir strategiene analysert ved valg av strategi, evaluering av strategi og konklusjon. For å analysere steget, evaluering av strategi, blir Balacheff sin taksonomi benyttet: naiv empirisme, avgjørende eksperiment, generisk eksempel og tankeeksperiment. For å supplere utsagnene til elevene er det også benyttet utklipp fra elevarbeid for å presentere hele historien til leseren fra undervisningssituasjonen.

Ifølge Cohen et al. (2007) vil man ved å benytte personbasert datafremstilling kunne bevare sammenheng og integritet i gruppenes respons. Det vil også muliggjøre å presenter hele bildet av gruppen, noe som Cohen et al. (2007) beskriver som viktig for forskeren. Det vil kreve at forskeren setter seg inn i gruppene på tvers ved å se etter like og ulike temaer, delte meninger, mønstre i responsen og sammenligne gruppene for å oppsummere dataene (Cohen et al., 2007). Den siste hoveddelen, sammenhenger i datamaterialet, skaper en oppsummering for dataene. Delen blir delt inn i: temaer i strategivalg, bevisstrategier i undervisningsoppleggene og bevisstrategier i elevgrupper. De matematiske temaene i strategivalgene vil bli presentert ved å vise sammenhenger på tvers av strategivalgene til elevene. Denne presentasjonen tar utgangspunkt i de fire fasene for problemløsning til Polya (2014) sammen med essensielle elevaktiviteter i IBME av Blomhøj (2020). Inndelingen av de ulike delkapitlene er gjort for å kunne sammenligne bevisstrategiene i undervisningsoppleggene og de ulike elevgruppene, og hvilke nivåer av bevisstrategier elevene benytter.

3.8 Metodiske utfordringer

I denne studien kan man peke på metodiske utfordringer med tanke på innsamlingen av datamaterialet og dataanalysen.

Bjørndal (2017) fokuserer på hvordan observasjon og bruk av lyd- og videoopptak kan påvirke atferden til elevene og læreren i undervisningssituasjonen. Begge metodene kan i sterkere grad kunne påvirke atferden til den som blir observert. I undervisningsopplegget palindromer ble det benyttet av videoopptak, og det kan påvirke atferden til elevene i større grad enn ved bruk av lydopptak slik som i undervisningsopplegget påfølgende heltall. Valget av å observere ved observasjon av andre orden kan føre til mindre påvirkning av elevenes atferd (Bjørndal, 2017).

All datamaterialet har i denne studien blitt transkribert. Bilder og observasjonsskjemaene er benyttet som supplerende metode. Ikke alt datamaterialet har kommet frem i den skriftlige avhandlingen på grunn av studiens omfang. Ut ifra de matematiske temaene som er utgangspunktet for analysen var det viktig for meg som forsker å vise et helhetlig bilde av hva elevene sa og gjorde i løpet av undervisningsøkten. Ved bruk av tematisk analyse peker Braun og Clarke (2006) på hvilke utfordringer som man kan møte med et omfattende datamateriale. En utfordring ved metoden er fraværet av klare og konkrete retningslinjer i den trinnvise modellen. Dette kan være både en styrke og en svakhet. På grunn av dette ble de teoretiske rammeverkene av Lithner (2008) og Balacheff (1988) benyttet for å kunne presentere tydelig hvordan analysen er gjennomført.

3.9 Kvalitet i studiet

For å sikre objektivitet og kvalitet av en studie snakkes det i forskning om begrepene validitet og reliabilitet. I forskningsstudier er det viktig å drøfte påliteligheten til studien og drøfte hvordan metode og problemstilling gjenspeiler resultatet (Cohen et al., 2007; Christoffersen & Johannessen, 2012). I kvalitative studier benyttes det ofte tre kriterier: validitet (gyldighet), reliabilitet (pålitelighet) og generaliserbarhet. Gyldighet vil handle om en logisk sammenheng mellom problemstilling, utforming av studie og funn. Tjora (2013) påpeker at ved høy gyldighet vil forskningen være forankret i annen relevant forskning. Pålitelighet handler om nøyaktighet i dataen. Det er viktig å gjøre rede for hvordan posisjonen til ens egne meninger kan prege forskningen, og det vil øke troverdigheten til en studie (Tjora, 2013).

Generaliserbarhet i kvalitativ forskning handler ofte om overførbarhet. Tjora (2013) skiller mellom tre ulike former for generaliserbarhet i kvalitativ forskning: naturalistisk generalisering, moderat generalisering og konseptuell generalisering. Naturalistisk generalisering handler om i hvilken grad man redegjør for detaljene i dataene til at leseren selv kan vurdere gyldigheten. Moderat generalisering handler i større grad om kvantitativ forskning der forskeren beskriver hvilke situasjoner resultatene vil være gyldige. Den siste formen er konseptuell generalisering der forskningen utvikler teorier og konsepter som vil ha relevans for annen forskning (Tjora, 2013).

I denne delen vil jeg presentere begrepene validitet, generaliserbarhet og reliabilitet for å drøfte studiets kvalitet.

3.9.1 Validitet

Validitet i en studie handler i følge Schoenfeld (2007) om troverdighet, viktighet og relevans. I en forskningsstudie er en forsker nødt til å kritisk evaluere studiens gyldighet (Kvale & Brinkmann, 2010). En måte er å evaluere gyldighet av tolkninger og ifølge Thagaard (2009) er en måte å stille spørsmål om gyldigheten til tolkninger som er kommet frem i forhold til virkeligheten som er undersøkt. Å bruke lyd- eller videoopptak, og deretter transkribere ordrett hva som er sagt vil kunne styrke studiens validitet. I innsamlingen av data er alle observasjoner basert på min subjektive oppfatning av undervisningssituasjonen i henhold til Tjora (2013) påstand om forskerens posisjon i forskningen. På grunn av størrelsen på utvalget i de ulike klassene er det vanskelig å kunne få med alle observasjoner siden man var nødt til å følge med på både lærer og elevgrupper underveis i undervisningsøkten. Det at observasjonsnotatene ble skrevet direkte ned i timen, og ikke i etterkant av undervisningsøkten vil være med på å øke studiens validitet.

Cohen et al. (2007) skiller mellom ytre og indre validitet. Indre validitet kan sees i sammenheng med Schoenfelds (2007) begrep om troverdighet. Ytre validitet handler om i hvilken grad resultatet kan generaliseres til større populasjoner eller tilfeller (Cohen et al., 2007). Begrepet kan sees i sammenheng med Schoenfeld (2007) begrep om gyldighet der det påpekes i hvor stor grad forskningen kan gjelde. I denne studien kan man ikke direkte snakke om generalisering siden utvalget er på ti elever. Disse ti elevene kan ikke generalisere, og derfor vil ikke kravet til ytre validitet være oppfylt.

Igjen kan det påpekes at ved å benytte lyd i tillegg til observasjonsnotater, vil det øke studiens validitet, siden lyd- og videopptakene vil være med på å understøtte observasjonene. Dette gjør at man kan sikre kvaliteten på dataen, og dermed øke studiens validitet.

3.9.2 Reliabilitet

Christoffersen og Johannessen (2012) definerer reliabilitet som nøyaktighet i datamaterialet. Begrepet er vanligst innenfor kvantitativ forskningsmetode, men ved kvalitativ forskningsmetode kan forskeren reflektere over hvordan datamaterialet har foregått med sikte på å bevisstgjøre mulige feilkilder (Ringdal, 2018). For å skape en troverdighet til metoden som er gjennomført er metodedelen i denne studien med på å øke troverdigheten til det som er gjennomført. Ved å beskrive utfyllende beskrivelser av datainnsamling og hvordan analysen av data er gjennomført vil øke troverdigheten i datamaterialet. På bakgrunn av dette kan leseren selv danne seg en mening om troverdigheten til studiet. Dette kan sees i sammenheng med Tjora (2013) sitt begrep om naturalistisk generaliserbarhet der forskeren må redegjøre detaljene i studien for så at leseren skal vurdere gyldigheten.

Cohen et al. (2007) mener at reliabilitet i stor grad handler om mulighet for gjentakelse. Det vil si muligheten for at undervisningssituasjonen kan gjenskapes. I en kvalitativ forskningsstudie vil det ved bruk av video- og lydopptak vil det være vanskeligheter med å gjenta en undervisningssituasjon, og få nøyaktig samme resultat ved gjentakelse av studien. Det vil være umulig å gjenskape den samme undervisningssituasjonen på grunn av ulike omstendigheter, som for eksempel rammene rundt undervisningssituasjonen og elevenes samhandling med hverandre, vil kunne endres over tid.

3.10 Etikk

Datainnsamlingen er gjennomført i samarbeid med forskningsprosjektet SUM (Haavold & Blomhøj, 2019). Det er i forbindelse med forskningsprosjektet sendt søknad om personvernsinnhenting til Norsk senter for forskningsdata, som er godkjent (vedlegg 2).

I tråd med forskningsetikken må en forsker ta på alvor det etiske ansvaret, og forholde seg til prinsippet om at forskning ikke skal ha uheldige konsekvenser for dem som deltar (Thagaard, 2009). I etikken innenfor forskning beskriver Christoffersen og Johannessen (2012) tre viktige punkter: informantens rett til selvbestemmelse og autonomi, forskerens plikt til å respektere informantens privatliv og forskerens ansvar for å unngå skade. Disse tre punktene dekker hensynene forskeren må ta i sitt arbeid.

Informantens rett til selvbestemmelse og autonomi handler om hvordan informantene har rett på selvbestemmelse om deltakelse i prosjektet (Christoffersen og Johannessen, 2012). Ved å benytte et samtykkeskjema (vedlegg 3) har elevene valgt å være med frivillig ved å samtykke, og de har mulighet til å trekke dette samtykket ved enhver tid uten noe begrunnelse. Dette var særlig viktig i bruken av lyd- og videoopptak for innsamling av data. Det neste punktet handler om *forskerens plikt til å respektere informantens privatliv*. Christoffersen og Johannessen (2012) beskriver dette punktet som konfidensialitet ved forskerens plikt for å respektere lærer og elevenes anonymitet. Derfor er alle navn i studien fiktive ved bruk av eksempler fra datamaterialet. Det er ikke benyttet noe koblingsnøkkel for å knytte de fiktive navnene opp mot elevene. I transkripsjonen ble det også benyttet norsk bokmål istedenfor dialekt, slik at det ikke vil komme frem hvilken del av Troms og Finnmark den videregående skolen ligger i for å ytterligere sikre anonymiteten til elevene.

Det siste punktet, *forskerens ansvar for å unngå skade*, dreier seg om risikoen for medisinsk skade. I dette tilfellet er ikke dette noe risiko, og det er ikke knyttet noe medisinsk risiko ved bruk av lyd- og videoopptak. Det som imidlertid kunne være en risiko for elevene var at de ikke hadde undervisning som var direkte knyttet opp mot kompetansemålene i fagene, men igjen er undervisningen tilpasset hver klasse av den aktuelle faglæreren. Faglæreren valgte ut relevant undervisningsopplegg for den aktuelle klassen for at de kunne utvikle enkelte fagområder innenfor matematikken slik som tallforståelse.

4 Resultater og funn

Dette kapitlet, resultater og funn, er delt inn i tre hoveddeler: 4.1 Påfølgende heltall, 4.2 Palindromer og 4.3 Sammenhenger i datamaterialet. De to første delkapitlene vil ta for seg resultater og funn for den induktive og deduktive analysen av de to ulike undervisningsoppleggene: påfølgende heltall og palindromer. Kapittel 4.3 Sammenhenger i datamaterialet tar for seg matematiske temaer i de to ulike undervisningsoppleggene, bevisstrategier i undervisningsoppleggene og bevisstrategier i de ulike elevgruppene.

4.1 Påfølgende heltall

I den induktive analysen er det avdekket ti ulike matematiske temaer i bevisstrategiene som elevene benyttet i undervisningsoppleggene. Tabell 2. viser resultatet for hvilke strategier elevene i undervisningsopplegget om påfølgende heltall benytter.

Tabell 2.

Oversikt over matematiske strategier i summen av påfølgende heltall.

Tema	Lise, Astrid og Anne	Sofie, Per og Martin
Små tall	X	X
Store tall		X
Kvadrattall	X	
Partall	X	X
Oddetall		X
Desimaltall		X
Doble tall	X	
Sammenheng mellom sum og antall ledd	X	X
Formel	X	
Faktorisering	X	

Lise, Astrid og Anne benytter syv ulike temaer, der fire av temaene er unike for denne elevgruppen i dette undervisningsopplegget. Sofie, Per og Martin benytter seks temaer, der tre av de er unike for denne elevgruppen.

4.1.1 Lise, Astrid og Anne

Den induktive analysen viser at strategivalgene til Lise, Astrid og Anne handler om små tall, kvadrattall, partall, doble tall, sammenheng mellom sum og antall ledd, faktorisering og formel.

4.1.1.1 Små tall

Strategien *små tall* karakteriseres av en matematisk idé der Lise, Astrid og Anne velger å undersøke problemet med små tall.

4.1.1.1.1 Eksempel 1

> Astrid: Entallet, går det? Går det an med 2? [pause] Det går ikke med 2, gjør det det?
>
> Lise: Nei, for da blir det bare 1.
>
> Astrid: Ja.
>
> Lise: Og 1 pluss 2 blir 3.
>
> Astrid: Og 0 pluss 1 blir bare 1. Så to-tallet går ikke. 3 går.

Beskrivelse

Utsnittet er den første reaksjonen til Lise, Astrid og Anne etter læreren har presentert problemet i plenum. Astrid ønsker å undersøke tallene 1 og 2. Hun spør gruppen om tallet 1 går, og videre spør hun om tallet går. Lise ser at tallet 2 ikke går siden summen av 1 + 1 er lik 2. Lise viser deretter til at 1 + 2 = 3, mens Astrid viser til at 0 + 1 = 1. Astrid konkluderer derfor at tallet 2 ikke går å skrive som summen av påfølgende tall. Lise, Astrid og Anne har en tilnærming der de skal undersøke små tall som faktorer i den påfølgende rekken.

Analyse av strategi

Lise, Astrid og Anne har en tilnærming der de skal undersøke små tall som faktorer i den påfølgende rekken, og arbeider seg oppover. I strategievalueringen er Lise og Astrid avhengig av spesifikke eksempler for utprøving. Naiv empirisme omfatter resonnementer der elevene velger å prøve ut strategier og hypoteser med enkle eksempler. Derfor kan Lise og Astrid sin strategievaluering karakteriseres som naiv empirisme.

4.1.1.1.2 Eksempel 2

> Lise: Ja, nei, men 8?
>
> Astrid: 2 pluss 3 blir 5. 3 pluss 4 blir 7. 4 pluss 5 blir 9. 1 pluss 2 pluss 3 blir 6, og 1 pluss 2 pluss 3 pluss 4 blir 10.

Beskrivelse

Dette utsnittet er hentet fra senere i generaliseringsprosessen. På dette tidspunktet har gruppen funnet ut at tallene 1, 2 og 4 ikke kan skrives som påfølgende heltall. Lise ønsker å undersøke tallet 8. Astrid prøver ut tallet ved å addere små tall med hverandre og bygger videre antall ledd oppover. Lise, Astrid og Anne sier ikke direkte at tallet 8 ikke kan skrives som summen av påfølgende heltall, men gruppen nevner fra dette tidspunktet i samtalen at tallet 8 ikke kan skrives som summen av påfølgende heltall.

Analyse av strategi

Astrid sitt resonnement kan karakteriseres som enkel utprøving. Hun benyttet kunnskap om tidligere små tall som de har summert som påfølgende tall for å undersøke tallet 8. Siden Astrid benytter enkel utprøving og ikke konkluderer, men heller benytter tallet 8 videre i prosessen, kan resonnementet karakteriseres som naiv empirisme.

4.1.1.2 Kvadrat- og partall

Denne kategorien *kvadrat- og partall* kan karakteriseres av de ulike matematiske begrepene i de matematiske utsagnene til Lise, Anne og Astrid. Begrepet kvadratrot er omformulert til kvadrattall.

> Lise: Her har vi bare tall som ikke kan.. for eksempel kvadratrot eller nei. Jo.
>
> Anne: Det blir bare ett tall da
>
> Lise: Tall som har kvadratrot går ikke an å. Jeg vet ikke helt. Nei.
>
> Astrid: 9 kan jo skrives.
>
> Lise: 9 kan skrives, det er sant. [pause] Partall? [pause] Nei, det er det og. [pause] Ja, okei, vi må finne en som, ja.

Beskrivelse

I forkant av utsnittet har elevgruppen undersøkt tallet 4, der de har konkludert med at tallet ikke kan skrives som summen av påfølgende heltall. Elevene vil derfor undersøke hvilke karakteristika som peker seg ut for tallene som de har undersøkt til nå. I utsnittet viser Lise tilbake til tallene 2 og 4, som hun mener er kvadrattall. Tallet 4 er et kvadrattall, mens tallet 2 er ikke et kvadrattall. Astrid mener at tallet 9 kan skrives uten at hun begrunner hvorfor. Lise bekrefter overfor Astrid og Anne at tallet 9 kan skrives, og foreslår at det da kan være partall. Tallet 9 er et kvadrattall siden det kan skrives som 3 multiplisert med 3. Tilnærmingen om kvadrat- og partall velger gruppen å legge fra seg, og forkaste tilnærmingen i det videre arbeidet. Videre i undersøkelsen snakker ikke gruppen om kvadrat- og partall.

Analyse av strategi

Lise sier at tallene 2 og 4 er kvadrattall. Siden tallet 2 ikke er et kvadrattall kan man si at Lise ikke har kontroll på egenskapene til tallene. Lise og Astrid benytter tallet 9 for å kunne avkrefte tilnærmingen om kvadrat- og partall. Ved å velge tallet 9 for evaluering av strategi, kan det karakteriseres som avgjørende eksperiment. Tallet 9 er et kvadrattall og et oddetall, men kan skrives som summen av påfølgende heltall, for eksempel 4 + 5. Gruppen velger å forkaste oppdagelsen om kvadrat- og partall, siden gruppen oppdaget at tallet 9 kan skrives som summen av påfølgende heltall. Avgjørende eksperiment karakteriseres ved at unntak ikke vil bli akseptert.

4.1.1.3 Doble tall

Doble tall er et strategivalg elevene benytter lenger ut i generaliseringsprosessen. Kategorien omfatter eksempler der elevene har oppdaget ulike tall som ikke kan skrives som summen av påfølgende heltall. Navnet kommer fra et utsagn om en egenskap ved disse tallene: de dobler seg.

4.1.1.3.1 Eksempel 1

> Astrid: 16? 8 pluss 7 blir 15. [pause]. Nei, tror ikke 16 går. Hvordan blir det? 1 pluss 2 pluss 3 pluss 4 pluss 5. Det var 15. Hvis man da legg på 6, så blir det jo over. Den foran blir 14.
>
> Lise: 16 går ikke. 18 går kanskje.
>
> Anne: Men gikk 16?
>
> Astrid: Nei, jeg tror ikke det.
>
> Anne: Kanskje det er 16, så 32 går ikke. Så 32 gange 2, 64.
>
> Astrid: De her tallene dobler seg.
>
> Anne: Ja.
>
> Astrid: 1 gange 2 blir 2. 2 gange 2 blir 4. 4 gange 2 blir 8.

Beskrivelse

Utsnittet viser en tilnærming til doble tall. Astrid ønsker å prøve ut om tallet 16 går å skrive som summen av påfølgende heltall. Hun argumenterer for seg selv ved å si at ved å legge sammen 7 og 8, vil man få 15. Ved å legge sammen 1, 2, 3, 4 og 5, vil man også få 15. Astrid sier at tallet foran blir 14. Hun mener at ved å legge sammen 2, 3, 4 og 5, vil man få summen lik 14. Siden Astrid skal ha et tall som er nærmest tallet 15, tar hun bort leddet lik 1, og ikke leddet som er 5. Lise konkluderer at tallet 16 ikke går, og ønsker å undersøke tallet 18. Anne avbryter Lise ved å vende samtalen tilbake til tallet 16. Astrid sier at hun ikke tror at tallet 16 går. Anne kommer med en tilnærming om at siden tallet 16 ikke går, så vil heller ikke 32 gå.

Videre sier hun at siden 32 multiplisert med 2 blir 64, vil tallet 64 heller ikke fungere som summen av påfølgende heltall. Astrid sier at en egenskap ved tallene Anne beskrev er at tallene dobler seg. Astrid begrunner dette ved å vise til at 1 multiplisert med 2 er lik 2, 2 multiplisert med 2 er lik 4 og 4 multiplisert med 2 er lik 8.

Analyse av strategi

Astrid ser en egenskap ved regnestykket at dersom man tar bort et ledd fra stykket vil summen være lavere. Denne tilnærmingen om sammenhengen mellom antall ledd og summen er nærmere beskrevet i kapitel 4.1.1.4. I dette utsnittet kan Astrid sin tilnærming til doble tall karakteriseres som naiv empirisme. Astrid benytter enkle eksempler for å argumentere for at summen av påfølgende heltall ikke kan være 16.

Videre i utsnittet finner Lise, Astrid og Anne en tilnærming ved at tallene som ikke kan skrives som summen av påfølgende heltall er 2, 4, 8, 16 og 32, som er karakterisert som doble tall. Anne kommer med et forslag der hun sier: «Kanskje det er 16, så 32 går ikke. Så 32 gange 2, 64.» Astrid ser i likhet med Anne også egenskaper ved tallene ved at de dobler seg. Astrid begrunner dette ved å vise til eksempler der hun faktoriserer tallet 2 til 2 multiplisert med 1 og tallet 4 til 2 multiplisert med 2. Argumentasjonen til Astrid og Anne kan karakteriseres som avgjørende eksperiment. De tester tilnærmingen om doble tall opp mot tall som de har undersøkt ikke kan skrives som påfølgende heltall. Avgjørende eksperiment kjennetegnes ved at elevene tester strategien opp mot tidligere hypoteser eller eksempler.

4.1.1.3.2 Eksempel 2

> Anne: 8 pluss 9 pluss 10. [pause] Nei, for da må det være noe som er over.
> Astrid: Det må være mer enn det.
> Anne: Ja.
> Lise: Jo, tror 32 går. 10 pluss 11 pluss 12, det blir 32. [pause] Nei, det blir 33.
> Anne: Da går ikke 32.

Beskrivelse

Gruppen velger å undersøke strategien om doble tall nærmere ved å undersøke tallet 32. Anne sier at 8 + 9 + 10, men etter en liten pause sier hun at det må være høyere tall i leddene. Astrid bekrefter Anne sitt utsagn om at leddene må være høyere. Lise mener at tallet 32 går ved å si at 10 + 11 + 12 er lik 32. Hun retter seg selv ved å si at summen blir 32. Anne konkluderer ut ifra utsagnet til Lise at tallet 32 ikke kan skrives som summen av påfølgende heltall siden det ikke kan skrives som 8 + 9 + 10 eller 10 + 11 + 12.

Analyse av strategi

Lise, Astrid og Anne benytter enkle eksempler for å underbygge undersøkelsen av tallet 32 og tilnærmingen om doble tall. Evalueringen av tilnærmingen om doble tall kan karakteriseres som naiv empirisme på grunn av benyttelsen av enkle eksempler i argumentasjonen.

4.1.1.4 Sammenheng mellom sum og antall ledd

Strategien er navnsatt til *sammenheng mellom sum og antall ledd* ut ifra elevenes oppdagelse om at det finnes sammenheng mellom summen og antall ledd i tallrekken. Utviklingen av den matematiske ideen om denne sammenhengen mellom sum og antall ledd vil komme til uttrykk gjennom tre ulike eksempler.

4.1.1.4.1 Eksempel 1

> Astrid: Men 64, da hadde det blitt 32 + 32. Da kunne vi ikke skrevet 31 + 32, og ikke skrevet 30 + 31 eller 32 + 33. Men vi må sjekke tre tall også. Fire tall.
>
> Lise: Men hvis vi tar tre tall, da må vi ha.. Det må være rundt cirka 20.

Beskrivelse

I forkant av utsnittet har Anne, Astrid og Lise funnet ut at tallene 1, 2, 4, 8, 16 og 32 ikke kan skrives som summen av påfølgende heltall. Astrid ønsker å undersøke tallet 64. Hun mener at 64 må skrives som 32 + 32. Det kan ikke skrives som 30 + 31, 31 + 32 eller 32 + 33. For å underbygge dette utsagnet uttrykker hun et ønske om å undersøke tre og fire ledd også. Lise sier at hvis man skal skrive 64 som sum av tre ledd, så må leddene ha en verdi på rundt 20.

Analyse av strategi

Ut ifra utsagnet til Astrid kan man si at Astrid ser en sammenheng mellom summen og antall ledd. Når tallet 64 skal skrives som summen av to påfølgende heltall velger elevene å dividere tallet på 2. Det er ikke en karakteristika som elevene har diskutert, men de har en evne til å se en slik generell sammenheng. Elevgruppen benyttet denne tilnærmingen om sammenhengen mellom summen og antall ledd tidligere i prosessen (kapittel 4.1.1.3.1). Elevene benytter denne strategien gjennom store deler av prosessen uten å si direkte hvorfor de bruker den eller forklare bruken av det. Resonnementet i utsnittet kan karakteriseres som et generisk eksempel. Generisk eksempel kjennetegnes ved at elever har en evne til å gjenkjenne generelle egenskaper, og i dette tilfellet sammenhengen mellom antall ledd og summen. Lise bruker argumentasjon der hun viser til at hvis summen av 64 skal være av tre påfølgende ledd, må leddene være rundt 20.

4.1.1.4.2 Eksempel 2

> Lise: 10 + 11 + 12. Det blir bare 33.
>
> Astrid: Ja.
>
> Lise: Dere skjønner at det blir et titall.
>
> Astrid: 11 + 12 + 13 blir 36. Sånn blir det jo fordi om det hadde stått 9 der, så øke hvert tredje tall med 3.
>
> Lise: Vent litt.
>
> Astrid: Hvis det hadde stått 9 der, så fra 9 til 12, så øke det jo med 3.
>
> Lise: Ja, det er sant.
>
> Astrid: Hvis vi hadde tatt bort den, og legg på den, så er det bare å legge på 3 liksom.
>
> Lise: Det er jo bare om vi hadde hatt tre tall da. Hvis vi hadde for eksempel hatt to tall. Hvis vi hadde hatt 10 +11.
>
> Astrid: Da hadde det økt med to.

Beskrivelse

For å undersøke videre tallet 32 benytter Lise et eksempel med tre ledd: 10 + 11 + 12 = 33. Lise spør gruppen om de ser at leddene skal være rundt 10. Astrid viser videre til et eksempel der 11 + 12 + 13 = 36. Hun begrunner også at hvis det hadde stått 9 + 10 + 11, vil summen øke med 3. Lise bekrefter utsagnet, og Astrid setter ord på utsagnet sitt ved å si at hvis man tar bort et ledd og legger på et annet ledd som vil være påfølgende, vil man øke med 3. Lise mener at dette gjelder kun ved tre ledd, og viser til et eksempel med to ledd med eksempelet 10 + 11. Astrid mener da at summen øker med to hvis man erstatter leddet lik 10 med 12, slik at det har stått 11 + 12.

Analyse av strategi

I dette utsnittet har Astrid og Lise kommet lengre i generaliseringsprosessen. Elevene ser sammenhengen mellom antall ledd og summen på en annen måte enn i forrige utsnitt. Astrid ser at antall ledd som er påfølgende heltall, vil påvirke summen. Starter tallrekken med tre ledd med tallet 10 vil summen bli 33, og starter tallrekken med tre ledd med tallet 11 vil summen bli 36. Da vil summen øke med 3. Astrid forklarer hvorfor antall ledd vil påvirke summen. Man kan anta at Lise er i tvil om Astrid sin forklaring, og mener at utsagnet til Astrid kun stemmer ved bruk av tre ledd, og ønsker derfor at de skal undersøke med to ledd.

Lise viser til eksempelet 10 + 11, der Astrid med en gang sier at summen vil da øke med to hvis man erstatter leddet 10 med 12. Astrid argumenterer ved å vise en generell egenskap med en tallrekke. Siden Astrid er avhengig av konkrete eksempler for å argumentere for sammenhengen vil argumentasjonen kunne kategoriseres som generisk eksempel.

4.1.1.4.3 Eksempel 3

> Lise: Hvis vi hadde hatt 10, 11, 12, 13. Da hadde det økt med 4.
>
> Astrid: Ja, for om vi har tre tall, så øke det med tre. Med fire tall, øke det med 4. Når vi har fem tall, øke det med 5. Og så videre. For vi legg på noe som er seks tall høyere.

Beskrivelse

Lise viser til et eksempel der 10 + 11 + 12 + 13 er lik 46. Hun viser til dette eksempelet i sammenheng med et tidligere eksempel, 9 + 10 + 11 + 12, som er lik 42. Lise sier at ved eksempelet 10 + 11 + 12 + 13 øker summen med 4 i forhold til eksempelet som er lik 42. Astrid uttrykker derfor en forklaring der hun sier at ved tre ledd vil summen øke med tre og ved summen av fire ledd vil summen øke ved fire. Hun forklarer opp til seks ledd, der hun uttrykker: og så videre.

Analyse av strategi

Astrid uttrykker her til Lise hvordan den generelle sammenhengen fungerer. Siden Astrid benytter og så videre i argumentasjonen viser hun at ser den generelle egenskapen ved denne type tallrekke. Astrid er ikke avhengig av eksempel og bruker logiske slutninger med opphav i egenskaper ved påfølgende tallrekke for å argumentere. Argumentasjonen til Astrid kan karakteriseres som tankeeksperiment der man bruker matematisk argumentasjon løsreven fra bruk av eksempler.

4.1.1.5 Faktorisering og formel

Strategien faktorisering og formel er den siste strategikategorien som elevene benytter i sin generaliseringsprosess. Opphavet til denne strategien kommer fra at elevene ønsker å faktorisere de ulike tallene som de vet ikke kan skrives som summen av påfølgende heltall. Faktorisering er et matematisk begrep som elevene er nødt til å beherske fra tidligere kunnskap og koble opp mot dette nye problemet. Ut fra faktoriseringen ønsker elevene å finne en formel for å uttrykke hva de har funnet ut til nå. Dette ønsket kommer fra tidligere erfaringer i matematikk siden elevene uttrykker at dette har de måtte gjort på en matematikktest tidligere. Strategien uttrykkes gjennom to ulike eksempler.

4.1.1.5.1 Eksempel 1

Lise: Se her.

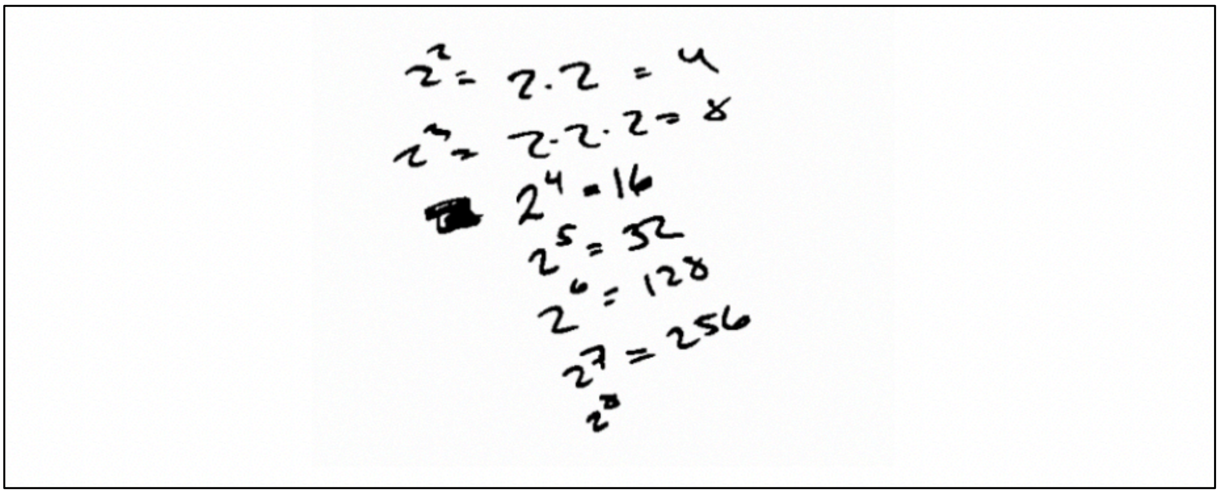
Astrid: Det må da telles med at tall som faktoriseres med bare 2-tall ikke kan skrives sånn der.

Lise: 4 delt på 2 blir 2. 8 delt på 2 blir 4.

Astrid: Hvis du faktorisere det så blir det 2 gange 2. Det blir 2 gange 2 gange 2. Der er det 2 gange 2 gange 2 gange 2. Der blir det samme med et 2-tall til. Også det øke med gange 2 hver gang. Så alle tallene som da faktoriseres med bare 2, som primtall, må da ikke kunne skrives som det der.

Figur 2.

Utklipp fra Lise, Astrid og Anne sitt arbeid med faktorisering og formel.



Beskrivelse

Astrid legger frem en tilnærming der tallene som de har undersøkt som ikke kan skrives som summen av påfølgende heltall kan faktoriseres med 2 (figur 2). Lise underbygger denne påstanden ved å vise til at tallet 4 kan divideres på 2 og blir 2. Hun viser også til eksempelet 8 som kan divideres på 2 og blir 4. Astrid supplerer med å faktorisere de ulike talleksemplene som de allerede har bevist ikke fungerer. Astrid konkluderer med at alle tall som faktoriseres med 2 som primtall, ikke kan kunne skrives.

Analyse av strategi

Gruppen velger en strategi ved å faktorisere tall som ikke kan skrives som summen av påfølgende heltall. Lise viser til to enkle eksempler der 4 er faktorisert til 2 multiplisert med 2, og 8 er faktorisert til 2 multiplisert med 4. Astrid supplerer med å faktorisere alle tallene de har undersøkt, og hun konkluderer med at alle tall som faktoriseres med 2 som primtall, ikke kan kunne skrives. Egenskapen om primtall er ikke nevnt tidligere i diskusjonen i gruppen.

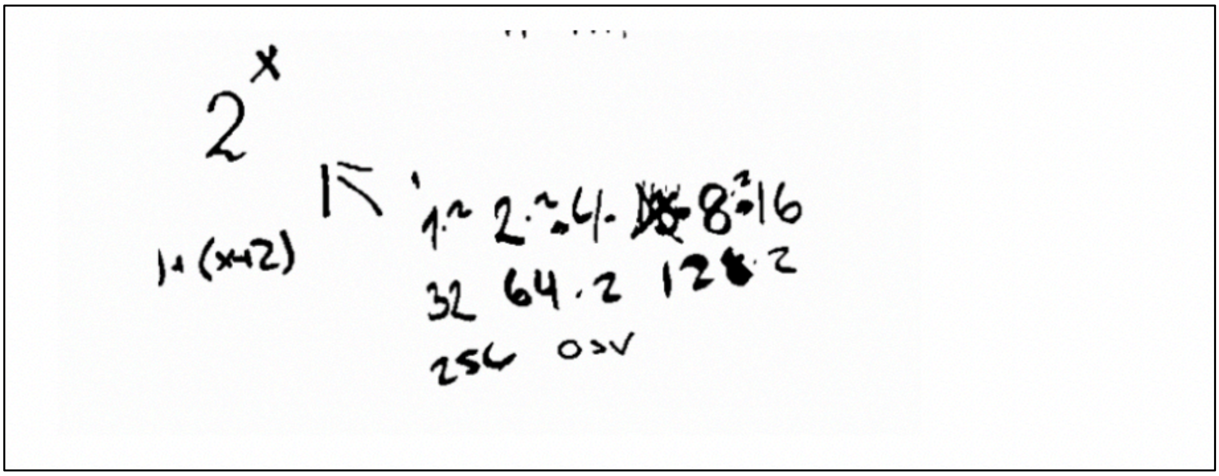
Man kan anta at Astrid mener faktorisere, som i primtallsfaktorisere. Siden det ikke ble stilt spørsmål om denne uttalelsen i intervjuet i etterkant av undervisningen er det vanskelig å kunne si hva eksplisitt tenkte her. Argumentasjonen til Astrid og Lise kan kategoriseres som avgjørende eksperiment. Astrid benytter en form for «det funker her, derfor vil det alltid virke»-argumentasjon. Dette kjennetegner avgjørende eksperiment.

4.1.1.5.2 Eksempel 2

> Anne: Skal det gå an å finne en sånn formel som vi bruke og finne på prøver? Sånn finne *n*?
>
> Lærer: Ja, kjør på.
>
> Lise: Ja, skriv ned. Gjør det!
>
> Anne: Men jeg vet ikke hvordan jeg skal starte.
>
> Lærer: Dere påstår jo at 2 opphøyd i ett eller annet, er tall som ikke kan skrives som påfølgende heltall.
>
> Astrid: Ja, så 2 med en potens?
>
> Lærer: Ja, det e jo egentlig det dere sier, men dere har ikke skrevet det ned her.

Figur 3.

Utklipp fra Lise, Astrid og Anne sitt arbeid med faktorisering og formel.



Beskrivelse

Lærer kommer bort til Lise, Astrid og Anne for å høre hva de har diskutert og hvilke tall de har funnet som ikke kan skrives som summen av påfølgende heltall. Anne stiller spørsmål om de skal finne en formel. Læreren veileder gruppen i form av at hun bekrefter Anne sin mistanke om å finne en formel. Anne vet ikke hvordan hun skal gjøre det. Læreren sier at gruppen påstår at tallet to opphøyd i noe, kan ikke skrives som påfølgende heltall. Astrid ser at det læreren mener er tallet 2 med en potens, og skriver det på tavlen (figur 3). Elevene kommer ikke lenger enn dette i undervisningen før læreren avbryter fase to, og begynner på fase tre for å oppsummere i plenum.

Analyse av strategi

Astrid, Anne og Lise benyttet het læreren i generaliseringsprosessen for å komme i mål. Siden læreren veiledet elevene til å komme frem til formelen, kan resonnementet til gruppen karakteriseres som naiv empirisme. Elevene benyttet enkelt språk i formuleringen i samtale med lærer. Ut ifra samtalen kan man si at elevene var på vei til å lage en formel, men måtte ha hjelp fra læreren for å komme i mål. Man kan anta at elevene har vanskeligheter med å koble kunnskapen som de har kommet frem til om faktorisering opp mot formel og symbolsk matematikk.

4.1.2 Sofie, Per og Martin

Den induktive analysen viser at strategivalgene til Sofie, Per og Martin handler om store og små tall, partall, oddetall, desimaltall og sammenheng mellom sum og antall ledd.

4.1.2.1 Store tall, desimaltall og sammenheng mellom sum og antall ledd

Eksempelet under viser tre ulike tilnærminger som Sofie, Per og Martin bruker i starten av sin generaliseringsprosess. *Store tall* er en matematisk ide der elevene benytter store tall i eksemplene sine. Denne strategien går igjen i store deler av generaliseringsprosessen. *Desimaltall* er et matematisk begrep som er navnsatt er elevenes bruk av ordet komma og kommatall. Strategien står i sammenheng med strategien *sammenheng mellom sum og antall ledd*. Denne strategien går igjen i generaliseringsprosessen til Sofie, Per og Martin ved flere anledninger. Sofie, Per og Martin bruker denne strategien ved eksempler med store og små tall.

> Per: Dele alt på 3, så tar du bare å plusse 1 og fjerne fra 1.
>
> Sofie: Ja.
>
> Per: Nei, plusse på 1. Du donerer den du fjerner fra den ene til den borteste. Så det går jo.
>
> Sofie: Også tar du det tallet delt på 3, også
>
> Per: Ja, for eksempel 1000 delt på 3. Det blir 333 i det midterste tallet.
>
> Sofie: Så putte du 1 til den andre siden
>
> Per: Også 332 og 334
>
> Sofie: Ja
>
> Per: Nå blir det jo 999. Hvis du har med komma blir det sånn.
>
> Sofie: Men må man ha med komma? Kan man ta for eksempel 1000. [pause] Ja, da må du ha komma.

Per: Du må ha kommatall da.

Figur 4.

Utklipp fra Sofie, Per og Martin sitt arbeid med tallet 1000.

$$332 + 333 + 334 = 999$$

Beskrivelse

Utsnittet er starten på samtalen mellom Sofie, Per og Martin etter at læreren har presentert problemet til elevene. Per kommer med en strategi der en kan dele et tall på 3, og deretter addere 1 på det ene leddet og subtrahere 1 fra det tredje leddet. Per viser til et eksempel der han dividerer tallet 1000 på 3, slik at 333 er det andre leddet i rekken av påfølgende heltall. Det første tallet er 332, slik at den påfølgende tallrekken er 332 + 333 + 334 (figur 4).

Per sier at summen er lik 1000, som er et partall, og antall ledd er lik 3, som er et oddetall. Ved å gjøre dette tar ikke Per hensyn til at kvotienten blir desimaltall. Gruppen oppdager at kvotienten blir desimaltall. Elevene omtaler desimaltall som kommatall. Sofie og Per konkluderer med at hvis summen er 1000 og antall ledd er lik 3, må man ha desimaltall.

Analyse av strategi

I utsnittet kan man se tre ulike tilnærminger med ulike matematiske temaer: store tall, desimaltall og sammenheng mellom sum og antall ledd. I starten av samtalen viser Per at han ser en egenskap ved summen av påfølgende heltall der det er en sammenheng mellom summen og antall ledd. Dette kan man karakterisere som en tilnærming.

Sofie, Per og Martin velger å benytte store tall i eksempler som en strategi. Gruppen benytter denne strategien gjennom store deler av det undersøkende arbeidet. I analysen har jeg benyttet tall over 100 som ekstremverdier. Flere av eksemplene der høye tall er benyttet som strategi kan karakteriseres som naiv empirisme og avgjørende eksperiment, men på grunn av ekstremverdier, plasseres slike eksempler under generisk eksempel. Et unntak er eksempler der man kan anta at elevene gjetter. Disse kategoriseres som naiv empirisme. I dette tilfellet vil resonnementet kunne kategoriseres som avgjørende eksperiment.

Avgjørende eksperiment kjennetegnes ved at elevene får to ulike løsninger og må vurdere hvilken vei de skal velge videre i prosessen. Elevene står ved en skillevei. I utsnittet står Sofie, Per og Martin mellom at svaret blir 1000 eller 999. Derfor kan resonnementet til elevene kategoriseres som avgjørende eksperiment. Ved å regne på nytt, konkluderer elevene med at 1000 ble det riktige svaret om de måtte benytte desimaltall, noe som oppgaven ikke spurte etter.

4.1.2.2 Odde- og desimaltall

Strategiene tar utgangspunkt i to matematiske begreper: *oddetall* og *desimaltall*. Strategiene tar utgangspunkt i egenskaper ved tall som gruppene har undersøkt i prosessen.

> Per: Her er det oddetall. Her går det. Hvis det er partall, så går det ikke.
>
> Sofie: Partall går ikke om det er et sånt tall.
>
> Per: Partall. Det går ikke med 6 heller. Ja, for du må ha oddetall.
>
> Sofie: For at det liksom er et sånt tall. Da går det ikke an å ha 4. [pause] Nei, det går ikke.
>
> Per: Enn 7?
>
> Sofie: Prøv å dele det på 7.
>
> Per: Det blir kommatall da.
>
> Sofie: Åja, ja, men kanskje.
>
> Per: 7000 delt på 7. 1000. Så tar du minus 3 på hver, også tar du, ja.
>
> Sofie: Ja, det går jo.

Beskrivelse

Per kommer påstander om at om antall ledd er odde vil det gå, og hvis antall ledd er et partall vil tallet kunne skrives som summen av påfølgende heltall. Per snakker om tallet 1000, der gruppen prøver å dividere 1000 på 5, for å få 198 + 199 + 200 + 201 + 202. Derfor velger Per å stille spørsmål om antall ledd må være oddetall for å løse problemet. Han viser videre til et eksempel, som ikke kan skrives som summen av påfølgende heltall, med seks ledd for å underbygge påstanden sin om par- og oddetall. Sofie supplerer ved at fire ledd heller ikke kan skrives som summen av påfølgende heltall, og hun viser til et tidligere eksempel. Siden materialet er hentet fra lydfil, så kan ikke man se hvilket eksempel Sofie viser til.

Per fremmer at han ønsker å dele et tall på 7 for å få syv ledd. Per ser da at summen vil bli et kommatall. I videreføring av utsnittet kommer Per med eksempel der tallet er 7000. Han dividerer 7000 på 7 og trekker fra 3 fra 1000 for å finne det første leddet, mens han legger til 3 for å finne det siste leddet. Per får da den påfølgende tallrekken: 997 + 998 + 999 + 1000 + 1001 + 1002 + 1003. Både Per og Sofie konkluderer med at tallrekken stemmer og blir 7000.

Analyse av strategi

Gruppen benyttet egenskapen om desimal, som de fant ut i forrige utsnitt, i denne delen av samtalen. Dette benytter de i konklusjonen om at hvis antall ledd er 7 vil ikke tallet 1000 kunne skrives om påfølgende heltall. Derfor velger Per å benytte tallet 7000 som eksempel. Dette kan karakteriseres som avgjørende eksperiment. Avgjørende eksperiment karakteriseres gjennom at enslige hypoteser blir testet opp mot allerede kjente eksempler.

Sofie, Per og Martin konkluderer ikke eksplisitt at tilnærmingen om at antall ledd er odde stemmer. Man kan anta at siden gruppen viser til eksemplene 7000 og 1000 benytter de resultatene for å konkludere tilnærmingen om antall ledd er odde. Denne tilnærmingen benytter gruppen i den videre prosessen.

4.1.2.2.1 Partall og små tall

Små tall karakteriserer en strategi der elevene benytter eksempler med små tall. Denne kategorien står i kontrast til strategien om store tall. Strategien partall tar utgangspunkt i matematiske egenskaper ved tall som elevene har oppdaget underveis i generaliseringsprosessen.

> Martin: Det går jo med 4 på rad, men det er bare på små tall.
> Sofie: Det er bare på 10.
> Martin: På små tall ja.

Beskrivelse

Til dette utsnittet har Sofie, Per og Martin benyttet store tall i eksempler. Sofie har undersøkt at 1 + 2 + 3 + 4 er lik 10. Antall ledd er lik fire, som er et partall. Martin kommer med en tilnærming om at antall ledd som er partall vil kunne bare skrives som små tall.

Analyse av strategi

Martin kommer med en hypotese ut ifra et eksempel der Sofie har undersøkt tallet 10. Sofie fant ut at 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Antall ledd er lik fire, som er et partall. Dette gjør at den tidligere hypotesen om at antall ledd er nødt til å være oddetall blir satt på prøve. Martin mener at antall ledd er partall ved små tall, men hypotesen blir ikke utprøvd. Gruppen diskuterer derimot andre eksempler på små tall.

4.1.2.3 Små tall og sammenheng mellom sum og antall ledd

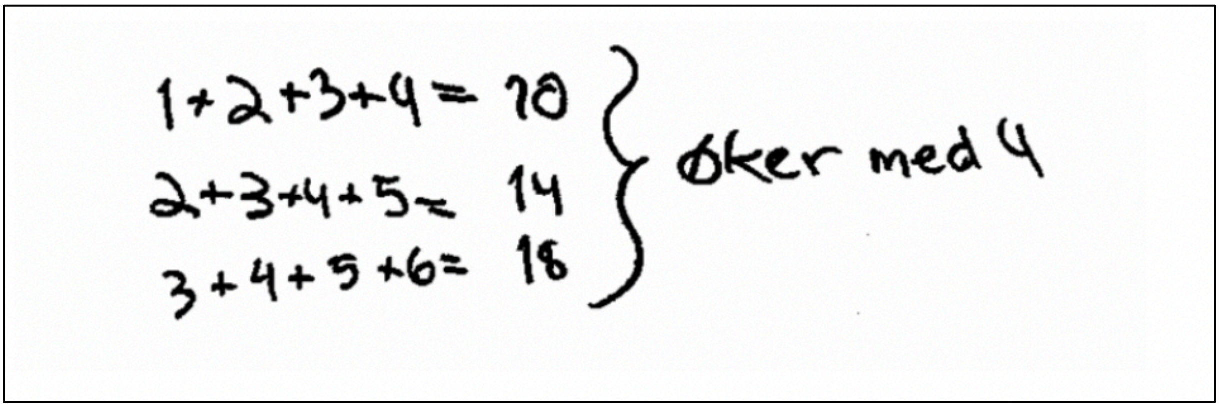
Strategiene små tall og sammenheng mellom sum og antall ledd blir brukt for å komplimentere hverandre. Elevene benytter strategien om små tall for å undersøke strategien om sammenhengen mellom sum og antall ledd. For å vise dette presenteres to eksempler.

4.1.2.3.1 Eksempel 1

> Per: 1, 2, 3, det blir 6. 2, 3, 4, det blir 9.
>
> Martin: 1, 2, 3, 4, det blir 10.
>
> Sofie: Vi kan lage mønster på det.
>
> Per: 9 + 5 blir 14.
>
> Sofie: 14. Da øke det med antall sånn der greie. Den øke sånn. Dem med 4 sånne, øke med 4. De her øke med 3, de her øke med 4. De med 5 vil øke med 5 og. Tror jeg.
>
> Martin: Det e sikkert et nytt system.
>
> Sofie: Ja, dem øke. Mønsteret e liksom at hvis man har sånn der, og det hoppe med en.
>
> Per: Hvis du øke hvert ledd. Hvis det e 5 ledd, så øke det med 5. Hvis det e 6 ledd, så øke det med 6. Hvis det 7 ledd, så øke det med 7.

Figur 5.

Utklipp fra Sofie, Per og Martin sitt arbeid med små tall.



Beskrivelse

Per beskriver tallene 6 og 9 med tre ledd der 6 er beskrevet ved 1 + 2 + 3 og 2 + 3 + 4 = 9. Martin gjentar et tidligere eksempel som Sofie har undersøkt (kapittel 4.1.2.2.1) der 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Ut ifra eksemplene til Per og Martin sier Sofie til gruppen at de kan lage et mønster av eksemplene. Per avbryter Sofie og sier at 9 + 5 = 14, der han legger sammen 2 + 3 + 4 + 5 = 14 (se figur 5). Sofie sier 14 samtidig som Per, og beskriver en egenskap ved de ulike tallene som hun ser: fra fire til fem ledd øker summen med fem, fra 9 til 14. Hun beskriver en generell sammenheng og viser til tidligere eksempler der fra tre til fire ledd vil summen øke med 4. Per beskriver den samme egenskapen ved å beskrive hva som skjer ved bruk av mer matematisk språk. Per benytter ledd, mens Sofie bruker «sånne» istedenfor ledd.

Analyse av strategi

Ved at Per og Martin viser til eksempler der tallene 6, 9 og 10 kan skrives som påfølgende heltall viser at gruppen har en annen tilnærming enn tidligere. I tidligere eksempler har gruppen benytter store tall, men her endrer de strategi ved at de velger å undersøke eksempler av små tall. Per og Martin sine eksempler kan karakteriseres som naiv empirisme siden de benytter enkel utprøving om en strategi stemmer.

Sofie benytter Per og Martin sine eksempler for å se at man kan se et mønster av eksemplene. Sofie ser en sammenheng i eksemplene der antall ledd og sum øker likt. Dette er en strategi som gruppen benytter ved flere anledninger i generaliseringsprosessen. For å evaluere strategien velger Sofie å argumentere for strategien ved å si at fra fire til fem ledd øker summen med fem. Sofie bruker «sånne» for å beskrive ledd, og hun viser en tvil i sin argumentasjon ved å si at hun *tror* at antall ledd og sum øker likt. Per bruker argumentasjonen til Sofie ved å benytte et mer presist matematisk språk. Per benytter «ledd» for å beskrive ledd. Evalueringen av strategien som Sofie og Per benytter kan karakteriseres som avgjørende eksperiment. Sofie viser til tidligere, kjente eksempler for å underbygge argumentasjonen, mens Per viser til Sofie sin argumentasjon for å danne en konklusjon som de benytter i den videre generaliseringsprosessen.

4.1.2.3.2 Eksempel 2

> Sofie: Skal vi prøve 20?
>
> Martin: Med to på rad eller tre, eller hvor mange?
>
> Sofie: Jeg vet ikke, men vi prøver uansett.
>
> Per: Det går ikke med to ledd for hvis du skal ha stigende rekkefølge.
>
> Sofie: Nei, det går ikke med to ledd. [pause] Tre ledd går ikke.
>
> Per: 6, 7, 8. 6 + 7 blir 13. 13 pluss 8 blir 21. [pause] Okei, 5, 6, 7. 11. Nei, det går ikke. Tre ledd går ikke. To ledd går ikke. Fire ledd da?

Beskrivelse

I forkant av dette utsnittet ønsker læreren at Sofie, Per og Martin skal undersøke hvilke som ikke kan skrives som summen av påfølgende heltall siden gruppen har funnet mange tall som kan skrives. Sofie ønsker å undersøke tallet 20. Martin stiller spørsmål til om gruppen skal prøve med to eller tre ledd. Sofie mener at det er det samme. Per sier at man ikke kan skrive 20 med to ledd. Sofie supplerer svaret til Per med at man kan heller ikke benytte tre ledd som påfølgende tall for å få sum lik 20. Verken Sofie eller Per forklarer med ord hvorfor de mener det. Per ønsker å undersøke påstanden til Sofie om tre ledd og benytter 6 + 7 + 8 som et eksempel. Deretter prøver han ut 5 + 6 + 7. Ut ifra de to eksemplene konkluderer han med at verken to eller tre ledd ikke kan benyttes for å skrive sum lik 20. I det Per skal undersøke tallet 20 med fire ledd, avbryter læreren fase to, og gruppen kommer ikke lenger i prosessen.

Analyse av strategi

For å finne tall som ikke kan skrives som summen av påfølgende heltall benytter gruppen to tilnærminger: små tall og sammenhengen mellom sum og antall ledd. Per benytter tilnærmingen om sammenhengen mellom sum og antall ledd i undersøkelsen av antall ledd skal være lik to eller tre for å kunne skrive summen lik 20 som påfølgende heltall. Man kan anta at Per regner ut gjennomsnittet til tallet 20 ved å ta tallet 20 og dividere det på antall ledd. Hvis antall ledd er lik to velger Per å dividere 20 på 2, og få 10. Ut ifra dette ser Per at man ikke kan skrive to påfølgende tall for å få sum lik 20. Man kan anta at Sofie ser det samme for tre ledd, men Per undersøker det for å overbevise seg selv og andre. Siden Per og Sofie velger en strategi der de evaluerer strategien opp mot tidligere strategier kan resonnementet karakteriseres som avgjørende eksperiment.

4.2 Palindrom

I den induktive analysen er det avdekket åtte ulike matematiske temaer i bevisstrategiene som elevene benyttet i undervisningsoppleggene. Tabell 3. viser resultatet for hvilke temaer elevene i undervisningsopplegget om palindromer benytter i strategivalg.

Tabell 3.

Oversikt over matematiske strategier i palindromer.

Tema	Kari og Petter	Kai og Ole
Felles faktor	X	X
Basetall	X	
Faktorisering	X	
Tverrsum	X	
Standardform	X	
Doble tall		X
Doble sifre		X
Formel	X	X

Fra tabell 3 kan vi se at Kari og Petter har benyttet seks ulike temaer i sine resonnementer, der fire av temaene er unike i forhold til Kai og Ole. I prosessen til Kai og Ole er det avdekket fire ulike temaer i resonnementene. To av de fire temaene til Kai og Ole er lik Kari og Petter sine resonnementer: felles faktor og formel.

4.2.1 Kari og Petter

Den induktive analysen viser at strategivalgene til Kari og Petter handler om felles faktor, basetall, faktorisering, tverrsum, standardform og formel. Flere av de matematiske temaene benytter gruppen i samme resonnementsprosess.

4.2.1.1 Felles faktor

Strategien felles faktor tar utgangspunkt i en matematisk idé der elevene bruker matematiske egenskap om felles faktor for å undersøke eksempler.

> Kari: Vi må finne tall som stokker om.
>
> Petter: Som ikke er lik.
>
> Kari: Da må vi finne for eksempel et tall som har samme faktorer. Skjønner du hva jeg mener?
>
> Petter: Hvis tall a og b. Så hvis tall a har samme faktor som b.

Beskrivelse

Dette er en av de første reaksjonene til Kari og Petter etter læreren har presentert oppgaven på tavlen. De har undersøkt eksempelet 12 x 63 = 36 x 21 og funnet ut at produktene på hver side av likhetstegnet er lik. Kari og Petter har funnet ut at tallet 12 kan multipliseres med 3 for å få 36, og 21 kan multipliseres med 3 for å få 63. De ønsker derfor å finne et nytt eksempel med tall som ifølge Kari kan stokkes om. Petter mener at disse tallene ikke kan være lik. Kari uttrykker at hun ønsker å finne et tall som har samme faktorer slik at det blir et palindrom. Denne strategien til Kari karakteriseres som felles faktor. Petter uttrykker ved bruk av notasjonen, a og b, for de ulike tallene at tall a må ha samme faktor som b. Det vil si at tallet 21 som er a, må ha samme faktor som b = 12 når man multipliserer. Petter uttrykker ikke eksplisitt hvilke tall han mener er a og b. Ingen i gruppen konkluderer om strategien er godtatt eller avvist, men Kari og Petter benytter denne strategien om felles faktor videre i generaliseringsprosessen.

Analyse av strategi

Kari og Petter velger å benytte felles faktor som en strategi for å undersøke palindromet som læreren skrev på tavlen som introduksjon til oppgaven. Ved å se at de ulike faktorene i palindromet har felles faktor, ønsker Kari og Petter å se om de kan finne et tall som har samme faktorer som de kan undersøke videre. Petter benytter notasjonen a og b for de ulike faktorene i palindromet og sier at de må et likt forhold mellom hverandre. Kari og Petter velger i midlertidig ikke å teste ut strategien.. Siden de velger å ikke teste ut strategien kan bevisstrategien karakteriseres som naiv empirisme. Naiv empirisme omfatter bevisstrategier som ikke testes ut. Gjennom datamaterialet kan man se at Kari og Petter benytter denne strategien videre, så man kan antyde at gruppen godtar bevisstrategien om felles faktor for å så ta den med videre i generaliseringsprosessen.

4.2.1.2 Basetall

Strategien *basetall* er en strategi som går igjen i store deler av generaliseringsprosessen. Elevene bruke strategien ved å ta utgangspunkt i et tall, basetall, for å skape et palindrom. Strategien utleder ved flere tilfeller andre strategier.

4.2.1.2.1 Eksempel 1

> Kari: Jeg tror vi må ta utgangspunkt i et tall, så må vi gange det ene med 4 for eksempel. Skjønner du hva jeg mener?
>
> Petter: Nei
>
> Kari: For at hvis du har a gange 4b er lik 4a gange b.
>
> Petter: Jo, sånn ja
>
> Kari: Så må vi putte inn tall for a og b. At vi må liksom.
>
> Petter: Skal vi putte inn noe? Hvis vi hadde putta inn noen tilfeldige tall
>
> Kari: De tallene må også stokkes om og være hverandre lik.
>
> Petter: Hvis vi hadde putta inn 15 og 51. Det blir feil.
>
> Kari: Ja, vi må ha et tall som må ganges opp med et tall som stokkes om.
>
> Petter: Hvis det er 4 kan det ikke være et oddetall. Det kan ikke inneholde oddetall heller.
>
> Kari: Nei.
>
> Petter: Hvis vi hadde tatt 24. Da blir det 42. Det blir feil.
>
> Kari: Da kan vi ta 2 her. 24 til 42. Det er 2. Det må ikke være 4. Skjønner du hva jeg mener?

Beskrivelse

Dette utsnittet er en fortsettelse på tilnærmingen om felles faktor (kap. 4.2.1.1). Kari mener at hun og Petter må ta utgangspunkt i et tall for å lage et palindrom. Dette kan beskrives som en strategi, og er videre i oppgaven karakterisert som basetall. Kari sier at basetallet må kunne multipliseres med et tall slik at de har en felles faktor. Hun viser til at tallet 4 kan være et eksempel på en felles faktor. Hun mener at formelen *a x 4b = 4a x b*, kan hun beskrive at multiplikatoren må felles faktor lik 4. For å underbygge formelen ønsker Kari og sette inn tall for a og b for å danne et eksempel. Petter sier 15 og 51 som et eksempel for a og b, men han ser at det vil være feil og avviser Kari sin formel. Videre mener Petter at hvis den felles faktoren til produktene er 4, som er et partall, kan ikke a og b være oddetall. Det vil si at faktorene i palindromet ikke kan være oddetall om multiplikatoren er lik 4. Petter viser til et eksempel der han benytter 24 som et basetall, som han speiler til å bli 42. Han mener selv at det er feil siden 24 multiplisert med 4 ikke er lik 42, slik som han har påstått. Kari sier at om man benytter 24 som basetall kan man derfor endre den felles faktoren i formelen til 2, istedenfor 4. Dette vil i midlertidig ikke stemme siden 24 multiplisert med 2 er lik 48, og ikke

42 som hun påstår. Gruppen benytter faktorene 24 og 42 videre for å lage et palindrom. De ønsker deretter å finne et tall som også kan speiles slik at de kan danne et palindrom ut av de ulike faktorene.

Analyse av strategi

Kari og Petter velger å benytte tilnærming som basetall som strategivalg. De ønsker å ta utgangspunkt i et tall, og de benytter også strategien om felles faktor for å komme frem til eksempler. Gruppen velger å benytte egenskaper som de allerede har arbeidet med videre i prosessen for å finne nye egenskaper og eksempler. Strategien om basetall går igjen i mange av eksemplene som de undersøker i prosessen.

For å evaluere strategien om basetall og felles faktor uttrykker Kari et bokstavuttrykk, 4a x b = 4b x a, for å utrykke hva hun mener om den felles faktoren i palindromet. Ved å benytte formel for å underbygge hva hun mener kan karakteriseres som tankeeksperiment. Tankeeksperiment karakteriseres ved bruk av symbolsk matematikk og distansering fra eksempler. Formelen som Kari benytter kan også karakteriseres som en egen tilnærming. Formelen Xa x b = Xb x a, der X er den felles faktoren i tallene a og b, bruker Kari og Petter aktivt videre i generaliseringsprosessen ved flere anledninger.

For å evaluere formelen vil gruppen prøve ut med eksempler. Her benytter elevene to eksempler på bakgrunn av de ulike egenskapene de har funnet til nå i prosessen. Petter kommer med et eksempel der 15 og 51 settes inn for a og b, og det ser Petter ikke stemmer og avkrefter dette eksempelet. Videre mener Petter at hvis den felles faktoren til produktene er 4, som er et partall, kan ikke a og b være oddetall. Dette tester Kari og Petter ut ved at enten a er lik 24, slik at:

$$4a \times b = 4b \times a$$

$$(4 \times 24) \times b = 4b \times 24$$

$$96 \times b = 4b \times 24$$

Begge elevene uttrykker at regnestykket ikke går, men Kari uttrykker at om den felles faktoren er lik 2, slik at 2a = 42, vil det stemme. Kari og Petter avkrefter da at den felles faktoren trenger å være 4 ved at den faktoren kan være 2. Utprøvingen av de to eksemplene kan karakteriseres som avgjørende eksperiment. Avgjørende eksperiment karakteriseres der elevene tester en hypotese og får to ulike løsninger.

4.2.1.2.2 Eksempel 2

Kari: Men det er jo 48. 2 gange 24 er ikke 42.

Petter: Det er jo 48, det er det jeg sa først.

Kari: Men det er feil. Det skal jo bli 42, hvis det er riktig. Så vi må ha et annet tall.

... [småsnakk som er vanskelig å tydeliggjøre]

Kari: Vi kan bruke 12 som base.

Petter: Ja, men se her. Hvis vi starter med x ganger tallet her, men så snur vi om det tallet. Hvis du hadde tatt 12 gange.. Hvordan blir det?

Kari: 12 ganger 3, nei, men de har jo. Men de har jo ikke stokket om bare ett og ett tall. De har stokket om hele greia. Ser du det?

Petter: Ja, dem har det jo baklengs.

Kari: Ja, de har tatt hele greien baklengs. De har gjort om 12 til 36 og 21 til 63. De har ikke gjort om 12 til 21.

Petter: Nei, det har dem ikke.

Kari: Ja, se her. Så kan vi ta 12, 24. Da må det her være 42. Da må det være. Hva er 42 delt på 2? Er det 21? [pause] Det er 21. Se det går.

Beskrivelse

Dette utsnittet står i sammenheng med kapittel 4.2.1.1.1, der Kari og Petter har en strategi om basetall der de også diskuterer tallenes felles faktor. I dette utsnittet oppdager plutselig Kari at 2 multiplisert med 24 er lik 48, og ikke 42 som de tidligere har regnet ut. Hvis den tidligere hypotesen om felles faktor skal stemme er den korresponderende faktoren til 24 lik 48, siden 48 er det dobbelte av 24.

Kari foreslår at de skal benytte 12 som basetall. Petter mener at hvis de bruker 12 for å multiplisere tallet med en faktor kan de deretter snu om tallet. Kari foreslår 12 multiplisert med 36, og i samme setning viser hun til arbeid en annen gruppe har gjort. Hun forteller Petter at gruppen har ikke snudd ett og ett tall, men hele palindromet. Petter anerkjenner Karis observasjon. Hun utdyper ved å si at de har snudd all tall, der de har omgjort 12 til 36 og 21 til 63, og ikke gjort 12 til 21 slik Kari og Petter har gjort tidligere. Ut ifra observasjonen av arbeidet til den andre gruppen benytter Kari basetallet 12 og tallet 24, og gjør det om til 42 og 21. Tallet 24 er dobbelte av 12, og 42 er det dobbelte av 21. Ut ifra observasjonsnotatene kan man se at gruppen får palindromet, $12 \times 42 = 24 \times 21$. Produktene på hver side av likhetstegnet er lik 504, og stykket er speilvendt. Det er ingen indikasjon på at elevene tester ut palindromet ved å regne ut produktene, men Kari konkluderer med at stykket er et palindrom.

Analyse av strategi

Kari oppdager at et tidligere eksempel, 24 x 42 = 24 x 42, ikke vil stemme om hypotesen deres som felles faktor skal være sann. Det dobbelte av 24 er ikke lik 42, slik som de har tidligere sagt. Derfor retter de på seg selv og sier at det dobbelte av tallet 24 er lik 48. Det gruppen ikke oppdager er at 24 x 42 = 24 x 42 er et palindrom siden produktene er lik og tallene er speilvendte. Argumentasjonen til Kari, der det fører til at de retter på seg selv, kan karakteriseres som avgjørende eksperiment. Avgjørende eksperiment karakteriseres ved at elevene sjekker validitet mot en eller flere hypoteser, og i dette tilfellet sjekker Kari og Petter validiteten.

I utsnittet foreslår Kari at gruppen skal benytte 12 som et basetall. Strategien om basetall har gruppen benyttet tidligere i prosessen. Petter mener at hvis de bruker 12 som basetall kan de multiplisere 12 med en faktor, og Kari foreslår 12 multiplisert med 3 som er lik 36. Elevene ser på hvordan en annen gruppe har funnet et palindrom. Herfra finner Kari og Petter inspirasjon til å se på palindromene på en ny måte. Elevene ser at den andre gruppen har benyttet en felles faktor lik 3 for å gjøre tallet 12 til 36 og 21 til 63. Ut ifra denne informasjonen finner Kari og Petter et palindrom ved hjelp av basetallet 12. De multipliserer 12 med 2 for å få 24, og gjør noen operasjoner slik at de danner palindromet, 12 x 42 = 24 x 21. Elevene tester ikke palindromet ved å finne produktet, men antar at det er et fullverdig palindrom på grunn av speilingen. Strategievalueringen av strategien basetall kan karakteriseres som avgjørende eksperiment. Elevene ser hva en annen gruppe har gjort, og benytter denne informasjonen til å skape sitt eget palindrom med samme egenskaper. Kari og Petter tester ikke om produktene er lik, men antar. Videre i samtalen sier Kari: «Dette skal gå uansett», og det kan gjenkjennes med argumentasjon innenfor avgjørende eksperiment: «Det virker her, derfor vil det alltid funke.»

4.2.1.3 Faktorisering

Faktorisering er en strategi som kan sees i sammenheng med strategien felles faktor og ulike eksempler med palindromer som de har undersøkt. Elevene benytter ikke faktorisering som et matematisk begrep, men benytter den matematiske ideen i prosessen.

> Kari: Er det noen faktorsammenheng?
>
> Petter: Ja, det er det jeg også har tenkt.
>
> Kari: Enn hvis vi sjekker da. Hvis vi skriver her da, 3 gange 2 gange 2. Hva er 42?
>
> Petter: 42 er 2 gange 3 gange 7. Også har man

Kari: På neste så har vi 24, som er

Petter: Er lik da. Som er 2 gange 2 gange 2 gange 3.

Kari: Ja

Petter: Også gange med 7 gange 3.

Kari: Da kan vi sjekke om faktorene

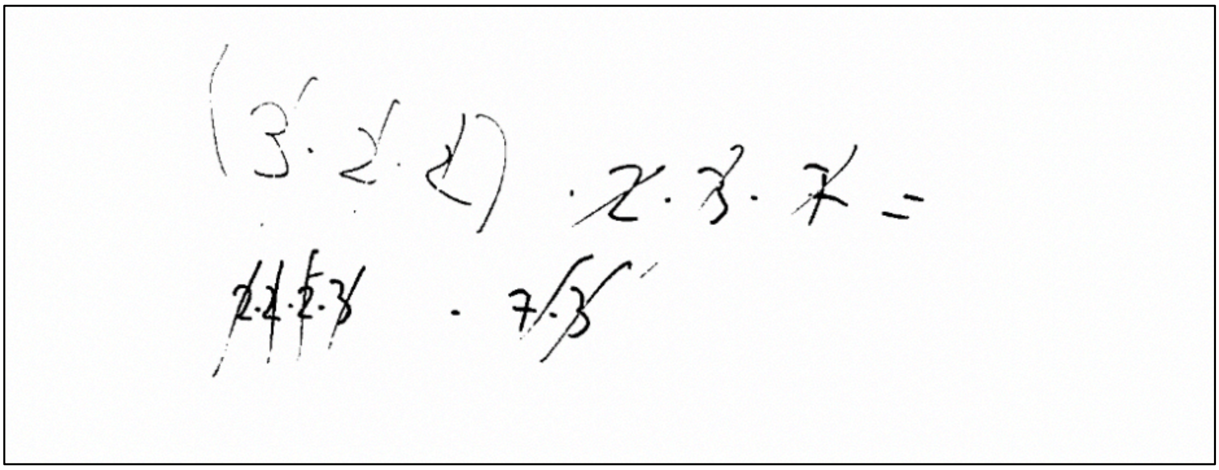
Petter: De stemmer.

Kari: Det er jo det at faktorene må være det samme i. Men ser vi noe om de bytter?

Petter: Det som egentlig skjer er at man tar en faktor derifra til dit og en faktor derifra til dit.

Figur 6.

Utklipp fra Kari og Petter sitt arbeid med faktorisering.



Beskrivelse

Kari foreslår til Petter om det er noe faktorsammenheng i palindromet. For å undersøke faktorsammenhengen velger Kari og Petter å faktorisere som strategi. Elevene faktoriserer 12 x 42 = 24 x 21 slik at:

$$12 \times 42 = (3 \times 2 \times 2) \times (2 \times 3 \times 7)$$

$$24 \times 21 = (2 \times 2 \times 2 \times 3) \times (3 \times 7)$$

Denne faktoriseringen fremkommer i observasjonsnotatene og fra elevnotatene (figur 6). Kari sier til Petter at de kan ved hjelp av denne faktoriseringen sjekke faktorene ved å stryke faktorene mot hverandre. Dermed står det 2 = 2, som vil si at gruppen står igjen med faktoren 2 på begge sider av likhetstegnet. Ut ifra dette konkluderer Petter med at faktoren 2 passer inn i den tidligere formelen, *Xa x b = Xb x a,* der *X = 2* i dette tilfellet.

Analyse av strategi

Kari og Petter benytter i evalueringen av strategien tidligere kjente eksempler, i form av 12 x 42 = 24 x 21 og en tidligere formel for å undersøke om faktorisering kan løse problemet. Ved å faktorisere eksempelet og se det i sammenheng med formelen *a x 2b = 2a x b*. Strategievalueringen til Kari og Petter kan karakteriseres som avgjørende eksperiment siden elevene tester en strategi opp mot allerede kjente eksempler. Kari og Petter har tidligere i prosessen konkludert med at 12 x 42 = 24 x 21 er et palindrom.

4.2.1.4 Tverrsum

Det matematiske begrepet *tverrsum* er summen av sifrene i et tall. Elevene benytter denne strategien for å undersøke tverrsum som en matematisk egenskap for karakteristika av palindromer.

4.2.1.4.1 Eksempel 1

> Kari: Er det noe fast for tverrsummen eller noe sånt?
>
> Petter: Det er delelig på 3 uansett
>
> Kari: Her har vi 3 pluss 6. Det må kunne deles på 3. Er det det som?
>
> Petter: Ja, alle tall må kunne deles på 3.
>
> Kari: 14 kan ikke deles på 3, så da går det ikke.

Beskrivelse

Kari stiller spørsmål til Petter om en egenskap til faktorene i palindromet er fast tverrsum. Tverrsum er summen av alle sifrene i et tall. Petter fremmer at en egenskap ved tverrsummen er at den er delelig på 3. Kari mener at faktoren 36 kan deles på 3. Her viser Kari tilbake til det kjente eksempelet, 12 x 63 = 36 x 21, som er eksempelet læreren presenterte på tavlen. Tverrsummen i 36 er lik 9, som Kari påpeker. Petter sier derfor at alle tall må kunne deles på 3, men Kari finner et motsigende eksempel i tallet 14. Tallet 14 har en tverrsum lik 5 som ikke kan divideres på 3, og 14 kan heller ikke divideres på 3. Elevene sier ikke om de avviser eller godtar strategien om tverrsum, men de velger å undersøke det videre.

Analyse av strategi

I dette resonnementet fremmer Kari en strategi om tverrsummen til faktorene. Ut ifra Kari sin tilnærming om tverrsum, sier Petter om tverrsummen er delelig på tallet 3 uansett. For å evaluere påstandene velger Kari å se på et tidligere kjent eksempel, der tverrsummen i faktorene er lik henholdsvis 3 og 9. Disse tallene er delelig på 3, og Kari velger å benytte det i argumentasjonen. Kari velger også å finne et motsigende eksempel for å kunne styrke argumentasjonen. Tallet 14 er en faktor som en av de andre gruppene i klassen har benyttet i et palindrom. Så tallet er en del av et kjent eksempel som de vet er et palindrom. Tallet 14 har en tverrsum lik 5, som ikke er delelig med tallet 3. Selv om Kari finner et motsigende eksempel velger gruppen å undersøke strategien om tverrsummen kan divideres på tallet 3 videre. Strategievalueringen til Kari og Petter om tverrsum kan karakteriseres som avgjørende eksperiment siden de tester strategien opp mot to tidligere kjente eksempler.

4.2.1.4.2 Eksempel 2

> Petter: Men det tallet som vi skal snu på. Hvis vi hadde tatt tallet 27 for eksempel, og så snur vi det om, og fått 72? Det er delelig på 3 uansett, for tverrsummen er lik.
>
> Kari: Ja, for tverrsummen er lik. Det er derfor tallet må være delt på 3 eller 9 for da er tverrsummen den samme uansett, og da kan den deles på og ganges med det samme tallet.

Beskrivelse

Kari og Petter har også i dette utsnittet en tilnærming til tverrsum. Selv om gruppen avkreftet delelighet med tallet 3 (kapittel 4.2.1.3.1), velger de å undersøke de videre denne strategien litt senere i generaliseringsprosessen. Petter viser til et eksempel der tallet 72 er palindromet til tallet 27. Han benytter den tidligere tilnærmingen om tverrsum og delelighet på tallet 3 ved å si at tallene er delelig på 3 fordi tverrsummen er lik 9. Kari anerkjenner Petter sitt resonnement og supplerer med at faktoren må være delelig på 3 eller 9 siden tverrsummen er lik. Hun argumenter med at tallene kan derfor divideres og multipliseres med den samme faktoren.

Analyse av strategi

For å evaluere strategien om tverrsum velger Kari og Petter å benytte enkle eksempler. Eksempelet til Petter er ikke et tidligere eksempel, men han benytter en tilnærming, delelighet med tallet 3, som de tidligere har avkreftet. Kari sitt supplement kan sees i sammenheng med en tidligere formel. Man kan anta at når hun argumenterer med at tallene kan divideres og multipliseres med samme faktor viser hun til den tidligere formelen som de har undersøkt, 2a x b = 2b x a, der faktoren i formelen vil være lik 3 istedenfor 2 som tidligere oppdaget. Evalueringen av strategien kan karakteriseres som naiv empirisme siden Kari og Petter ikke benytter egenskaper som de tidligere har avkreftet i sin prøving av strategi. Dette kjennetegner naiv empirisme.

4.2.1.4.3 Eksempel 3

> Petter: Men egentlig hvis du tenke på det, vi har egentlig funnet tverrsummen av tallet her, og hvis vi er helt ærlig med oss selv. Hvis vi skriver et tall som ikke funke. 12 x 23.
>
> Kari: Her er tverrsummen 3. Her er tverrsummen 9. Her er tverrsummen 3.
>
> Petter: Nei, men se her. Dette funker ikke, men tverrsummen er lik. Vi lurer oss bare. Vi lurer bare oss sjøl
>
> Kari: Ja, det kan stemme.

Beskrivelse

Petter uttrykker overfor Kari en usikkerhet om tilnærmingen om tverrsum og delelighet med tallet 3 stemmer. Han viser til et eksempel som han og Kari har undersøkt tidligere, 12 multiplisert med 23 er lik 32 multiplisert med 21. Kari avbryter Petter og viser til noen eksempler som de har jobbet med og viser til tverrsummen. Petter viser tilbake til eksempelet som de tidligere har undersøkt. Petter argumenterer at tverrsummen i faktorene er lik, men produktet er ulik på hver side av likhetstegnet. Kari bekrefter resonnementet til Petter og konkluderer med at det kan stemme. Kari og Petter konkluderer ikke direkte evalueringen av strategien sin, men de sier unisont at de er enig om at de lurer seg selv i resonnementet, og Kari og Petter benytter ikke tilnærmingen om delelighet med tallet 3 videre i prosessen.

Analyse av strategi

I evalueringen av strategi velger Petter å benytte et tidligere eksempel som gruppen har undersøkt tidligere. Eksempelet, 12 multiplisert med 23 er lik 32 multiplisert med 21, er et eksempel som de har funnet ikke er et palindrom siden produktene er ulik. Derfor benytter Petter eksempelet som en motsetning for å argumentere for sin usikkerhet overfor Kari. Evalueringen av strategien om delelighet med tallet 3 kan karakteriseres som avgjørende eksperiment siden Petter velger å vise til et tidligere eksempel som de har undersøkt for å teste antakelsen sin. I konklusjonen avviser de tilnærmingen om delelighet på tallet 3. De benytter tilnærmingen om tverrsum i den videre prosessen.

4.2.1.5 Standardform

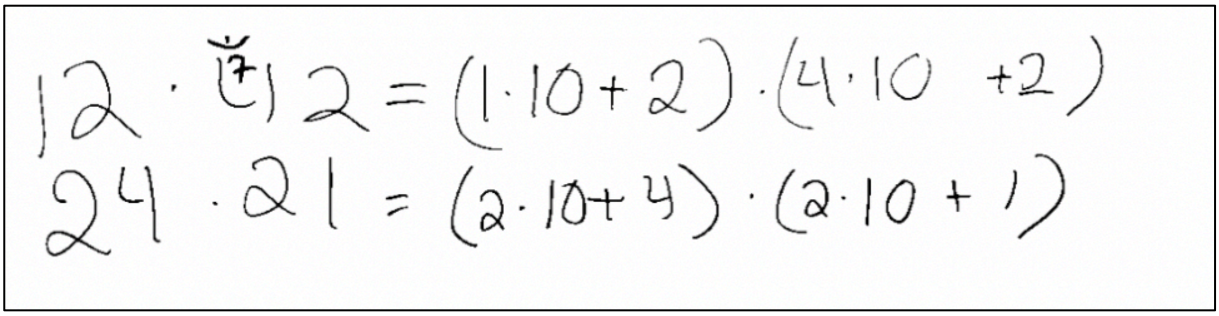
Strategien *standardform* er et matematisk begrep som Kari og Petter snakker om i generaliseringsprosessen. Standardform brukes i matematikken for å skrive tall på forenklet form, gjerne store tall. Kari og Petter bruker strategien som en anvendelse for å finne et uttrykk for palindromene.

4.2.1.5.1 Eksempel 1

> Petter: Skal vi skrive det på standardform? Husker du? Han ba oss.
>
> Kari: Ja.

Figur 7.

Utklipp fra Kari og Petter sitt arbeid med standardform.



Beskrivelse

Petter ytrer til Kari at han ønsker at de skal prøve å skrive på standardform de ulike faktorene i palindromet. Han viser til «han ba oss», og det er snakk om læreren i denne situasjonen. Strategien gruppen velger er å skrive palindromet, 12 x 42 = 24 x 21, på standardform. Observasjonsnotater og bildeutklipp fra undervisningsøkten (figur 7) viser at gruppen skrev 12 x 42 = (1 x 10 + 2) x (4 x 10 + 2) og 24 x 21 = (2 x 10 + 4) x (2 x 10 + 1). Gruppen konkluderer ikke strategien direkte, men velger å ta med seg informasjonen videre i generaliseringsprosessen.

Analyse av strategi

Kari og Petter benytter her standardform for et eksempel som de tidligere har undersøkt. Eksempelet tilfredsstiller krav som likt produkt, speilvendte faktorer og tverrsummene er lik. Utprøvelsen av strategien, der gruppen skriver ned et palindrom på standardform, kan karakteriseres som naiv empirisme. Kari og Petter benytter et enkelt eksempel for å prøve ut strategien. Siden gruppen velger å ta med seg informasjonen om standardform videre i generaliseringsprosessen kan man si at Kari og Petter bekrefter strategien om standardform.

4.2.1.5.2 Eksempel 2

> Lærer: Men hvis dere skulle prøve å lage en generell formel.
>
> Kari: Ja. [pause]
>
> Petter: Okei, så dem skal være bevart. Det vi må huske på at om det skal være bevart, så må dem ha et visst forholdstall imellom seg.

Kari: Vi skal ikke prøve oss på det dem gjorde med nieren da? For de gjorde det ved å ta 9 ut.

Petter: Ja, prøv det. Ta 9 ut.

Kari: Nei, vi tok

Petter: Nei, du tok 2 x (9 + 1)

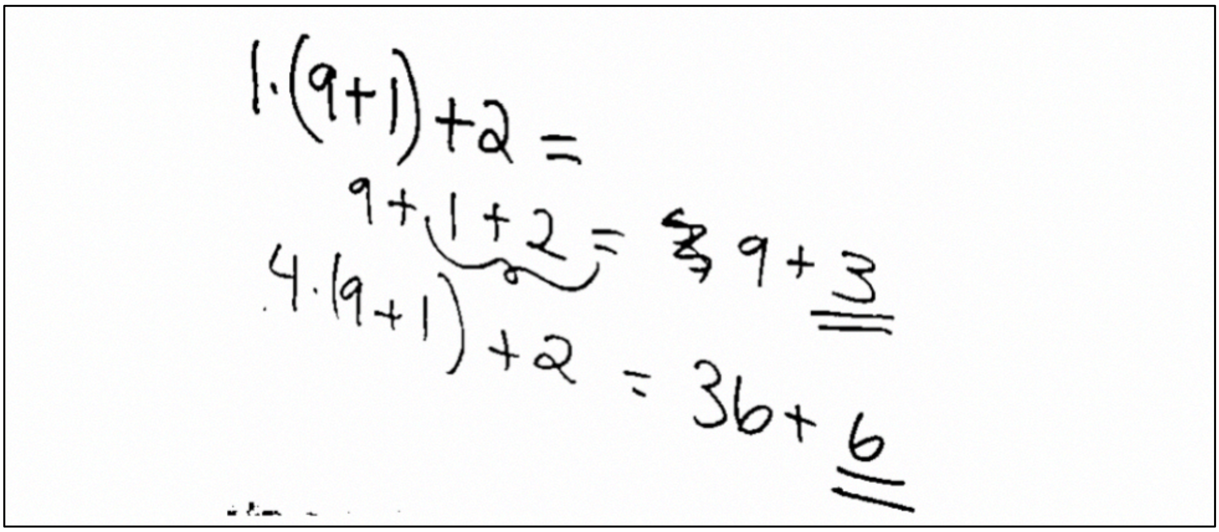
Kari: Pluss 4

Petter: Da ende du opp med 18 + 2 + 4. Da ser du at det som står igjen etter nieren. Det e jo 6.

Kari: Kan sjekke den andre. Ja, da får du 9 + 1 + 2. Så tar vi. 4 x (9 + 1) + 2 er lik 9, 18, 27, 36 + 6. Blir det det?

Figur 8.

Utklipp fra Kari og Petter sitt arbeid med standardform.



Beskrivelse

I dette utsnittet kommer læreren bort til elevene for å veilede. Læreren ønsker at gruppen skal prøve å utarbeide en generell formel fra standardform (kapittel 4.2.1.4.1). Petter ønsker å formidle at de ulike faktorene må være bevart og det vil si at det må være felles faktor mellom de ulike faktorene. Kari ønsker at hun og Petter skal undersøke noe som en annen gruppe i klassen har gjort. Ifølge Kari tok gruppen tallet 9 ut av standardform, og derfor ønsker hun at de skal gjøre det samme. Petter anerkjenner Kari sitt valg og de fremmer derfor en strategi der de utvider tallet 42 til 4 x 10 + 2, som de har funnet tidligere i et palindrom, til 4 x (9 + 1) + 2 (figur 8). Elevene får samme produkt som tidligere ved å benytte denne metoden. Kari og Petter velger i tillegg til dette utsnittet å undersøke et tidligere eksempel som de også har arbeidet med: 12 x 63 = 21 x 36, for å undersøke denne tilnærmingen til standardform. Kari og Petter vet at eksempelet er et palindrom siden produktet er lik, tverrsummen i faktorene er lik og stykket er speilvendt. Ved å utvide tallet 12 får elevene 1 x (9 +1) + 2 = 12, og derfor konkluderer elevene med at strategien om denne standardformen fungerer.

Analyse av strategi

For å evaluere strategien om standardform på utvidet form undersøker Kari og Petter to ulike palindromer. I begge tilfeller får elevene like faktorer. Det vil si at tallet 42 er lik om det enten står 4 x 10 + 2 eller 4 x (9 + 1) + 2. Evalueringen kan karakteriseres som avgjørende eksperiment siden gruppen velger å undersøke to eksempler for å verifisere strategien. Eksemplene er tidligere kjente eksempler. Kari og Petter velger å bekrefte strategien om standardform og velger å benytte den i videre arbeid av å danne en generell formel.

4.2.1.6 Formel

> Petter: Så hva mer må vi? Vi må jo finne noe ned på bokstavnivå. Det er jo det vi ser etter egentlig.
>
> Kari: ab gange cd er lik dc gange ba.

Tidligere har Kari og Petter ønsket å finne et uttrykk for palindromene på standardform. Læreren har oppfordret elevene til å finne et generelt uttrykk, altså en *formel*. Per ønsker at han og Kari skal finne en formel uttrykt på bokstavnivå. Det betyr at elevene må bevege seg fra standardform til bokstavuttrykk. Kari responderer på ønsket til Petter ved å komme med formelen *ab x cd = dc x ba.* Kari og Petter uttrykker ikke en konklusjon direkte, men benytter denne formelen i det videre arbeidet.

4.2.1.6.1 Eksempel 1

> Petter: For eksempel 13 gange med et tall som en gange med 4. Ikke 4 selvfølgelig. 93. Kan vi snu det? Her har vi 1 gange 9 og 3 gange 3. Kan vi snu det? Da får vi 39 x 31.
>
> Kari: Det er kjempebra.
>
> Petter: I tallet ab ganga med cd så må a x c være lik b x d. Det er den generelle regelen. Og det betyr det at det her er enere. Så kan du da si at tier-faktor gange med enerfaktor må være lik.

Beskrivelse

Petter resonnerer ved bruk av tidligere kunnskaper til han har ervervet seg gjennom prosessen til eksempelet 39 x 31 = 13 x 93. Petter beskriver det han tenker i prosessen ved at han benytter tallet 13 som basetall, og multipliserer tallet først med 4, men korrigerer seg selv til at produktet skal bli 39. Det vil si at Petter multipliserer 13 med 3, istedenfor 4, for å få 39. Deretter snur han stykket, 39 x 31, for å få 13 x 93. Petter beskriver så utførelsen ved å si at i tallet ab multiplisert med cd, så må a multiplisert med c være lik b multiplisert med d.

Dermed beskriver han den generelle regelen. Han sier videre at da vil tier-faktoren multiplisert med ener-faktoren være lik. Her er det snakk om sifferplassene i faktorene i palindromet, 1 x 9 og 3 x 3, der begge produktene er lik 9. Gruppen konkluderer ikke i resonnementet.

Analyse av strategi

For å evaluere bokstavuttrykket *ab x cd = dc x ba*, velger Petter å finne et eksempel på palindrom for å vise at uttrykket stemmer. Petter viser til eksempelet 39 x 31 = 13 x 93, som er et eksempel som de ikke tidligere har undersøkt. Petter forklarer til Kari hvorfor dette eksempelet er et palindrom ved bruk av utregningen han benytter for å finne palindromet. Petter benytter egenskaper der tverrsummen må være lik, produktene må være lik og de ulike faktorene, ener- og tierfaktoren, må være lik. Han skiller derfor mellom tall og siffer i palindromet. Deretter beskriver Petter prosessen i et uttrykk: *ab x cd = dc x ba*. Evalueringen av strategi kan karakteriseres som generisk eksempel. Petter er avhengig av eksempel for å evaluere formelen, men beskriver generelle egenskaper i prosessen for å underbygge strategien.

4.2.1.6.2 Eksempel 2

> Lærer: a, b, c og d som dere har skrevet på tavlen. Hva står de for?
>
> Petter: Ja, det er tiere og enere for oss selv.
>
> Lærer: Vanligvis i matematikken når vi har ukjente, a og b, så representerer de ukjente tall. Hva representerer de ukjente her.
>
> Kari: Tall?
>
> Petter: Nei, hvis du sier at a er tier, a x 10 + b, så får du tallet. Det blir på samme form.
>
> Lærer: Det jeg tenker er at vi skulle vært mer presis på hva et tall og et siffer er.
>
> Petter: For a x 10 + b, der a og b gir oss sifrene.

Beskrivelse

Læreren ønsker at Kari og Petter skal dele med de andre i klasserommet hva de har gjort, og læreren ønsker at de skal fortelle hva uttrykket de har skrevet betyr. Petter presiserer forskjellen mellom tier- og enerfaktor. Læreren ønsker å presisere forskjellen mellom tall og siffer i klasserommet. Petter forklarer tall og siffer ved bruk av uttrykket, *a x 10 + b*, altså formelen de har funnet og standardform.

For å komme videre i prosessen ønsket læreren at alle gruppene i klassen skulle benytte uttrykket, $ac = bd$, sammen med standardformen, $a \times 10 + b$, som Petter kom med for å bevise uttrykket. Da Petter og Kari sammen med alle de andre elevene i klassen hadde bevist den generelle formen avsluttet læreren fase to i den undersøkende undervisningen.

Analyse av strategi

I samtalen med læreren kan argumentasjonen til Petter karakteriseres som tankeeksperiment. Petter distanserer seg fra bruk av eksempler og benytter symbolsk matematikk i argumentasjonen. For å forklare de ukjente benytter Petter formen hvis a er tierfaktoren, vil a x 10 + b, være et tall i palindromet.

4.2.2 Kai og Ole

Den induktive analysen viser at strategivalgene til Kai og Ole handler om doble tall og sifre, felles faktor og formel. Flere av de matematiske temaene benytter gruppen i samme resonnementsprosess.

4.2.2.1 Doble tall og sifre

Doble tall og *doble sifre* er to strategier som Kai og Ole bruker for å undersøke egenskaper ved faktorene i palindromene. Strategiene er navnsatt etter utsagn fra elevene om doble tall og sifre. Læreren påpeker også i veiledningen overfor elevene viktigheten mellom å skille tall og sifre i arbeid med palindromer. Det vil føre til at strategiene er skilt etter tall og sifre, men begge handler om multiplikasjon og hvilken påvirkning det har for palindromene.

4.2.2.1.1 Eksempel 1

> Kai: 42, 84
>
> Ole: Ser du nå? Det der tallet. Det er dobbelt så stort som det, og det er dobbelt så stort som det.
>
> Kai: Åja. Vi prøver det her. Se her. 48 gange 24.
>
> Ole: Ja, prøv det

Beskrivelse

Utsnittet over er den første reaksjonen til Kai og Ole etter presentasjonen av oppgaven. Kai legger frem to tall, 42 og 84. Ole ser en felles egenskap med eksemplet til Kai der 84 er dobbelt så stor som 42. Ut ifra observasjonsnotatene kan man se at Kai velger og skrive ned et palindrom bestående av disse tallene: 48 multiplisert med 24 er lik 42 multiplisert med 84. Kai og Ole regner produktene på hver side av likhetstegnet, og ser at produktene er ulik.

Derfor konkluderer gruppen med at 48 x 24 = 42 x 84, ikke er et palindrom. Kai og Ole velger ut ifra konklusjonen om dette palindromet å teste andre eksempler som kan støtte opp under strategien om doble tall.

Analyse av strategi

Kai og Ole benytter et eksempel, 48 x 24 = 42 x 84, for å prøve ut strategien om doble tall. Utprøvingen kan karakteriseres som naiv empirisme siden Kai og Ole benytter et enkelt eksempel for å prøve ut en strategi.

4.2.2.1.2 Eksempel 2

> Kai: 12 gange 42 og 21 gange 24.
> Ole: Det er jo fordi vi så på..
> Lærer: Men det er jo ikke. Når jeg leser 12 gange 42 baklengs, så blir det jo 24 gange 21.
> Ole: Det er jo det vi har gjort.
> Kai: Ja, 24 gange 21.
> Lærer: Ja, men du har jo snudd på det.
> Kai: Det har ikke noe å si. 21 gange 24 og 24 gange 21 er det samme.
> Lærer: Er det det?
> Kai og Ole: Ja
> Ole: Faktorenes orden er likegyldig.

Beskrivelse

I forkant av dette utsnittet har Kai og Ole prøvd å finne et palindrom som støtter opp under strategien om doble tall, og Kai legger frem et eksempel, 12 multiplisert med 42 er lik 21 multiplisert med 24. Læreren har på dette tidspunkt kommet bort til Kai og Ole for å veilede gruppen. Læreren sier til Kai og Ole at stykket ikke er et palindrom siden hvis man leser det. Kai mener at faktorenes orden er likegyldig siden 21 multiplisert med 24 er det samme som 24 multiplisert med 21. For å overbevise læreren velger Kai og Ole å regne produktene til både 21 x 24 og 24 x 21. Kai og Ole konkluderer med at produktene er lik på begge sider av likhetstegnet og 12 x 42 = 24 x 21 er et palindrom. Elevene konkluderer ikke om strategien om doble tall har en sammenheng med palindromer, men velger videre å teste et nytt eksempel.

Analyse av strategi

For å støtte opp under teorien om doble tall som faktorer velger Kai og Ole å finne et til palindrom. Eksempelet som Kai og Ole først kommer opp med, 12 multiplisert med 42 er lik 21 multiplisert med 24, er ikke et fullverdig palindrom siden tallene i stykket ikke er speilvendt. Læreren påpeker dette overfor Kai og Ole, og man kan anta at dette gjør læreren slik at Kai og Ole skal være bevisst på dette videre i generaliseringsprosessen. Kai og Ole endrer stykket til å bli et palindrom, 12 x 42 = 24 x 21. Ut ifra det nye palindromet kan man se at Kai og Ole har valgt å endre plass på faktorene.

Hvis man sammenligner eksempelet Kai og Ole benytter i dette eksempelet opp mot eksempel 1 (kapittel 4.2.2.1.1) kan man se at de har valgt å endre plass på tallene i palindromet selv om tallene er doble tall. I eksempel 1 ser Kai og Ole på stykket 48 x 24 = 42 x 84. Hvis de hadde endret plass på tallene 24 og 42 slik at stykket blir 48 x 42 = 24 x 84 er dette et palindrom siden produktene er lik på hver side av likhetstegnet og tallene er speilvendt. I palindromet 12 x 42 = 24 x 21, har elevene brukt denne egenskapen. Kai og Ole beskriver ikke hvorfor de har gjort det, men man kan anta at de enten har gjettet eller oppdaget denne egenskapen uten å beskrive den.

Prøvelsen av strategien om doble tall i dette eksempelet kan karakteriseres som avgjørende eksperiment. Kai og Ole benytter kunnskap om egenskaper ved palindromer for å utarbeide et nytt eksempel uten å beskrive det direkte. Kai og Ole tester eksempelet opp mot et tidligere eksempel (kapittel 4.2.2.1.1) for å kunne bekrefte eller avkrefte strategien. Kai og Ole konkluderer ikke om strategien om doble tall kan bekreftes eller avkreftes, siden de har to ulike løsninger, men velger å se videre mot et nytt eksempel.

4.2.2.1.3 Eksempel 3

> Kai: Du ser at det som kjennetegne tallene, 4 og 8. Den er dobbelt så stor som 4. Også har vi 4 og 2, hvor 4 er dobbel så stor.

Figur 9.

Utklipp fra Kai og Ole sitt arbeid med doble tall og sifre.

$$42 \cdot 13 = 21 \cdot 24$$

Beskrivelse

For å støtte opp under strategien om doble tall, der en av faktorene må være det dobbelte av den andre faktoren, prøver Kai og Ole å finne palindrom med samme egenskap. Kai og Ole velger å se tilbake på det første eksempelet som de undersøkte: 48 x 24 = 42 x 84. Elevene finner ut at om de bytter på to av faktoren, så vil produktene være lik. Derfor får Kai og Ole palindromet: 84 x 24 = 42 x 48, der produktet på hver side er lik 2016. I utsnittet setter Kai ord på en ny egenskap som kjennetegner tallene i eksempelet. Det er ikke bare tallene som er doble, men Kai se at sifrene i de ulike tallene er også doble. Det vil si at sifferet 4 er det dobbelte av 2 (figur 9). Kai og Ole konkluderer ikke strategien om doble tall direkte, men velger å beskrive denne egenskapen til læreren og resten av klassen.

Analyse av strategi

Strategien om doble tall prøves ut i dette utsnittet for tredje gang i prosessen. For å konkludere velger Kai og Ole å se tilbake på et tidligere eksempel, 48 x 24 = 42 x 84, for å bekrefte eller avkrefte strategien. De velger å benytte oppdagelsen om doble tall på spesifikke tall i palindromet for å få likt produkt på hver side av likhetstegnet for å endre det tidligere stykket til et palindrom. Ved at Kai og Ole får like produkt på hver side av likhetstegnet og tallene er speilvendt kan de kalle 48 x 42 = 24 x 84 for et palindrom. Her oppdager Kai og Ole en ny egenskap ved sifrene i palindromet: sifrene er doble. Denne oppdagelsen vil Kai og Ole dele med læreren og resten av klassen. Derfor kan man si at de bekrefter strategien om doble tall og sifre.

Utprøvelsen av strategien i eksempel 3 kan karakteriseres som avgjørende eksperiment. Kai og Ole velger å teste ut strategien opp mot et allerede kjent eksempel. Her oppdager gruppen nye egenskaper som de velger å ta med seg videre i prosessen.

4.2.2.2 Formel og felles faktor

Strategien *felles faktor* bruker elevene for å uttrykke en egenskap ved tallene og sifrene i palindromet. Felles faktor kan også sees i sammenheng med doble tall og sifre siden det matematisk kan ha samme betydning. I slutten av generaliseringsprosessen ønsker både lærer og elever å finne et uttrykk for danningen av palindromer ved å finne en *formel.* Ut ifra det bruker elevene en strategi som formel, for å utarbeide et uttrykk for danning av palindromer.

4.2.2.2.1 Eksempel 1

> Kai: Vi kan prøve. Hvis vi ta, se her. A gange [pause]. A gange 2a er lik 2b gange b. Da får du 2a i andre og 2b i andre. a i andre er lik b i andre. a er lik b. Blir ikke det rett lærer?
>
> Lærer: Men så må du forklare hva du har gjort. Vise med et eksempel kanskje?
>
> Kai: Ja, kan prøve, men det er ikke sikkert det kommer til å gå bra.

Beskrivelse

I forkant av dette utsnittet ønsker læreren at Kai og Ole skal finne et generelt uttrykk for palindromene som de har undersøkt til nå i prosessen. Kai og Ole tolker det som at de skal finne en formel for egenskapene de har oppdaget til nå. Kai sier at et uttrykk er $a \times 2a = 2b \times b$, som han forenkler ved å si at $a = b$. Læreren mener at Kai skal forklare hva han har gjort ved bruk av et eksempel. Kai mener han kan prøve. Det forekommer ikke en konklusjon i denne argumentasjonen, men eksempelet som Kai og Ole skal benytte for å forklare uttrykket blir beskrevet i neste delkapittel.

Analyse av strategi

Kai og Ole velger å finne et generelt uttrykk for palindromene som de har funnet til nå i prosessen. Kai sier at et uttrykk er $a \times 2a = 2b \times b$, som han forenkler til å si at $a = b$. Kai uttrykker seg her ved å distansere seg fra eksempler og bruke symbolsk matematikk for å uttrykke seg. Denne typen argumentasjon kan karakteriseres som tankeeksperiment, men siden Kai ikke beskriver hvorfor uttrykket kan skrives slik kan man karakterisere argumentasjonen som generisk eksempel. Kai ser en sammenheng mellom egenskaper i palindromene de har undersøkt og klarer å formulere et uttrykk som kan generaliseres i en videre prosess. Tallet 2 i uttrykket står for de doble sifrene som de har oppdaget tidligere i prosessen. Denne tilnærmingen kan karakteriseres som en felles faktor for tallene i palindromer.

4.2.2.2.2 Eksempel 2

> Kai: Vi prøver og ta et tall. Hva kan vi ta?
>
> Ole: Det er jo egentlig det du sier: a i andre er lik b i andre.
>
> Kai: Ja, men se her. Vi prøver et tall. 47, og vi må ha noe felles i syv-gangen.
>
> Ole: 28, men det er ikke det dobbelte.
>
> Kai: Ja, men fire ganger noe vi kan ta 7 med. 4 gange 4 er 16. 4 gange 5 er 20. Så e det 24. Så 28. 4 gange [pause] Hva blir 28?
>
> Ole: 4 gange 7
>
> Kai: 4 gange 7 ja.

> Ole: Det du har her.
>
> Kai: Også sa vi 7 gange 4. Det der tror jeg kommer til å gå. Ja, for det går. For det blir jo bare 47 gange 74 baklengs. Det vet vi går. Jeg tror vi har funnet noe.

Beskrivelse

I dette utsnittet prøver Kai og Ole å undersøke hvilket eksempel som kan underbygge formelen, *a x 2a = 2b x b*. Kai bruker tallet 47 som et basetall og bruker egenskaper som de har tilegnet seg i prosessen for å skape et palindrom. Kai sier at ved å bruke tallet 47, må han og Ole finne en felles faktor i syv-gangen for å finne et korresponderende tall til palindromet. Ole foreslår 28, men sier at tallet 28 ikke er det dobbelte. Det dobbelte av tallet 28 er lik 56. Kai avbryter Ole og sier at tallet han søker etter er et tall som er 7 multiplisert med 4. Ole og Kai blir enig om at det er tallet 28 de søker etter. Gruppen kommer frem til at 47 x 74 = 47 x 74 er et palindrom. Kai konkluderer at det er et palindrom siden sifrene i faktorene har likt produkt og produktene av tallene er likt. Kai konkluderer ikke eksempelet opp mot formelen, men gruppen kommer ikke lengre i prosessen siden læreren ønsker at elevene skulle delta i den felles oppsummeringen.

Analyse av strategi

For å evaluere strategien om formel og felles faktor velger Kai og Ole å benytte seg av generelle egenskaper som de har tilegnet seg i prosessen for så å underbygge egenskapene ved bruk av eksempler. Kai benytter kunnskapen om uttrykket og doble sifre for å komme frem til palindromet 47 x 74 = 47 x 74. Evalueringen av strategien kan karakteriseres som generisk eksempel siden Kai benytter generelle egenskaper for palindromer ved å være knyttet av eksempler i argumentasjonen.

4.3 Sammenhenger i datamaterialet

For å redegjøre for sammenhenger i datamaterialet vil jeg redegjøre for valg av temaer i strategivalg og evaluering av strategivalg i de ulike elevgruppene og undervisningsgruppene.

4.3.1 Temaer i strategivalg

Det er i alt avdekket 15 ulike matematiske temaer som omfatter strategivalgene i den induktive analysen. De matematiske temaene er basert på strategivalgene til elevene, og er navnsatt etter matematiske begreper og ideer fra elevenes utsagn. I undervisningsopplegget om påfølgende heltall er det avdekket ti temaer, mens i undervisningsopplegget om palindromer er det avdekket åtte ulike temaer.

Ved bruk av Polya (2014) sine fire faser av problemløsning vil man kunne avdekke likheter og ulikheter i valg og evaluering av de matematiske temaene i undervisningen. Fase en, *forstå problemet*, er preget av ulik mengde informasjon fra de to ulike lærerne. I påfølgende heltall viste læreren eksempler, og stilte spørsmålet: «Hvilke tall kan skrives som summen av påfølgende heltall?» I palindromer skrev læreren et eksempel på tavlen, og sa: «Finn ut.» Derfor vil elevgruppene i palindromer ha et annet utgangspunkt enn elevene i påfølgende heltall for hvordan de skal møte problemet. Det vil være ulike faktorer som kan påvirke dette som for eksempel elevenes måloppnåelse og matematisk innhold i undervisningsopplegget. Det vil diskuteres videre i kapittel 5.

I fase to *lage en plan* og fase tre *gjennomføre en plan* fra Polya (2014) er det ulike strategier og tilnærminger som elevene benytter. Undervisningsoppleggene har likheter som kommer frem med tanke på hensikten: utvikle tallforståelse og algebraferdigheter. Derfor vil man kunne se på de matematiske temaene som kommer frem i hvert av de to undervisningsoppleggene, og hvilke likheter og ulikheter som kommer frem.

I påfølgende heltall står Lise, Astrid og Anne for syv av de matematiske temaene, mens Sofie, Per og Martin er innom seks temaer. Små tall, partall og sammenhengen mellom sum og ledd er temaer som begge elevgruppene har til felles. Sofie, Per og Martin har strategier som omfatter temaer som store tall, oddetall og desimaltall. De matematiske temaene til begge gruppene tar utgangspunkt i tallforståelse og algebra. Lise, Astrid og Anne benytter i større grad algebra i generaliseringsprosessen når de velger å finne formel for tall som ikke kan bli summen av påfølgende tall. Elevene velger å benytte faktorisering og må benytte både tallforståelse og algebra i denne prosessen for å danne en formel. Sofie, Per og Martin benytter i mindre grad algebraisering. De benytter ofte enkle eksempler med addisjon i generaliseringsprosessen. Eksemplene er ofte uttrykt med enkelt språk og begreper som omfatter enkel matematikk. Lise, Astrid og Anne har en større andel begreper i argumentasjonen, og forklarer begrepene i større grad enn den andre elevgruppen.

Blomhøj (2020) karakteriserer ulike essensielle elevaktiviteter ved undersøkende matematikkundervisning. Begge elevgruppene i påfølgende heltall foretar seg de fleste elevaktivitetene, men man kan påpeke særlig observere systematisk, innføre og anvende symboler, resonnere og bevise, danne og teste hypoteser, eksperimentere, fortolke og vurdere resultat og kommunisere. Anne, Lise og Astrid bruker små tall som en strategi som baserer seg på å jobbe seg systematisk fra små tall og oppover. Det er avdekket totalt 29 bevisstrategier som omfatter resonnementer i generaliseringsprosessen. Sofie, Per og Martin benytter totalt 18 bevisstrategier i sin prosess. De jobber i mindre grad systematisk siden det er avdekket gjetting i større grad, og elevene danner hypoteser uten noen sammenhenger ved tidligere arbeid i generaliseringsprosessen. Sofie, Per og Martin anvender i mindre grad symboler enn den andre gruppen. Lise, Astrid og Anne anvender symbolikk og algebra i danningen av formelen for tall som ikke kan skrives som summen av påfølgende heltall: $f(n) = 2^n$. Denne sammenhengen fant ikke Sofie, Per og Martin i sin generaliseringsprosess.

I palindrom omtaler Kari og Petter seks ulike matematiske temaer, der Kai og Ole omtaler to av disse. Doble tall, doble sifre, formel og felles faktor er alle temaene Kai og Ole omtaler i sin prosess. Kategorien doble sifre og doble tall er de eneste kategoriene som er unik for Kai og Ole. Kari og Petter benytter i tillegg strategier som basetall, tverrsum, faktorisering og standardform. Alle de ulike matematiske temaene elevene er innom i palindromer tar utgangspunkt i tallforståelse og algebra.

Elevgruppene i palindromer i likhet med gruppene i påfølgende heltall, benytter seg av essensielle elevaktiviteter for undersøkende matematikkundervisning (Blomhøj, 2020). Kari, Petter, Ole og Kai benytter i større grad et høyere nivå av matematisk språk enn elevgruppene i påfølgende heltall. Dette sees gjennom bruk av begreper og anvendelse av algebra, og gjenspeiler det matematiske innholdet i undervisningsopplegget. Anvendelsen av algebra vil føre til at elevene innfører og anvender symboler i ideene og uttrykkene sine. Det vil føre til at elevene representerer og visualiserer strategiene sine på en annen måte enn elevene i påfølgende heltall.

Undervisningsopplegget om palindromer har høyere matematisk innhold enn påfølgende heltall. Dette vises ved forskjellen av nivåene i de matematiske temaene. Elevgruppene i palindromer bruker matematiske temaer med utgangspunkt i et høyere algebraisk nivå enn elevene i påfølgende heltall. Å finne et uttrykk for hvordan man kan danne et palindrom er av høyere matematisk nivå enn å faktorisere og deretter finne en formel for hvilke tall som ikke kan skrives som summen av påfølgende tall. Man må imidlertid påpeke at elevene i palindromer har matematikk R2, og derfor større spekter av matematisk kompetanse.

Flere av strategivalgene i begge undervisningsoppleggene tar utgangspunkt i matematiske egenskaper som de har oppdaget underveis i generaliseringsprosessen. Det må også påpekes at selv om elevgruppene bruker samme tilnærming er ikke gjennomførelsen av strategien lik. Derfor kan man ikke påpeke direkte likheter og ulikheter på tvers av undervisningsoppleggene, men også siden det er to ulike undervisningsopplegg med ulik bakgrunn og gjennomførelse.

Den tredje fasen *gjennomføre en plan* og fjerde fasen *se tilbake* vil også kunne karakteriseres ved å se på hvordan elevene evaluerer de ulike strategiene. Fasene omfatter også hvordan elevene reflekterer over egne valg i form av å benytte en strategi, men deretter se at den ikke fungerer og derfor må det velges en ny strategi eller tilnærming for evaluering. Dette kan sees ved de ulike bevisstrategiene elevene benytter som vil bli nærmere redegjort for i kapittel 4.3.2 og kapittel 4.3.3. Denne fjerde fasen omfatter også refleksjon over egen generaliseringsprosess, der elevene må reflektere over sine egne valg og se hvordan en strategi som kan være mer relevant enn andre. I begge undervisningsoppleggene bruker lærerne den tredje fasen *felles refleksjon* fra Blomhøj (2016) for at elevene skal reflektere over egen læring og strategivalg.

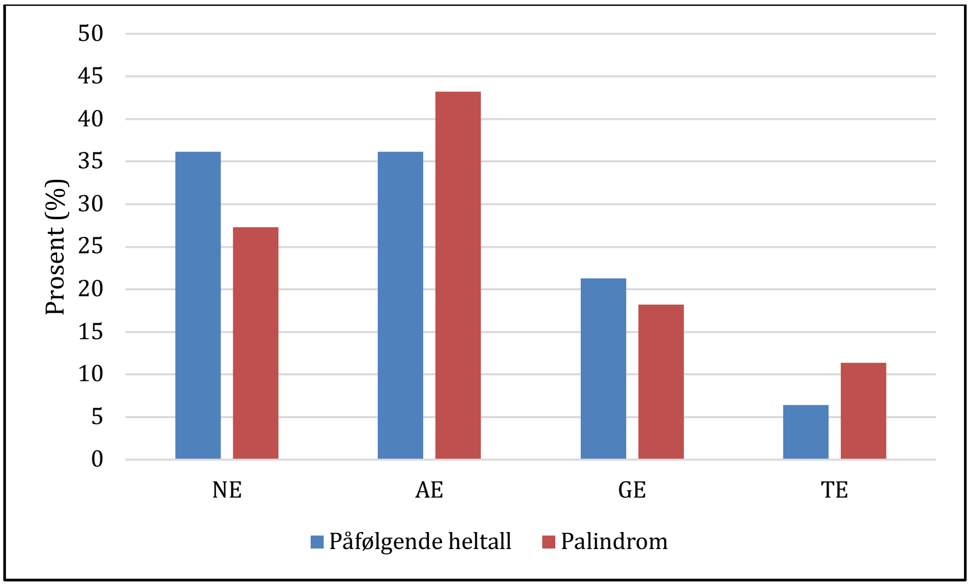
4.3.2 Bevisstrategier i undervisningsoppleggene

Det er i alt avdekket 47 bevisstrategier i undervisningsopplegget om påfølgende heltall, mens i undervisningsopplegget om palindromer er det avdekket 44 bevisstrategier. Dette anses ikke som en betydelig forskjell.

For å representere antall bevisstrategier i de to undervisningsoppleggene har jeg valgt å fremstille resultatet i et søylediagram (figur 10). Diagrammet viser antall bevisstrategier i prosent i de to undervisningsoppleggene.

Figur 10.

Antall bevisstrategier i de ulike undervisningsoppleggene vist i prosent.



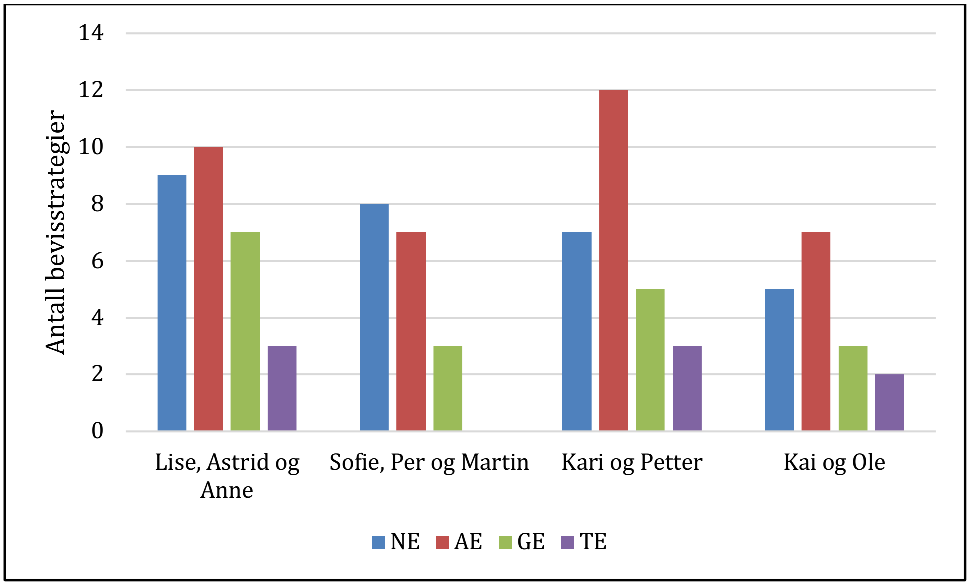
Av diagrammet kan vi se at i undervisningsopplegget om påfølgende heltall er det avdekket en hovedvekt på naiv empirisme med 36%. Avgjørende eksperiment sto for 36%, generisk eksempel for 21%, mens tankeeksperiment sto for 7% av bevisstrategiene som er avdekket. For undervisningsopplegget om palindromer er hovedvekten på avgjørende eksperiment med 43%. Naiv empirisme for 27% av bevisstrategiene, mens generisk eksempel sto for 18% og tankeeksperiment for 12%. I undervisningsopplegget om palindromer nådde elevene det høyeste nivået tankeeksperiment betydelig flere ganger enn elevgruppene i påfølgende heltall. Forskjellen i avgjørende eksperiment og generisk eksempel i de to ulike undervisningsoppleggene kan ikke anses som betydelig. Antall bevisstrategier som kan karakteriseres som naiv empirisme i påfølgende heltall er høyere enn antall telte i palindrom.

4.3.3 Bevisstrategier i elevgrupper

For å gi en oversikt over bevisstrategiene i de ulike elevgruppene har jeg valgt å presentere to søylediagram med resultater for antall bevisstrategier i de ulike elevgruppene.

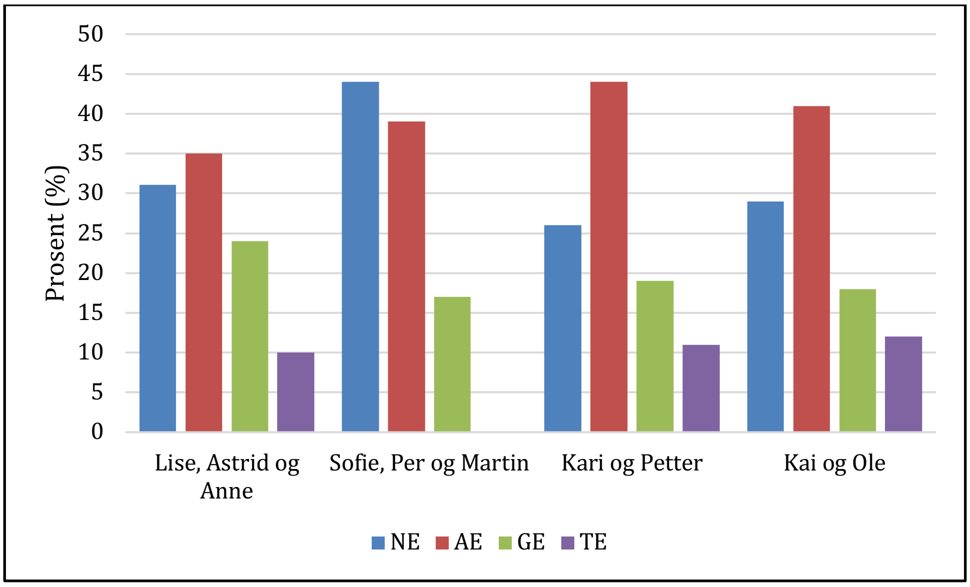
Figur 11.

Antall bevisstrategier hos de ulike elevgruppene.



Figur 12.

Bevisstrategier vist i prosent hos de ulike elevgruppene.



Av figurene kan vi se at Lise, Astrid og Anne totalt hadde 29 bevisstrategier. Resonnementer som omfatter bevisstrategier som kan karakteriseres som naiv empirisme, avgjørende eksperiment og generisk eksempel er ingen betydelig forskjell. Lise, Astrid og Anne tok i bruk tankeeksperiment bare i tre tilfeller som er lik 10% av deres bevisstrategier, noe som er betydelig en forskjell i forhold til de tre andre bevisstrategiene.

Sofie, Per og Martin hadde en total på 18 bevisstrategier. Analysen viser at andelen bevisstrategier heller mot de laveste nivåene; naiv empirisme og avgjørende eksperiment. Gruppen tok bare i bruk generisk eksempel ved tre tilfeller som er lik 17% av gruppens bevisstrategier, mens de ikke tok i bruk tankeeksperiment ved noen tilfeller i prosessen.

Ut fra diagrammene kan vi se at Kari og Petter hadde totalt 27 bevisstrategier, der den mest brukte strategien er avgjørende eksperiment. Ved å se på diagrammet kan vi si at gruppen hadde en fordeling som heller mot et lavere nivå med en hovedvekt på avgjørende eksperiment.

I samtalen mellom Kai og Ole er det avdekket 17 bevisstrategier. Den mest brukte strategien er avgjørende eksperiment med 41% av gruppens totale antall bevisstrategier. Det er ingen betydelig forskjell mellom naiv empirisme og generisk eksempel, men tankeeksperiment er benyttet to ganger i prosessen. Dette er 12 % av deres totale antall bevisstrategier.

5 Diskusjon

Av resultatdelen kan man se at det ikke er noe stor forskjell i resonneringen til elevene. Den induktive analysen gir 15 matematiske tema basert på strategivalg i form av matematiske ideer, utsagn og begreper. Videre viser den deduktive analysen at elevene benytter i stor grad naiv empirisme og avgjørende eksperiment som argumentasjonsnivå. I påfølgende heltall benytter elevene alle argumentasjonsnivåer i ulik grad. Lise, Astrid og Anne benytter alle bevisstrategiene i løpet av generaliseringsprosessen, mens Sofie, Per og Martin sin generaliseringsprosess er det avdekket ingen bevisstrategier der det er benyttet tankeeksperiment. I palindromer er det også en hovedvekt på naiv empirisme og avgjørende eksperiment som bevisstrategier, mens generisk eksempel og tankeeksperiment i mindre grad brukes i resonnementsprosessen. Siden det er liten forskjell i resultatene kan det hevdes at undervisningsopplegg av ulike nivåer kan ha ulike utfordringer som påvirker elevenes resonnering og argumentasjon. Ut ifra resultatet kan man trekke frem ulike faktorer som kan påvirke resonneringen og argumentasjonen til elevene: nivå på elevene, grad av åpenhet og matematisk innhold.

5.1 Nivå på elever

En av faktorene som kan påvirke argumentasjonen og resonneringen til elevene er nivået på elever. I norsk skole vurderes elevene enten med karakterer eller måloppnåelse. Vurderingen skal vise hvilken matematisk kompetanse elevene har, og måloppnåelsen kan derfor sees i sammenheng med den matematiske kompetansen eleven innehar. Siden argumentasjon og resonnering er en stor del av skolematematikken kan elevers måloppnåelse kunne påvirke argumentasjonsnivået til elevene.

Matematisk kompetanse er presentert ved ulike definisjoner. Brekke (2002) presenterer matematisk kompetanse der matematiske begreper er en av fem deler av den matematisk kompetanse. Begreper i matematikk er representert i de ulike matematiske ideene og uttrykkene til elevene ved ulike representasjoner. Ved den deduktive analysen kan man se at elevene benytter flere matematiske begreper i ulike representasjonsformer i generaliseringsprosessen. De matematiske begrepene, ideene og uttrykkene til elevene har dannet grunnlaget for navnsettingen til de ulike matematiske temaene. Dette vil bli diskutert nærmere i kapittel 5.3.

En av hovedtankene bak undersøkende matematikkundervisning er at elevene skal undersøke et problem ved å knytte ny kunnskap opp mot gammel kunnskap (Artigue & Blomhøj, 2013). Det kan sees i sammenheng med definisjonen av begrepsnettverk til Brekke (2002), der han peker på at begreper eksisterer i et nettverk av ideer som kan benyttes for å knytte tidligere lærte begreper eller ferdigheter mot nye begreper eller situasjoner. I Lithner (2008) sin resonnementsstruktur vil elevene i første steg møte et problem, der de må benytte tidligere lært kunnskap for å foreta et strategivalg. Hvis eleven ikke har tilstrekkelig matematisk kompetanse vil ikke elevene kunne foreta et strategivalg. Derimot hvis elevene har tilstrekkelig matematisk kompetanse vil elevene kunne foreta ulike strategivalg og evaluere disse.

I noen sammenhenger i første steg av Lithners (2008) resonnementsstruktur vil elevene bruke gjetning som metode, men elevene vil allikevel da kunne knytte problemet opp mot gammel kunnskap. Av analysen kan man se at alle elevgrupper benytter i stor grad naiv empirisme som bevisstrategi. Naiv empirisme omfatter gjetning i følge Balacheff (1988). I flere tilfeller i generaliseringsprosessen er det avdekket gjetning hos de ulike elevgruppene. I situasjoner der elevene gjetter vil man kunne anta at elevene kan ha en matematisk ide der elevene knytter tidligere lært kunnskap mot problemet. Denne informasjonen bruker elevene for å danne en matematisk ide for å løse problemet. Ut ifra resultatene i denne studien er det ikke mulig å kunne påpeke en slik påstand på bakgrunn av analysemetoden. Analysen avdekker ikke hvilke av strategiene som er karakterisert som naiv empirisme som igjen omhandler gjetning.

Av analysen kan man trekke frem at Sofie, Per og Martin er den elevgruppen der det er avdekket størst andel av naiv empirisme (44%), og gruppen har i tillegg ingen bevisstrategier som er karakterisert som tankeeksperiment. Alle disse elevene har middels måloppnåelse. Imidlertid kan man se at andelen av de ulike bevisstrategiene jevner seg ut i de ulike undervisningsoppleggene. Det er ingen stor forskjell av bevisstrategier mellom elevene i palindromer og i påfølgende heltall. Man kan hevde at den matematiske kompetansen kan speile det matematiske nivået til elevene, men hvis man ser på de ulike undervisningsoppleggene opp mot hverandre er det ingen stor forskjell av bevisstrategier og måloppnåelse.

5.2 Grad av åpenhet

Undervisningsopplegget påfølgende heltall er i tråd med Fradd et al. (2001) karakterisert som undersøkende nivå 3, mens palindromer er karakterisert som undersøkende nivå 5. Det vil si at påfølgende heltall er et mer strukturert undersøkende undervisningsopplegg, mens palindromer er mer åpent undervisningsopplegg i tråd med Bruder og Prescott (2013).

Den første delen av undervisningen karakteriseres av Blomhøj (2016) som iscenesettelsen, der læreren skal overdra problemet til elevene. I påfølgende heltall velger læreren å vise eksempler på løsninger og stille et overordnet spørsmål som elevene skal undersøkes, mens i palindromer presenterer læreren et stykke på tavlen og sier at elevene skal jobbe med dette. Derfor kreves det at elevgruppene i palindromer må undersøke på en annen måte enn i påfølgende heltall i form at elevene ikke har noe spørsmål å jobbe ut ifra. Elevene må derfor bruke tidligere lært kunnskap og knytte problemet mot de ukjente spørsmålene i motsetning til påfølgende heltall. I påfølgende heltall vil elevene få mer informasjon som de kan knytte mot tidligere kunnskap, og derfor vil unngå og måtte finne spørsmålene selv. Dette kan derfor kunne påvirke resonneringen og argumentasjonsnivået til elevene. Ut ifra resultatet kan man se at det er ingen stor forskjell i bevisstrategiene mellom de ulike undervisningsoppleggene, og derfor kan man anta at det er ingen samsvar mellom ulik iscenesettelsen og argumentasjonsnivå.

De ulike rollene til læreren og elevene er beskrevet av PRIMAS (Abril et al., 2013), der det pekes på at læreren må veilede elevene ved å hjelpe de med å knytte tidligere lært kunnskap opp mot ny kunnskap. Lazonder og Harmsen (2016) viser til at undersøkende undervisning er mer effektiv enn andre undervisningsformer om tilgjengeligheten og veiledning fra læreren er tilstede. I begge undervisningsoppleggene var lærerne tilgjengelig for elevene og veiledet elevene. Det er ikke i noen grad sett på hvordan læreren veiledet elevene, og i hvilken grad, men ut ifra analysen kan man se at i enkelte tilfeller der læreren veileder elevene vil læreren være med på å påvirke resonneringsprosessen til elevene. De faglige poengene som læreren poengterer overfor elevene vil kunne påvirke elevene i både positiv og negativ retning. Veiledningen til læreren kan hjelpe elevene i riktig retning, men de faglige poengene til læreren kan også være for mye informasjon for elevene. Hvis det blir for mye informasjon kan elevene gå glipp av fasen *strategivalg* i problemløsningsprosessen.

Det kan påpekes at klassen i opplegget om palindromer besto av ti elever, men i påfølgende heltall besto klassen av 25 elever. Dette kan påvirke resultatet og elevveiledningen fra lærerens side i de ulike undervisningsoppleggene. Man må anta at lærerne i begge undervisningsopplegg brukte sin kunnskap om undersøkende undervisning ved å vite sin rolle i klasserommet og la elevene utforske, i tråd med PRIMAS (Abril et al., 2013) og Blomhøjs (2014) beskrivelse av lærerens rolle i klasserommet.

Selv om de to undervisningsoppleggene er av ulike undersøkende nivå, ivaretar oppleggene elevenes deduktive læring. Dersom elevene får utvikle sin egen læring ved de ulike delene av resonnementsprosessen både med og uten veiledning fra læreren, vil det tilfredsstille deduktive læringsprosesser hos elevene. I en slik prosess vil det være viktig at elevene får rom for å utvikle sin egen generaliseringsprosess ved å dele ideer, utvikle ideene, og overbevise seg selv og andre medelever, men samtidig ha en lærer som kan være støttende ovenfor elevene (Artigue & Blomhøj, 2013; Blomhøj, 2016).

Oppgavens relevans for elevene vil også spille en rolle i generaliseringsprosessen. Når Dewey beskriver *inquiry* peker han på viktigheten av oppgavens relevans overfor elever ved at den skal opplever virkelighetsnær og praktisk (Artigue & Blomhøj, 2013). Dette vil føre til økt motivasjonen for elevene (Wæge & Nostrati, 2018). Både påfølgende heltall og palindromer knyttes ikke direkte opp mot noen kompetansemål i matematikk S1 og R2. Undervisningsoppleggene kan derimot sees i sammenheng med kunnskapsområder og ferdigheter innenfor matematikken. De kan knyttes opp mot utvikling av tallforståelse og algebraisering. Viktigheten og relevansen av undervisningsoppleggene ble klargjort for elevene av lærerne ved flere anledninger i undervisningen. Man kan antyde at siden elevene uttrykte interesse over undervisningen at de syntes undervisningen var nyttig og verdifull for deres læring.

5.3 Matematisk innhold i undervisningsopplegg

Den tredje faktoren som kan påvirke elevenes resonnering og argumentasjon er det matematiske innholdet i undervisningsoppleggene. Det matematiske innholdet i undervisningsoppleggene preges av tallforståelse og algebra. Det vil ikke være hensiktsmessig å uttale seg om vanskelighetsgrad av det matematiske innholdet for elevene siden det påvirkes av hvilken bakgrunn elevene har i matematikk. Dette kan være varierende fra elev til elev. Imidlertid kan det matematiske innholdet virke vanskelig for eleven ved at det er en nye tankemåte.

Sriraman og Dickman (2018) presenterer begrepet *mathematical pathologies*, der løsningen på problemet ofte vil bryte med forventningene elevene har til løsning og validitet. En utfordring for elevene i undervisningsoppleggene er det ukjente. Det ukjente kan knyttes opp mot det ukjente i og rundt undervisningsoppleggene. Begge klassene hadde i liten grad arbeidet med undersøkende matematikkundervisning, og derfor vil arbeidsmetoden kunne være ukjent for mange av elevene. For å kunne undersøke, utdype og evaluere et problem må elevene arbeide strukturert og selvstendig. Undersøkende undervisning ønsker å dyrke selvstendigheten til elevene (Artigue & Blomhøj, 2013). I påfølgende heltall møter elevene problemet ved at læreren stiller et spørsmål der de selv må strukturere undersøkelsen ved veiledning av læreren. I palindromer blir elevene overlatt til seg selv når læreren skriver *12 x 63 = 36 x 21* på tavlen, og sier: «Vi skal arbeide med dette.» Det vil føre til at elevene selv må stille spørsmålet, undersøke, utdype og evaluere i en mer selvstendig grad enn i påfølgende heltall. Elevene i palindromer vil i større grad møte det ukjente enn påfølgende heltall.

Ut ifra resultatene kan man se at det er ingen stor forskjell i nivå av bevisstrategi hos elevene. Det vil kunne si at selv om elevene i palindromer vil i større grad måtte undersøke selvstendig, vil det være lite forskjell i nivå av bevisstrategier. Man kan derfor anta at det matematiske innholdet i og rundt undervisningsoppleggene vil kunne påvirke i liten grad hvordan elevene resonnerer og argumenter. Man må også påpeke at elevene har ulike måloppnåelse og bakgrunnskunnskaper som kan påvirke møtet med det ukjente.

6 Avslutning

6.1 Elevers resonnering og argumentasjon

Formålet for studien er å få et innblikk i hvordan elever resonnerer og argumenterer i ulike nivåer av åpenhet i undersøkende matematikkundervisning. I denne studien har jeg besvart på følgende problemstilling:

Hvordan resonnerer og argumenterer elever i videregående skole i undersøkende undervisning av ulike nivåer av åpenhet?

Hovedfunnene viser at det er ingen forskjeller i elevenes resonnering og argumentasjon i de to ulike undersøkende undervisningsoppleggene av ulike nivåer av åpenhet. Elevenes resonnering og argumentasjon er analysert etter resonnementsstruktur til Lithner (2008) og bevisstrategier til Balacheff (1988). Steg en i strukturen representerer elevenes møte med problemet. Læreren spiller en viktig rolle med tanke på utformingen og presentasjonen av problemet. I undervisningsopplegget *påfølgende heltall* viser læreren et eksempel, og stiller et konkret spørsmål som elevene skal undersøke ved bruk av problemløsning. I undervisningsopplegget *palindromer* skriver læreren et stykke på tavlen, og sier at elevene skal arbeide med dette. Inngangen på oppgaven skiller grad av undersøkelse i undervisningen. Siden påfølgende heltall har en mer lukket spørsmålsstilling med mindre grad av selvstendighet i problemløsingen er undervisningsopplegget karakterisert som undersøkelsesnivå 3. I palindromer krever det mer selvstendighet fra eleven i problemløsningen, og er derfor karakterisert som nivå 5. Veiledning fra lærer vil være en faktor som spiller inn på grad av åpenhet i undersøkende undervisning. Effekten av veiledning er ifølge Lazonder og Harmsen (2013) en påvirkende faktor i undersøkende undervisning. I denne studien kan man derimot ikke konkludere siden det ikke er fokusert i hvilken grad læreren veileder elevene i undervisningen.

Den induktive analysen av elevenes valg og evaluering av strategier avdekker 15 matematiske temaer i begge undersøkende undervisningsoppleggene. De matematiske temaene er basert på elevenes matematiske ideer, begreper og uttrykk. Den deduktive analysen av elevenes valg og evaluering preges av naiv empirisme og lavt argumentasjonsnivå på tvers av begge undervisningsoppleggene. Begge undervisningsoppleggene tar utgangspunkt i tallteori med tyngde på abstraksjon og generalisering, og derfor vil oppleggene i utgangspunktet være like. Elevenes måloppnåelse, grad av åpenhet og matematisk innhold i undervisningen kan være faktorer som påvirker resonnering og argumentasjon. Fra resultatet kan man se at de ulike faktorene vil i liten grad påvirke resonneringen og argumentasjonen til elevene i de ulike undervisningsoppleggene.

6.2 Veien videre og refleksjon

I denne studien har jeg gjennomført en multippel case-studie for å undersøke resonnering og argumentasjon hos elever. Den vil ikke kunne gi noe grunnlag for å si noe generelt om at ulike grader av åpenhet ikke vil påvirke resonneringen og argumentasjonen til elevene i undersøkende undervisning.

Den nye læreplanen trer i kraft fra høsten 2020. I Kunnskapsløftet 2020 er utforskning og problemløsning, samt argumentasjon og resonnering to av de seks nye kjerneelementene som skal karakterisere hva matematikkundervisningen i norsk skole skal omfatte. Derfor vil det være interessant å videre se hvilke resultater man ville fått om man hadde benyttet samme undervisningsopplegg i begge klassene. Det kunne ha gitt ulikt resultat enn denne studien tilsier.

Med et økt fokus på kjerneelementene vil det kunne være interessant og gjentatt studien med samme elever med andre undersøkende opplegg av ulik grad av undersøkelse for å se om resonneringen og argumentasjonen til elevene har utviklet seg positivt over tid. Tiden har vært en begrenset faktor i denne studien fordi det kunne vært interessant å få mer i dybden for å se på de ulike resonnementene i lys av kreativitet.

7 Litteraturliste

Abril, A. M. et al. (2013). *Inquiry-based Learning in Maths and Science Classes: What it is and how it Works-Examples-Experiences*. University of Education, Pädagogische Hochschule.

Andersen, S. S. (2013). *Casestudier. Forskningsstrategi, generalisering og forklaring* (2. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Artigue, M & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Educations*, *45*(6), 797-810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Ascher, M. (2002). Introduction. I *Mathematics Elsewhere: An Exploration of Ideas Across Cultures* (s. 1 – 4). Princeton: Princeton University Press.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils´ practice of school mathematics. I Pimm, D. (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s.216 – 235). London: Hodder & Stoughton.

Barbeau, E.J. (2007). Number Theory in Mathematics Education: Perspective and Prospects. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 7*(2), 263 – 269.

Bjørndal, C.R.P. (2017). *Det vurderende øyet: Observasjon, vurdering og utvikling i pedagogisk praksis* (3. utg.). Oslo: Gyldendal Akademiske.

Blomhøj, M. (2016). *Fagdidaktik i matematikk.* Frederiksberg: Frydenlund.

Blomhøj, M. (2020). Hvad er undersøgende matematikundervisning – og virker den? I M. W. o. W. Andersen, P. (Red.), *Håndbog om matematik i grundskolen. Læring, undervisning og vejledning*. (Upublisert) (2 utg.). København: Dansk Psykologisk Forlag.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77 – 101. http://dx.doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk.* Oslo: Læringssenteret.

Bruder, R. & Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. *ZDM Mathematics Educations, 45*(6), 811 – 822. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0542-2

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*: Abstrakt forlag.

Cobb, P. (2007). Putting Philosophy to work. Coping with Multiple Theoretical Perspectives. I Lester, F. K. (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Education* (s. 3 - 38). Greenwich: Information Age Pub Inc.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6. utg.). London: Routledge.

Goldin, G. (2014). Mathematical Representations. I Lerman, S. (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 409 – 413). Dordrecht: Springer.

Cresswell, J. W. (2014). *Research Design. Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches* (4. utg.). Los Angeles: Sage.

Engeln, K., Euler, M. & Maass, K. (2013). Inquiry-based learning in mathematics and science: a comparative baseline study of teachers´ beliefs and practices across 12 European countries. *ZDM Mathematics Educations*, *45*(6), 823 - 836. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0507-5

Fradd, S., Lee, O., Sutman, F. X. & Saxton, M. K. (2001). Promoting science literacy with English language learners through instructional materials development: A case study. *Bilingual Research Journal, 25*(4), 479 - 501.

Haavold, P.Ø. & Blomhøj, M. (2019). Coherence through inquiry based mathematics education. I Eleventh congress of the European society for research in mathematics education.

Hanna, G. (2014). Mathematical Proofs, Argumentation, and Reasoning. I Lerman, S. (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education,* (s. 404 – 408). Dordrecht: Springer.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Student´s proof scheme: results from exploratory studies. I Schoenfeld, A., Kaput, J. & Dubinsky, E. (Red.), *Research in collegiate mathematics education, vol III.,* (s. 234 – 283). Providence: American Mathematical Society.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. I Lester, F. K. (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Education* (s. 805 – 842). Greenwich: Information Age Pub Inc.

Harel, G. (2014). Deductive Reasoning in Mathematics Education. I Lerman, S. (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education,* (s. 143 – 147). Dordrecht: Springer.

Hemmi, K. (2010). Three styles characterizing mathematicians´pedagogical perspectives on proof. *Educational Studies in Mathematics, 75*(3), 271-291. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9256-3

Imsen, G. (2014). *Elevens verden: innføring i pedagogisk psykologi* (5.utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Johnsen, B. (2000). *Introduksjon til tallteori.* Tromsø: B. Johnsen, Institutt for matematikk og statistikk, Det matematiske-naturvitenskapelige fakultet, Universitetet i Tromsø.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics.* Washington: The National Academies Press.

Kunnskapsdepartementet. (2018). *Fornyer innholdet i skolen.* Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2010). *Det kvalitative forskningsintervjuet* (2. utg). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Lazonder, A.W. & Harmsen, R. (2016). *Meta-Analysis of Inquiry-Based Learning: Effects of Guidance. Review of Educational Research, 86*(3), 681 – 718. https://doi.org/10.3102/0034654315627366

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255 – 276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Marshall, C. & Rossman, G.B. (2006). *Designing Qualitative Research* (4. utg). California: Sage Publishing.

Manheim, J. H. (1979). Mirror Multiplication. *The Mathematics Teacher, 72*(3), 213 – 216. Hentet fra www.jstor.org/stable/27961591

Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet. En undervisningslære.* Oslo: NKI forlaget.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (18). København: Undervisningsministeriet.

NOU 2015: 8. (2015). *Fremtidens skole. Fornyelse av fag og kompetanser.* Oslo: Kunnskapsdepartementet.

Parker, J. (1998). Sums of Consecutive Integers. *Mathematics in School, 27*(2), 8 – 11.

Polya, G. (2014). *How to Solve It: a new aspect of mathematical method.* Princeton: Princeton University Press.

Postholm, M.B. & Jacobsen, D.I. (2011). *Læreren med forskerblikk. Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter.* Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Ringdal, K. (2018). *Enhet og mangfold. Samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode.* (4. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Rinvold, R. (2014). *Tallteori.* (3. utg. ed., Rinvold, Reinert A). Bergen: Caspar Forlag.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., & Hemmo, V. (2007). *Science Education Now: A Renewed Pedagogy or the Future of Europe.* Luxembourg: Office for Official Publications of the Europe Communities.

Roksvold, J. N. (2018). Speilprodukt. *Tangenten – tidsskrift for matematikkdidaktikk 18*(3), 31 – 33.

Schoenfeld, A. H. (2007). Method. I Lester, F. K. (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Education* (s. 3 - 38). Greenwich: Information Age Pub Inc.

Sriraman, B. & Dickman, B. (2017). Mathematical pathologies as pathways into creativity. *ZDM Mathematics Education 49*(1), 137–145. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0822-8

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289 - 321. https://doi.org/10.2307/30034869

Thagaard, E. (2009). *Systematikk og innlevelse. En innføring i kvalitativ metode.* Bergen: Fagbokforlaget.

Tjora, A. H. (2013). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis.* (2. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Utdanningsdirektoratet. (2016, 1. april). Kjenneteikn på måloppnåing. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/vurdering/sluttvurdering/matematikk-rettleiande-nasjonale-kjenneteikn-pa-maloppnaing-for-standpunktvurdering-etter-10.-trinn/

Utdanningsdirektoratet. (2019). *Læreplanen i matematikk 1. – 10. trinn* (MAT01-05). Hentet fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Varghese, T. (2011). Possible Student Justification of Proofs. *School Science and Mathematics, 111*(8), 409 – 415. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2011.00106.x

Walker, M. (2007). *Teaching inquiry based science.* LaVergne: Lightning Source.

Wæge, K. & Nostrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk.* Oslo: Universitetsforlaget.

Yin, R.K. (2012). Case Study Methods. I Cooper, H., & American Psychological Association, *APA handbook of research methods in psychology, Vol 2: Research designs: Quantitative, qualitative, neuropsychological, and biological,* (s. 141 – 155*).* Washington DC: American Psychological Association.

8 Vedlegg

8.1 Vedlegg 1 – Observasjonsskjema

Dato, klasse, lærer:

Fase	Observasjoner

8.2 Vedlegg 2 – Kvittering NSD

NSD

Per Øystein Haavold

9006 TROMSØ

Vår dato: 06.09.2017	Vår ref: 54660 / 3 / LAR	Deres dato:	Deres ref:

Tilbakemelding på melding om behandling av personopplysninger

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 06.06.2017.
Meldingen gjelder prosjektet:

54660	*SUM - Sammenheng gjennom Undersøkende Matematikkundervisning*
Behandlingsansvarlig	*UiT Norges arktiske universitet, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Per Øystein Haavold*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 31.12.2020, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Dersom noe er uklart ta gjerne kontakt over telefon.

Vennlig hilsen

Marianne Høgetveit Myhren

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS Harald Hårfagres gate 29 Tel: +47-55 58 21 17 nsd@nsd.no Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data NO-5007 Bergen, NORWAY Faks: +47-55 58 96 50 www.nsd.no

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 54660

SAMARBEIDSSTUDIE
Prosjektet er en internasjonal samarbeidsstudie. UiT Norges arktiske universitet er behandlingsansvarlig institusjon for den norske delen. Personvernombudet forutsetter at ansvaret for behandlingen av personopplysninger er avklart mellom institusjonene. Vi anbefaler at det inngås en avtale som omfatter ansvarsfordeling, ansvarsstruktur, hvem som initierer prosjektet, bruk av data og eventuelt eierskap.

INFORMASJON OG SAMTYKKE
Utvalget informeres skriftlig om prosjektet og samtykker til deltakelse. Informasjonsskriv og samtykkeerklæring, slik de foreligger i reviderte utgaver av 24.08.2017 og 05.09.2017, er godt utformet.

Det foreligger imidlertid et avvik mellom prosjektslutt oppgitt i meldeskjema og i informasjonsskrivene. Personvernombudet legger til grunn at sistnevnte stemmer, og har derfor endret prosjektslutt til 31.12.2020.

BARN I FORSKNING
Deltakelse i forskning skal alltid være frivillig for barnet selv om foreldrene samtykker på barnets vegne. Dette innebærer at barnet bør få tilpasset informasjon og at forsker må få barnets aksept under datainnsamlingen. I tråd med dette, bør den som foretar datainnsamlingen ha tilstrekkelig kompetanse til å tilpasse fremgangsmåten slik at barnets behov ivaretas.

BARN I FORSKNING
Personvernombudet vurderer at ungdommer som har fylt 15 år kan samtykke selv til å delta i dette prosjektet, så lenge de får tilpasset informasjon om prosjektet, og at det sørges for at de forstår at deltakelse er frivillig og at de når som helst kan trekke seg dersom de ønsker det. Det forutsettes at forsker følger retningslinjer for den enkelte skole.

DATASIKKERHET
Personvernombudet legger til grunn at forsker etterfølger UiT Norges arktiske universitet sine interne rutiner for datasikkerhet.

PUBLISERING AV PERSONOPPLYSNINGER
Det oppgis at indirekte identifiserende personopplysninger kan bli publisert. Personvernombudet legger til grunn at det i så fall foreligger eksplisitt samtykke fra den enkelte til dette. Vi anbefaler dessuten at deltakerne gis anledning til å lese igjennom egne opplysninger og godkjenne disse før publisering.

PROSJEKTSLUTT
Forventet prosjektslutt er 31.12.2020. Ifølge prosjektmeldingen skal innsamlede opplysninger da anonymiseres.

Anonymisering innebærer å bearbeide datamaterialet slik at ingen enkeltpersoner kan gjenkjennes. Det gjøres ved å:
- slette direkte personopplysninger (som navn/koblingsnøkkel)
- slette/omskrive indirekte personopplysninger (identifiserende sammenstilling av bakgrunnsopplysninger som f.eks. bosted/arbeidssted, alder og kjønn)

8.3 Vedlegg 3 - Samtykkeskjema

UiT
NORGES
ARKTISKE
UNIVERSITET

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli fjernet, med mindre de allerede er brukt i publikasjoner.

Dersom du ønsker å delta eller har spørsmål til studien, ta kontakt med Per Øystein Haavold epost per.oystein.haavold@uit.no. I studentprosjekt må også kontaktopplysninger til veileder/daglig ansvarlig påføres.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Samtykke til deltakelse i studien

□ Jeg samtykker i at bilder, lyd og korte videosekvenser kan bli brukt i undervisning og presentasjoner. Dette innebærer også deltakelse i prosjektet.

□ Jeg samtykker i deltakelse i prosjektet.

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til å delta

----
(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Kontaktinformasjon.
Per Øystein Haavold e-post: per.oystein.haavold@uit.no tlf. 77645587
Postboks 6050 Langnes, N-9037 Tromsø / 77 64 40 00 / postmottak@uit.no / uit.no / org.nr. 970 422 528

UiT

NORGES
ARKTISKE
UNIVERSITET

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

"SUM: Coherence through inquiry based mathematics teaching"

Bakgrunn og formål

Målet med dette prosjektet er å bidra til utvikling av barn og unges matematikklæring og motivasjon for matematikk gjennom å integrere perioder med utforskende undervisning i matematikkundervisningen fra barnehage til universitet. Disse utviklingsaktivitetene skal foregå gjennom tre skoleår. Prosjektet drives av forskningsgruppen Matematikkdidaktikk ved UiT Norges arktiske universitet, institutt for lærerutdanning og pedagogikk med støtte fra Norsk forskningsråd.

Utvalget er rekruttert gjennom Norges arktiske studentsamskipnad, Troms fylkeskommune og Tromsø kommune. Hver deltakende skole/barnehage har valgt 2 – 4 lærere / barnehagelærere til å delta i prosjektet.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Et fokusområde for prosjektet vil være overganger der det erfaringsmessig er utfordringer knyttet til elevers motivasjon og matematikklæring:

Barnehage => Barneskole => Ungdomstrinn => Videregående skole => Universitet

For hver av disse overgangene dannes en gruppe lærere/pedagoger og to forskere. Vi ønsker at det er med 2 lærere/pedagoger fra skole/barnehage. Deltakerne i disse gruppene vil, så langt det lar seg gjøre, følges over alle de tre periodene 17/18, 18/19 og 19/20. Hver av disse periodene skal deltakerne i en gruppe arbeide sammen med å utvikle, gjennomføre (i lærernes egne klasser eller barnehager) og evaluere 3 utforskende undervisningsforløp av en varighet på 5-10 skoletimer eller tilsvarende i barnehage. Disse undervisningsforløpene skal være i overensstemmelse med relevante læreplanmål på de aktuelle klassetrinnene eller mål fra Rammeplan for barnehage.

Forskerne i gruppa vil samle inn data gjennom både klasseromsobservasjoner, lyd- og bildeopptak, intervjuer og spørreskjema til lærere/pedagoger og elever/barnehagebarn, samt faglige tester for å dokumentere elevenes faglige utvikling.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Det er bare medlemmer i forskningsgruppen som har tilgang til datamaterialet. Alt datamateriale lagres i låsbare skap ved UiT Norges arktiske universitet.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 31.12.2020. Etter dette blir datamaterialet anonymisert og videomaterialet slettet. Dersom det er gitt tillatelse til korte sekvenser til bruk i undervisning og konferanser vil disse bli lagret ved UiT.

Kontaktinformasjon.
Per Øystein Haavold e-post: per.oystein.haavold@uit.no tlf. 77645587
Postboks 6050 Langnes, N-9037 Tromsø / 77 64 40 00 / postmottak@uit.no / uit.no / org.nr. 970 422 528