MNF - 3906

MASTERGRADSOPPGAVE I MATEMATIKK - LÆRERUTDANNING

Studenters förståelse av derivatan

EN KVALITATIV STUDIE

Jonas Oskarsson

Maj, 2009

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET
Institutt for matematikk og statistikk

DET SAMFUNNSVITENSKAPELIGE FAKULTET
Institutt for pedagogikk og lærerutdanning

Universitetet i Tromsø

MNF - 3906

MASTERGRADSOPPGAVE I MATEMATIKK - LÆRERUTDANNING

Studenters förståelse av derivatan

EN KVALITATIV STUDIE

Jonas Oskarsson

Maj, 2009

FÖRORD

Matematikdidaktik inbegriper vanligtvis mål, form, innehåll och metoder och inkluderar frågorna hur, vad och varför man lär sig och undervisar i matematik. Detta matematikdidaktiska arbete på 30 studiepoäng är pricken över i-et på en femårig lektorutdanning i realfag vid Universitetet i Tromsø med matematik och fysik som huvudämnen. Integrering av ett års praktisk-pedagogisk heltidsstudium utmynnade i ett 10 studiepoängs matematikdidaktiskt arbete, som handlade om en diagnostisk uppgift i en högstadieklass. Den aktuella lektorutdanningen ger undervisningskompetens i matematik, fysik och naturfag på högstadieskolor och gymnasieskolor.

Processen att skriva denna uppsats har varit både krävandes och lärorik. De suveräna och sakkunniga vägledarna Anne Birgitte Fyhn, Institutt for pedagogikk og lærarutdanning och Ragnar Soleng, Institutt for matematikk og statistikk, har med sina djupa kunskaper och kompetenser med stor precision guidat mig genom arbetets mödor. Min tidigare studiekamrat och innebandylagkamrat, tillika matematisk statistiker, Johan Lindbäck har förhindrat några förnorskade ord att framträda i denna text. Utan er hade inte detta arbete sett ut som det gör, tack. Stort tack till min underbara familj Laila, Vilja, Hannah och Elle för att ni finns. Ni har stått ut med en frånvarande man, pappa respektive bonuspappa i hemmet under utförandet av detta arbete. Tack också till mina barns farmor och farfar, som under min studietid i perioder har pendlat mellan Sverige och Norge för att umgås med och hjälpa barn, svägerska och barnbarn. Utan inspel, stöd och givande diskussioner med var och en av de ovan nämnda hade jag aldrig kommit i mål.

Jag vill även rikta ett stort tack till några studenter. Tack Silje Jørgensen och Ingar Mæhlum Arntzen för goda inspel till utformningen av intervjumaterialet, under ert praktisk-pedagogiska utbildningsår. Tack alla ni studenter som villigt ställde upp som informanter till denna studie. Sist men inte minst, ett speciellt tack till er fyra förstaårsstudenter som aktivt bidrog till intressanta intervjusituationer. Lycka till med vidare studier.

Tromsø, maj 2009

Jonas Oskarsson

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

1 INLEDNING, PROBLEMSTÄLLNING OCH UTFORMNING

Området matematik är idag kontextuellt vidare än det var år 1886. Likaväl kan det vara nyttigt att reflektera över dåtidens uppslagsord: ”Matematik kallas vetenskapen om storheter i allmänhet och deras egenskaper samt lagarna för deras förhållanden till hvarandra” (matematik, 1886). Storheternas egenskaper och förhållanden till varandra är fortfarande vitala inom matematikens värld. Olika användning av dessa storheter skapar givetvis olika begreppsbilder.

Ur matematikdidaktisk synvinkel är det väsentligt både hur man *förväntas* lära sig matematiska begrepp och hur man *verkligen* lär sig begreppen. Dessa begrepp är vedertagna genom konsensus. Vardagsbegreppet *branthet* kan beskriva hur vi uppfattar den fysiska omgivningen, vilket även kan generera en känsla av riktning. Begreppet kan ingå i en grafisk beskrivelse av en matematisk funktion med hänsyn till den momentana storleksändringen av en specifik funktionsvariabel vid en bestämd punkt på grafen. Brantheten till en funktionsgraf kan preciseras matematiskt med hjälp av *stigningstalet* till *tangenten* till funktionsgrafen. *Derivatan* är ett vedertaget och precist matematiskt begrepp för det momentana förändringsmåttet till en kontinuerlig och deriverbar funktion, vare sig den uttrycks riktningsmässigt, grafiskt eller algebraiskt. En gest kan representera exempelvis en riktning, eller hur brant det är, vilket kan komplettera begreppsbilden till den momentana förändringen.

Matematiska resonemang som leder till slutsatser vad gäller problemställningarna, är centrala i matematiska problemlösningssituationer. Dessa resonemang kan till exempel representeras av tankar, skrift, figurer och tal (Bergqvist, 2007; Lithner, 2003, 2004, 2008; Pettersson, 2008) samt gester (Gray & Tall, 2001; Radford, 2009; Sfard, 2009). Problemlösningssituationen kan exempelvis vara en examen eller en kvalitativ intervju. Att en student har klarat av en examen, är ett slags mått på eller en kvalitetssäkring av att studenten förväntas kunna något av vad som anses vara centralt i kursen.

Lärararbete liksom forskning är dynamiska processer, där man reflekterar över strukturellt inordnade objekt i hopp om ökad förståelse. Syftena med detta masterarbete är:

a) att studera resonemang och reflektioner kring bruk av matematiska begrepp i problemlösningssituationer, för att undersöka hypotesen att de kan leda till ökad matematisk begreppsförståelse och
b) att lära mer om ett specifikt tema, genom ett vetenskapligt arbete.

INLEDNING, PROBLEMSTÄLLNING OCH UTFORMNING

Den ursprungliga problemställningen i detta arbete är:

-Hur förstår och resonerar studenter kring det matematiska begreppet derivata?

För att begränsa omfånget av uppsatsen, studeras problemlösningssituationer genom fyra intervjuer med förstaårsstudenter. Under förberedelserna till intervjuerna kopplades teorier om begreppsförståelse samman med gesters betydelse (Radford, 2009; Sfard, 2009) och ytterligare en problemställning växte fram:

-Hur kan gester vara betydelsefulla för matematisk begreppsförståelse?

Intervjuerna analyseras dels med fokus på begreppsanvändningen kring derivatan och dels på hur gester används. Jag önskar även att se *om* det finns sammanhang mellan att klara examen i kursen *Kalkulus 1* vid Universitetet i Tromsø och att ha god begreppsförståelse av derivatan som matematiskt funktionsbegrepp. God begreppsförståelse relateras här till kreativt matematiskt resonemang, vilket beskrivs närmare i avsnitt 2.5.2.

Denna text tar utgångspunkt i att man kan uppfatta *derivatan* dynamiskt som del i en deriveringsprocess och/eller statiskt som den deriverade produkten. Den deriverade produkten kan då vara en storhet som representeras av stigningstalet till tangenten till en graf. Dynamiskt: man utför en handling, process eller algoritm operationellt. Statiskt: man ser strukturellt på begreppet som ett objekt (Sfard, 1991). Har en student i en problemlösningssituation mer fokus på derivatan statiskt som ett resultat av deriveringsprocessen, dynamiskt i själva deriveringsprocessen eller som en blandning av de två? Grafer används i intervjusituationerna dels för att synliggöra potentiella kognitiva konfliktsituationer och dels som inspiration till bruk av gester som resonemangsform.

Det är utfört relativt få kvalitativa matematikdidaktiska studier angående förståelse av derivatan eller derivation i Norge. Jørgensen (2006), Kalvø (2002) och Vikse (1999) fokuserar på elever i gymnasieskolan och jag har inte funnit någon studie som fokuserar på norska förstaårsstudenter vid högskola eller universitet. Internationellt, finns det däremot en hel del studier på universitetsstudenter (Asiala, Cottrill & Dubinsky, 1997; Aspinwall, Shaw & Presmeg, 1997; Berggren & Ekblad, 2007; Bergqvist, 2007; Bezuidenhout, 1998; Hähkiöniemi, 2004; Pettersson, 2008; Tall & Vinner, 1981; Viholainen, 2006).

Deriverbara funktioner är centrala i matematiska grundkurser i kalkulus på universitet. Det visar sig att man rutinmässigt kan lösa upp till 70 % av uppgifterna i en sådan grundkurs, utan kreativt matematiskt resonemang (Lithner, 2004). Om de flesta problemlösningssituationerna i kurslitteraturen bara kräver rutinmässiga procedurer för att kunna lösas, riskerar man att examensfrågorna också kan lösas rutinmässigt (Tall, 1996).

Bergqvists (2007) studie visar att man utan kreativt matematiskt resonemang både kan klara 15 av 16 matematikexamina och kan lösa mer än 65 % av examensuppgifterna. ”Further research on the students’ opinions on different types of reasoning and what they choose to practice is important and interesting” (ibid., s. 369). Denna text är ett bidrag till vidare forskning på området.

Analysens informationsmängd begränsades av att intervjuerna inte filmades. Detta begränsar även möjligheterna till observation av gester. Svenska är mitt modersmål och är därför det språk som jag kan uttrycka mig mest precist på, vilket avgjorde valet av språk för detta masterarbete. Informanterna däremot, både talar och skriver på norska, vilket medför begränsningar med denna text i och med att information som ges på ett språk både tolkas och uttrycks på ett annat. Begränsningar som dessa tas upp i metodkapitlet.

2 TEORI

Ett vetenskapligt arbete baserar sig på tolkningar av verkligheten och den starkaste sannolikhetsgraden av riktig beskrivelse av verkligheten kallas inom vetenskapen för teori. Teorierna i detta vetenskapliga arbete kretsar i huvudsak kring förståelse av derivationsbegreppet relaterat till grafisk tolkning av derivatan i problemlösningssituationer. Teorier och tillika tolkningar bygger på observerbara händelser, här kallat för fenomen, som är relaterade kontextuellt till vetenskapliga metoder som används för att nå vetenskapliga resultat.

Detta kapitel går från fenomen via kunskapsteori till begreppsförståelse och är fundamentet till både metodkapitlet och analyskapitlet. Här beskrivs även hur derivatan behandlas i läroplaner och det teoretiska grundlaget till analysverktyget som används i detta arbete. Teoridelen kan verka onödigt omfattande när andra begrepp än derivatan behandlas, men för att förstå *hur* begreppet *derivata* kan användas, är det nödvändigt att inkludera relevanta begrepp kring derivatan och derivation. Exempel härav är *funktion*, *kontinuitet* och *gränser*, vilka på samma vis som begreppet *derivatan* relateras till objekt och/eller i processer.

2.1 Konstruktivism

Vetenskapens värld har minst lika många olika indelningar som fenomen har tillhörigheter. Naturvetenskapen har som mål att beskriva fysiska fenomen. Denna relation mellan fenomen och verklighetsuppfattning beskrivs utifrån olika synvinklar. En idé, är att en beskrivning av den aktuella tillnärmningen som forskaren använder sig av underlättar forskningsarbetet, eftersom beskrivningen också strukturerar upp tillvägagångssättet för studien. Om man önskar att beskriva fenomen som mänskliga beteenden kan en stimulus-respons-modell fungera väl som teoretiskt fundament ur vad som kallas ett behavioristiskt synsätt. Förväntningen är att man tillägnar sig förståelse av fenomen genom en teori.

Det teoretiska grundlaget för denna text utgår från en konstruktivistisk kunskapssyn. Konstruktivistisk kunskapsinlärning betyder att individen själv och aktivt konstruerar sin egen kunskap (Lyngsnes & Rismark, 2007). Piaget (1972) baserade sin konstruktivistiska teori om intellektuell kognitiv utveckling på intervjuer med barn, vilket pekar på att intervjumetoden i detta fall är betydelsefull för konstruktionen av en sådan kunskapsteori. För varje teoribildning och teorianvändning är begrepp viktiga bland annat för att man ska kunna särskilja situationer. Piaget använde sig av begreppen *schema, assimilation, ackomodation* och *ekvilibrium*, vilka genomsyrade hans syn på den individuella inlärningsprocessen. Varje individ som ska lära sig någonting kognitivt, måste ha ett mentalt schema för den inre representationen (Lyngsnes & Rismark, 2007). Mottagandet av informationen tolkas via dessa mentala scheman utifrån kontexten genom assimilation för att sen anpassas till den nya situationen genom ackomodation. Inlärning sker här varken spontant eller passivt, utan individen måste ha motivation eller mål i relevant kontext för att klara av att genomföra inlärningsprocessen till ekvilibrium då en slags jämvikt råder inlärningsmässigt (ibid.).

Om syftet är att studera hur en förstaårsstudent förstår derivatan, kan det vara relevant att veta hur studenten började lära sig förstå begreppet derivatan, då som elev. Derivatan ingår i detta hypotetiska fall i kontexten av en funktion. Derivatan och funktionen företräds av individuella och inre representationer hos studenten som mentala objekt. Det mentala objektet av funktionen kan vara exempelvis ett algebraiskt uttryck i form av en formel $f(x)$ som beskriver funktionen, den geometriska bilden av funktionens graf eller som en relation mellan funktionens beroende och oberoende variabler. De interna relationerna mellan begreppen *derivatan* och *funktionen*, är kopplade till aktuella mentala förståelsescheman, som beror av kontexten man använder dem i. Genom exempelvis en intervjumetod kan dessa fenomen tolkas. Fenomenologin kan också bära skulden till didaktiskt oönskade resultat. Elever som använder bråkbegreppet alltför begränsat under inlärningsprocessen, riskerar att inte förstå vad begreppen betyder eller vad de kan användas till (Freudenthal, 1983).

En gren inom den konstruktivistiska teorin är den sociokulturella, i vilken interaktionen mellan individen och kontexten spelar stor roll. Denna teori har vidareutvecklats av bland annat Vygotskys forskningsarbeten på hur en, i situationen mer kompetent person, kunde hjälpa barn i praktisk aktivitet att klara något som barnen inte klarade utan hjälp i olika kontexter (Lyngsnes & Rismark, 2007). Det en individ kan mästra på egen hand, kallas för den aktuella utvecklingsnivån och vad andra kan, kallas för den potentiella utvecklingsnivån. Inlärningssituationen där individen utvidgar sin förståelse med hjälp av språket, ligger mellan de bägge nivåerna och kallas för den närmaste utvecklingszonen (ibid.).

Intellektuell kognitiv utveckling startar enligt sociokulturella teorier på ett yttre plan för att därefter få betydelse för individen på ett inre plan (ibid.). Relationerna mellan kontextens yttre process och individens inre process sammankopplas genom en brobyggande process innanför den närmaste utvecklingszonen. Andra begrepp som passar in i inlärningssammanhang relaterat till denna brobyggningsprocess är ”learning gap” och ”teaching gap” av Stigler & Hiebert (1999). De beskriver inte några kompetensmässiga luckor, utan hur olika inlärningsmetoder i olika kulturer kan hjälpa oss att relatera till olika kontextuella perspektiv, i syfte att skapa gynnsammare förutsättningar under inlärningssituationer. Kompetens relaterad till kunskap beskrivs härnäst, innan *begrepp* behandlas i kapitel 2.3.

2.2 Förståelse, kunskap och kompetens

Det är en generell föreställning att en genomsnittsstudent inte kan förvänta sig att verkligen förstå matematik och att genomsnittsstudenten inte själv kan konstruera någonting förutom reglerna och metoderna som har demonstrerats av läraren (Schoenfeld, 1992). Det är skillnad mellan att *förstå* matematik och att *kunna* matematik. Förståelse anses av Ryve (2006a) vara en komponent av en kompetens. Det att kunna olika områden inom ämnet matematik kallas för matematisk kompetens, enligt styrdokument som Kunnskapsløftet (KD, 2006).

Ryve (2006a) har fokus på matematisk kunskap i relation till styrdokument när han presenterar matematiska kompetenser som identifierats av *Mathematics Learning Committee*. Han beskriver komponenter till matematiska kompetenser som används när man försöker att kategorisera matematikkunnande eller kunskap i matematik. Dessa komponenter är inte kompetenser i sig själva, utan vidare i sin betydelse som förståelse, färdighet, förmåga eller attityd. Bred matematisk kompetens kan beskrivas utifrån följande fem komponenter: begreppsförståelse, räknefärdighet, problemlösningsförmåga, matematiskt-logiskt resonemang och positiv inställning till matematik (ibid.). Detta arbete har fokus på de tre komponenterna begreppsförståelse, matematiskt-logiskt resonemang och problemlösning. För att en rik och nyanserad begreppsbild ska kunna bidra till en god begreppsuppfattning måste man få de viktiga begreppen belysta ur olika aspekter (Niss, 2001).

2.3 Begrepp

I detta arbete översätts *concept* till *begrepp*. Förståelsen av derivatan som matematiskt begrepp, är en växelverkan av begrepp relaterade till varandra. En generell beskrivelse av begrepp går, efter reflektioner, över i en mer specifik beskrivelse. En effekt av växelverkningen är att den kontextuella förståelsen av begreppen breddas. Begrepp är resultat av reflektioner, inte tvärtom. ”Cognition does not start with concepts, but rather the other way around: concepts are the result of cognitive processes” (Freudenthal, 1991, s. 18). Det kan verka som att “[t]eaching concepts is likely to create the illusion of adding more understanding to what is learned" (ibid., s. 18), vilket belyser viktigheten i begreppsanvändningen.

Många matematiklärare önskar, i inlärningssituationer, att bistå när en individ inte förstår ett specifikt matematisk begrepp i en specifik kontext. Detta specifika begrepp kan vara en del i en matematisk process på liknande sätt som Freudenthal (1978) beskriver begreppens delaktighet i en inlärningssituation. Han poängterar att i en inlärningssituation är fokus på att lära ut någonting som samtidigt ska läras in. Teorier som förklarar en inlärningssituation riskerar att fokusera bort det studerade objektets betydelse, i processen den ingår i, *om* man skiljer mellan form och innehåll. Begrepp riskerar då att bli tomma former utan förståelsemässigt innehåll. Kanske man, i inlärningssituationer, inte bör separera det matematiska begreppet derivata som objekt från den matematiska processen derivation där begreppet ingår? Freudenthal skildrar vidare lärande som en individuell process, vilken möjligen kan observeras mellan hoppen i en diskontinuerlig inlärningsprocess:

> Theories developed by general educationists are *empty boxes*. […] The production of empty boxes is the consequence of a philosophy that separates form from content. Many *rituals* in 'education' originated from a shallow behaviourism, from atomistic philosophies of knowledge, from interpreting knowledge as a disconnected set of concepts, from interpreting learning as the attainment of concepts. […] Teaching means teaching a specific subject, and any theory of teaching can only arise from a particular theory of teaching a particular subject. Moreover a theory of teaching should be the complement of a theory of learning. Learning is a *process* and should be observed and studied as a process. Observing a process is more than taking a few snapshots. Learning is an *individual process* but statistics can at most provide average learning processes. Learning is essentially a discontinuous process. If a learning process is to be observed, the moments that count are its *discontinuities*, the jumps in the learning process. (ibid., s. 77-78)

Att utföra en handling eller en procedur medför inte per automatik förståelse för begrepp som är resultat av processen. Som nämnt i 2.2 är det skillnad på att *förstå* och *kunna* matematik. Man behöver inte nödvändigtvis ha förståelse av derivatan som objekt, för att kunna derivera en funktion med derivatan som resultat. På liknande sätt som det är viktigt att kunna förutse och förstå konsekvenser av handlingar, är det viktigt att reflektera över varför man deriverar en funktion. Förståelsen till ett matematiskt begrepp kan öka om man ser till begreppens inbördes betydelse i processerna som de antingen ingår i eller är ett resultat av. Om derivatan till en funktion efterfrågas på en examen, är det möjligt att använda sig av en deriveringsmetod som leder till korrekt svar, utan att man har förstått vad derivatan egentligen är. När man så reflekterar över ett begrepp och dess användningsområde, kan samma begrepp både användas och förstås på flera olika sätt och nivåer. Före man kan lära sig att gå måste man lära sig att stå, så låt oss starta med beskrivelse av begrepp som kronologiskt, under inlärning, används tidigare än derivatan.

Årskurser, eller klasser, är en avgränsning inom skolvärlden för olika nivåer. Norska 4e-klasselever bör enligt läroplanen ha en viss förståelse för matematiska begrepp, som exempelvis *bråk* och *division*. Divisionsbegreppet omfattar mer än själva divisionsprocessen, på samma sätt som bråk är ett mångfacetterat uttryck. Dahl (2008) har en ingående, kort och tydlig presentation av *rationella tal* i form av bråkbegreppet och hur det används i matematikundervisning. Freudenthal (1983) beskriver bråk bland annat som *förhållande* och *proportionalitet* mellan *objekt*, *mängder* eller *storheter*, där meter och sekunder är exempel på två storheter.

Ett matematiskt bråk kan exempelvis representeras med symbolerna ”—”, ”:” och ”/”. Dessa symboler kan ha olika betydelse beroende på vilken konstruktion bråket representerar: en del/hel, en kvot, en operator och ett förhållande för att nämna några. Man kan även läsa in divisionsprocessen i symbolerna, samtidigt som man inte alltid bör det. Ett förhållande kan uttryckas med symbolen ”:”, vilket gör att en elev kan förväxla förhållande och *kvot*, eller en *förhållandeoperator* med en delningsprocess. En förhållandeoperator *transformerar* ett objekt, en mängd eller en storhet till ett annat objekt, mängd respektive storhet.

Förhållande, kan ses som en funktion som är avhängig av två data av ordnade par av tal eller storheter, medan proportionalitet är avhängigt av fyra (ibid.). $x_1: x_2 = y_1: y_2$ relaterar två interna förhållanden till varandra, medan $x_1: y_1 = x_2: y_2$ relaterar två externa förhållanden till varandra. Om ett internt förhållande tolkas som dividend och divisor, så är kvoten, eller resultatet av divisionsprocessen ett nytt tal, alltså ett nytt objekt. Divisionen beskriver då förhållandet mellan *täljaren* och *nämnaren*. Processen att dividera, dvs. att utföra divisionen, relaterar matematiska begrepp operationellt och därigenom relationellt. Härigenom kan en kvot ses både som ett matematiskt objekt och som en beståndsdel i en matematisk process, vilket leder till ett möjligt problemområde om man inte klarar av att skilja mellan dem.

Externa förhållanden som tolkas som dividend och divisor, får en storhet som kvot. Storheten *hastighet* är en beskrivelse av rörelse och kan förklaras som ett externt förhållande mellan dividenden *sträcka* och divisorn *tid*. Om man likställer ett förhållande med en kvot, kan problem uppstå (ibid.). Hastigheten definierad som förändring av läge per tidsenhet, är inte samma sak som att dividera en sträcka med en tid, på samma sätt som en vektor inte är samma sak som en skalär.

Genom ”skolprocessen” att delta i undervisningen för varje successiv årskurs, bör eleven få möjlighet att utveckla begreppsförståelsen till att även gälla det matematiska begreppet förhållande, när eleverna har nått 8e-klassen. Trots att man kan anta att elever förstår de olika begreppen kvot och förhållande, så kan man inte anta att de kan skilja mellan dem.

Om en elev inte förstår och kan använda begrepp som *bråk*, *division*, *förhållande* och *proportionalitet* enligt läroplanens bestämda mål för aktuell nivå för eleven, kan problem uppstå när eleven senare ska utveckla den matematiska begreppsförståelsen till derivatan och derivation. Det kan vara problematiskt att avgöra exakt när en elev förväntas kunna och förstå matematiska läroplansmål, dels beroende på individuell utveckling och dels på oprecisa läroplansmål vilka nämns mer utförligt i avsnitt 2.4.1.

2.4 Representationer av derivatan

Derivatan kan ses som resultat av externa *förhållanden*. Dessutom kan derivatan, på samma sätt som bråk, representeras av olika symboler som även kan ”läsas” som deriveringsprocesser. Fokus i denna text är inte på symbolbruket till derivatan, utan på *hur* man kan se på, förstå och representera derivatan som begrepp i relation till en matematisk funktion. I avsnitt 2.4.1 förtydligas både funktionsbegreppet som innehåller derivatan och begreppsförståelsens utveckling i relation till läroplaner och kurslitteratur. I avsnitt 2.4.2 definieras derivatan och därtill diskuteras viktiga begrepp, som kan tänkas påverka förståelsen av derivatan. Avslutningsvis hanterar 2.4.3 teorier om matematisk begreppsuppfattning.

2.4.1 Derivatan i TIMSS, läroplaner och kurslitteratur

Derivatan representeras i flera sammanhang som har anknytning till inlärningssituationer. Internationella undersökningar, läroplaner och kurslittetratur är några exempel på sammanhang med relevans till denna studie. Grevholm (2005) menar att Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen (L97) i Norge betonade begreppsbildning och begreppslig förståelse. Krager Vartdal (2006) uttrycker det som följer:

> En skjematisk fremstilling er referert i veiledning til L97 der man setter opp modellen at en handling knyttet til en erfaring vil kunne gi en refleksjon som videre resulterer i læring. Man skal legge til rette for at elevene får *bygge* sine begreper og begrepsstrukturer, og at forståelsen og anvendelsen av disse knyttes til arbeidsmåter som legger til rette for at elevene kan vinne erfaringer for denne *byggingen av egen kunnskap*. (ibid., s. 53)

Han belyser hur L97 kopplade ihop begreppsförståelse med kunskap genom användning av begreppsstrukturerna (ibid.). L97 kan delvis ses som en produkt av resultat från internationella studier som *Trends in International Mathematics and Science Study*, TIMSS. En av klassificeringarna som görs i TIMSS är elevers kompetensnivå för prestationer. Kompetensnivån hos en elev kategoriseras som avancerat, högt, medel eller lågt. Elever på högre kompetensnivåer kan i ökande grad demonstrera förståelse, använda och resonera i matematik (Grønmo & Onstad, 2009). I TIMSS 1995 återfanns ca. 4 % av 13-åringarna i Norge på den avancerade kompetensnivån (ibid.). Det är tankeväckande att inga norska elever, vilket här är synonymt med färre än 0,5 %, återfanns i den avancerade kompetensnivån varken i TIMSS 2003 eller i TIMSS 2007.

Matematikuppgifterna i TIMSS delas in i fyra rapporteringsområden: Tal, Algebra (bara för 8e klasser), Geometri och Statistik. Sett till ”Algebraområdet” ser det mörkt ut, trots att Grønmo & Bergem lyfter fram något positivt, när de menar att ”[d]et har vært en signifikant framgang i matematikkprestasjoner for norske elever på både 8. trinn og 4. trinn i perioden 2003–2007” (ibid., s. 49).

> At norske elever gjør det svakt i algebra, er ikke nytt. Det samsvarer med resultatene i tidligere TIMSS-studier. Resultatene som presenteres [...] aktualiserer spørsmålet om vi i for stor grad har nedprioritert algebra i norsk skole. I et internasjonalt perspektiv er våre elevers prestasjoner i algebra så svake at en debatt rundt vår generelle nedprioritering av dette emneområdet bør initieres. Mangelfull forståelse og kompetanse i algebra vil kunne gi elever som sikter seg inn mot yrker som forutsetter gode kunnskaper i matematikk, store problemer. Om det ikke er nødvendig kunnskap for alle elever, kan det ha en avgjørende betydning for de man ønsker å rekruttere til yrker som krever høy kompetanse i matematikk (ibid., s. 57).

Man ska nog vara försiktig med att dra slutsatser baserade på enstaka exempel från undersökningar som TIMSS. Som grundlag för kvalitativa undersökningar eller som diskussionsunderlag, är däremot sådana enstaka exempel väl lämpade. Mer om den kvalitativa undersökningsmetoden finns att läsa i metodkapitel 3.1. En fråga från TIMSS 2007 som behandlar matematikområdet Tal lyder: ”På en parkeringsplass var 762 biler parkert i 6 like rader. Hvor mange biler var det i hver rad?” (ibid., s. 73-74).

Resultatmässigt, i lösningsprocent, jämförs Norge med Australien, Italien, Japan, Slovenien och med det internationella genomsnittet:

Australien	**12**
Italien	**51**
Japan	**72**
Norge	**5**
Slovenien	**45**
Internationellt genomsnitt	**39**

Tabell 2:1 Lösningsprocent för 4e-klasselever angående fråga M022106 i matematikområdet Tal från TIMSS 2007 (ibid., s. 74)

Det är tänkt att frågan ska testa 4e-årskurselevers färdigheter i division. ”Dersom elevene behersker algoritmen for divisjon, er oppgaven relativt enkel. Riktig svar er 762 : 6 = 127” (ibid., s. 73). Det nämns att de norska eleverna presterar allra sämst av alla deltagarländerna i TIMSS 2007. Kanske tolkar många norska elever frågan helt annorlunda än det som var tänkt? Om man tolkar frågan som att det står bilar parkerade i 6 likadana rader, med 762 bilar, så kan riktigt svar vara att det är 762 bilar i varje rad. Oavsett om resultaten är en indikation på att de norska 4e-klasseleverna sliter med enkla divisionsalgoritmer eller om frågan kan tolkas annorlunda på norska, så visar den att enstaka exempel från internationella undersökningar kan vara lämpliga att ha med i en kvalitativ undersökning. Det troligaste är att de norska eleverna sliter med formell matematik, eftersom det är ett av huvudresultaten från rapporten (ibid.), vilket betyder att det är ett systematiskt felsvar och inte ett tillfälligt.

Divisionsprocessen kan relateras till och påverka begreppsbilden av *derivata* med hjälp av det matematiska begreppet *förhållande*. ”Begrepet «forhold» er et sentralt begrep i utviklingen av matematisk forståelse” (ibid., s. 60) och i TIMSS 2007 finns en fråga inom ”Talområdet” där begreppet *förhållande* är i centrum:
”Det är 36 passasjerer i en buss. Forholdet mellom antall barn og antall voksne i bussen er 5 til 4. Hvor mange barn er det i bussen?” (ibid., s. 60). Tabell 2:2 indikerar att norska 13-åringar sliter med begreppet *förhållande*.

Australien	**35**
Italien	**31**
Japan	**54**
Norge	**16**
Slovenien	**24**
Internationellt genomsnitt	**27**

Tabell 2:2 Lösningsprocent för 8e-klasselever angående fråga M031286 i matematikområdet Tal från TIMSS 2007 (ibid., s. 60)

Eftersom det internationella genomsnittet var så lågt som 27 % bedöms denna fråga tillhöra den avancerade nivån, samtidigt som frågan är i enighet med norsk läroplan.

> Resultatet gir derfor et nedslående bilde av norske elevers kompetanse til å anvende et gitt forhold til å løse et spesifikt matematisk problem. Verken i L97 eller K06 er temaet «forhold» spesifikt nevnt, men det framheves begge steder at elevene skal kunne regne med prosent, som er et viktig eksempel på et matematisk forhold, allerede på 7. trinn. Den norske TIMSS-gruppa har derfor vurdert oppgaven til å være i samsvar med norsk læreplan (ibid., s.60).

”Noe av årsaken til det svake norske resultatet på denne oppgaven, kan skyldes at man i norsk skole i for liten grad behandler vanskelige og teoretiske matematiske begreper som [*forhold*] og [*proporsjonalitet*]” (ibid., s. 60-61). Kronologiskt, under utbildning, föregår dessa två begreppen *stigningstal* och *derivata*. Detta ger grund till att ana oro angående begreppsförståelsen av derivatan till studenter som har genomgått studieår inom L97 och K06.

Derivatan kan man se spår av i läroplanen från 1994 (R94) och då inom funktionsläran:

> Elevene skal forstå funksjonsbegrepet. De skal kunne tegne og tolke funksjonsgrafer og kunne bruke funksjoner i praktiske situasjoner. De skal ha kjennskap til ideene som ligger til grunn for derivasjon og integrasjon
>
> **Hovedmomenter:**
> Elevene skal
>
> 9a forstå funksjonsbegrepet med definisjonsmengde og verdimengde og kunne tegne funksjonsgrafer med og uten tekniske hjelpemidler
>
> 9b kunne finne nullpunkter til funksjoner og skjæringspunkter mellom kurver grafisk og ved regning
>
> 9c kunne bruke lommeregneren til å finne topp- og bunnpunkter og kunne tolke resultatet i praktiske situasjoner
>
> 9d kjenne sammenhengen mellom lineære funksjoner og rette linjer, kunne finne funksjonsuttrykket for en linje ved regning, kunne beregne stigningstallet og tolke det i praktiske situasjoner
>
> 9e kunne bruke lommeregneren til å studere funksjoner bygd opp ved hjelp av potensfunksjoner, eksponentialfunksjoner og de fire regningsartene
>
> 9f kjenne begrepene lineær og eksponentiell vekst, kunne beskrive slike vekstforløp matematisk og vite om noen vanlige eksempler
>
> 9g kunne bruke regresjon på lommeregneren til å finne funksjonsuttrykk som tilnærmet beskriver praktiske sammenhenger
>
> 9h kjenne begrepene gjennomsnittlig og momentan vekst, kunne finne tilnærmede verdier for den momentane veksten ved regning, kunne bruke lommeregneren til å finne momentan vekst og kunne tolke momentan vekst i praktiske situasjoner
>
> 9i kjenne til hvordan arealet under en funksjonsgraf kan tilnærmes med rektangler, kunne bruke lommeregneren til å beregne slike arealer og kunne tolke disse arealene i praktiske situasjoner (KUF, 1999, s. 10)

Förutom att eleverna förväntas att *förstå* funktionsbegreppet, ska de *känna till* bland annat begreppen genomsnittlig och momentan tillväxt och *kunna* tolka momentan tillväxt i praktiska situationer. I huvudmomenten 9a – 9i ovan, är det stor fokus på miniräknarbruk. Under början av 1990-talet, som en naturlig följd av Internets genomslagskraft tillsammans med internationell forskningsfokus inom matematikdidaktik, var en del av fokus på användning av miniräknare och datorbruk i samband med forskning och undervisning derivatan eller derivation (Jørgensen, 2006).

De matematiska kompetensmålen inom K06 kan ses som matematiska processer som eleven bör klara av ”etter 2., 4., 7. og 10. årssteget i grunnskolen” (KD, 2006, Hovudområde). Eftersom de matematiska kompetensmålen i K06 är diskontinuerliga i sin beskrivelse och inte specifikt uttrycker vad eleven bör kunna exempelvis efter 8e-klassen, innebär det implicit att till exempel begreppsförståelsen är tänkt att utvecklas som en kontinuerlig process. Märk väl att detta inte motstrider Freudenthals (1978) idéer att inlärningsprocessen kan vara diskontinuerlig.

K06 delar upp matematiken i sju huvudområden, varav funktioner är ett (KD, 2006). Kanske är ordet derivation utelämnat eftersom huvudområdet *funktioner* nämns från och med åttonde årskurs samtidigt som ordet *derivation* bara är nämnt efter den norska gymnasieskolans första års kompetensmål för den mer teoretiskt orienterade ”opplæringa” (Vg1T): ”eleven skal kunne gjere greie for definisjonen av den deriverte, bruke definisjonen til å utleie ein derivasjonsregel for polynomfunksjonar og bruke denne regelen til å drøfte funksjonar” (KD, 2006, Kompetansemål). Återigen kan man indirekt tolka att man har användning för derivationsbegreppet när man också ska kunna: ”gjere greie for funksjonsomgrepet og teikne grafar ved å analysere funksjonsomgrepet” (ibid.) samt efter Vg1T: ”beregne nullpunkt, skjæringspunkt og gjennomsnittelig vekstfart, finne tilnærme verdiar for momentan vekstfart og gje nokre praktiske tolkninger av desse aspekta” (ibid.).

Som lärobok under *Kalkulus 1* kursen, för förstaårsstudenterna i denna studie, användes *Kalkulus* (Lindstrøm, 2006). Inga förändringar har gjorts med hänsyn till funktionsbegreppet och derivatan sedan första utgåvan av boken i 1995 (Lindstrøm, 1995). Lindstrøm (2006) påpekar att han försöker att undgå fällan som består i att låta varje uppgift vara en enkel omskrivning av ett exempel i boken och anser vidare att problemlösning är en av de viktigaste färdigheterna inom matematik. Som kontraexempel kan nämnas att Lindstrøm (ibid.) har fogat till ett exempel på hur man kan finna derivatan till en funktion i en punkt med hjälp av derivatans definition. Denna förändring innebar att uppgifter blev enkla omskrivningar av just *det* extrainsatta exemplet. Man kan även se förändringen som en pedagogisk förbättring, om konkretiserande exempel eftersträvas.

Deriverbara funktioner kan ses som själva hjärtat i läroboken (ibid.), där funktionsbegreppet används som geometriska bilder av en graf, en algebraisk formel eller som ett förhållande mellan en avhängig och en oavhängig variabel där symbolen *f(x)* är den vanligast förekommande representationen. Den sista beskrivelsen av en funktion kan även ses som en avbildning av en mängd (definitionsmängden) till en annan (värdemängden).

> Vi skal ikke bruke tid og krefter på å filosofere over den beste definisjonen av begrepet funksjon. For våre formål vil det være tilstrekkelig å tenke på en funksjon $f : A \to B$ som en *regel* eller *tilordning* som til hvert element x i A gir oss ett (og bare ett!) element $f(x)$ i B (ibid., s. 211)

Denna text baserar sig på en synonym funktionsbeskrivning och som används i K06, eftersom den därför antas vara bekant för alla studenter i denna undersökning:

> Ein funksjon beskriv endring eller utvikling av ein storleik som er avhengig av ein annan, på ein eintydig måte. Funksjonar kan uttrykkjast på fleire måtar, til dømes med formlar, tabellar og grafar. Analyse av funksjonar går ut på å leite etter spesielle eigenskapar, som kor raskt ei utvikling går, og når utviklinga får spesielle verdiar (KD, 2006, Hovudområde).

Eftersom funktionsanalys sägs gå ut på att leta efter speciella egenskaper, som hur snabbt en utveckling går och när utvecklingen får speciella värden, är begreppsförståelse kring derivatan essentiell, som ett precist mått på förändring.

Resultat från internationella undersökningar som TIMSS bidrar till forskningsresultat som i sin tur bidrar till att exempelvis läroplaner och kurslitteratur påverkas. I kapitel 2.5 är fokus först på norska forskningsresultat angående förståelse av derivata i inlärningssituationer och därefter på internationella.

2.4.2 Derivatans definition och tillhörande begrepp

Derivatan är ett förändringsmått som på engelska kan översättas till ”rate of change” och på norska till ”vekstrate = et mål for endring”. En definition på derivatan lyder:

> Anta at f er definert i en omegn om punktet a (det vil si at det finnes et intervall $(a - c, a + c)$ slik at $f(x)$ er definert for alle x i dette intervallet). Dersom grenseverdien
>
> $$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
>
> eksisterer, sier vi at f er *deriverbar i a*. Vi skriver
>
> $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
>
> og kaller denne størrelsen for *den deriverte til f i punktet a* (Lindstrøm, 2006, s. 254).

Implicit innebär det att $c \neq 0$, för att det ska vara ett intervall. Derivatan till funktionen f i punkten a blir då till storlek lik gränsvärdet i (I):

$$\text{(I)} \qquad f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Andra vanliga uttryckssätt för derivatans definition är:

(II) $$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

och

(III) $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Storleken till derivatan till en funktion definieras som gränsvärdet till kvoten i (I), då:

(IV) $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Förståelsen av användningen av *derivatan* kan variera, beroende på förståelsen av begreppet *kontinuerlig*, när det används i funktionssammanhang. Funktionen *f* sägs vara kontinuerlig i punkten *a* som tillhör definitionsmängden $D \subset \mathbb{R}$ om följande gäller:

(V) $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ så att } x \in D,\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Oavsett avståndet ε mellan de två funktionsvärdena $f(a)$ och $f(x)$, existerar ett avstånd δ så att för vilket som helst *x* i definitionsmängden till funktionen inom avståndet δ från punkten *a*, kommer funktionsvärdet $f(x)$ inte att vara längre ifrån funktionsvärdet $f(a)$ än avståndet ε. En funktion *f* är kontinuerlig i ett intervall, om den är kontinuerlig i varje punkt i intervallet. Om *f* är kontinuerlig i ett slutet intervall, så är funktionen *f likformigt* kontinuerlig på samma intervall.

Uttryck (V) kan visas ha identisk betydelse som (IV), i och med att funktionen *f* är kontinuerlig i punkten *a*, som tillhör funktionsdomänen, om och endast om funktionsvärdet $f(x)$ närmar sig funktionsvärdet $f(a)$, när *x* tillhör funktionsdomänen och närmar sig punkten *a*.

Ett sätt att tolka användningen av begreppet derivatan till en funktion är genom *medelvärdessatsen*. Anta att funktionen *f* är kontinuerlig på hela intervallet $[a, b] \subset \mathbb{R}$ och att den är deriverbar i alla inre punkter $x \in (a, b)$. Då finns det en punkt $\xi \in (a, b)$ så att derivatan i punkten ξ till storlek är identisk med stigningstalet till linjen som går genom punkterna $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$:

(VI) $$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Ett problem som kan uppstå här, under inlärningsprocessen, är att man felaktigt kan tro: givet en derivata i en punkt $\xi \in (a, b)$, så är funktionen *f* kontinuerlig och deriverbar på hela intervallet

$[a, b] \subset \mathbb{R}$. Det kan vara svårt att föreställa sig en funktion med diskontinuerlig derivata om man tänker på att en kontinuerlig funktion inte kan ha språngdiskontinuerlig derivata. Ett annat möjligt problemområde är gränsvärdesbegreppet. Det existerar en infinitesimal diskrepans i form av gränsvärdesbegrepp för kontinuerliga deriverbara funktioner. Detta sker då en sekant mellan två punkter övergår till en tangent till den av punkterna som är fix, när den ena punkten går mot den andra. Ovanstående, är möjliga problemområden för begreppet derivatan under inlärningssituationer och innebär inte att de existerar som faktiska problemområden i detta arbete, trots att de begreppsmässigt kan vara relevanta i samband med derivatan och derivation.

Samtidigt som det är bra att kontextuellt kunna skilja mellan användningar av begreppet derivata, finns det risk att man använder sig av fundamentala matematiska begrepp felaktigt när de tas ur sin kontext. Gränsvärdesbegreppet fungerar som kontextuellt lim mellan sekantbegreppet och tangentbegreppet relaterat till begreppsförståelsen av derivatan i en punkt. Om derivatan som storhet av ett gränsvärde ses synonymt med ett stigningstal när man önskar att visualisera derivatan grafiskt som en tangent, kan en följd bli att man ser derivatan som ett objekt i en punkt synonymt med processen att derivera en funktion. När man deriverar en funktion med syfte att få fram storleken till en storhet, utför man en procedur för att få fram ett objekt som resultat av en process.

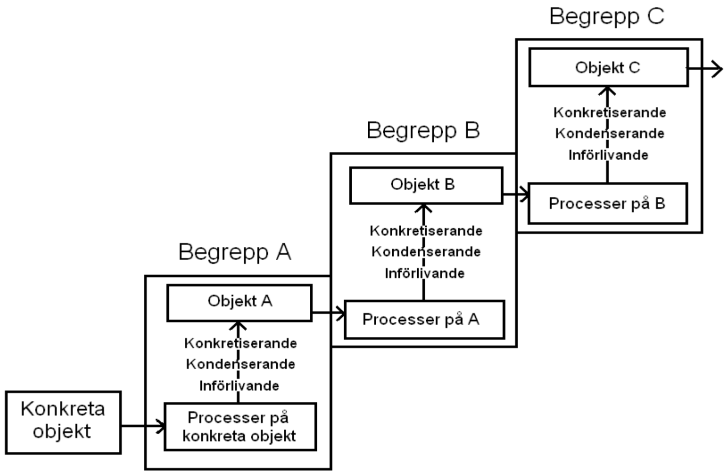
Lindstrøm (ibid.) menar att det är både vanligt och fördelaktigt att tolka derivatan geometriskt som stigningstalet till *tangenten* till funktionsgrafen $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$. Detta föregås av en process då stigningstalet till *sekanten* som är upphov till kvoten i (I) närmar sig stigningstalet till tangenten till funktionsgrafen $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$ när $x \to a$. Lindstrøm omtalar derivatan inte bara som en del *i* en process, utan även *som* en process (ibid.). Processen kan instrumentellt ses som en procedur, som innebär en struktur i förenklande syfte, vilket förhoppningsvis leder till ökad begreppsförståelse genom relationella reflektioner. Mer om detta i avsnitt 2.4.3, nedan.

Oavsett vilka begrepp man använder sig av när man ska representera begreppet *derivatan*, så existerar teorier kring matematisk begreppsbildning. Här följer beskrivning av hur man kan se på och representera derivatan som begrepp genom teorier av Sfard (1991), Freudenthal (1978, 1991), Van Hiele (1986), Asiala et al. (1996) och Gray & Tall (1994, 2001).

2.4.3 Derivatan i en dynamisk process eller som ett statiskt objekt

Det är en kvalitativ skillnad mellan att se ett matematiskt begrepp som ett abstrakt objekt kontra en process (Sfard, 1991). Objektet uppfattas som statiskt medan processen uppfattas dynamiskt. En kvalitativ skillnad, är att man kan utföra en derivation, men inte en derivata. En *funktion* som ett matematiskt abstrakt objekt representeras av en statisk föreställning i form av en strukturell uppfattning eller representation av funktionen. Denna representation av funktionen kan till exempel vara i algebraisk form eller som en funktionsgraf.

Utifrån Sfards (ibid.) terminologi sker själva utvecklingsprocessen av ökad begreppsförståelse genom att en trefasers process upprepas då man går från operationell uppfattning till strukturell. De tre kronologiska faserna kallas för införlivande (interiorization), kondenserande (condensation) och konkretiserande (reification). Figuren under ger en schematisk bild av begreppsbildningsprocessen:



Figur 2:1 En schematisk bild av begreppsbildningsprocessen (Sfard, 1991, s. 22)

Följande exempel demonstrerar en möjlig begreppsbildningsprocess för *derivatan* som matematiskt funktionsbegrepp i relation till Figur 2:1. Om utgångspunkten är en funktionsgraf, som konkret objekt, kan man införliva utgångsbegreppet A. Begreppet A motsvarar ett sedan tidigare känt begrepp för genomsnittlig tillväxthastighet, genom att utföra operationen att se hur fort funktionsgrafen växer eller avtar för ett givet intervall. Den första kondenseringsfasen innebär att man utför nyss nämnda process, över en tillräckligt lång tid, tills man ser den genomsnittliga tillväxthastigheten i intervallet som ett objekt istället för utförandet av en process. Det är i ögonblicket när man inser detta, som man har gått över till den första konkretiserandefasen. Denna fas är, till skillnad från de två föregående, plötslig och alltså inte en gradvis övergång. I detta läge beror fortsättningen av begreppens växelverkan på vilket fokus man har. Antingen stannar man här och har en mer begränsad förståelse av begreppet derivata, eller så fortsätter man att utföra nya processer på objekt A. Man kan inse att man har börjat internalisera en process, när man i allmänna drag kan förklara det man gör och varför man gör vissa steg i en viss ordning (ibid.).

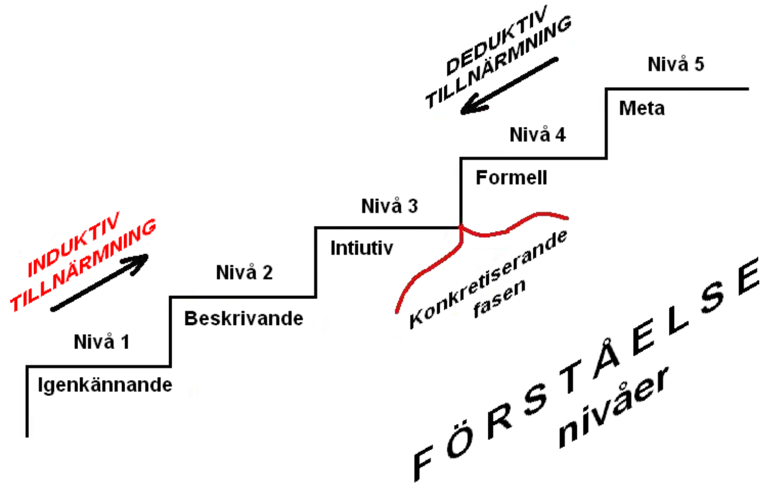
Om vi motiveras till att fortsätta begreppsbildningsprocessen, utför vi nya processer på objekt A, den genomsnittliga tillväxthastigheten, genom att göra intervallen mindre och mindre tills man närmar sig en punkt på funktionsgrafen. Den andra kondenseringsfasen är redan igång och när man genom denna process inser att man når ett gränsvärde, så har man samtidigt nått ett nytt objekt B, vilket även leder till förståelsen av begrepp B. Vi har nu släppt taget kring processen och behöver den inte längre för att reflektera kring gränsvärdet som objekt.

Vi nöjer oss inte med detta begrepp, utan fortsätter mot insikten att derivatan som matematiskt funktionsbegrepp kan vara storleken till ett gränsvärde. Till sist har vi utfört en deriveringsprocess och får som resultat derivatan till en punkt på funktionsgrafen som objekt. Genom att inte separera form från innehåll, kan man konkretisera derivatan till funktionen beroende på vad funktionsgrafen är uttryck för. Ett undervisningsexempel, som borde vara bekant för de flesta matematikstudenter, är att derivatan till en sträcka-tid-funktionsgraf är hastigheten till objektet i fråga vid en bestämd tidpunkt, vilket kan jämföras med storhetsrelationerna i avsnitt 2.3.

Begreppens betydelse står centralt i alla inlärningssituationer, eftersom tillägnande av kunskap är kontextberoende och en dynamisk process. Beträffande förståelsen, är det i så fall av största vikt, under inlärningssituationer, att kunna precisera begreppen man använder sig av både definitionsmässigt och användningsområdesmässigt. Definitioner är en mänsklig produkt och när man definierar någonting inom matematiken, så ger man det ett namn. Definitioner är med andra ord arbiträra (Vinner, 1991).

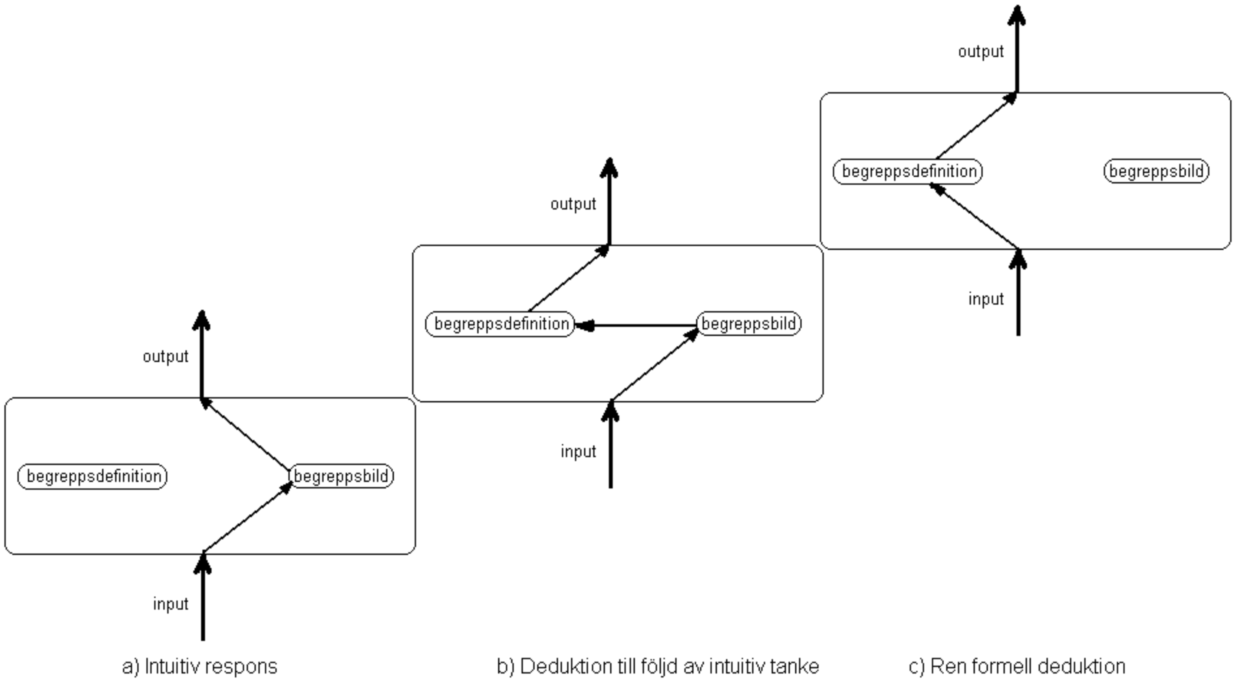
Förståelsen över en situation, eller av ett begrepp, är kontextberoende och den momentana begreppsbilden kan ha samspel med den momentana begreppsdefinitionen man har, för att så bilda förståelsen av situationen eller begreppet. När begreppsbilden inte stämmer överens med begreppsdefinitionen, eller vice versa, kan en kognitiv konflikt uppstå (ibid.).

Van Hiele (1986) delade in förståelsen av geometri i fem olika nivåer; från igenkännande på nivå 1 genom den beskrivande nivån 2, intuitiva nivån 3, den formella nivån 4 och slutligen till meta-nivån 5. Denna modell av förståelse av geometri, kan användas för att beskriva förståelseprocessen under arbetet med ett matematiskt problem. En inlärningssituation kan antingen ses som induktiv och går då från det speciella till det generella, eller som deduktiv från det generella till det speciella. Figur 2:2 visar olika förståelsenivåer under en inlärningssituation, tillsammans med en möjlig placering av den konkretiserande fasen under begreppsbildningsprocessen (Sfard, 1991).



Figur 2:2 Lärandeprocesser med exempel på konkretiseringsfas (Sfard, 1991), i relation till van Hieles förståelsenivåer (van Hiele, 1986)

Van Hiele menade att lärandeprocessen är det centrala när man går från en förståelsenivå till en annan (ibid. s. 5). I en matematisk problemlösningssituation förmår förstaårsstudenter att skifta mellan olika perspektiv och kan dynamiskt utnyttja en växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang (Pettersson, 2008). För detta krävs nyttjande av begreppsbilder. Om en kognitiv konflikt uppstår, till exempel mellan nivå 3 och 4, faller studenten ofta tillbaka till en begreppsbild gällande samma begrepp, men som i en annan kontext inte orsakade en kognitiv konflikt (Vinner, 1991). Utvecklingen av begreppsförståelse kan se ut som i Figur 2:3, beroende av växelverkan mellan intuitiv tanke a) och formellt resonemang c) som leder till b):



Figur 2:3 Vinners (1991, s. 72-73) begreppsförståelse tillsammans med van Hieles (1986, s. 6) modell

För att utveckla förståelsenivån kan man, under lärandeprocessen, genom reflektion skifta synen från processorienterad till objektorienterad:

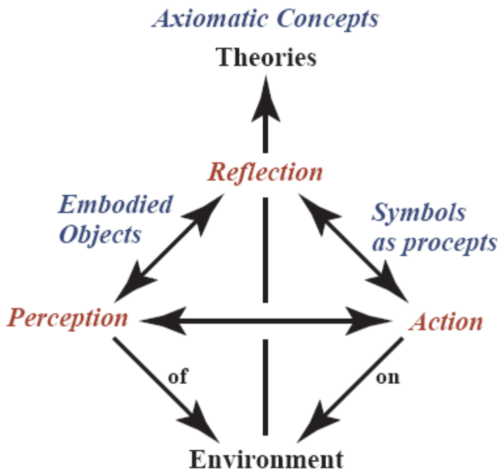
> They [the van Hiele couple] subjected their own actions to reflection. They observed themselves while teaching, recalled what they had done, and analysed it. Thinking is continued acting, indeed, but there are relative levels. The acting at the lower level becomes an object of analysis at the higher level. (Freudenthal, 1991, s. 96)

Genom en aktiv matematisk process i tre steg och reflektion anser Tall (1992) att matematiska objekt mentalt kan inkapslas (encapsulation) och därigenom förstås, vilket förkortas till Action Process Object Scheme och akronymen APOS. Asiala et al. (1996) använder sig av samma teorigrundlag som APOS till sitt ramverk, för att kvalitativt studera studenters och läroböckers matematiska utveckling.

Det att *samtidigt* kunna se ett matematiskt begrepp som objekt och i en process, kallas för *proceptual thinking*, vilket är sammansatt av de två begreppen ***pro***cess + con***cept*** (Gray & Tall, 1994). Denna idé vidareutvecklade de till att gälla ”*embodied objects*”:

> ‘embodied object’ that begins with sensory perception and is refined in mental thought through the use of language to give increasingly refined precision and hierarchies of meaning. This gives an increasingly sophisticated conception of embodied objects (ibid., 2001, s. 67)

Med Figur 2:4 kan man sätta *embodied objekts* och *procepts* i perspektiv till förnimmelse respektive process. Genom reflektering över samhandling, skapas begreppsbilder och begreppsdefinitioner, som ligger till grund för en slags förståelse.



Figur 2:4 Olika slags mentala enheter framträdande genom perception, aktivitet och reflektion (ibid., s.71)

Vad är skillnaden mellan ett ”embodied object” och ett ”procept”? Ett “embodied object” kan uppfattas förnimmande genom sinnesintryck, medan ett ”procept” uppkommer genom en process som producerar ett matematiskt objekt och en matematisk symbol som används för att representera antingen processen eller objektet (Tall, 2001), vilket kan uttydas från begreppskartan i Figur 2:4, ovan. Mer om begreppskartor finns i avsnitt 2.5.

Följande är dels en beskrivning på bilden ovan, hur olika slags mentala enheter framställs genom perception, aktivitet och reflektion och dels en viktig koppling till intervjufrågor så att analys kan ske med hjälp av bland annat Talls terminologi:

> Consider, as a second example, the idea of ‘rate of change’ and the subtle mathematical process of differentiation and its related concept of derivative. Here we see the picture of a graph as an embodied object that represents the function concept visually. It can be drawn and seen either with a pencil or with a wave of the hand in the air. This embodied action conveys the sense of the changing gradient of the graph as it changes slope. It proves to be natural for many students to develop an insight into the changing gradient by simply ‘looking along the curve’ and plotting the visual numerical value of the (signed) gradient as a graph. This can be done visually and enactively without any numerical calculation or symbolic manipulation. The more formal ideas can come (shortly) after the fundamental embodied activity has been constructed with support from the bodily movement of the individual. (ibid., s. 71)

Som ett exempel av en matematisk förståelseprocess beskriver Tall ovan den matematiska begreppsbilden av förändringsmått, det vill säga derivatan. Som utgångspunkt använder han bilden av en funktionsgraf och kallar visualiseringen av den för ett ”embodied object”. I denna begreppsbild ingår att man, efter visualiseringsprocessen (perception) av grafen, kan ”känna” förändringsmåttet till funktionen genom aktiviteten, att utföra en gest (action), samtidigt som man reflekterar över proceptet derivatan. Under denna process på och av omgivningen (environment) skapas det axiomatiska begreppet som ligger till grund för personens teoribyggande. Mer om gester finns i avsnitt 2.5.2, nedan.

Kopplat till Sfards begreppsbildningsprocess enligt Figur 2:1 ovan, kan en felaktig uppfattning om ett begrepp få dramatiska konsekvenser i inlärningsprocessen av ett matematiskt begrepp. Antingen riskerar man att bygga vidare sin begreppsförståelse på felaktiga grunder, eller så riskerar man att avsluta man en begreppsbildningsprocess för tidigt, vilket begränsar användningsområdet väsentligt till begreppet. Det sistnämnda kan få till konsekvens att man inte klarar av att se skillnad mellan *den deriverade funktionen* som ett objekt och *derivatan* som objekt till den deriverade funktionen. Samtidigt finns en risk att man hämmas i sin matematiska begreppsutveckling om man inte klarar av att se derivationsprocessen som en förenklande statisk struktur. Kontexten man relaterar derivatan till, visar sig åter igen vara väsentlig.

En möjlig konceptuell svårighet när det gäller begreppsförståelse och derivata kan vara att man samtidigt försöker förklara eller förstå ett momentant fenomen i en dynamisk process. Som parallell kan man tänka på ett kontinuerligt intervall bestående av punkter. Man kan likna det vid att se en filmsekvens, som är uppbyggd av momentana bilder, utan att man kan se de specifika bilderna. Om man omvänt, saktar ner visningshastigheten av filmsekvensen tillräckligt mycket, ser man de specifika bilderna, men förlorar filmkänslan.

2.5 Forskningsresultat om begreppsförståelse och derivata

Det är utfört många studier angående matematisk begreppsförståelse. En slutkommentar i en matematikdidaktisk doktorsavhandling lyder:

> it would be interesting to study how the concept of discourse is used in scientific communications in the research field of mathematics education since “the communication will not be regarded as effective unless, at any given moment, all the participants seem to know what they are talking about and feel confident that all the parties involved refer to the same things when using the same word” (Sfard, 2001, p. 34). I doubt that the scientific communication about mathematical discourse could be regarded as effective. (Ryve, 2006b, s. 66)

Inte minst ur effektiviseringssynpunkt vid kommunikation, finns behov för forskning på matematiska begrepp. Detta avsnitt avgränsas till att gälla valda delar av forskning, som handlar om grafisk förståelse av derivation och matematiskt resonemang relaterat till begreppsförståelse. Jag finner inte något kvalitativt arbete som grundar sig på studenters förståelse av derivationsbegreppet gjort i Norge, men dock en handfull som baseras på elever. Eftersom de flesta elever i Norge blir studenter, ser jag dessa norska undersökningar som betydelsefulla för detta arbete.

2.5.1 Norskt fokus

Jørgensen (2006) hade tvådelad problemställning i sin matematikdidaktiska hovedfagsoppgave. I den första delen tittade han närmare på begreppsbilden hos några norska gymnasieelever i samband med grafisk framställning av derivatan. Några av de viktigaste fynden han gjorde var att förstaderivatan inte var problematisk, men däremot hade eleverna problem att visualisera andraderivatan. Den största kognitiva konflikten berodde på att eleverna ofta tolkade grafen bildligt, vilket skapade problem då grafen till derivatan skulle tecknas. I den andra delen av problemställningen fokuserades det på sammanhang mellan begreppsbilden och lösningsstrategier i derivationsuppgifter där en grafisk tolkning av derivatan var föremålsenlig.

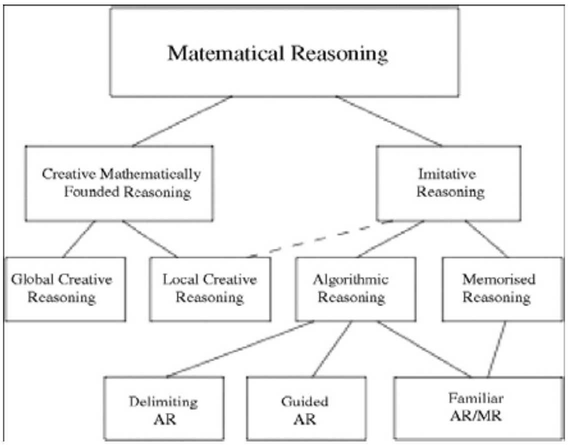
Det visade sig, föga överraskande, att när ett rikt och kompakt nät av relevanta begrepp fanns tillgängligt, kunde också uppgifterna lösas enklare samt att de eleverna med svagare begreppsbilder stötte på problem. Dessa problem var baserade på kognitiva konflikter och bristfälliga grafiska bilder av derivatan. Eleverna fick en bättre förståelse av derivatan efter att ha jobbat med grafiska derivationsuppgifter. Grafiska framställningar ger eleverna en rikare begreppsbild genom att de möter fler representationer av derivatan, vilket också kan vara orsak till kognitiva konflikter som fungerar likt en språngbräda till en högre förståelse av derivationsbegreppet (ibid.). Dessa fynd och tankar ligger till grund för en stor del av fokus i detta arbete.

Vikse (1999) är en annan som har bidragit till att det finns norska kvalitativa undersökningar på elevers begreppsuppfattning angående derivation. Han använder sig av kvantitativa resultat från TIMSS 1998 angående gränsvärdesbegreppet och derivationsbegreppet i intervjuer med gymnasieelever och fokuserar på missförståelser som elever kan ha. Ett resultat var att förståelsen kring gränsvärdesbegreppet måste stärkas hos eleverna. Derivatan verkade mestadels associeras till stigningstalet till en graf och begreppet *genomsnittlig tillväxthastighet* ansågs som svårt, speciellt i kombination med en ovanlig funktionsgraf. Eleverna fokuserade då mer på grafens form än på de två punkterna som bestämmer den genomsnittliga tillväxthastigheten.

Kalvø (2002) drog slutsatsen att elever kunde utveckla god begreppsförståelse av derivatan genom att uttrycka den med egna ord efter utfört arbete med dataloggar som utgångspunkt. Hjälpmedel som eleverna använde sig av var en rörelsesensor kopplat till ett dataprogram som grafiskt framställde en sträcka-tid kurva och en fart-tid kurva.

2.5.2 Internationellt fokus

För att matematikdidaktiskt kunna sätta begrepp i forskningsmässig relation till det man studerar, utan att hamna i ett bottenlöst metakognitivt dilemma, kan ett ramverk vara till hjälp. Ett ramverk inom den matematikdidaktiska forskningen är en basstruktur för idéer som representeras av abstraktioner och deras kontextuella interrelationer, vilka fungerar som basen till fenomenet som ska studeras (Lester, 2005). Lithner (2003; 2004; 2008) och Bergqvist (2007) använder sig av ett ramverk bestående av begrepp, som samtidigt är kategoriseringar på studenters metoder, när de löser till exempel tentamensuppgifter i matematik.



Figur 2:5 Lithners (2003; 2004 & 2008) och Bergqvists (2007) analysverktyg för kategorisering av matematiskt resonemang (ibid., s. 350)

Här och i Figur 2:5 betyder *reasoning* “the line of thought adopted to produce assertions and reach conclusions in task solving” (Lithner, 2008, s. 257), vilket är tankegång som används för att skapa påståenden och nå resultat i problemlösning. Kopplingen mellan analysverktyget och teorin med de tudelade begreppen är uppenbar med tanke på att ”Lithner remarks that reasoning can either be seen as thinking processes, as the result of such processes, or as both” (Bergqvist, 2007, s. 350). Resonemang fördjupas till att omfatta allt tänkande relaterat till problemlösning:

> Lithner (in press [2008]) defines reasoning as any way of thinking that concerns task solving, it does not have to be based on formal deductive logic, and can denote even as simple procedures as recalling facts (i.e. memorized reasoning) (ibid., s. 350)

Kreativt resonemang baserat på matematiskt grundlag kallas härefter för CR, ”creative mathematically founded reasoning”. Om vissa kontextuella krav uppfylls vid exempelvis matematisk problemlösning klassas enligt Lithner och Bergqvist resonemanget som CR. Bland dessa krav är att resonemanget i alla fall till dels ska vara nytt för den som resonerar. Ett annat krav är att resonemanget ska innehålla strategival och/eller implementationer på grundval av argument som motiverar varför konklusionerna är sanna eller trovärdiga (plausible[1]).

[1] resonemang baserat på argument som inte nödvändigtvis är lika strikta som i bevisföring

Dessutom ska argumenten vara mer eller mindre förankrade i centrala matematiska egenskaper till komponenterna i resonemanget (mathematical foundation). Ramverket definierar uppgiftskomponenter som objekt (till exempel funktioner), transformationer (vad man gör med objektet, eller funktionen) och begrepp (närmast identiskt med Talls axiomatiska koncept). En komponent sägs ha en matematisk egenskap om egenskapen är accepterad av den matematiska societeten som sådan.

Ramverket skiljer kontextuellt mellan inre egenskaper som är centrala för problemlösningssituationen och ytegenskaper som har liten eller ingen relevans i densamma situationen. Dessa centrala matematiska egenskaper till komponenterna i resonemanget förstås här i direktrelation till Talls axiomatiska begrepp. Ett viktigt förtydligande är att CR kan ses som en produkt av kreativt matematiskt tänkande. Dessa kreativa tankeprocesser är i matematisk problemlösning karakteriserade med flexibilitet, åtkomsten av olika tillvägagångssätt eller infallsvinklar samt att processerna inte hindras av fixering. Om förståelsen av derivatan till en funktion anses synonymt med brantheten till en funktionsgraf, kan det uppfattas som naivt i ett sammanhang då man är ute efter en precis definition av derivatan, medan det skulle vara ett gott exempel på CR för en mellanstadieelev.

Imitativt resonemang eller IR kallas här även för ”copy & paste” eftersom det inte krävs förståelse eller interaktion till andra begrepp för att ”lösa” uppgiften. Exempel på IR är när man har memoriserat en algoritm eller ett svar eller när man ser på ett textboksexempel. De två olika typerna av IR kallas alltså för memoriserat resonemang (MR) och algoritmiskt resonemang (AR).

En lösningsprocess kan innebära en blandning av IR och CR. Om man till exempel till den största delen kan lösa problemet med IR men inte helt, utan att det krävs en liten del av CR, kallas det för lokalt kreativt resonemang (LCR). Om det för att lösa problemet inte alls krävs IR, utan enbart CR, kallas resonemanget för globalt kreativt resonemang, (GCR).

Första universitetsårets läroböcker i matematik i Sverige består av upp till 70 % uppgifter av typen ”copy and paste” (Lithner, 2003, 2004; Bergqvist, 2007), vilket innebär att studenterna inte behöver visa prov på kreativt matematiskt resonemang för att lösa de flesta uppgifterna i läroboken. Fynden från studier som Bergqvists (ibid.) kan återspeglas i examenssituationer, om målet med examen inte är att testa om studenten klarar av att lösa problem som är baserade på (för studenten) okända situationer. Hon kunde bland annat konstatera att, för att få godkänt på 15 av 16 undersökta examina behövdes bara IR.

Risken finns, att studenter kan klara av grundkursen *Kalkulus 1* vid Universitetet i Tromsø genom metodbruk som inte kräver nödvändig reflektion och som heller inte bidrar till kreativt matematiskt resonemang:

> If the fundamental concepts of calculus […] prove difficult to master, one solution is to focus on the symbolic routines of differentiation and integration. […] The problem is that such routines become just that – routine – so that students begin to find it difficult to answer questions that are conceptually challenging. The teacher compensates by setting questions on examinations that students can answer and the vicious circle of procedural teaching and learning is set in motion. (Tall, 1996, s. 306)

Med andra ord riskerar studenter att ställas inför framtida situationer, där de yttre förväntningarna inte kan infrias. I sådana framtida situationer förväntas att man kan reflektera över och förstå när en specifik metod är lämplig att använda och värdera resultatet.

Hähkiöniemi (2004) fann ut att processförståelsen *att derivera* inte är avhängig av begreppsförståelsen av *derivatan*. Vidare fann han ut att studenter, i en problemlösningssituation som kräver användning av specifika begreppsstrukturer, kan ha relevant begreppsförståelse utan att använda sig av den. Detta leder till svårigheter för studenten som, i problemlösningssituationen, uppenbart inte klarar av att koppla ihop form och innehåll.

Viholainen (2006) behandlar matematisk begreppsförståelse hos två matematiklärarstudenter i anknytning till funktioners deriverbarhet. Utgångspunkten till analysen var fyra diskontinuerliga men deriverbara funktionsuttryck och deras grafiska framställning. Studenternas begreppsdefinition av en funktions deriverbarhet i en punkt ledde till kognitiv konflikt då den vilade på begreppsbilder baserade på begreppen derivata, tangent och kontinuitet. En konflikt i begreppsförståelsen uppstod eftersom derivatan tolkades synonymt med tangenten till grafen. Studenten i fråga tycktes se tangenten och alltså derivatan till funktionen i en punkt synonymt med tangenten och alltså derivatan i en punkt. Begreppsdefinitionen av deriverbarhet utgick från kopplingar mellan begreppsbilderna till derivatan och tangenten, vilket bidrog till att deriverbarhet tolkades som synonymt med möjligheten att dra en tangent. Studenten ansåg det som möjligt att dra tangent i aktuell punkt oavhängig kontinuitetskrav, vilket tydde på konflikt i begreppsdefinitionen av kontinuitet. Den kognitiva konflikten synliggörs när deriverbarhet sägs vara avhängig av kontinuitet och funktionen i fråga är diskontinuerlig.

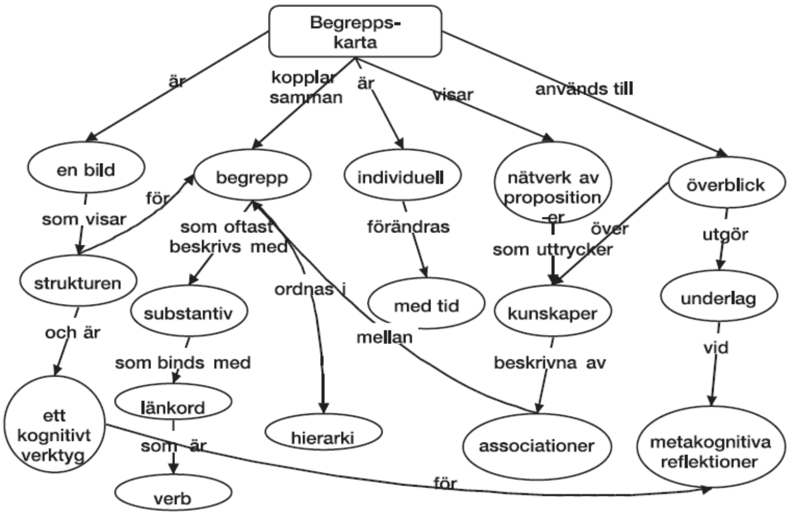
Tall & Vinner (1981) beskriver hur en metod som tidigare var gunstig för förståelsen senare kan ställa till med problem. När matematiknivån hos studenten blir mer och mer avancerad kan det vara hämmande att försöka representera ett matematiskt begrepp som en mental bild. Den tidigare mentala bilden av ett begrepp som var gunstig för förståelsen hänger kvar när nya begreppsstrukturer bildas, vilket kan leda till problem om inte intuitionen som den mentala bilden framkallar kan kontrolleras.

> At more advanced levels it becomes far more difficult to visualise the concepts as mental pictures and they [the students] can never be sure of the intuitions suggested by their concept image [...]. The mental pictures which served the students well at an earlier stage may now become an impediment (ibid., s. 169).

Grevholm (2005) beskriver ingående hur begreppskartor kan vara till hjälp under inlärningssituationer och en begreppskarta kan sammanfattas som följer:

> Begreppskartan är en bild som representerar en persons kunskaper vid ett visst tillfälle uttryckta genom påståenden. Påståendena länkar olika begrepp till varandra med hjälp av länkord, som oftast är verb. Begreppen är i regel substantiv. ... Länkarna visar hur de olika begreppen är förbundna med varandra i ett [hierarkiskt] nätverk, en kognitiv struktur (ibid., s. 23).

Exempel på en begreppskarta över en begreppskarta:



Figur 2:6 Exempel på en begreppskarta över en begreppskarta (ibid., s. 24)

En begreppskarta är till stor del en pågående reflektionsprocess, vilket gör den lämplig till att få insikt i en individs begreppsbilder och begreppsdefinitioner, vilka tillsammans med reflektion bygger upp begreppsförståelsen. Detta återspeglas i Gray & Tall (2001) och i Figur 2:4 ovan.

En begreppskarta kan ses som ett slags flödesdiagram. Freudenthal (1978) kritiserade bruket av flödesdiagram inom *educational technology*[2].

> Frames beside and under each other are joined by arrows, and even if the text within the frames is meaningful, the meaning of the arrows remains undisclosed; for instance reading an arrow back and forth between two frames as a feedback may only mean that the term feedback is used, without any content. Nothing is left of the force of concreteness and visualisation of flow diagrams as pictures of processes. All remains as vague and abstract as ever, and the flow diagram is only a deceptive appearance (ibid., s. 137-138).

En begreppskarta är ett sätt att se på begrepp i relation till deras inbördes relationer. Hur man ser på grafer är en annan slags visualisering av begrepp.

2.6 Grafer och gester

Ett fenomen observerat över tid kan få matematisk betydelse genom att fenomenet beskrivs med hjälp av en visuell graf av en funktion som varierar över tid. För att grafen ska få betydelse, krävs att någon visualiserar den. Det vill säga att en person är beroende av något för att kunna visualisera grafen. Detta något kan tolkas olika beroende på vem som visualiserar vad. Först och främst måste personen veta vad han eller hon försöker ”se” i grafen. Beroende på förkunskaperna till personen som försöker ”se” något i grafen och i vilken kontext personen befinner sig i, visualiseras grafen för personen. Det är här som begreppsförståelsen kommer in i sammanhanget.

Matematiska definitioner kan ange vad som anses giltigt i en kontext, men begreppsbilden är beroende av begreppsdefinitionerna. Den visualiserande personen har sin förståelse av matematiska begrepp som ingår i begreppsdefinitionen vilka leder personen till att förstå grafen därefter (Tall, 1991). Sjögren (2004) använde 10 exempel på grafer med specifika frågor som diskussionsunderlag och diskuterade med studenter vad man egentligen kan ”se” i en graf. Syftet ”var att få studenterna att förstå att man inte kan ”se” vad som händer punktvis. För att ”se” saker och ting I en graf måste man veta vad man ser, ockh för detta går det åt matematiska insikter” (Sjögren, e-post, 2 april, 2009).

Tall & Watson (2001) studerade undervisningsmoment med derivatan till en punkt i en funktionsgraf. De undersökte effekterna av att en lärare använde gester som komplement, för att förena de visuella och de symboliska idéerna av derivatan. En effekt var att dessa elever visade större flexibilitet i en problemlösningssituation, eftersom de i större grad använde sig av visuella processer än de elever som undervisades utan gester. Detta resultat är föga överraskande i likhet med Jørgensens (2006) slutsats att ett rikt och kompakt nät av relevanta begrepp är en fördel vid problemlösningssituationer.

[2] saknar kort svensk översättning

Eftersom en gest är en synlig aktivitet och tillika process som uttrycks över tid, kan kanske också en gest allena eller som komplettering underlätta förståelsen av en situation som är en process. Likaledes kan en gest vara en god komplettering då man beskriver ett objekt eller hur ett objekt ändras. En backe kan beskrivas med hjälp av en gest, som då kan representera både backen, dess branthet och förändringen i branthet.

Om inte gester är relaterat direkt till tänkande via sinnesintryck har jag svårt att föreställa mig hur teckenspråk annars skulle kunna vara möjligt som uttrycksmedel. Radford (2009) har fokuserat på gesters betydelse i processer som exempelvis tankeprocesser och konkretiserande. På liknande sätt som avsnitt 2.4.3 beskriver hur ”embodied objects” kan interagera med gester för att skapa ett axiomatiskt begrepp som ligger till grund för personens teoribyggande (Gray & Tall, 2001), anser Radford att gester interagerar tillsammans med olika sinnesaspekter för att kognitivt och socialt skapa en mening.

> the cognitive possibilities of gestures can only be understood in the broader context of the interplay of the various sensuous aspects of cognition as they unfold against the background of social praxes (Radford, 2009, s. 112)

Han har en ”materiell” eller ”textuell” grund för tankekonceptet, vilket leder till att man kan se gester som en genuin beståndsdel i tänkandet.

> The very texture of thinking ... is also made up of speech and our actual actions with objects and all types of signs. Thinking, hence, does not occur solely in the head but in and through language, body and tools. As a result and from this perspective, gestures, as a type of bodily action, are ... rather genuine constituents of thinking. (ibid. s. 113)

För att underlätta förståelsen av ett koncept eller för att underlätta för den logiska ”röda tråden” i en problemlösningssituation kan man ta gester till hjälp. Exempelvis kan man i en problemlösningssituation använda ett finger som fysisk tangent till en graf och med hjälp av gester inse om derivatan till den representerade funktionen ökar eller minskar, relativt en ökning till funktionsargumentet. Radford uttrycker att: “Gestures may be seen as part of one of the sensuous modes – the tactile mode – which is demonstrated in the efforts at conceptually grasping something” (ibid., s. 115).

Hähkiöniemi (2004) utförde en kvalitativ undersökning på studenter, då perceptuell och symbolisk representation var utgångspunkt i inlärning av derivatan. En student följde med hjälp av en penna (som perceptuell eller visuell tangent) grafen till en funktion och insåg att i en knäckpunkt existerade inte derivatan eftersom tangenten till funktionen i den bestämda punkten inte var entydig. Derivatan var inte enbart noll (eller något annat värde) i knäckpunkten.

Han menar att gesten är perceptuellt direkt involverad i att studenten har förstått sambandet mellan tangenten i den symboliska grafen och derivatan som en konkret förändring.

Det är viktigt att skilja mellan talets och gesternas olika kommunikativa roller:

> Fully focused on gestural communication, the articles [about gestures role in thinking] fail to make a clear distinction between the roles of speech and that of gesturing in constituting and sustaining mathematical discourse. The lack of differentiation between these two rather dramatically different modes of communicating [gesturing and speaking] is likely to lead the reader to conclusions the authors themselves would find difficult to accept (Sfard, 2009, s. 192)

Hon betonar vidare att det är viktigt med forskning på gester, vilket denna text är ett bidrag till. Gester kompletterar den kognitiva bilden, vilket leder till att den matematiska förståelseprocessen kan underlättas av gester (Tall & Watson, 2001; Gray & Tall, 2001; Hähkiöniemi, 2004; Radford, 2009; Sfard, 2009). Gester kan i sådana fall vara med på att bygga upp förståelsen av begreppet derivata. I detta arbete antas att det är möjligt att observera gester genom en kvalitativ intervjusituation, vilken beskrivs som metod generellt i sektion 3.1 och specifikt för detta arbete i avsnitt 3.3 nedan.

Om man ser gester som en möjlig del av problemlösningsprocessen direktrelaterat till tänkande, innebär det att man borde kunna analysera gester på lik linje med resonemang med hjälp av analysverktyget, eftersom resonemang i analysverktyget omfattar allt tänkande relaterat till problemlösning. Gester har inte kategoriserats som resonemangsform i arbeten som Lithners (2003, 2004, 2008) och Bergqvists (2007).

3 METOD

Begreppet forskning används ofta synonymt med vetenskapligt arbete, vilket kan ses som en systematisk process där vetandet utvecklas och ny kunskap blir till i ny eller gammal form. Denna ”nya” kunskap kommer till genom att man använder sig av en vetenskaplig metod under insamling och bearbetning av informationen (delar av datamaterialet) som i sin tur förväntas att belysa den ursprungliga problemställningen. Under denna systematiska process möter man abstrakta (eller konkreta) begrepp och objekt som behöver närmare beskrivning och precisering i förhållande till användningen av dessa fenomen.

Förförståelsen och nödvändiga prioriteringar i den oändliga mängden information som finns i varje undersökningssituation är medbestämmande i forskarens begreppsbildning. Vetenskapliga begrepp är ofta avhängiga av ögonen som ser dem, så även i detta arbete. Ett vetenskapligt arbete är värdelöst innan man sätter det in i ett sammanhang, alltså i en relation till användarna och användningsområdet. Fokus i detta arbete är förstaårsstudenters begreppsförståelse av derivatan och syftet är att genom resonemang bättre förstå komplikationer som begreppsbilder kan orsaka under problemlösningssituationer.

Analysen baserar sig till stor del på studenternas visualisering och förståelse av grafer till kontinuerliga funktioner, som tolkas genom analys av deras:

a) resonemang (Lithner, 2008),
b) gester (Radford, 2009) och
c) begreppsbilder (Tall & Vinner, 1981).

Under analysen av data är det viktigt att finna sammanhang mellan teori, metod och slutligen resultat, vilket i mitt fall kommer att basera sig på tolkade begreppsbilder. Vad är det resultatet av analysen egentligen visar? Vilken riktighet och vilka begränsningar har det vetenskapliga arbetets produkt?

Begreppsstrukturerna som ingår i ett vetenskapligt arbete ligger också till grund för hela forskningsprocessen, där det krävs metoder för att resultat skall uppnås. En student, som vid den skriftliga förundersökningen bara visar prov på instrumentell begreppsförståelse av derivatan, får genom en intervju möjlighet att visa prov på relationell förståelse. Forskningsmetoden i ett vetenskapligt arbete är vital, eftersom ett vetenskapligt arbete har som mål att presentera resultat enligt en vetenskapligt accepterad metod och således riskerar resultatet att bli utan vetenskapligt värde om metod saknas eller om repeterbarhet inte är möjlig.

3.1 Kvalitativa och kvantitativa metoder

En forskningsmetod kan vara kvalitativ, kvantitativ eller en blandning av de två. För en kvantitativ metod, kan mängden data analyseras. Resultaten sägs ha statistisk betydelse om de är statistiskt signifikanta. Ett exempel där kvantitativ metod används är TIMSS (Grønmo & Onstad, 2009). Om däremot grundlaget till dataanalysen är baserat på en undersökning av alltför få individer, kan inga generella resultat verifieras statistiskt, eftersom gruppen av individer är för få. Fokus i detta arbete ligger på den kvalitativa intervjumetoden, vilket innebär att studien angår relativt få individer. Det skapar möjlighet att gå mer i djupet av hur en del studenter uppfattar och använder sig av det matematiska begreppet derivatan i specifika situationer. Man kan använda resultat från en kvalitativ studie kvantitativt, likväl som möjligheten naturligtvis finns att kvalitativa undersökningsresultat är tillfredsställande i sig själva, utan en efterföljande kvantitativ undersökning. Oavsett val av metod, kan det vara en fördel om man har möjlighet att kontrollera undersökningen, innan själva undersökningen.

3.2 Pilotering

En pilotstudie kan ha syftet att dels kontrollera att upplägget av huvudstudien är fungerande och dels samla in värden, som sedan kan användas som kontrollvärden, till den fullvärdiga studien. Före intervjun i detta arbete, utfördes två studier, nämligen *före förundersökning* och *förundersökning*, vilka liknade pilotstudier. De var med på att förbättra kvaliteten på intervjun, i det avseendet att a) målgruppen blev relevant för studien och b) fokus i intervjun blev snävare. Dessutom kunde eventuella onödvändigheter och felaktigheter på grund av exempelvis bristande rutin undvikas i intervjusituationerna, tack vare analys av pilotstudierna.

3.3 *Intervju*

Kvale (1997) skildrar en intervjusituation i följande sju stadier:

1. Tematisering	-	Vad som skall undersökas och varför.
2. Planläggning	-	Hur, inklusive moraliska aspekter.
3. Intervjuandet	-	Kontextuellt reflekterande med hjälp av intervjuguide.
4. Transkribering	-	Analysförberedelser av intervjumaterialet. Ofta från tal till text.
5. Analysering	-	Analysmetod bestäms utifrån 1, 2 och 3.
6. Verifiering	-	Generaliserbarhet, reliabilitet och validitet av undersökningen.
7. Rapportering	-	Förmedling av resultat efter vetenskapliga kriterier på en etisk och läsbar standard.

Jag har följt dessa sju stadier, men inte kronologiskt. Till varje stadium följer etiska krav och riktlinjer, vilka det talas mer om under avsnitt 3.6 etik och krav. Genom att man lägger till rätta för en fruktbar datainsamling av exempelvis transkriptioner av ljudupptagningar under intervjusituationen och nedtecknade texter och bilder, så startar egentligen analysen innan själva datainsamlingen (Kvale, ibid.).

Många undersökningar tar utgångspunkt i att isolera variabler, vilket förväntas leda till att man kan uttala sig om de specifika orsakerna till det studerade händelseförloppet. Med tunn beskrivning menas att man inte kan uttala sig om andra händelseförlopp än det studerade (Sørhaug, 1996). När fokus, i en intervjusituation, är på hur och vad en student resonerar angående derivatan, kan det ses som en tunn beskrivning. En tjock beskrivning däremot, relaterar den aktuella händelsen inte isolerat, utan i vidare kontext till andra händelser. Hur studenten svarar under intervjusituationen i relation till förundersökningen, ger en om inte tjock, så i alla fall tjockare beskrivelse än om man bara ser till intervjusituationen. Man söker efter mönster som kan skildra processer som utgår ifrån de värderingar som ligger till grund för de val som genomförs, vilket ”blir beskrevet som kjernen i tykke beskrivelser og kvalitativ metodikk” (ibid., s. 47).

Under planläggningen av intervjufrågorna påbörjades även analysen av data, i och med att jag hade förväntningar på att intervjufrågorna ska ge kunskap om problemställningarna till detta arbete. Som exempel kan nämnas att jag i stadium 2, planläggningen av intervjusituationen, undrade över hur man i intervjusituationen kan dokumentera gester i relation till resonemanget till studenten.

3.4 Validitet och reliabilitet

Forskningsmässigt finns olika metodiska tillnärmningssätt, vilka bör ha sammanhang med kunskapssynen. Med andra ord påverkas resultatets giltighet av metodvalet. Giltighet betyder här att man kan generalisera så att man kan använda resultaten i andra situationer. Inom naturvetenskapen kan man med hjälp av kvantitativa forskningsmetoder falsifiera ett påstående eller en teori, men det går inte att verifiera till 100 % eftersom en undersökning inte är hela verkligheten. Begränsningar finns i alla vetenskapliga undersökningar.

3.4.1 Validitet

Om förståelse är målet för undersökningen, måste man noggrant värdera om alla delar av studien är genomförda på ett gott sätt, vilket kan relateras till validitetsbegreppet. Undersöker man det man tror att man undersöker? Kvale (1997) menar att såvida en metod undersöker det den ska undersöka eller om resultaten passar in i den verkliga världen, så är den kvalitativa forskningen en giltig (valid) vetenskaplig forskning.

Forskaren, som huvudinstrument i både datainsamlingen och analysen, ges en unik möjlighet att "inifrån" tolka standardvärden till de faktiska situationerna. Denna inre validitet kan ses som jämförbar med förändringen av den kontextberoende begreppsbilden, vilken i olika tidsperioder är under utveckling. Detta leder till att begreppsbilden är begränsad och påverkad av forskarens egna fördomar, tankar och förhandsföreställningar. Om en informant har använt derivatan som operator eller symboliskt objekt under en process i en situation som jag felaktigt har tolkat som en icke-process, påverkas trovärdigheten till slutsatserna grundade på situationen. Likaledes, om deriveringsprocesser som studenterna använder sig av, är förenklande statiska strukturer vilka leder till bredare förståelse av deras begreppsbild av derivatan och jag tolkar dem som något annat, så är detta arbete inte en valid studie.

För att minska risken för feltolkning och därigenom samtidigt öka den inre validiteten ges informanterna möjlighet att bekräfta eller avfärda de aktuella transkriptionsdelarna som berör dem. Man kan aldrig veta exakt vad en informant har tänkt i en specifik situation, vilket medför en risk att man kan feltolka resonemanget som speglar vad en informant har tänkt och menat. En annan begränsning med denna text är att information ges på ett språk tolkas och uttrycks på ett annat. Begreppsbilden skapad av det svenska begreppet *derivatan* sammanfaller troligtvis inte helt med begreppsbilden skapad av det norska begreppet *den deriverte* även om kontexten är identisk, vilket påverkar validiteten till detta arbete.

En yttre validitet är relaterad till om undersökningen kan användas i andra situationer. Eftersom klassificeringen av resonemang och valet av frågor till intervjusituationen är kontextberoende, finns en begränsning i ramverket sett till validiteten. En feltolkning som påverkar den inre validiteten negativt, kan få konsekvenser i den yttre validiteten om man till exempel föreslår vidare forskning baserat på resultat av feltolkningen. Den yttre validiteten kan jämföras med att olika individer uppfattar samma objekt, fenomen eller process på olika sätt.

Exakt samma intervjufråga eller resonemang kan klassas som GCR i ett tillfälle och som LCR i ett annat. Detta kan till exempel ske på bakgrund av att vilka två studenter som helst är unika och därigenom har de olika förutsättningar inför ett problem. Ett annat scenario är att exakt samma resonemang kan, för en och samma individ, gå från att vara GCR till IR vid ett senare tillfälle. Dessutom finns risken att jag inte ser andra kriterietillhörigheter till resonemangen än de som är begränsade till analysverktygets kriterier.

Begreppsuppfattningen påverkar validiteten när en metod leder till ett forskningsresultat, eftersom premisserna i metoden är en del av förförståelsen. Genom konsensus i det vetenskapliga samfundet bestämmes vad som anses som riktigt sätt att inrangera ett fenomen med dess tillhörande begreppsuppfattning (Schilhab & Hansen, 2006).

3.4.2 Reliabilitet

Ett statistiskt säkert standardvärde säger hur pålitligt (reliabelt) och giltigt ett kvantitativt resultat är. Men ser man på individnivå, kan en och samma individ svara både riktigt och felaktigt på samma fråga, fast vid olika tidpunkt. Kontexten är med andra ord väldigt viktig. Ett kvantitativt resultat kan exempelvis indikera hur stor lösningsfrekvens man kan förvänta sig på en specifik matematisk fråga. Man kan få ett helt annat svar på samma fråga om man analyserar frågesvaret kvalitativt, alltså med fokus på hur, vad och varför individer har svarat eller inte svarat. Hur pålitlig eller reliabel denna undersökning är, beror på hur väl den passar in i verkligheten, vilket i sin tur är avhängigt av att man ska ha möjlighet att kontrollera eller repetera studien.

Informationsmaterialet till detta arbete begränsades till exempel genom att intervjuerna inte filmades. Detta får till följd att reliabiliteten till uttal om gesters betydelse för begreppsförståelse också begränsas i detta arbete, i och med att man inte kan se gesterna i eftertid. För att höja både validitets- och reliabilitetsvärdet i detta arbete, inkluderas hela transkriptionsavsnitten av de intervjufrågor som huvudanalysen baserar sig på, frågorna 1-4, i bilaga 4. Men även här finns risken att man har missat i själva transkriptionen. Informanterna fick chansen att kommentera transkriptionerna som gällde dem, med följden att ingen av dem har haft några ändringsförslag till respektive transkription.

3.5 Repeterbarhet

För att man ska kunna upprepa eller kontrollera denna studie, är det viktigt att återge tillvägagångssättet detaljerat. Det viktigaste dokumentet för att kunna repetera denna undersökning är intervjumallen, bilaga 3. Analyserna som förekommer i metoddelen är grundlag för intervjumallen, vilken ger upphov till huvudanalyserna i analysdelen. De delar av den transkriberade texten som analysen baserar sig på, återfinns som bilaga 4.

3.5.1 Från tankar till intervju via intervjumall

Tankarna kring och utformningen av förundersökningen påverkade utformningen av intervjumallen, bilaga 3, vilken jag följde kronologiskt för alla fyra intervjuerna som utfördes. Med en intervjumall har man mer kontroll på intervjusituationen så att intervjuerna, till utförandet, avviker så lite som möjligt, samt att repeterbarhet möjliggörs. Ett antal frågor med olika fokus på *derivatan* testades ut, under en väldigt givande rollspelsintervju, med Silje Jørgensen, fjärdeårsstudent på lektorutdanningsprogrammet. Hon kom med flera goda inspel, vilket underlättade valet och ordningen av intervjufrågorna tillsammans med inledning och avslutning av de efterföljande fyra intervjuerna. Bland annat bättrade Jørgensen på den skriftliga norskan till frågorna och att varje fråga presenterades på ett separat A4-ark, vilket bidrog till bättre översiktlighet och kontroll, i och med att informanterna inte kunde se andra frågor samtidigt. Jørgensen poängterade även att informanterna har mest av sin relevanta matematiska begreppsförståelsebakgrund i L97 samt att differentialekvationer inte ingick i kurslitteraturen på gymnasiet, vilket borde beaktas i undersökningen. Jag valde därefter att ha med frågan om differentialekvationer som utmanande extrafråga.

3.5.2 Inledningsfrågor

Inledningen av intervjun utformades så att kontrollfrågor kan visa användningen av begreppet derivata relaterat till förundersökningens indelning i process och/eller objekt. Frågan, när man *inte* kan använda derivata eller derivation möjliggjorde högre matematiskt tänkande. Inledningen avslutades med en specifik fråga, genom vilken det är tänkt att man ska kunna diskutera svaret man får, relaterat till frågans utformning och ordval.

Efter inledningsfrågorna följde fem numrerade frågor där utgångspunkten var visualisering av grafer, vilket även preciserades och poängterades under intervjusituationen precis innan fråga 1 påbörjades. Det var i första hand tänkt att dessa fem frågorna skulle användas för att basera den jämförande analysen mellan de fyra informanterna. Av avgränsningsskäl, valdes den sista numrerade frågan bort från huvudanalysen. För att ha en möjlighet att följa och analysera resonemang, underlättar det om informanten tänker högt. Att tänka högt är ingen naturlig situation. Därför var det som hjälp till både mig och informanterna, när jag fetstilt lade in ”Tenk HØYT!”, en till två gånger i var och en av de fem numrerade frågorna. Vilken effekt detta hade på vad eller hur informanterna svarade vet jag inte, men det påverkade mest troligt den intervjuade personen på något sätt, eftersom de annars kanske inte skulle ha tänkt högt i lika stor utsträckning.

3.5.3 Fråga 1

Fråga 1 (och 4d) är till en början resultatet av en reflektion kring en kvalitativ studie med fokus på elevers grafiska förståelse av derivation:

> Vidare kunne analysen av intervjua tyda på at nokre av dei kognitive konfliktane hadde utgangspunkt i upresist matematisk språk. Kva er skilnaden på at grafen til den deriverte er stigande og at den er positiv? Det kunne sjå ut som at elevane vart forvirra av dette, men for å avgrensa oppgåva vart ikkje dette gått nærare inn på. Språkdimensjonen kan såleis vera eit utgangspunkt for vidare arbeid. (Jørgensen, 2006, s. 100)

I fråga 1 förekom endast texten: “Kan grafen til den deriverte funksjonen stige samtidig som derivaten til funksjonen er negativ? Hvorfor / hvorfor ikke? Tenk HØYT!”

Denna fråga hade två syften. Det ena var att se om och i så fall vilka slags svårigheter som uppstår på grund av att endast text finns att relatera till, när fokus är på visualisering av grafer. Det andra syftet var att kunna diskutera formuleringen av en textuppgift. För att kunna diskutera om en graf kan vara till hjälp för förståelsen av derivata eller inte, finns en identisk fråga som 1 men vid ett långt senare tillfälle under intervjun, nämligen under delfråga 4d då texten kompletterades med grafen till den deriverade funktionen.

3.5.4 Fråga 2 och 3

Genom fråga 2 kan en grafisk tolkning av derivatan studeras, medan fråga 3 kopplar förståelsen av en text till förståelsen av ett fysiskt fenomen relaterat till derivation. Frågorna 2 och 3 möjliggör jämförelse mellan denna studie och resultat från rapporten TIMSS 1995 (Angell, Kjærnsli & Lie, 1999), eftersom frågorna 2 och 3 är identiska med frågorna K05 respektive K03 i TIMSS 1995. Bägge frågorna finns med i Vikses (1999) studie och tillsvarande fråga 2 är inkluderad i Jørgensen (2006). Graferna och funktionerna i K05 har många pilar som kan förvirra. I fråga 2 har pilar tagits bort från funktionerna och de pilar som inte anger x- och y-axlarnas positiva riktningar i graferna.

3.5.5 Fråga 4

Denna fråga inleds med texten ”Grafen $y = f'(x)$ er vist på figuren. Anta at funksjonen $y = f(x)$ viser salget av en ny mattebok de første årene” och grafen till den deriverade funktionen. Frågan består av fem delfrågor, varav delfrågorna 4a, 4b och 4c samt grafen kommer direkt från Jørgensen (ibid.) och är tänkt att användas för att dels läsa ut information från en graf och dels för visualisering av inte bara förstaderivatan utan även andraderivatan. 4d kompletterar fråga 1 med grafen till den deriverade funktionen.

Förstaårsstudenterna som precis har läst *Kalkulus 1* vid Universitetet i Tromsø är vana att visualisera och analysera derivatan till en funktion $f(x)$ när funktionen är känd. Delfråga 4e säger förhoppningsvis någonting om hur studenterna ”tänker omvänt än de är van till”, nämligen hur de visualiserar och analyserar funktionen $f(x)$ då grafen till den deriverade funktionen, det vill säga $f'(x)$ är känd. Delvis motsvarar detta att studenterna sätter sig in i en ny situation, reflekterar och resonerar under problemlösningsprocessen, vilket kan liknas vid att man möjliggör för CR som Lithner (2008) och Bergqvist (2007) förespråkar.

3.5.6 Fråga 5

Syftet med denna fråga är att möjliggöra att intervjusituationen momentant kan bredda begreppsförståelsen hos informanten. Studenten ska på *olika* sätt avbilda grafen till derivatan av funktionen $f(x)$, när grafen till funktionen av $f(x)$ är given. Denna fråga utvecklades med hjälp av PPU-heltidsstudent Ingar Mæhlum Arntzens upplägg, då tillägnat en gymnasieklass som repeterade derivation. Han planerade och utförde upplägget under en praktikperiod studieåret 2008/2009 vid Universitetet i Tromsø. Ett möte med Arntzen då han redogjorde för sina erfarenheter kring sitt upplägg skapade god reflektionsgrund till min anpassning av fråga 5.

3.5.7 Avslutningsfrågor, E1 och E2

Avslutningsvis i intervjumallen finns två extrafrågor, E1 och E2, för att kunna användas vid behov. Syftet med E1 var att diskutera mer kring begreppsbilden av derivatan i relation till en graf. Sjögren (2004) använde E1 som diskussionsuppgift vid Högskolan i Skövde och man kan till exempel diskutera vad man kan ”se” i en graf.

Förhoppningsvis kan denna uppgift vara till hjälp för en student som på en grundläggande nivå sliter med att resonera kring derivationsbegreppet. E2 är en utmaning som, baserat på förundersökningen, kräver högre matematiskt resonemang för var och en av de fyra informanterna för att kunna lösas. Den är identisk med en uppgift i Hole (1997) och kan lösas med hjälp av en linjär differentialekvation av första ordningen, vilket ingår i kurslitteraturen till *Kalkulus 1* men inte i L97.

3.6 Etik och krav

Alla har förutfattade meningar, baserade på bland annat teoretisk bakgrund, vilket får konsekvenser när man agerar. Man kan inte alltid välja mellan alternativa metoder inom forskning, utan att hänsyn av olika slag måste tas. Det vetenskapliga arbetet har olika faser, där varje fas får sina forskningsetiska implikationer beroende på vilken hänsyn som tagits. Mellan metodiska tillvägagångssätt och etiska värderingar kommer ett nära samspel ofta att finnas (Alver & Øyen, 1997). I detta arbete medför författarens val av den kvalitativa intervjumetoden också specifika etiska krav. Har man valt forskningsmetod, följer även indirekt etiska riktlinjer som man bör följa. Dessa kan givetvis ändras i takt med att undersökningen ändras.

Nationella som internationella krav finns till vetenskapliga arbeten. Dessutom finns många kontextuella etiska riktningslinjer och koder för hur man bör genomföra varje fas i en undersökning. Alver & Øyen (ibid.) menar att det inom kvalitativ forskning ofta råder asymmetri mellan forskaren och informanterna. I sådana fall finns risk för maktmissbruk. Men de asymmetriska relationerna, menar de vidare, är medel för att skaffa data med etiska reflektioner. Vid till exempel en intervjusituation kan man komma att få sensitiv information som man måste förhålla sig till på ett etiskt försvarbart sätt. Ärlighet till sig själv, informanten och till samhället är nära knytet till etiska val och kan få konsekvenser på exempelvis arbetets trovärdighet. Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste A/S (NSD) har godkänt denna studie som projektnummer 20428, vilket är ett etiskt kvalitetskrav.

Intervjusituationerna var planerade att vara ömsesidigt givandes, att både informanterna och jag skulle ha möjlighet till att reflektera över situationer och därigenom se varje intervju som ett inlärningstillfälle. Jag var noga med att inte avslöja detta delmål till informanterna, eftersom deltagare i en kommunikation har för vana att försöka vara varandra behjälpliga och skulle därmed kunna påverka reliabiliteten till detta arbete negativt. I bilaga 5 kan man finna studenternas e-postsvar, som också avslöjar att flertalet fann intervjusituationen givandes för dem.

3.6.1 Anonymitet

För att denna undersökning ska kunna vara etisk försvarbar, är informantens anonymitet viktig. Studenterna, som deltog som informanter, fick information om studien samtidigt som de skrev under ett samtyckesutlåtande, bilaga 1. Där preciserades frivillighet och anonymitet samt att man när som helst kunde avbryta medverkan med eller utan begrundelse. Informanterna skrev namn, telefonnummer och e-postadress på samtyckesutlåtandet, som de lämnade in tillsammans med förundersökningen. Därav var kontakt till efterföljande intervju möjlig. Jag numrerade både samtyckesutlåtandet och tillhörande svarsark med samma siffra och lade undan samtyckesutlåtandet på säkert ställe i låsbart rum.

När analys av förundersökningen gjordes var alla informanternas svarsark anonyma, vilket bidrog till att ingen informant sorterades bort eller valdes ut till intervju på grund av till exempel namn. För att minimera risken av onödiga konsekvenser efter studien, gavs tillbakameddelande till informanterna innan studien avslutades. Något som inte är etiskt försvarbart, men som kan uppstå mer eller mindre medvetet när man analyserar data, är att forskaren utelämnar motsägelser eller det som forskaren anser inte passar in i studien.

När urvalet av fyra informanter till intervjusituationerna var gjort, innebar det indirekt en risk att de inte var anonyma för de övriga i undersökningen. Personerna som deltar i intervjuerna kan till exempel kännas igen av andra personer inom de 5-åriga masterprogrammen på grund av att det är relativt få som läser varje 5-årigt masterprogram. Risken till igenkänning ökar självklart ju färre antal personer som läser ett studieprogram som är representerat i denna studie.

De studenter som ska representera studien kan vara antingen sannsynlighetsbaserat utvalda eller inte det. Vanligt för kvalitativ forskning är att de inte är sannsynlighetsbaserat valda, om man inte generaliserar resultaten för mycket. För att få den informationen som man behöver, i en studie som denna, krävs det att informanterna väljs efter vissa föremålsenliga urvalskriterier. Samtidigt måste man vara medveten om att resultaten av det vetenskapliga arbetet också begränsas genom urvalet. Eftersom detta arbete undersöker förstaårsstudenters förståelse av det matematiska begreppet derivata, nyttar det lite om jag analyserar svar från en student som aldrig har stött på begreppet förut. Därför begränsas denna undersökning till att gälla de som enligt mig kan tänkas ha relevant kunskap, förkunskap och kompetens.

3.6.2 Urval 1

Fösta tanken var att de som tar *Brukerkurs i matematikk*, vid Universitetet i Tromsø under høsten 2008 kan tänkas vara en passande målgrupp. För att någon ska kunna bedöma hur en annan individ i en specifik kontext förstår ett centralt begrepp, kan skriftliga problemlösningsarbeten användas i form av till exempel examen eller obligatoriska inlämningsuppgifter. Obligatoriska uppgifter måste göras av studenter för att de ska tillåtas att gå upp till examen i *Brukerkurs i matematikk*. Analys av en sådan obligatorisk uppgift som har relevans till studenternas förståelse av derivatan ledde till uteslutning av denna målgrupp från huvudanalysen, vilket förklaras i avsnitt 4.1.

3.6.3 Förundersökning med information och samtyckesutlåtande

Arbetet med förundersökningen effektiviserades genom att ta reda på de möjliga informanternas ämnen respektive studieriktning under våren 2009. Det utkristalliserade sig till att gälla tre grupper. Ämnen, som studerades i de tre grupperna som förundersökningen utfördes på, var matematik i grupp 1, kemi i grupp 2 och informatik i grupp 3. Härefter kallas en person från grupp 1 för *matematiker*, grupp 2 för *kemiker* och grupp 3 för *IT-specialist*. De tre olika huvudansvariga för kurserna kontaktades och de lade in information om studien och samtyckesutlåtandet på Classfrontersidan till respektive kurs via Internet. Därigenom var jag säkrad att alla 55 fick möjlighet att kunna ta del av studien. Då inget svar angående intresse att vara med i undersökningen inkommit till mig, inom en vecka efter att informationen var tillgänglig på Internet, fick jag lov av respektive grupps föreläsare att ta 15 minuter av en föreläsning eller i en paus där jag muntligen informerade om undersökningen och om samtyckesutlåtandet, innan jag på tavlan skrev upp frågan:

Hva forstår du med DERIVATEN?

Samtidigt, som jag skrev upp frågan på tavlan, sa jag att ett annat namn för derivaten är ”den deriverte”. Jag nämnde även att eftersom jag pratar svenska, så har jag min begreppsförståelse utifrån svenska begrepp och hoppas de har överseende med om jag stavar fel på norska och att de säkert förstår den norska innebörden. Till studenterna delades ett blankt, olinjerat och orutat A4-svarsark ut, tillsammans med ett ark med information om undersökningen och förfrågan om de samtyckte till att delta i undersökningen (bilaga 1 Informasjonsskriv og *samtykkeerklæring*). De 23 svaren ledde fram till urval 2, valet av de fyra intervjuinformanterna till denna undersökning.

3.6.4 Urval 2

Min första tanke på antal informanter som skulle kallas till intervju var 10. Jørgensen (2004) använde sig av mellan tre och fem elever i djupintervju för sin studie. Den studien är dubbelt så omfattande i antal studiepoäng än denna, så jag bestämde mig för maximalt fyra intervjuer. Dessa valdes ut efter analysering av förundersökningen, där jag såg närmare på hur de använde begrepp förknippade till deras egen beskrivelse av derivatan. Kategoriseringen finns att tillgå i bilaga 2.

3.7 Insamling av data

Beroende på val av datainsamlingsmetod och datatyper, begränsas möjligheterna till verklighetsbeskrivning, eftersom metoden är kontextuellt processorienterad. Av den orsaken att huvuddelen av analysmaterialet i detta arbete baserar sig på intervjusituationer, valdes digital diktafon för ljudinspelning. Ljudet var mycket klart och tydligt återgivet från intervjusituationerna och endast vid ett tillfälle kunde jag inte höra eller förstå vad som sades. Detta var inte på grund av tekniken, utan på grund av bakgrundsljud. Val av transkriptionsmetod styrdes av Jørgensens (ibid.) arbete, eftersom det gick utmärkt att läsa och förstå transkriptionerna den undersökningen. Tabell 2:1 förklarar transkriptionssymbolernas betydelse i detta arbete:

SYMBOL	BETYDELSE
Vänsterställd 1:, 2:, 3: eller 4:	Ettans, Tvåans, Treans eller Fyrans uttalande följer efter :
Vänsterställd utan siffra	Forskarens uttalanden.
inryckt text	fortsätter utan avbrott från raden ovanför
/	Kort paus, mindre än 2 sek.
//	Lång paus, något mer än 2 sek.
// (tid i sek)	Lång paus, tid anges i parentes i sek.
[	Överlappande tal
Kursiverade ord	Speciellt betonade ord
!	Utrop
?	Frågande tonfall eller fråga
(händelse)	Aktivitet som inte kommer verbalt till uttryck
(min.sek)	Tidpunkten i minuter och sekunder efter intervjun startade

Tabell 3:1 Transkriptionssymbolernas betydelse i detta arbete

Exempel på transkriptionsavsnitt i detta arbete:

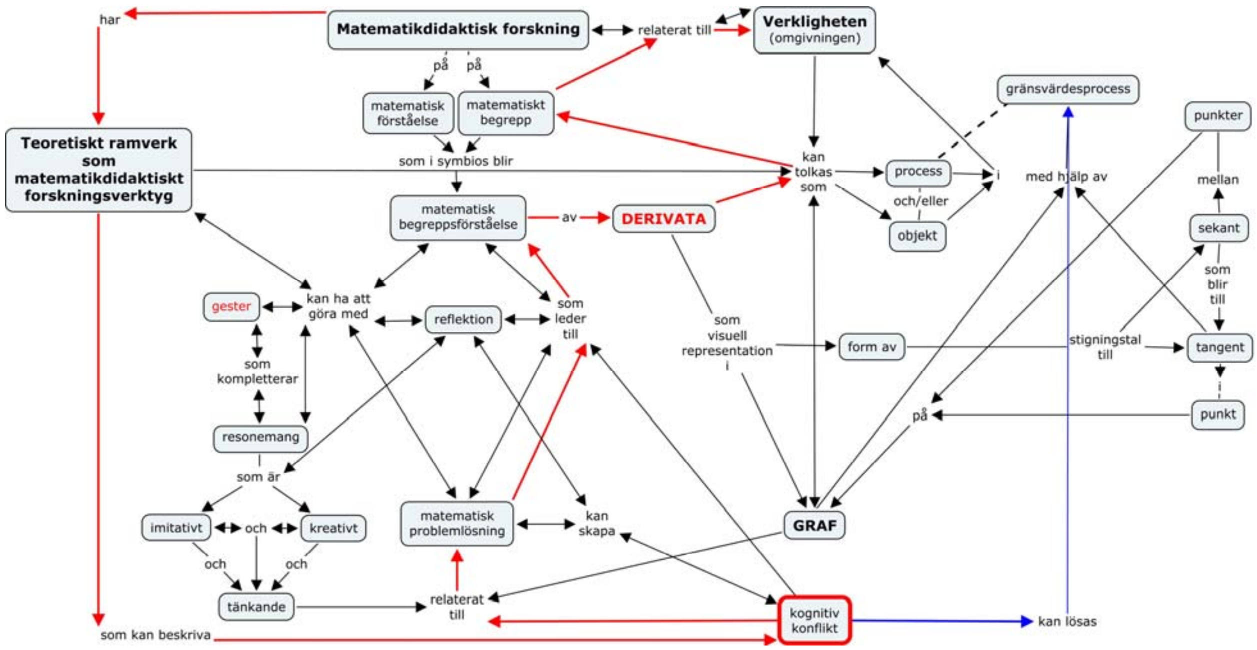
> 1: Ja selvfølgelig!
> Och därför är det i fetstil (hänvisar till och pekar på det fetstilta ”PS!” i uppgiftstexten)
> 1: OK! (fniss) / *nå* var æ med (fniss)
> Å då kan du // prova / vilket år // är salget på *topp* igen
> 1: Asså hvis den øker mest i år tre / minker mest i år syv / så vil æ tru at // (7 sek) vet ikke / æ
>   tenker automatisk år *fem* / [men
> [Mhm
> 1: E det riktig?
> Mmm
> 1: OK (fniss)
> Vad är derivatan i år *fem*?
> 1: // Null!

Här representerar ”1:” det som intervjuinformant nummer 1, Ettan, har sagt och varje vänsterställd rad utan att den börjar med en siffra betyder att det är jag som uttalar mig. Inryck i transkriberingen innebär fortsättning utan avbrott från raden ovanför. Orden ”men” och ”Mhm” uttalas samtidigt. De kursiverade orden *nå*, *topp* och *fem* är betonade. Efter frågan ”Vad är derivatan i år *fem*?”, pausar Ettan något mer än två sekunder. Fler transkriptionsavsnitt finns tillgängliga i bilaga 4.

4 ANALYS

Det förekommer tre olika analysmaterial i denna undersökning; en som utgår ifrån djupintervjuerna, en ifrån förundersökningen och den tredje före förundersökningen. Huvudmaterialet är framför allt baserat på frågorna 1-4 i intervjumallen (bilaga 3) och de transkriberade svaren (bilaga 4) till de fyra djupintervjuerna. Frågorna som användes i djupintervjuerna, kom till efter analys av förundersökningen, vilken utformades efter analys av studenters svar på en obligatorisk fråga under *Brukerkurs i matematikk*. De tre analysdelarna är alla beroende av hur jag ser på begrepp relaterade till derivatan i problemlösningssituationerna under intervjuerna.

Min bild av derivatan, under intervjuerna, kan representeras med hjälp av begreppskartan i Figur 4:1. Begreppskartan är till hjälp att strukturera reflektioner över derivatan, som en statisk beskrivelse under en dynamisk process:



Figur 4:1 Min begreppskarta, under intervjuerna, över matematikdidaktisk forskning på derivatan i relation till grafisk framställning

För den genomsnittlige kalkulusstudenten kan det ta längre tid än förväntat att utveckla en tillfredsställande förståelse av begreppet derivata (Bezuidenhout, Human & Olivier, 1998). En begreppskarta kan både synliggöra detta och effektivisera inlärningen av begrepp.

4.1 Före förundersökning

En översikt över begrepp, som används i uppbyggnaden av studenters begreppsbilder i anknytning till derivation och derivata, önskades före förundersökningen. 38 studenter på *Brukerkurs i matematikk* svarade, under hösten 2008, skriftligen på en obligatorisk uppgift. En av frågorna löd: ”Hva forstår du med den deriverte til en funksjon i et punkt?”. Det mest frekventa svaret var att derivatan uppfattades som stigningstalet till tangenten i punkten. Vilket stämmer väl överens med föreläsarens föreläsningsnotat: ”Definition: Den deriverte til $f(x)$ i x = a er stigningstallet til tangenten i x = a. Skrives $f'(a)$” (Soleng, 2007, s. 3).

Några svar var identiskt som följer: ”Man deriverer for å finne stigningstallet til tangenten i et bestemt punkt”, vilket indikerar att studenter kan blanda samman det matematiska objektet derivata med processen att derivera eller att studenter använder ”copy and paste” och skriver av någon annan eller läroboken. Möjligen kan sammanblandningen förklaras av Gulliksens (1998) exempel: ”Den regelen som til tallet *a* tilordner stigningstallet til f i *a*, er en funksjon som kalles den deriverte til f og betegnes med f' [slut citat]” (ibid., s. 161). Gulliksen säger här att derivatan till funktionen f är en regel, som är funktionen f' och att ” f' leses “f derivert.” [slut citat] (ibid., s. 162). Detta kan verka förvirrande under en inlärningsperiod då *derivation* beskrivs som: ”*Å derivere* en funksjon vil si å bestemme den deriverte.” (ibid., s. 163).

I beskrivelsen av hur de 38 studenterna i *Brukerkurs i matematikk* uppfattade derivatan till en funktion i en punkt nyttjades begreppen: *stigningstal*, *funktion*, *tangent*, *punkt*, *momentan tillväxt* och *graf*. Alla dessa begrepp innefattades i föreläsningar (Soleng, 2007) och i kurslitteraturen (Gulliksen, 1998). Studenterna använde bland annat prepositionerna: *till*, *i*, *för* och *på* när de kopplade samman begreppen till en begreppsbild. En mening uppbyggd av identiska begrepp i samma räckföljd kan ge olika betydelse beroende på valet av prepositioner. Följande 13 meningar representerar de 38 studenternas förståelse av ovanstående fråga:

Derivatan till en funktion i en punkt är (objektet):

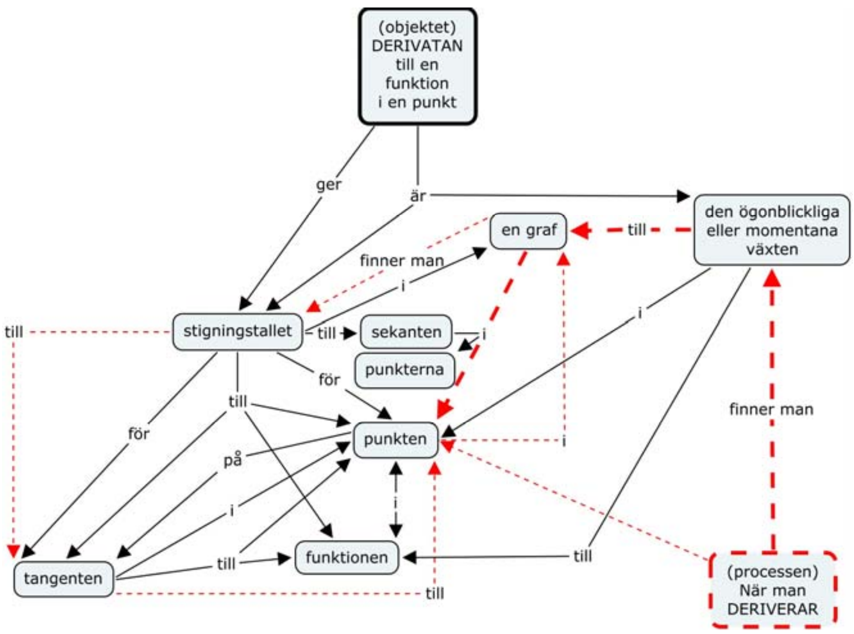
1. stigningstallet til funksjonen i punktet.
2. stigningstallet til punktet på tangenten.
3. stigningstallet til tangenten i punktet.
4. stigningstallet til tangenten til punktet.
5. stigningstallet til tangenten til funksjonen i punktet.

6. stigningstallet for tangenten til funksjonen i punktet.
7. stigningstallet for et gitt punkt i funksjonen.
8. stigningstalet till tangenten eller sekanten i den punkt/de punkterna där x=a.
9. den øyeblikkelige (momentane) veksten.

Följande svar (10-13) tolkas som mer eller mindre processinriktade:

10. Den deriverte gir stigningstallet i en graf.
11. Ved å derivere finner man den øyeblikkelige veksten til grafen i ett gitt punkt.
12. Når man deriverer et punkt i en graf, finner man stigningstallet til tangenten til det punktet.
13. Den deriverte funksjonen til et punkt forteller oss hva stigningstallet til funksjonens tangent er.

Mening 3 ovan betyder inte samma sak som mening 4 men däremot bedöms 3 identisk i betydelse med 5 och 6. Mening 2, 4, 7, 12 och 13 indikerar alla bristfällig förkunskap, kunskap eller kompetens angående begreppet ”punkt”, om det inte är enkla skrivfel som begåtts. Kanske var meningen med 13 egentligen: ”Den deriverte funksjonen *i* et punkt forteller oss hva stigningstallet til funksjonens tangent er”. Oprecist matematiskt resonemang kan i detta fall bero på svag språkförståelse. Vad studenter i *Brukerkurs i matematikk* förstår med derivatan till en funktion i en punkt sammanfattas i följande begreppskarta där alla svar utom det sista är representerade:



Figur 4:2 Begreppskarta över hur studenter i *Brukerkurs i matematikk* förstår derivatan till en funktion i en punkt

När studenter i en examensliknande situation uttrycker sig på sätt som indikerar att det saknas relevanta matematiska förkunskaper, passar målgruppen dåligt till aktuell undersökning. Jag valde därför att inte använda *Brukerkurs i matematikk*-studenter som huvudinformanter till denna undersökning. Spörsmålet, vad studenten förstår med derivatan till en funktion i en punkt, tycktes kunna ge en antydan till hur studenterna använder relevanta begrepp, i relevant kontext. Frågan bedömdes därigenom som lämplig till förundersökningen, med utvalda studenter. De tre mest frekvent använda begreppen hos studenterna i *Brukerkurs i matematikk* var *funktion*, *punkt* och *stigningstal*.

4.2 Förundersökning

De knappa 100 som registrerade sig till examen i kursen *Kalkulus 1*, under hösten 2008 vid Universitet i Tromsø förväntas ha relevant förkunskap, kunskap och kompetens för att vara lämplig som målgrupp till denna studie. För kursen *Kalkulus 1* hösten 2008 stod följande att läsa, under innehåll av kursen:

> Emnet bygger på matematikkunnskaper tilsvarende høyeste trinn (3MX) i den videregående skole. Det er grunnleggende for alle realfagstudier som krever matematikk i fagkretsen. Kunnskapene fra videregående skole om integral- og differensialregning for funksjoner i en variabel blir styrket og bygget videre ut. Temaer som tas opp er reelle og komplekse tall, følger, funksjoner, kontinuitet, derivasjon, integrasjon og differensialligninger. (Mat-1001 Kalkulus 1, 2008)

Med andra ord förutsätts förkunskaper om differentialräkning för funktioner, vilket innebär att derivationstemat borde vara bekant för studenterna. En begränsning gjordes i och med att jag avgränsade antalet möjliga informanter i förundersökningen från knappt 100 till de 55 som var förstaårsstudenter och var registrerade på 5-åriga masterprogram vid det matematisk–naturvetenskapliga institutet på Tromsø Universitet. Jag antog att dessa studenter till större grad fanns kvar vid fakultetet under våren 2009, än de studenter som valde *Kalkulus 1* som enstaka kurs. De 5-åriga programmen var representerade av lektorutdanning i realfag, samt följande masterprogram i teknologi/sivilingeniør:

- energi og miljø i nord
- industriell matematikk
- kommunikasjon og mikroelektronikk
- romfysikk
- molekylær bioteknologi
- informatikk

Eftersom knappt 100 studenter skrev examen i *Kalkulus 1* i december 2008, fanns möjligheten att vid behov utöka antalet förfrågade, ifall allt för få tillfrågade studenter inte önskade ställa upp på förundersökning och eventuell efterkommande intervju.

Syftet med förundersökningen var att skapa grundlag till att kunna skilja ut fyra studenter till djupintervjuer. Förundersökningen resulterade i totalt 23 skriftliga svar från de närvarande studenterna. Dessa svar kategoriserades in i 24 grupper baserat på de ord som valts av studenterna i deras skriftliga beskrivelse av vad de förstår med derivatan. Denna kategorisering finns som bilaga 2 och var till hjälp i analysen för att avgöra om studenten beskrev derivatan som ett objekt, i en process eller både och. Dessutom önskade jag en kommande intervjusituation där studenten skulle kunna se på sina skriftliga svar och därigenom ha möjlighet till att utveckla sitt resonemang. Jag valde att bara skriva upp frågan ”Hva forstår du med DERIVATEN?” på tavlan eftersom jag inte ville att linjer eller rutor skulle varken leda till eller begränsa studenternas associationer när det gäller till exempelvis grafritning.

Exempel på de vanligast förekommande orden i förundersökningen utfört på *Kalkulus 1* studenterna var de samma tre som för *Brukerkurs i matematikk*, nämligen *funktion*, *punkt* och *stigningstal*. Av 23 använde 19 stycken ordet *funktion*, 14 *punkt* och 13 *stigningstal*. Som mest använde en student 12 kategorier av totalt 24 och som minst använde en student 1 kategori i sin beskrivning av vad derivatan betyder. Dessa beskrivelser analyserades i ljuset av *hur* de användes i meningarna, alltså en tolkningsfråga om orden i beskrivelsen beskrev derivatan som objekt eller som del i en process.

Som nämnt i 3.6.3 önskade jag att studera matematiker, kemister och IT-specialister för att ha möjlighet till jämförelser mellan olika ämnesstudier. Vidare önskade jag att intervjua den från varje grupp som använde flest begreppskategorier eftersom det då fanns flest möjligheter att återkoppla till i intervjusituationen, vilket skapar trygghet för den som blir intervjuad. Med trygghet menas här att man inte ställs inför enbart okända situationer. Ingen av de 15 matematikerna såg på derivatan som enbart i en process, men däremot såg 6 av dem derivatan som enbart ett objekt. Motsvarande analys för de 5 kemisterna indikerade att 2 såg derivatan som enbart i en process och ingen som enbart ett objekt. Av de tre IT-specialisterna beskrev den första derivatan enbart i en process, den andre enbart som ett objekt och den tredje både i en process och som ett objekt.

Av de 23 studenterna som deltog i förundersökningen såg totalt 7 derivatan som ett objekt, varav 6 var matematiker. Ingen matematiker beskrev derivatan som enbart del i en process, samtidigt som ingen kemiker beskrev derivatan som enbart ett objekt. Två av de tre, som framställde derivatan enbart som del i en process, var kemiker. De 13 som såg på och beskrev derivatan som både del i en process och som ett objekt var fördelade på alla tre grupperna. Med förundersökningen som indikator, beskrev 13 % derivatan enbart som del i en process, 30 % som enbart ett objekt och resterande 57 % såg derivatan som både del i en process och som ett objekt. Förundersökningen är baserad på så få studenter att dessa tal är högst osäkra.

Risken finns att man, trots hjälp av kategoriseringen i förundersökningen, verkligen inte kan avgöra ifall informanter ser på derivatan som ett objekt och/eller som del i en process. Studenterna antecknar, på mindre än 15 minuter, vad derivatan betyder för dem. Jag kan omöjligen veta exakt hur studenterna tolkade uppgiften, hur pålitliga svaren är, eller om de ens såg någon mening med min förundersökning. ”The pupils are expected to develop certain abilities… One can try to list and classify them, but what is the use? It would not answer the question of why they should be products of learning processes” (Freudenthal, 1991, s. 121-122). Resultat från analysen av förundersökningen används dels som sorteringshjälp och dels som ett slags grundmaterial att bygga intervjumallen på.

4.3 Fyra djupintervjuer

De fyra informanterna som deltog i djupintervjuerna kallas här i kronologisk ordning för Ettan, Tvåan, Trean och Fyran på grund av anonymitet och könsneutralitet. Den student som under förundersökningen hade använt sig av flest kategorier (12 stycken) var matematiker. Denna person beskrev derivatan som enbart ett objekt och lät sig intervjuas som nummer två och kallas härefter för Tvåan. Den student som använt sig av näst flest kategorier (10 stycken) var kemiker och såg enligt analysen av förundersökningen derivatan som både del i en process och som ett objekt. Denna person intervjuades som nummer fyra och figurerar därför i detta arbete som Fyran. Eftersom jag i detta läge saknade en representant som enbart såg på derivatan som del i en process och en representant som var IT-specialist, föll valet på Trean som satisfierade bägge kraven. Det var bara totalt tre studenter i förundersökningen som enbart såg derivatan som en process, så jag valde att ta med en till som kunde representera denna syn, Ettan. Kemikern Ettan och IT-specialisten Trean använde dessutom lika många begreppskategorier (7 stycken) för att beskriva derivatan i förundersökningen.

En jämförelse mellan Ettan och Trean kan medföra en viss indikation av mått på giltigheten till resultat från intervjusituationerna, eftersom förundersökningen visade att de bägge använde lika många begreppskategorier för att beskriva derivatan som enbart del i en process. Tvåan beskrev derivatan som ett objekt och Fyran både i en process och som ett objekt. Tabell 4:1 visar att Ettan och Trean till synes ser på derivatan likaledes.

DERIVATAN	***i process***	***som objekt***
Ettan	+	
Tvåan		+
Trean	+	
Fyran	+	+

Tabell 4:1 Förundersökningens resultat av intervjuinformanternas framställning av derivatan

Två av de fyra informanterna klarade inte examen i Kalkulus 1 i december 2008. De skrev kontinuationsexamen i samma vecka som intervjuerna befann sig. Minst en av dessa två, godkändes med väldigt god karaktär. Förutsatt att ett examensresultat innebär en slags kvalitativ gradering av det man förväntas *kunna* och *förstå* efter en kurs, kan detta ses som exempel på att inlärningsprocessen både tidsmässigt och kvalitetsmässigt är individuell.

4.4 Tidsfaktor

Fyra timmars intervjumaterial, som först ska transkriberas och sen analyseras, bedömdes före intervjuerna som en alltför stor datamängd inom ramarna av ett 30 studiepoängs masterarbete. Med siktet inställt på en intervjulängd mellan 15 och 25 minuter delgavs informanterna att intervjun tar ungefär en halvtimme att genomföra. Intervjuerna tog mellan 45 och 65 minuter. Intervjun med Ettan tog 45 minuter, medan Tvåan och Trean intervjuades i 50 minuter vardera och slutligen varade Fyrans intervju i 65 minuter. Antingen skulle det visa sig att tiden var för knapp och att ingen av extrafrågorna E1 och E2 hanns med under en intervju, eller så valdes en eller bägge extrafrågorna beroende på dels tid och dels, under intervjun, studentens förståelse av begreppet derivata. Frågorna 1 – 4 tog tillsammans mellan 16 och 26 minuter att genomföra.

4.5 Fråga 1

Denna fråga är en ren textfråga där man ska ta ställning till om grafen till den deriverade funktionen kan stiga samtidigt som derivatan till funktionen är negativ. Ettan svarar *nej* och visualiserar derivatan med hjälp av pennan i handen och en gest. Lutningen på pennan ändras i takt med tangenten till grafen, när Ettan följer den tänkta grafen från vänster till höger.

Ettans svar på den första inledningsfrågan tillsammans med förundersökningsresultaten indikerar att Ettan inte skiljer mellan derivatan till en funktion och den deriverade funktionen. Ettan beskrev derivatan som enbart del i en process och använder sig även av gester under sin beskrivning av derivatan. Tvåan svarar *ja* och har inga som helst problem med att visualisera problematiken och visar att det är möjligt genom en graf som ”ritas” på bordet med ett finger. Trean svarar *nej* och verkar se det på samma sätt som Ettan, men utan att någon hjälpgraf gestikuleras.

Fyran svarar först ett spontant *ja* och funderar sen 15 sekunder innan resonemang kring fysik tar vid. Detta resonemang rör sig om att derivatan till sträckan blir fart och leder inte till ett svar. Fyran resonerar sen att derivatan är samma sak som stigningstalet och ser inte skillnad mellan derivatan till en funktion och den deriverade funktionen. Det är möjligt att det spontana svaret ja i början inte var ett svar, utan en bekräftelse på att läsaren av frågan ansåg sig förstå frågeställningen.

Det verkar som att Ettan, Trean och Fyran har svårt att föreställa sig grafen till en deriverad funktion. Om de först visualiserar grafen till en funktion och sen derivatan till den funktionen som en tangent, så blir tangenten till grafen till funktionen och funktionens derivata synonyma. Det uppstår följaktligen ingen kognitiv konfliktsituation om frågan felaktigt tolkas som att man ska ta ställning till om grafen till funktionen kan stiga samtidigt som derivatan till funktionen är negativ. Kanske Ettan, Trean och Fyran förstod frågan som: ”Kan derivaten til funksjonen stige samtidig som derivaten til funksjonen er negativ?”. En idé vore att försöka omformulera frågan för att undvika missförståelse? Samtidigt har denna undersökning med matematisk begreppsförståelse att göra och en omformulering av frågan skulle kanske hypotetiskt inte kunna visa om en graf underlättar förståelsen av derivationsbegreppet. Det är detta som fråga 4d i relation till fråga 1 är tänkt att undersöka.

Om Tvåan först visualiserar grafen till en funktion, sen definierar om den funktionen till att vara en deriverad funktion och samtidigt tänker på vad det betyder att derivatan till den ursprungliga funktionen är negativ, så verkar det vara problematiskt att förstå att när grafen ligger under x-axeln så indikerar det att funktionens derivata är negativ. Förundersökningen indikerade att en student, som beskriver derivatan, föredrar en algebraisk representation av derivatan framför en grafisk. Bilaga 2 visar att det bara är två studenter av 23 i förundersökningen, som tog hjälp av graf för att representera derivatan. I delfråga 4d återkommer ordagrant denna frågeställning, kompletterat med en graf av den deriverade funktionen.

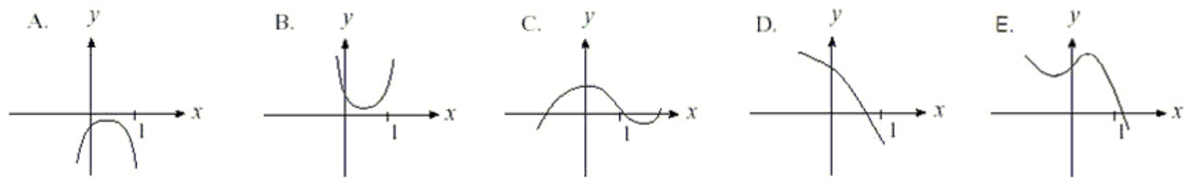
4.6 Fråga 2

Eftersom denna fråga är från TIMSS 1995 i vilken både svenska och norska tredjeårsgymnasister presterade gott matematiskt och internationellt sett. Internationellt, svarade 46 % korrekt på den aktuella frågan då. Tabell 4:2 nedan visar vilka svarsalternativ norska tredjeårsgymnasister gav på frågan i relation till det internationella genomsnittet. Det korrekta svarsalternativet är märkt med asterisk.

	3MX	3MY	Int
A*	54	41	46
B	7	12	7
C	11	12	12
D	19	26	19
E	5	3	8
( )	5	7	9

Tabell 4:2 TIMSS 1995 K05, (Angell et al., 1999, s. 186)

Frågan inleds med att tre givna och olika förhållanden ska vara uppfyllda för en av de fem givna funktionsgraferna som representeras av svarsalternativ A-E enligt Figur 4:3. Det första förhållandet kallas här för 1 och lyder $f'(0) > 0$, det andra förhållandet, 2 lyder $f'(1) < 0$ och det sista förhållandet, 3 är att $f''(x)$ är negativ för alla x. Graferna ser ut som följer:



Figur 4:3 Svarsalternativ A-E i fråga 2

Vikse (1999) menar att eleverna uppfattade frågan som svår, med tanke på det internationella genomsnittet. I Norge svarade 54 % av 3 MX eleverna riktigt, vilket var klart bättre än det internationella genomsnittet. Vikse fann ut att mer än en tredjedel *inte* utesluter alternativen B, C och D. Detta menar han är mycket allvarligt och drar slutsatsen att den grafiska förståelsen av derivatan är mycket dålig hos de norska 19-åringarna som deltog i TIMSS 1995. Jørgensen (2006) kom fram till att eleverna visade prov på väldigt olika lösningsstrategier baserat på begreppsbilden.

4.6.1 Ettans svar

Ettan prioriterar först 1 och 2 vilket leder till svarsalternativ C samtidigt som osäkerhet råder kring 3:

> 1: Den deriverte funksjon / når du sett inn *null* i den deriverte funksjon så får du et svar som er / *større* enn null / å når du sett inn *en* så får du et svar som er *mindre* enn null // det må ju bety at / du har et / toppunkt / nei det kan du ikke ha // du må ha et vendepunkt eller et nullpunkt i / på *en* / trur æ / åsså / at f dobbeltderivert av x er *negativ* for alle x / det vil si // hmm // utifra di to første der så tenkte æ automatisk C men æ vet ikke om det stemmer for den der at dobbelderiverte av x er *negativ* for alle x //

I detta läge går jag, mest troligt på grund av orutin, in och styr kanske lite för mycket eller för tidigt när jag säger:

> Men om vi går tillbaks till det första där du började svara på att / du såg att det var en toppunkt / tänkte du / men du har svart det *förut* (i fråga 1) när det är en topp eller bunnpunkt så er derivaten lik…
> 1: Lik null // Nei det må være // nei for at / *den* e *posssitiv* å *den* e *negativ* (pekar på den första respektive den andra av de tre påståendena i fråga 2) / så betyr det at det går over fra å være // asså det e et *vendepunkt der*
> Var då?
> 1: I / ja gott spørsmål (fniss) // det må ju være mellom *null* og *en*! / ja selvfølgelig! / å at f dobbelderivert av x er *negativ* for alle x det betyr at // det betyr at den e / kon*kav* trur æ / å då ville æ sagt / A (pekar på A)

Ettan ser att det ska existera en vändpunkt och kan vid frågan *var*, precisera att det är mellan noll och ett. Resonemanget med vändpunkt skiftar nu fokus till att även 3 tas i betraktning eftersom Ettan inser att 3 innebär att det ska vara en konvex funktionsgraf, vilket i sin tur leder till korrekt svarsalternativ A. Som gardering menar Ettan att det kan vara B som är riktigt svarsalternativ om begreppsförståelsen av konkav förväxlats med konvex. I detta läge anmodas Ettan att försöka göra ett val mellan svarsalternativen A och B.

> Finns det nå andra alternativ? (än A)
> 1: Ja det er jo at / den der / at æ husker feil at når den er / negativ for alle x så e den *konveks* å då må det jo bli *B* / e no de æ tenker mennø
> Å det är nånting du husker att andraderivatan kopplar du till
> 1: Konveks og konkav ja //
> Å det framgick av det du skrev (pekar på Ettans svar i förundersökningen) att du inte husker nånting av den dobbelderiverte men det gör du ju nu!
> 1: (fniss) ja
> Så ditt svar är / att du ser
> 1: Æ vil si A //
> Men om du / om du / [kan du
> 1: [Ja
> ta nå mer information från / *den* (pekar på 1) / början / för å utesluta A eller B? // om det står mellan dem
> 1: Så æ ska liksom bestemme om det er A eller B på grunn av *den*? (pekar på 1) Nei / utifra *den* å *den*? (pekar på 1 och 2)
> Ja som jag har uppfattat det så har du sagt på grund av den *där* (pekar på 3) / at den är negativ för alla x så är den antingen konkav eller konvex // så antingen *den* eller *den* (pekar på alternativ A respektive B) / då är det bara *dom* (två) som är alternativen
> 1: Jo men du kan tenke det sånn at *der* (pekar på grafen till alternativ A i x = 0) er den / ff / når den er null så er den sst // jaa når du sett inn null i den deriverte funksjon så får du et tall som er større enn *null* å da *stig* / *den* (pekar fortfarande på x = 0 i grafen i A samtidigt

som andra handen gör en stigande rörelse)
Mmm
1: Å mens *der* / (pekar på x = 1 i grafen i A) e den *negativ* å då synk den (pekar fortfarande på x = 1 i grafen i A samtidigt som andra handen gör en nedåtgående rörelse) / å der stig den jo å der synk den (pekar först på x = 0 och sen på x = 1)
Mmm
1: Ergo / A er svaret
Yes / det var rätt svar
1: Aa (fniss)

Ettan tar hjälp av händerna i beskrivelsen av att derivatan är positiv i 1 och negativ i 2. När rörelsen av handen går från stigandes till sjunkandes verkar processen kopplas till en begreppsbild som motsvaras av en konkav graf, vilket leder till insikten att A är det korrekta alternativet. Detta stöder Radfords (2009) syn att gester interagerar tillsammans med olika sinnesaspekter för att kognitivt och socialt skapa en mening. Yttermera, stöder händelsen Hähkiöniemis (2004) resultat, att a) gesten är perceptuellt och direkt involverad i b) att studenten har förstått sambandet mellan tangenten i den symboliska grafen till gesten och derivatan som en konkret förändring.

Ettan, som i förundersökningen menade att hon eller han inte kom ihåg något om andraderivatan, gjorde verkligen det under intervjun, med hjälp av gester. Ettan reflekterade under en problemlösningssituation och reviderade sin tidigare inställning, vilket styrker begreppsutvecklingen som Gray & Tall (2001) beskriver i avsnitt 2.4.3. Dessa reflektioner visar hur ”embodied objects” kan interagera med gester för att skapa ett axiomatiskt begrepp som ligger till grund för personens teoribyggande.

4.6.2 Tvåans svar

Tvåan börjar med att tänka tyst i 10 sekunder innan Tvåan säger följande:

2: La oss se på A / Ja / den vil ha f derivert av null større enn null / fordi den kurven stig / så den er grei / den vil / det vil ikke være sant for *B* for den grafen der *synk* / den *her* (pekar på alternativ C) ser ut som at f derivert av null er *lik* null // på D har vi f derivert av null *mindre* enn null og for E vil f derivert av null være *større* enn null / det første der vil være sant for *A* og *E*

Följaktligen börjar Tvåan med 1 och relaterar den till alternativen A-E i bokstavsordning med korrekt resonemang. Tvåan gör om samma procedur med 2 i fokus denna gång och resonerar återigen utan tvekan korrekt:

2: ... f derivert av *en* mindre enn null er andre spørsmålet aa *OK* // det vil være sant for *A* // det er *ikke* sant for *B* / det er sant for *C* / det er sant for *D* / og det er sant for *E*

Samma metod används till 3:

2: ... f andrederivert av x negativ for alle x / det vil si at den må / grafen må synk hele tida / det er / *ikke* sant for noen av funksjonan bortsett fra *D* / det er *kun D* / kor at / at den andrederiverte av x er *negativ* for alle x / hvis æ ser rett her

Här ser det ut att vara olycksfall i arbetet, eftersom Tvåan verkar tänka på förstaderivatan istället för andraderivatan och drar därigenom fel slutsats i förhållande till 3. I efterföljande sammanhang förstår Tvåan 3 korrekt, att stigningen till funktionen avtar hela tiden. När Tvåan fokuserar på att det finns vändpunkter och var de finns, sammankopplas oproblematiskt alla de tre förhållandena som ska gälla samtidigt vilket leder till korrekt svar, nämligen alternativ A:

2: ... hvis den // andrederiverte er negativ / ja selvfølgelig // da betyr det at / den *her* (pekar på alternativ A) / *den* vil være / *den* vil oppfylle det // for den / der / der / stig / stigninga til funksjon avtar hele tiden /

Bra

2: Ja / det er rett // på *B* har vi at stigninga *øker* hele tiden / så *der* vil jo den være *positiv* for alle x / *her* har vi // at den vil ikke være *rett* for C / den vil ha et vendepunkt / nært *en* en plass

Bra du såg vändepunkter också

2: Ja / og // her igjen ser vi at den her vil ha *to* vendepunkt / en *tredje*gradsfunksjon / det er en *hyperbel* vi ser // så *E* vil heller ikke oppfylle det / da ska vi se på *D* // der *avtar* // stigninga hele tida *ser* det ut som / eller / ja / den den er vel kanskje ganske *lineær* sånn fra kanskje null komma to og så videre / så da vil jo den andrederiverte være lik *null* // ja / så i alle fall vil æ kunne / for å oppsummere / at det gjelder for / A // ja / da er det gyldig for alle x / (fniss) æ sa feil da æ tenkte på den førstederiverte det er sant

Å då har du / om du läser spørsmålet igjen / *vilken* av graferna nedanför har følgende egenskaper?

2: Ja // (viskar tyst alla tre egenskaperna och jämför med alternativ A) // det vil *kun* være A / som oppfyller alle de kriteriene

4.6.3 Treans svar

Trean har svårt att ”se” 1 och 2 i graferna, men förstår genom att fokusera på 3 direkt att den sökta grafen ska vara konkav:

3: Ja / (fniss) det er litt vanskelig (fniss) / men / ska vi sjå / hvis vi ser / æ tar bare hver graf for alle tre punktan da / begynner med f derivert av null er / større enn null // så f derivert // stigningstallet til den // tangenten i // når x er lik null // det er *virkelig* vanskelig å se for seg / uten å / æ e van til å bare regne på det / så det er forferdelig vanskelig å se for seg / bare med å se / men // der / funksjon // å i punkten null // (5 sek) // f derivert av null e jo // f derivert av null vil jo være *større* enn null / i *A*

Ja

3: Ja //

Eller jaha ska jag säga (fniss) / OK är bättre att säga

3: F derivert av *en* / *mindre* enn null // (8 sek) // da ska vi sjå / prøve å se for sæ at funksjon / er lik en // (11 sek) // kan i hvert fall si at f dobbelderivert av x er negativ / det må det vel være for // for A / fordi den er konkav // å / usikker på f derivert av *en* er *mindre* enn null / æ klarer ikke helt å se for mæ *kordan* den tangenten går / asså f derivert av *en* / x er lik *en* der / den er *mindre* enn null fordi den går *nedover* // ja den *må* jo det / i *A* også / den *må*jo være mindre enn null // (7 sek) // nå blev æ litt usikker på *første* svaret mitt (fniss) / for f derivert av *null* blir jo feil da i så fall / f derivert av null kan jo ikke være *større* enn null // kan den det? // f deriv / jo den går oppover og *der* går den nedover / ja / da er den *større* enn null og den mindre enn null // ja OK // og da har du f dobbelderivert for x er *negativt* for alle x // når du dubbelderiver så finn du / krumninga / å den er konkav / så ja // da mener æ at *A* skal tilfredsstille *alle* / så som æ ser det i hvert fall

I denna, den tredje intervjun, var jag mer van situationen och gick inte in och avbröt under intervjun på samma sätt som under den första intervjun. Trots detta, reflekterar jag vid ett tillfälle högt över vad jag *borde* säga, vilket kanske inte ger positiva signaler i intervjusituationen.

En konfliktsituation uppstår i och med att Trean blandar ihop koncepten förstaderivatan och andraderivatan, när 1 och 3 jämförs. Trean menar att 1 borde vara *negativ* för alla x, vilket skulle vara fallet om 3 handlade om förstaderivatan och inte andraderivatan. Alternativt trodde Trean att 1 handlade om andraderivatan istället för förstaderivatan. Det är även möjligt att Trean först inte insåg att det kan vara skillnad mellan funktionsvärdena till första respektive andraderivatan av en funktion. Något som talar mot denna tolkning är när Trean fokuserar på att 3 innebär en konkav graf, vilket visar att Trean skiljer mellan betydelsen av första och andraderivatan till en funktion. Strategin, som Trean använder sig av för att utesluta alternativ, är att undvika 1 och 2 eftersom de orsakar konfliktsituationer. Trean känner sig trygg på 3 och använder den som bas och kan därigenom snabbt sluta ute de tre svarsalternativen B, C och E som inte enbart är konkava. Alternativ D väljs bort när Trean menar att första derivatan inte är mindre än noll då x är noll, alltså att 1 inte är uppfyllt.

Trean anser sig förstå frågan bättre med hjälp av en graf:

> 3: ... ja det er jo artig kordan en på en måte først når æ begynner så skjønner æ ikke helt ka en oppgave spør etter / men når æ børjer se for mæ grafen så forstår æ den med en [gang

Detta trots att Trean börjar med att försöka ”se” 1 och 2 i graferna, men till en början inte klarar av att få den mentala bilden till att stämma med den information som finns. Kanske beror detta på att förståelsen eller tolkningarna av symbolerna till en början är problematiska för Trean, men att de i kombination med graferna får den mentala bilden att passa in med informationen.

4.6.4 Fyrans svar

Fyran poängterade direkt att det bara är formen på grafen som är viktig, inte var den var placerad i förhållande i höjdled. Sen fortsatte Fyran med att leta svar i en blindgång, genom att se om grafernas definitionsområden kunde vara ett hjälpmedel till att snabbt utesluta några av de fem svarsalternativen. Fyran hade inga som helst problem att ändå snabbt komma fram till riktigt svar:

> 4: Det spiller ingen rolle i forhold til x-linja // eller i forhold til hvor høyt opp den ligger / ettersom det er f derivert i null eller ikke i null // men den ska ligge mellom en og null / det gjør for så vidt samtlige grafer her så det er ingen som æ bare kan plokke ut fort // den dobbelderiverte er negativ // f derivert // er større enn null / det betyr at den stiger før null kommer og den synker etter at en har kommet // det betyr at / å det ska være en konkav graf / fordi at f dobbelderivert er negativ for alle / så A stemmer / det kommer til å være riktig

Fyran fortsätter med att korrekt beskriva *var* de fyra övriga graferna inte stämmer i förhållande till 1, 2 och 3.

4.6.5 Reflektioner kring fråga 2

Angell et al (1999) menar att svarsfördelningen i Tabell 4:2 är lite märklig och säger vidare att "De mest populære distraktorene C og D inneholder to feil. Av de tre egenskapene er bare $f'(1) < 0$ riktig" (ibid., s. 186). Distraktorerna C och D vållade inga problem för de fyra förstaårsstudenterna, så detta arbete kan inte tillföra något angående diskussion om märklig svarsfördelning. När det gäller analys av grafer, verkar en negativ andraderivata oproblematiskt kopplas till formen konkav, vilket är en visualisering av andraderivatan. Formellt resonemang kring begreppen (andra)*derivatan* och *konkav* växelverkar med begreppsbilderna och intuitiva idéer, vilket till slut leder till riktigt svar.

4.7 Fråga 3

Även denna fråga är från TIMSS 1995 och lyder som följer:

> Akselerasjonen til et legeme som beveger seg langs en rett linje, svarer til
> A. stigningstallet til vei-tid grafen
> B. arealet under vei-tid grafen
> C. stigningstallet til fart-tid grafen
> D. arealet under fart-tid grafen

Knappa två tredjedelar, av alla som deltog i TIMSS 1995, svarade korrekt på den aktuella frågan då. Tabell 4:3 visar vilka svarsalternativ som norska tredjeårsgymnasister gav på frågan, i relation till det internationella genomsnittet. Det korrekta svarsalternativet är märkt med asterisk.

	3MX	3MY	Int
A	21	24	15
B	5	8	4
C*	64	52	66
D	7	10	12
( )	3	6	4

Tabell 4:3 TIMSS 1995 K03, (Angell et al, 1999, s. 185)

4.7.1 Ettans svar

Ettan läser upp fråga 3 högt och menar att det är en fysikfråga. Därefter definierar Ettan acceleration:

> 1: Men nå skal vi se // akselerasjon e jo / definisjon på akselerasjon e jo / kor mye // fffarta øker eller synk i løpet av tida

Varpå Ettan säger att det är två väg-tidgrafer och en fart-tid graf. Detta resonemang utvecklar inte Ettan någonting mer utan går vidare med att läsa frågan på nytt och fokuserar på definitionen på acceleration igen. Härefter menar Ettan att alternativ C kan vara riktigt svar men blir osäker ”fordi at du kan jo du har jo en formel som sier at / strekkning er lik // fart ganger tid” samtidigt som Ettan säger att en väg-tid graf inte är utesluten:

> 1: ... dermed kan du jo bruke en vei-tid graf *åsså* / mennøh / ikke på samme måte som en fart-tid graf / vel å merke //

Ettan menar sig bli förvirrad av att veta att stigningstalet till en fart-tid graf indikerar hur ”fort den går på en bestemd tid”. Ettan vill säga pass och får en kort uppsummering av vad som är sagt, varefter Ettan utan minsta tvekan svarar riktigt:

> 1: Då må det jo være C som e svaret!

4.7.2 Tvåans svar

Tvåan resonerar att alternativ A, helt korrekt, är hastigheten till objektet och att alternativ B är en integral. Tvåan funderar en kort stund över vad B representerar och menar samtidigt att det inte är så noga eftersom det inte är rätt svar. Efter att Tvåan har blivit bedd om att jämföra alternativ B och D, uppstår osäkerhet. Osäkerheten byts ut till en säkerhet då Tvåan reflekterandes byter ut sin mentala representationsmodell för B till D.

4.7.3 Treans svar

Efter att ha läst frågan högt är det tyst i 6 sekunder innan Trean spontant svarar att alternativ C verkar mest logiskt, vilket även är korrekt svarsalternativ på frågan. Trean reflekterar sen över vad arealen under en acceleration-tid graf svarar till, vilket leder till att Trean kan tänka sig att farten då ökar. Detta i sin tur leder Trean till att tänka på att det inte var farten som man skulle finna ut. Fokus går sen över till att det kanske är alternativ A som är riktigt. Trean anmodas att teckna, vilket först leder till att en väg-tid graf ritas. Efter en dryg halv minuts tyst tänkande svarar Trean att ”æ trur de må bli A”.

Trean har tecknat in en tangent i sin väg-tid graf och blir bedd om att förklara vad den kan representera. Trean menar att den representerar farten i en punkt, eller hur mycket farten ökar, vilket leder till att Trean nämner acceleration och vidare att den flatar ut med låg acceleration samt att hög acceleration motsvarar en brant graf. Detta leder Trean till att tro att ”A er riktig svar for då får du akselerasjon”. Sen tänker Trean på en fart-tid graf och anmodas att rita upp den. Detta leder till att Trean ser att C utan minsta tvekan är riktigt svar då fokus för Trean är på hur fort farten går upp i förhållande till tid.

4.7.4 Fyrans svar

Efter att Fyran har läst frågan högt tänker Fyran tyst i 10 sekunder innan Fyran svarar:

4: Stigningstallet unner vei-tid grafen er fart // arealet / nei / stigningstallet av vei-tid grafen er fart / arealet unner vei-tid grafen // husker ikke i farta / men det blir ikke rett / da går du feil vei høll æ på å si / stigningstallet til fart-tid grafen har du akselerasjon // arealet unner fart-tid grafen er da samme som stigningstallet til // arealet unner vei-tid grafen / nei / fart-tid grafen blir jo det samme som / stigningstallet / nei motsatt / det blir / det blir // asså arealet unner fart-tid grafen blir det samme som vei-tid grafen / så den er det nå heller ikke / svaret må bli *C* / stigningstallet til fart-tid grafen

Fyran använder uteslutningsmetod för att finna korrekt svar, till synes utan att reflektera över det korrekta svaret, eftersom a, b och d inte stämmer.

4.7.5 Reflektioner kring fråga 3

Ettan börjar med att tänka på fysik och definierar acceleration för att sen försöka utesluta någon eller några av svarsalternativen baserat på vilken slags graf de representerar. Denna strategi misslyckas eftersom det verkar som om Ettan kopplar grafer med väg-tid såväl som med fart-tid till acceleration. När sen stigningstalet kopplas till fart-tid grafen uppstår på nytt en osäkerhet eftersom även sträcka kan kopplas till fart och tid.

Då fokus riktas mot vad stigningstalet till en fart-tid graf betyder, så inser Ettan att C är riktigt svarsalternativ. Ettan ger uttryck för att det är en speciell situation att skapa en visuell bild, samtidigt som man tänker högt, eller att intervjusituationen gör det svårt att tänka högt:

1: (läser viskandes *stigningstallet*) ville jo tru det går / på sst / nei vent nå // vei-tid // du skulle ha tegnet opp de her grafene *for* mæ! (fniss) / så ville det ha vært mye lettere
Mmm // det är sant / det ger ofta en hjälp å ha den *visuella* bilden
1: Ja // (7 sek) [for
[Nu må du skapa den själv ([fniss)
1: [Ja æ jobber med saken / æ bara slit med å tenke høyt når æ gjør det // men akselerasjon / må jo være // akselerasjon stiger jo / det e jo klart / men // når akselerasjon stig [så
[Varför säger du att den stiger?
1: Det vet jeg ikke (fniss)
Du antar det alltså

Ettan ger även uttryck för att tänka sig att acceleration *ökar* trots att Ettan hade, minuten innan, definierat acceleration som hur mycket farten ökar eller sjunker i löpet av tid. Möjligen associerade Ettan ordet acceleration med ordet fartökning.

Eventuellt så är det enklare att förknippa ordet stigningstal till något som stiger eller synonymt ökar eftersom det annars riskerar att uppstå en begreppsmässig förståelsekonflikt med att använda ord som ger olika associationer.

Med fokus på stigningstalet uppstår en situation som avspeglar osäkerhet när Ettan ska relatera stigningstalet till en graf:

> 1: Stigningstallet til en fart-tid graf vil jo si // (6 sek) kor sss / fort den går på en bestemd tid // kan æ få si pass?

En förklaring kan vara att Ettan precis har definierat acceleration som en ändring av ”fart relativt tid”, samtidigt som en formel säger att ”fart gånger tid” är sträcka. Om Ettan ser ”fart relativt tid” synonymt med ”fart gånger tid” uppstår en kognitiv konfliktsituation i och med att begreppen *acceleration* och *sträcka* blir synonyma. Förundersökningen antydde att Ettan ser på begreppet derivata som enbart en process. Den första kontrollfrågan i början av intervjun stöder detta:

> Är derivatan samma sak som att derivera? Alltså, den deriverte det är ju synonymt med derivatan. Kommer du ihåg att jag sa på tavlan där?
> 1: Alltså
> När du bara hör det spørsmålet tänker du på ehm ser du to ting eller ser du en ting?
> 1: Æ ser *én* ting
> Å det är?
> 1: Ja, det å derivere en funksjon rett og slett
> Mmm
> 1: asså æ tenk at derivata av funksjon e // etter du har derivert funksjon så har du derivata
> Å derivata säger du är synonymt med den deriverte / det är [derivatan
> 1: [Ja / ja
> Mmm
> Å det är samma sak som å derivera?
> 1: Ja (tveksamt) // så
> [Mmm
> 1: [sånn tenker ja [de

Med utgångspunkten att Ettan ser derivatan som enbart del i en process, kan det vara svårt att se objektets roll i processen om fokus är på processen. Ettan kanske inte skiljer mellan ”föremålet” som är i rörelse och ”farten till föremålet”? Om begreppet *stigningstalet* kopplas direkt till det fysiska föremålet som är i rörelse, så riskerar man att komma i en kognitiv konfliktsituation då andraderivatan kopplas till det samma föremålet, objektet till den dubbelderiverade funktionen. Den förflutna tiden mellan att Ettan ville säga pass och att Ettan såg svaret framför sig var bara 15 sekunder, exakt lika länge som hjälpen med en kort uppsummering tog:

> 1: ... kan æ få si pass? ([fniss)
> [Ja men du är inne på rätt / det du tänker här / det du sa så bra här också att / *stigningstallet* til en fart-tid graf / säger hur fort / farten / i förhållande till tid ökar eller minskar / alltså du har ju sagt att det *e* det [som
> 1: [Då *må* det jo være C som e svaret!

Farten preciserades som objektet i frågan, vilket kanske var det skiftet av fokus som behövdes för Ettan att ”se” svaret. Denna fråga ger en indikation på att det är viktigt att förstå storheternas egenskaper och förhållanden till varandra. Olika användning av, eller relationer mellan, dessa storheter skapar tydligtvis olika begreppsbilder, vilka under inlärningsperioder kan vara i konflikt med begreppsdefinitionerna.

Om växelverkan mellan de intuitiva idéerna och formellt resonemang ger olika begreppsdefinitioner, istället för att stärka befintliga, riskerar konflikten att orsaka avbrott i inlärningsprocessen eller att man bygger begreppsförståelsen vidare på felaktiga grunder.

Tvåan betade av alternativen i bokstavsordning, men stoppade efter C, eftersom det antogs vara rätt svar. Tvåan upplyser direkt att en areal under en graf är samma sak som en integral och nämner spontant att alternativ B representerar sträcka, vilket verkar skapa problem när (efter anmodan) B och D jämförs. Först utgår Tvåan från att B representerar tillryggalagd sträcka, vilket konkluderades tidigt i uppgiften.

När sen Tvåan analogiskt försöker överföra resonemanget från B till D uppstår en konflikt, eftersom D inte kan representera samma sak. Efter att ha tänkt i banor som, att integrera är den motsatta operationen till att derivera, så antas istället att D representerar tillryggalagd sträcka. Detta leder till att Tvåan reviderar sin version av vad B representerar. Även om B inte representerar någonting, så skapar Tvåan en bild av att B motsvarar hur lång tid det har tagit.

Ett osäkerhetsmoment finns i transkriptionen av homofonen ”D”, vilket kan representera både ”det” och (alternativ) ”D” eftersom ingen diskrepans finns mellan de två ljudrepresentationerna:

> 2: ... men øh OK / vent litt / vent litt / ska vi se her / fart / derivert / kanskje det er *D* som må bli tilbakelagt strekning?

Detta transkriberade och betonade “*D*” kan tolkas på minst två sätt. Med det ena tolkningssättet, ”*det*”, blir derivatan till farten tillryggalagd sträcka och med det andra tolkningssättet, ”D”, betyder det alternativ D i fråga 3. Det förstatolkade leder till att Tvåan gör ett felantagande, medan det sisttolkade leder till att Tvåan svarar korrekt på frågan.

Infinitesimal diskrepans kan med andra ord få dramatiska konsekvenser för tolkningen av studentens kontextuella förståelse av begreppet derivata. Jag väljer här att tolka att Tvåan visar prov på god kontextuell förståelse av derivatan i frågan. Möjligheten för läsaren av detta arbete att bilda sig en egen och därigenom kanske en annan uppfattning än tolkningarna ovan underlättas om hela transkriptionen kan följas parallellt. Eftersom Tvåans svar på fråga 3 är både kort och koncist inkluderas hela svaret här:

2: Vel *A* her vil jo være *hastigheta* til objektet / *B* // e asså integralet / å de e jo tilbakelagt / strekning / blir det det? // det skul bli tilbakelagt strekning / hvis du har // ja / det er ikke nøye / det er i alle fall ikke rett svar / (fniss) // stigningstallet til fart i forhold til tid / grafen ja // *der* har du en / *det* er rett / for det er jo / *stigningstallet* er jo den deriverte / å den *deriverte* av farta er jo / er akselerasjon / så det er *C* som er rett svar

Å då har du inte ens *läst* / *D*?

2: *Nei* (fniss) / som er *arealet* under fart-tid *grafen* / ka *kunne* det være? // det må jo *være* // ka slags begrep skul *de* være?

Nu kan du jämföra B och D

2: Ja // ja æ fant ut at arealet under vei-tid grafen var tilbakelagt strekning // det skulle være lett å overføre den analogt / men // [korfor klare æ ikke?

[eller eller om du tänker // vad får du når du har

2: Ja / når æ integrer / integrer den? // aha som e den *motsatte* operasjon av å derivere //da får eg // vent litt / ehmm // av og til så / så går det litt i stå // men øh OK / vent litt / vent lit / ska vi se her / fart / derivert / kanskje det er *D* som må bli tilbakelagt strekning? for / kunne jo selvfølgelig være avhengig av fart // B deremot må bli // kor lang *tid* det har tatt til sammen / kor lang *tid* du har brukt på på det her / e det korrekt?

Det stämmer *mycket* bättre / när du sa om / det du sa om *B* först / stämmer bättre på *D*

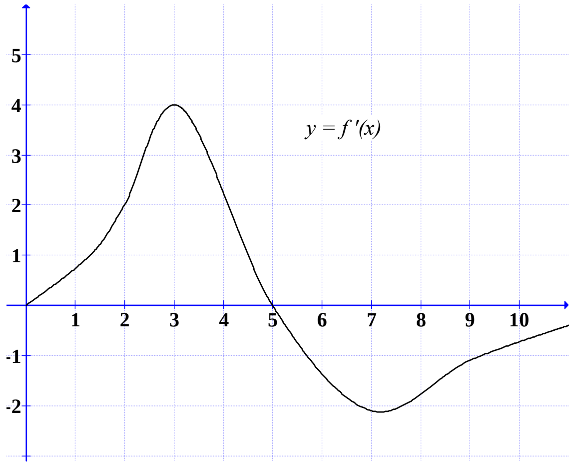
2: Ja / så *B* e kor lang *tid* det har *tatt* // og *D* må bli kor lang strekning som e tilbakelagt på den tida

Trean fokuserade direkt på stigningstalet till tangenten i en graf och visste att ”for å finne akselerasjon så da tar du jo stigningstallet til tangenten / av farta / fartsgrafen / derfor kan det ikke være en vei-tid graf”, vilket i ett första läge gör att Trean utesluter svarsalternativ A. Liksom Ettan tänker Trean på fysik och blir osäker när alternativ A studeras med utgångspunkt att väg-tid grafen ger farten. Ökning i fart blir entydigt med acceleration och därigenom även med tangenten till väg-tid grafen. Konflikten är ett faktum. På samma sätt som Ettan associerade även Trean möjligen ordet acceleration synonymt med fartökning. Negativ acceleration, alltså deceleration kommer inte på fråga för vare sig Ettan eller Trean. Dessutom har både Ettan och Trean gemensamt att de enligt förundersökningen och kontrollfrågor ser derivatan enbart som del i en process. Den instrumentella förståelsen av derivatan kan hindra kreativt resonemang, exempelvis genom ovana att inte reflektera över det man gör under processen, eller på grund av svaga begreppsbilder.

Det tog Fyran 50 sekunder att gå från en sammanblandning av stigningstal och areal via uteslutning av alternativ till rätt svar. A uteslöts eftersom den motsvarar fart, inte acceleration. B uteslöts genom att som Fyran säger: ”da går du feil vei høll æ på å si”, vilket jag tolkar som att Fyran förstår derivation och integration som motsatta operationsprocesser. Fyran gör, på samma sätt som Tvåan, intryck av att förstå att arealen under en graf motsvarar integration, samtidigt som man inte kan komma fram till acceleration från en väg-tid graf genom integration, utan genom derivation. Alltså utesluts B, genom att man ”operationsprocessmässigt” går fel väg. C leder till acceleration och D utesluts på grund av att den motsvarar väg-tid grafen och inte acceleration.

4.8 Fråga 4

I fråga 4 är grafen *y = f '(x)* utgångspunkten och har utseende som Figur 4:4, nedan.



Figur 4:4 Grafen till den deriverade funktionen, *f '(x)*

Frågan inleds med en generell information om att funktionen *y = f (x)* svarar till försäljningen av en ny mattebok de första åren. Med fet stil betonas det, innan delfrågorna att:

PS! Grafen på figuren er grafen til den deriverte til f, ikke grafen til funksjonen selv.

Delfrågorna var som följer:

a) Hva viser *f '* her?

b) Hvilke/hvilket år er salget på topp?

c) Når øker salget mest?

d) Kan grafen til den deriverte funksjonen stige samtidig som derivaten til funksjonen er negativ? Hvorfor / hvorfor ikke? Tenk HØYT!

e) Hvordan ser grafen til funksjonen *f* (*x*) ut?

4.8.1 Ettans svar

Tidsaxeln till grafen på Figur 4:4 tolkades först felaktigt som månader och inte år. Ettan utgick felaktigt från att grafen beskriver funktionen själv och inte den deriverade funktionen, trots påståendet av att ha fått med sig den fetstilta korrekta informationen, ovanför grafen. Ettan utgår från en korrekt begreppsbild av derivatan ”utifrån den deriverte så kan du finne / toppunkt og bunnpunkt altså ka tid / det e solgt *mest* å ka tid det e solgt *minst* // av boka // mener æ”, men i fel kontext. Svaren till a), b) och c) blir då fel.

Först tolkar Ettan grafen $f'(x)$ till att det är störst produktion av matteböcker år tre, då det är en toppunkt på grafen och att kurvans *branthet* motsvarar ökning av sålda exemplar av matematikböcker. Utifrån derivatan anser Ettan att man får toppunkt och bottenpunkt, det vill säga när det är sålt mest respektive minst av matteböcker. Då Ettan ska svara på 4c, när ökningen på försäljningen är som störst, uppstår en konfliktsituation. När derivatan är som störst, är det störst ökning och man säljer flest böcker. Eftersom kurvans branthet inte är störst i år tre, anser Ettan först att det inte hänger ihop med tidigare delfrågor.

> Å när ökar salget mest?
> 1: Salget øke mest // (7 sek) da vil æ si der kurven er brattest / men det henger ikke akkurat sammen med de spørsmålene tidligere

Med lite hjälp fokuserar Ettan på vad funktionsvärdet betyder i grafen och kopplar sen derivatans värde direkt till det.

> Om det här är en ett mål på derivatan / det e ju det / y är lika med / [derivaten till f
> 1: [Ja OK!
> f av x // så är / vad vill det si att // att den är högst vid år tre? / då är det *derivaten* som har störst verdi // vid år tre // och då // då kanske salget // öker som mest?
> 1: Jaa! / selvfølgelig
> När derivaten är som störst / nu [såg du
> 1: [Ja / nå er æ med på den!

Vid samma ögonblick som jag preciserar att ”y är lika med derivatan till f”, verkar det som att Ettan inser det korrekta svaret till 4c. En beskrivning av situationen följer direkt därefter:

> ... du tänker funktionen men här [är
> 1: [Jeg tenker funksjon
> [det derivatan till funktionen / ja
> 1: For som regel har vi jo / grafen på funksjon
> Mmm
> 1: Ja selvfølgelig!
> Och därför är det i fetstil (hänvisar till och pekar på det fetstilta ”PS!” i uppgiftstexten)
> 1: OK! (fniss) / *nå* var æ med (fniss)

När Ettan väl inser betydelsen av den fetstilta texten, verkar först inga problem uppstå i 4b:

> Å då kan du // prova / vilket år // är salget på *topp* igen
> 1: Asså hvis den øker mest i år tre / minker mest i år syv / så vil æ tru at // (7 sek) vet ikke / æ tenker automatisk år *fem* / [men
> [Mhm
> 1: E det riktig?
> Mmm
> 1: OK (fniss)

Kanske Ettan har svarat korrekt på fråga 4b, utan att verkligen ha förstått? Ordet ”automatisk” får mig automatiskt att tänka på en process. Ettan kanske automatiskt utförde en procedur som hör till analysering av grafer, *kurvedrøfting*? Ettan tänker i så fall kanske felaktigt på att nollpunkten till $f'(x)$ är mitt mellan där f' är mest positiv och mest negativ. Ett annat möjligt resonemang som felaktigt ger rätt svar i 4b, är att fem ligger mitt mellan tre och sju.

Vad är derivatan i år *fem*?
1: // Null!
Mmm
1: Da / har du normalt et toppunkt på / selve funksjonsgrafen
Mmm / det året är salget /
1: På [topp
[E på topp
1: Ja!
Flott! Å nu såg du att när ökar salget mest? det är alltså
1: Vid år tre
När derivatan har störst verdi / istället för å tänka på tangenten till *funktionen* du ser / för funktionen på *bilden* e ju alltså funktionens derivata
1: Ja

Ettan inser direkt att fråga 4d är identisk med fråga 1 och är efter en tyst 10 sekunders paus inne på samma felaktiga tanke som vid fråga 1. Kanske använde Ettan de 10 sekunderna till att reflektera över svaret till fråga 1? Ettan har återigen en korrekt begreppsbild av derivatan, men i fel kontext. Ettan tänker att funktionen inte kan stiga, om derivatan till funktionen är negativ.

Frågeställningen i 4d tolkas som ”Kan grafen til funksjonen stige samtidig som derivaten til funksjonen er negativ?” istället för ”Kan grafen til den deriverte funksjonen stige samtidig som derivaten til funksjonen er negativ?”. Begreppsbilden av derivatan relaterades till grafen av funktionen, inte till grafen av derivatan.

Jag styr in Ettan till att fokusera på nedre delen av grafen, för att så på nytt fokusera på frågeställningen.

Stiger den nån *annan* stans? / [grafen
1: [Ja / den *stig* jo mellom *syv* og / år *elleve* også
Ja å då är det i undre delen av / av grafen här / så den stiger alltså på / grafen stiger på två forskjellig steder / *där* och *där* som du nyss har sagt
1: E spørsmålet bare om *grafen* kan stige når //
Mmm / ([läser fråga 4d högt på nytt)
1: *Det* kan den jo! // ja
När är derivaten negativ till funktionen?
1: Den er negativ fra år *fem* til år *elleve*
Jah
1: Å den *stig* mellom år *syv* og år *elleve* / ergo ja det kan den
Å där ser du / forskjellen mellom å ha bare text /
1: Ja
Å en graf å relatera till /
1: Ja (fniss)
Nu fick du svaret på fråga 1
1: Ja

Med en graf kan frågan konkretiseras på ett annat sätt än utan, vilket leder till att man lättare kan se eller kontrollera sitt svar. Risken finns ändå att man tolkar frågan fel och därigenom fortfarande relaterar derivatan till felaktig kontext. Uppfattningen av frågan visade sig vara problematisk och inte uppfattningen av derivatan. Om jag endast hade svar på fråga 1 att tillgå och inte på fråga 4d, så hade jag kanske dragit slutsatsen att Ettan befann sig i en kognitiv konfliktsituation när det egentligen inte var det. Ettan ville tidigare veta om det felaktiga svaret i fråga 1 var korrekt, vilket jag då inte avslöjade:

1: Får æ fasit? så æ hør om de e rett?
Ja vi kommer dit ska du se (fniss)
1: OK
Vi återgår till fråga 1 / Är den vanskeligt formulert / spørsmålet eller / det tog lite tid å sätta sig in i / [vad
1: [Ja
vad spør man mmm
1: Ja / det gjor æ / for det var litt forvirrandes det der *den* deriverte funksjon å *derivate* / men / æ tolka det nok som den samme tingen
Mmm
1: å derfor tenker æ at når derivaten til funksjon er negativ der sssynk / (visar med penna i luften representerandes en negativ tangent som följer en fiktiv konkav graf) grafen til den deriverte funksjon / å da kan den ikke stige samtidig //
Mmm men där är derivaten till *funktionen* negativ å här är det den *deriverte* funktionen / [det
1: æ vet ikke vad som er forskjellen mellom de [to
[precis å språkbruket är så viktigt hur / att man ska / för du svarar ju utefter hur du har förstått den där / [spørsmålet
1: [Ja

Fråga 1e valde jag att hoppa över i detta läge eftersom intervjun annars skulle bli alltför lång. Jag prioriterade här fråga 5 framför 4e, eftersom fråga 5 innehöll liknande moment som fråga 4e inklusive lite till.

4.8.2 Tvåans svar

Tvåan tolkar först f' till att vara *stigningen* för antal böcker sålt per år. Stigningen till grafen ses som ökningen eller minskningen av antal böcker sålt per år. Tvåan drar först samma slutsats som Ettan, nämligen att försäljningen är på topp i år tre eftersom det är en topp på grafen där. I samma stund som Tvåan säger ”*der*” och pekar på toppen av grafen, vid år tre, inser Tvåan när försäljningen är på topp. Direkt därefter rättar Tvåan sig själv med att peka på år fem istället, då grafens y-värde går från att vara positiv till negativ.

2: [Ja / nemlig // så så vi kan si at i / ja / i år *tre* / *da* er salget / på *topp*
Så nu svarar du på (4)*b* ja?
2: Ja
År *tre* är salget på topp /
2: Ja
Fordi? der är en topp på den / deriverte grafen?
2: Ja / ja *der* [pekar på toppen av grafen] er // vent litt / æ sa feil / eeem / i år *fem* [pekar på år fem, där grafens *y*-värde går från att vara positiv till att vara negativ] / så går denee / deriverte fra å være po / der har vi et nullpunkt for den deriverte / der går den fra å være / ehm *positiv* til *negativ* / så når den deriverte går fra å være positiv til negativ / *da* har vi / et toppunkt / for f av x / så i år *fem* / retter æ meg selv da til / e e salget på topp

Här går allt så fort att jag inte vet om gesten kommer före, efter eller samtidigt som Tvåan förstår och löser problemsituationen korrekt. Resten av fråga 4 är oproblematisk för Tvåan.

4.8.3 Treans svar

Trean tolkar tidsaxeln korrekt, medan *y*-axeln tolkas felaktigt som försäljningen. I nästa sekvens skönjer man Treans begreppsbild av derivatan, baserad på kurvan i Figur 4:4. Först antogs att Trean tolkat f' korrekt, att derivatan visar den momentana förändringen av försäljningen, eftersom ”den viser vel det at / salget ble / økte mer og mer og mer og mer / i // ska vi si / *økninga* av salget *økte* mer og mer (pekar och följer grafen med fingret fram till tidpunkten tre år)”. Att försäljningen ökade ”mer og mer og mer og mer” tolkar jag som ett försäljningsförlopp, likt funktionsuttrycket e^x med positiva x-värden.

Ett problem uppstår när Trean säger att försäljningen ökade mer och mer, samtidigt som fingret följer grafen på figuren, hela vägen fram till tidpunkten tre år. Trean borde ha stoppat fingrets rörelse där kurvans stigning går över från en ökning till en minskning, före derivatans största positiva värde. En annan möjlighet är att Trean *bara* menade att försäljningen av matteböcker ökade fram till år tre, eftersom *y*-axeln tolkades felaktigt som försäljningen av matteböcker.

> 3: ... økninga av salget gikk opp / å så / dalte salget // å / eller // det er vanskelig å forklare det med ord / men / den viser i hvert fall at / *nedgangen* økte // altså // den ville jo selvfølgelig ikke solgt et *minusantall* når den krysser x-aksen / det er bare det at den / den har bare gått / kordan blir det? / veldig *fort* ned // for den deriverte viser *kor* mye den sell i en *punkt* // nei / kor mye salget øker i et punkt / så over langer tid / å rundt det *femte* året krysser den / å sellll / hvor blir det? / nedgangen ehm / nedgangen / øker / helt til den kommer til / år *syv* // kor / *oppgangen* blir kraftigere igjen

Vidare resonemang från Trean indikerar att den första felaktiga tolkningen av *y*-axeln, håller kvar felaktig fokus. Grafen på bilden ses felaktigt som grafen till funktionen, inte till den deriverade funktionen. Detta orsakar en konfliktsituation när Trean menar att försäljningen dalade och nedgången ökade till under x-axeln, vilket enligt Treans tolkning borde innebära en kognitiv konfliktsituation, nämligen att det blir sålt ett minusantal matteböcker. Trean menar att det självklart inte blir sålt ett minusantal matteböcker efter år fem och faller tillbaka till en tidigare begreppsbild, som inte orsakar en kognitiv konflikt. Detta stöder resultat från Vinners studie (1991).

Om man tror att man har rätt när man har fel, kan det vara svårt att föreställa sig den kognitiva konfliktsituationen, om inte omöjligt. Trean försöker att förstå grafen i relation till verkligheten, men lyckas inte riktigt förklara sig på ett förståeligt sätt. Det som var en potentiell kognitiv konflikt, ser inte Trean förrän det är två verklighetsbeskrivningar i konflikt. I hopp om klargöring, fokuserar jag först på *år fyra*:

Vad säger den här grafen? det står i fetstil här att
3: Det står / det det egentlig sier er at / først // den sier egentlig bare om / salget har minska eller gått ned i løpet av åran / å den sier jo det at fortsatt så øker salget // asså / år *en* solgte *mer* enn år *to*
Men år fyre?
3: År fyre solgte *mindre* enn år tre
Var det *positivt* salg eller *negativt* salg?
3: Det er fortsatt *positivt* salg / men det er en *nedgang* i forhold til / salget år *tre*
Ja / så nedgång på ökningen helt enkelt?
3: Ja / det er en nedgang på økningen / det blir mindre / mindre økning

Trean tror felaktigt att ”År fyre solgte *mindre* enn år tre”, möjligen eftersom y-värdet är mindre då. Till frågan om det är positiv eller negativ försäljning, svarar Trean att det fortfarande är positiv försäljning i år fyra. Trean håller med att det är en nedgång i *ökningen* från tidpunkten tre till tidpunkten fyra, men ser fortfarande inte en konfliktsituation. Om Trean tror att y-värdet motsvarar försäljning, borde det uppstå en kognitiv konfliktsituation när y-värdet är negativt. Genom att uppmana till resonemang om vad som händer mellan år fem och sju, hoppas jag att Trean ska se att resonemanget leder till två verklighetsbeskrivningar i konflikt.

Så i år *fem* / *efter* år fem / mellan år fem och år sju / vad händer där?
3: Nei det er jo ikke noe mer da at den / asså økninga er *lavere* enn den var / fra *en* til *to* for eksempel / så økningen går rett og slett bare ned
Men är det en *ökning* då / på?
3: Ja det blir jo en nedgang // æ ser ikke
En *nedgång* då?
3: Ja det er en *nedgang* på de åran / den sell mindre i // ja / kordan blir det?

Här är det inte längre en ökning av antal sålda matteböcker per tidsenhet, utan en nedgång. Trean håller fast vid synen att det är en nedgång i ökningen, även för negativa y-värden. När inte Trean ser två verklighetsbeskrivningar i konflikt, går jag vidare till fråga 4b. Trean resonerar kring 4b: ”økninga er jo null i år tre // mellom to og tre øker det mest” och kommentaren: ”Så du svarar på C nu? / när ökar salget mest?”, leder till att Trean istället svarar korrekt på fråga 4c. I hopp om att Trean ska se skillnaden mellan grafen på bilden och funktionen ställs frågan: ”När / när ser du / att salget ökar mest om du tänker på funktionen då?”. Svaret: ”Ja æ ser jo at den øker når tangenten er positiv”, visar åter igen att korrekta begreppsbilder finns, men används i fel kontext. Derivatan verkar relateras till en tangent till en funktion och ökningen av ett funktionsvärde verkar genom felaktig relatering eller begreppsförståelse motsvara en positiv tangent.

Jag går tillbaka till fråga 4b, igen och Trean resonerar sig fram till korrekt svar, men på fel grunder:

3: ...det er bare en *mindre* økning så det må være år *fem* da?
Varför det?
3: Fordi at den øker / så øker den jo bare i mindre grad // og når den krysser x-aksen // så har den en *lavere* økning enn den hadde i utgangspunktet her (pekar på origo) / *her* (pekar mellan år tre och år fem) hadde den en viss økning det vil si så og så mange bøker solgt / å når

den kommer *her* (pekar på efter år sju) så er økninga *enda* mindre enn den var i utgangspunktet når boka begynte å bli solgt / så det må være i år *fem* / som salget var på topp

På 4d svarar Trean följande:

3: Det var det jeg svarte på i sta (i fråga 1 var svaret *nej*) / men / (Trean läser frågan igen högt) // funksjons derivate er jo negativ / unner *der* (pekar på grafen där y < 0) / det er når salget er på *topp* / og antall solgte bøker vil være på *topp* år *fem* / den øker jo fortsatt salg (pekar på år sju)
...

3: ... fra *syv* og åtte er *fortsatt* derivatet negativt / men stigendes
Å då kan du titta på spørsmålet igen (läser fråga 4d högt igen)
3: Ja / det må den kunne gjøre / utifra det æ ser her

Trean svarar korrekt på 4d med hjälp av grafen och reflekterar över fråga 1: ”Æ kjente igjen spørsmålet det gjorde æ // to forskjellige svar”. Tiden blev knapp för Trean, så jag valde att inte ta med fråga 4e av samma grunder som för Ettan.

4.8.4 Fyrans svar

Ingen av delfrågorna 4a, 4b eller 4c var problematiska för Fyran. Fråga 4d visar att det är viktigt *hur* man formulerar sig. Fyran visade hela tiden väldigt god begreppsförståelse, men blev onödigt konfunderad vid flera tillfällen på grund av frågeställningen.

(Fyran läser fråga 4d)
4: Nei // for så lange derivat // nei vent / kan grafen til den derivarte ss // (läser fråga 4d igen högt) // det er jo lurespørsmål deluks da / for // om *grafen* til den *deriverte* kan st / stige / samtidig som derivatet altså i det punktet er *negativ* ? // (6 sek) // grafen kan ikke stige så lenge den deriverte / funksjonen er negativ / så lenge den deriverte funksjonen er negativ eller unner null så vil jo ikke / grafen stige
Vilken graf?
4: Den som man deriverer // kan *grafen* til den *deriverte* funksjonen // funksjonen stige samtidig som *derivata* / til funksjonen er *negativ* // hmmm // (viskar) grafen til den deriverte // samtidig som *derivatet* til funksjon / nå blev æ usikker her for at det æ lurer på da er om at hva mener man at / om grafen kan stige *sell* om den *her* synker ? eller om at den / mener de at den er unner *her*? // for grafen *kan* være stigende / den *er* stigende så lange den deriverte *er* over *null* / men den kan *synke* / men det blir jo samme som at da er grafen på sevd det er bare at den synker / *mot* nullpunktet som sier at den ikke stiger langer // så at det er et spørsmål da som det vil / men æ velger å si at / så lenge derivata av funksjonen er negativ / så lange den *er* unner *nullpunktet* eller unner *origo* // eller unner / ja / så lange den er negativ / så vil // grafen / utgangspunktgrafen synke // den vil gå ned
Då tänker du på / vilken graf?
4: Da tenker æ på startgrafen
Startgrafen?
4: Startgrafen vil synke så lenge den her er negativ / det spiller ingen rolle om den er negativ i en rett linje så lange den *er unner* null så vil grafen synke
Men om det står grafen till den *deriverte* funktionen / kan *den* stige?
4: Grafen til // den *deriverte* funksjonen / ja asså grafen til utgangsfunksjonen det er den som blir derivert

Det kan verka som att Fyran på samma sätt som Ettan och Trean inte ser skillnad mellan den deriverade funktionen och funktionen själv, men det är hela tiden den primitiva funktionen som

Fyran talar om, inte den deriverade funktionen. Att frågorna 4d och 1 var identiska till frågeställningen insåg inte Fyran.

> Känner du igen den där spørsmålet från tidigare?
> 4: Nei
> Det var *exakt* samma som du svarte på *här* / spørsmål 1 (visar)
> 4: Aaah!
> Identiskt
> 4: Ah / *sånn* sett
> Å då var det klinkandes ”Nej”
> 4: Ja selvfølgelig!
> Men här är det / svaret ”*Ja*”
> 4: Ja
> Å det är om man har en *graf* till hjälp
> 4: Mmm
> Så är tanken att man kan se //
> 4: Forstå det bedre ja

Fyran förstår fråga 1 bättre med hjälp av en graf i tillägg och håller med om att det är viktigt hur man formulerar sig. I detta fall leder formuleringen både till att studenten känner sig lurad och att frågeställningen inte ger svar på det som var tänkt.

> Så / det är väldigt viktigt hur man formulerar sig
> 4: Ja
> För att du kan *tänka* rätt [men
> 4: Plutselig så mister man mange poeng på en eksamen / høll æ på å si / fordi at lærern synes det er gøy å formulere artigt
> Mmmöjligt
> 4: Æ føler mæ *lurt*!

4.8.5 Reflektioner kring fråga 4

Alla utom Fyran verkade relatera *derivatan* till stigningen av den avbildade funktionen, oavsett om funktionen redan var deriverad eller inte. Tvåan insåg direkt att det inte stämde och rättade sig själv. Begreppsbilden, att brantheten på en kurva är samma sak som derivatan, är tydligt starkt förankrad hos Ettan som inte reflekterar över att grafen på bilden inte är grafen till funktionen, utan grafen till funktionen själv. Kanske associationerna till stigningstal oftare genererar en uppfattning av positiv riktning än vad branthet gör?

Ettan relaterar först inte till derivatans värde, utan till brantheten på kurvan. På liknande sätt ser Trean felaktigt grafen på bilden som grafen till den primitiva funktionen. Möjligen är det vanligare att man utgår ifrån att en graf representerar $f(x)$ än $f'(x)$? En annan möjlighet, är att en graf som tolkas bildligt, kan leda till kognitiva konflikter (Jørgensen, 2006). Reflektioner kring begreppsbilden av derivatan avslöjar eventuella kognitiva konflikter, trots god begreppsförståelse, vilket stöder Jørgensens fynd (ibid.).

Alla tre, som i fråga 1 svarade felaktigt, hade problem med 4d. Skillnaden mellan frågorna var bara en graf att tillgå i 4d. Det blir svårare att visualisera begrepp som mentala bilder ju högre matematisk nivå man befinner sig på (Tall & Vinner, 1981). Det leder till ökad risk att intuitiva förklaringar för med sig felaktiga begreppsdefinitioner och därigenom även felaktiga begreppsbilder. Om dessa felaktigheter slår rot, kan de bli svåra att bli av med senare (ibid.). Det saknas dynamisk växelverkan mellan intuitiva idéer och formellt resonemang, så länge studenten inte inser att det är en kognitiv konflikt. En kognitiv konflikt måste upplevas som verkligheter i konflikt. Saknas kontakt med verkligheten, så kan heller inte verkligheter i konflikt orsaka kognitiva konflikter (Freudenthal, 1991).

Hur man formulerar frågeställningen är givetvis viktigt, särskilt med tanke på att det är lätt att fortsätta använda en begreppsbild felaktigt, om man har missförstått frågan. Efter att ha läst transkriptionstexten, reflekterar Tvåan över svårighetsgraden och olikhetsgraden av att matematiskt förklara någonting skriftligt och muntligt, vilket kräver precisering av begreppsförståelsen.

> En erfaring jeg gjorde meg av intervjuet (og da eg leste transkripsjonen), var at til og med enkel funksjonsdrøfting - som man jo er helt trygg på under en skriftlig prøve - kan bli utfordrende å forklare med overbevisning i en slik "muntlig" situasjon. Det er lett å begynne å rote med ting som man kunne tatt 30-60 sek til å tenke gjennom på en skriftlig eksamen.
> Slik tenker jeg at det å *forklare* noe på stående fot, krever en høy grad av begrepsforståelse, og at man er helt stødig på den. Med andre ord, er dette noe som de sterkeste vil få til, men kanskje ikke de middels sterke, selv om sistnevnte ville fått til oppgaver om samme tema på en skriftlig prøve. Der kan man sitte med penn og papir og organisere tankene sine på papiret, trinn for trinn, og dette gjør det lettere (Tvåan, e-post, 12 maj, 2009)

För att undvika den potentiella kognitiva konflikten som ordet ”viser” i fråga 4 kan leda till, hade man exempelvis kunnat använda orden ”svarer til” istället.

4.9 Fråga 5

I avsnitt 3.5.6 förklaras utformningen och syftet med denna fråga. Tanken är att resonemang kring deriveringsprocessen kompletterar begreppsförståelsen kring derivatan, speciellt när man kan visualisera derivatan till en given funktionsgraf efter deriveringsprocessen. Studenterna upplevde fråga 5 som väldigt givande och kreativ, eftersom möjlighet gavs att konkret se på derivatan och derivation ur en annan synvinkel. Potentialen av denna fråga är intressant som ett studium i sig.

4.10 Resultat

Hur studenter förstår och resonerar kring det matematiska funktionsbegreppet derivata i en problemlösningssituation och hur gester kan vara betydelsefulla för matematisk begreppsförståelse beskrivs som delresultat 1 respektive delresultat 2.

4.10.1 Delresultat 1

En intervjusituation visar exempel på en hårfin skillnad mellan att förstå och att inte förstå under en matematisk problemlösningsprocess. Ettan ska ta ställning till vad accelerationen till ett föremål som rör sig längs en rät linje svarar till och börjar med att ge en god definition ur minnet på att acceleration är hur mycket farten ökar eller minskar i löpet av tid. Därefter blir Ettan osäker på vilket av fyra svarsalternativ som är det riktiga och är beredd att ge upp. När intervjuaren påpekar vad Ettan började med att säga, så fokuserar Ettan på tidigare information, vilket omedelbart leder till riktigt svar efter kort reflektion.

> 1: Stigningstallet til en fart-tid graf vil jo si // (6 sek) kor sss / fort den går på en bestemd tid // kan æ få si pass? ([fniss)
> [Ja men du är inne på rätt / det du tänker här / det du sa så bra här också att / *stigningstallet* til en fart-tid graf / säger hur fort / farten / i förhållande till tid ökar eller minskar / alltså du har ju sagt att det *e* det [som
> 1: [Då *må* det jo være C som e svaret!

Ytterligare en intervjusituation visar exempel på denna subtila skillnad mellan att förstå och att inte förstå, men i detta fall är det intervjuaren som tror sig förstå vad informanten Tvåan menar. Homofonen ”D” kan, i svaret till intervjufråga 3, stå för både ”det” och svarsalternativet ”D”: “fart / derivert / kanskje det er D som må bli tilbakelagt strekning?”. Antingen blir betydelsen av det Tvåan säger att derivatan till fart är tillryggalagd sträcka, eller så betyder ”D” att svarsalternativ D innebär tillryggalagd sträcka. Det senare tolkningsalternativet väljs som rimligare i situationen, eftersom svaret även är korrekt och förtydligas i momentet senare. Tvåan visar prov på väl utvecklad begreppsförståelse kring derivatan, eftersom reflektion och resonemang kring relationer mellan storheter leder till korrekt svar.

Det är viktigt att relatera begreppsförståelse till kontexten, exempelvis när man tolkar resultat till enskilda TIMSS-frågor. Det kan få dramatiska konsekvenser om man tolkar ett tillfälligt fel som ett systematiskt, eller tvärtom. Man kan då felaktigt tro att individer har problem med ett specifikt matematiskt begrepp, istället för att se på alternativa tolkningsvarianter.

Alla fyra läser symbolerna som representerar derivatan i frågorna 2 och 4 korrekt och till synes utan problem. Det är tydligt att man kan visa prov på god begreppsförståelse av derivatan och ändå komma i en kognitiv konfliktsituation vid en problemlösningssituation, speciellt då växelverkan mellan intuitiva idéer och formellt resonemang saknas. När man baserar derivatans betydelse på alltför få begreppsbilder, ökar risken för kognitiv konflikt, vilket fråga 4 visar.

Ettan och Trean, som enbart visade instrumentell förståelse, ”såg” heller inte att grafen till den deriverade funktionen kan stiga samtidigt som derivatan till funktionen är negativ. I fråga 4d utgick Ettan felaktigt från att grafen beskriver funktionen själv och inte den deriverade funktionen, trots antagande av att ha fått med sig den korrekta informationen i fetstilt ovanför grafen: ”*Grafen på figuren er grafen til den deriverte til f, ikke grafen til funksjonen selv*”.

4.10.2 Delresultat 2

Denna studie indikerar att en gest som visar hur derivatan till en funktion ”ser ut” och ändrar sig, kan vara till hjälp för studentens resonemang under problemlösningssituationen. Det finns ingen indikation, i denna studie, på att gester skulle vara lika behjälpliga vid kreativt matematiskt resonemang kring hur funktionen ser ut, när man känner dess derivata. Det kan tyda på att studenter lättare tar till gester i sin förståelse av derivatan som matematiskt funktionsbegrepp, när en grafisk representation av derivatan finns tillgänglig.

Under intervjusituationerna valde alla fyra förstaårsstudenterna, i tillägg till att följa kurvan med blicken, att även använda gester. Det verkar som om gester kontextuellt kan bredda begreppsbilden till att underlätta för växelverkan mellan intuitiva idéer och formellt resonemang, vilket ger god grogrund för progress i matematisk begreppsförståelse. Denna studie ger stöd till Talls (2001) och visar att det är naturligt för många studenter att utveckla en insikt av gradienten i förändring, genom att helt enkelt följa kurvan med blicken samtidigt som man reflekterar över om riktningskoefficienten på gradienten blir mer eller mindre positiv eller negativ.

5 DISKUSSION

Lärandeprocessen som pågår hos forskaren under ett vetenskapligt arbete som detta, ger större möjligheter till att inse vad man borde ha gjort *efter* avslutat arbete än vad man borde göra *inför* kommande arbeten. Detta är helt i linje med ett av syftena med detta masterarbete: att reflektera över lärandeprocessen, vilket leder till ökad förståelse.

Tanken med att låta informanterna i förundersökningen skriva på ett blankt A4-ark var att jag inte ville att linjer eller rutor skulle leda till, eller begränsa, studenternas associationer när det gäller till exempelvis grafritning. Möjligen skulle fler informanter än Tvåan och en till ha ritat en hjälpgraf, under förundersökningen, om de fått rutat eller linjerat A4-ark. Det är ett resultat i sig att endast två av 23 ritade graf när de, under förundersökningen, skulle beskriva hur de förstod derivatan. Tvåan ansåg att en graf, som något konkret och visuellt, är till hjälp när man ska förklara någonting abstrakt. Det att rita en hjälpgraf tycks ha en positiv effekt på begreppsförståelse kring derivatan. Begreppsmässigt, frågade förundersökningen bara om *derivatan* och inte *funktion*, *kontinuitet* eller *gränser*, vilket kan ha antingen begränsat användningen av kreativt matematiskt resonemang, eller öppnat upp för detsamma. Denna undersökning ger inte någon entydig förklaring till detta.

Gester används i många intervjusituationer, vilket indikerar att det kan vara fördelaktigt att filma intervjuerna, speciellt om fokus i undersökningen ska vara på gesters betydelse i förståelsesammanhang. Om gester kan vara en del av problemlösningsprocessen direktrelaterat till tänkande, skulle det vara intressant att använda Lithners (2008) analysverktyg för att försöka analysera gester som matematiskt resonemang. Förutsatt att en gest kan räknas som en resonemangsform, finns det någonting som kännetecknar en gest som kreativt resonemang, eller kan den bara vara imitativ?

Det verkar som att kognitiva konflikter orsakade av bildlig tolkning av en graf, finns hos förstårsstudenter som läser matematik, vilket är i linje med Jørgensens (2006) studie på gymnasieelever och Viholainens (2006) på lärarstudenter. Även om inte en graf var tillgänglig, tolkade studenter derivatan bildligt, vilket ledde till konfliktsituationer. Konkretiserande exempel kan, under inlärningssituationer eller i läromedel, få motsatt effekt för studenter med som försöker lära sig att förstå abstrakta begrepp.

Tydligt var att den grafiska framställningen gav studenterna en bredare begreppsbild av derivatan, vilket fungerade som en språngbräda till en bättre förståelse av begreppet, på grund av visuell kontroll av växelverkan mellan intuitiva bilder av derivatan och formellt resonemang. Åter igen, stämmer det väl med Jørgensens undersökning (ibid.).

Rapporter och undersökningar baserade på resultat från TIMSS (Grønmo & Onstad, 2009; Vikse, 1999) ger tydliga indikationer på att god begreppsförståelse är en god förutsättning för tillägnande av formell matematik och vidare högre matematiska studier, vilket denna studie bekräftar. Instrumentell begreppsförståelse, kan leda till att studenter med hjälp av imitativt resonemang kan få godkänt på examen, utan att förstå matematiken bakom. Detta trots att högre studier strävar efter bättre förståelse. En av informanterna bekräftar detta:

> kalkulus for meg ble i veldig stor grad et puggefag, hvor jeg måtte pugge forskjellige utregningsmetoder istedenfor å faktisk forstå hva jeg gjorde. Det er vel derfor naturlig at jeg gjorde det såpass mye bedre på konten da jeg hadde 2 måneder ekstra med puggetid (e-post, 24 maj, 2009)

Informanterna i detta arbete visade inte prov på att de utvecklade god begreppsförståelse av derivatan genom att uttrycka den i egna ord, i motsättning till eleverna i Kalvøs (2002) studie. Kanske kan det förklaras med att studenterna inte baserade begreppsförståelsen på eget arbete, vilket eleverna gjorde. I en inlärningssituation kan det vara fördelaktigt att skala bort distraktionsmoment, som senare kan lyftas fram om de visas nödvändiga för begreppsförståelsen.

Som exempel på detta är fråga 5, där studenterna fick utföra derivationsprocessen på ett annat sätt än de var van, vilket, efter reflektion, breddade respektive students matematiska kompetens. Dessutom kan man enkelt se kopplingen till deriveringsproceduren av polynom, som efter derivering ger ett nytt, en grad lägre, polynom. Vid ett senare tillfälle kan man lyfta fram och precisera denna branthet och därigenom belysa hur viktig en precision av derivatan är, i och för särskilda situationer. Möjligheter att visualisera gränsvärdesbegrepp är goda, exempelvis i form av talet e. När man på detta sätt deriverar exponentialfunktioner med baser som går mot talet e, blir de nya, deriverade graferna mer och mer lik exponentialfunktionsgrafen själv.

6 UPPSUMMERING

Begreppet derivatan är ett av de viktigaste begreppen inom kalkulus och kan ses som ett objekt för sig eller som del av en process. Två av de fyra förstaårsstudenterna, som var intervjuinformanter i denna studie, tolkade under förundersökningen derivatan enbart som del av en deriveringsprocess. De två, som enbart visade instrumentell förståelse, hade svårigheter i problemlösningssituationer med att konkretisera och hamnade lättare i kognitiva konflikter än de andra två. Någon konfliktsituation uppstod genom sammanblandning av förhållanden mellan storheter. Möjligen baseras då derivatans betydelse på alltför få eller alltför svaga begreppsbilder.

Fråga 3 i denna undersökning blottade kognitiva konflikter som möjligen berodde på a) att begreppsbildningsprocessen avslutades för tidigt under uppbyggnaden av begreppsförståelsen, eller b) att begreppsförståelsen är byggd vidare på felaktiga grunder, vilket sammanfaller med Sfards (1991) studier. En bildlig tolkning av en graf, kan möjligen förklara en kognitiv konflikt som visades hos tre av de fyra studenterna. Om inte annat visar konflikten, frammanad av fråga 1 tillsammans med fråga 4, att vanans makt är stor.

När studenter, under en inlärningsprocess eller problemlösningssituation, försöker att förstå ett begrepp i en specifik kontext, kan missförståelser vara ett naturligt resultat därav (Bezuidenhout, 1998), vilket denna undersökning stöder. Även de, som under intervjun visar prov på god begreppsförståelse av derivatan, kan råka i kognitiva konflikter. Oklar frågeformulering och en ovan situation i att tänka högt, kan vara två förklaringar till dessa konfliktsituationer. Intervjusituationerna, som process, visade sig att ha en positiv effekt på studenterna och breddade deras begreppsbild av derivatan efter reflektion.

Sätter man begreppsförståelse i ett examensperspektiv, är det inte trivialt att reflektera över syftet med studiena. Sett ur studentens synvinkel, kan det vara enklare att försöka *klara* en examen genom imitativa procedurer än att försöka *förstå* kursens innehåll. Samtidigt är det nog enklare att få godkänt på en examen, om syftet med examensförberedelserna är att förstå kursens innehåll, vilket kan kräva kreativt matematiskt resonemang. Det kan ta lång tid för en kalkulusstudent att utveckla en tillfredsställande förståelse av begreppet *derivatan* (Bezuidenhout, Human & Olivier, 1998), vilket indikerar att det finns utrymme för effektivisering eller alternativa metoder under begreppsinlärningsprocessen. Förslagsvis, kan kalkulusundervisningen för förstaårsstudenter på universitet kompletteras med relevanta begreppsförståelsemoment före kursstart såväl som parallellt med kursen.

UPPSUMMERING

Begreppskartor kan vara behjälpliga för att effektivisera och strukturera begreppsbilder, som under inlärningsprocesser är i förändring. Begreppsförståelsen och användningsområden till de aktuella begreppen kan breddas, genom bruk av begreppskartor. Vid skapande av begreppskartor bör man ta i beaktning att det är en process som är krävande både i tid och i tankearbete, oavsett om personen i fråga är van eller inte. Man kanske inte ser nyttan av en begreppskarta, förrän möjligtvis efter att man har producerat en och reflekterat över den.

Det skulle vara intressant att studera utvecklingen av begreppsförståelsen (av begrepp med central betydelse i kursen) hos studenter som *inte* har klarat examen, för att

a) undersöka eventuella samband mellan examensresultat och begreppsförståelse

b) använda intervjusituationen som inlärningstillfälle för studenten.

En studie om gesters betydelse för matematisk begreppsförståelse skulle vara intressant ur minst två synvinklar. För det första, är det ett nytt forskningsfält och alltså forskat lite på det och för det andra finns en stor potential i gester, *om* de kan bidra till bättre begreppsförståelse eller kreativt matematiskt resonemang. Det senare kan belysas med en intervjusituation, där gesterna kontextuellt breddar begreppsbilden till derivatan med exempelvis en känsla av riktningsförändring. Detta sker speciellt under problemlösningsprocessen, när begreppsbilden påverkas av den dynamiska växelverkan mellan intuitiva idéer och formellt resonemang hos förstaårsstudenterna, helt i linje med Petterssons konklusioner (2008). Som nämnt i diskussionen, vore en möjlighet att analysera gester, i olika matematiska sammanhang, som matematiskt resonemang med hjälp av Lithners (2008) analysverktyg.

REFERENSER

Alver, B. G. & Øyen, Ø. (1997). *Etik och praktik i forskarens vardag*. Översättning: S. Torhell & E. Lund: Studentlitteratur 1998 för den svenska utgåvan. Originaltitel: Forskningsetikk i forskerhverdag. Vurderinger og praksis. Oslo: Tano Aschehoug.

Angell, C., Kjærnsli, M., & Lie, S. (1999). *Hva i all verden skjer i realfagene i videregående skole?* Oslo: Universitetsforlaget.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Matthews, D., & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education [Elektronisk version]. *Research in Collegiate Mathematics Education*, *2*, 1–32.

Asiala, M., Cottrill, J., & Dubinsky, E. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative [Elektronisk version]. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*, 399–431.

Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable Mental Imagery: Graphical Connections between a Function and its Derivative [Elektronisk version]. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 301–317.

Berggren, P. & Ekblad, F. (2007). Svårigheter med Derivata. *C-uppsats i pedagogik med didaktisk inriktning*, Örebro Universitet. Hämtad 12 april, 2009, från http://oru.diva-portal.org/smash/get/diva2:134991/FULLTEXT01

Bergqvist, E. (2007). Types of Reasoning Required in University Exams in Mathematics [Elektronisk version]. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*, 348–370.

Bezuidenhout, J. (1998). First-year University Students' Understanding of Rate of Change [Elektronisk version]. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *29*, 389–399.

Bezuidenhout, J., Human, P., & Olivier, A. (1998). Some Misconceptions Underlying First-year Students' Understanding of Average Rate and of Average Value. I A. Olivier & K. Newstead (red.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *22*, 96–103.

Dahl, O. E. (2008). Lesson study. Ein japansk kompetanseutviklingsmodell for matematikklærarar [Elektronisk version]. *Mastergradsoppgåve i Matematikk*, Universitetet i Tromsø.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomelogy of mathematical structures*. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematical Education*: *China Lectures*. Hämtad 4 april, 2009, från http://site.ebrary.com/lib/tromsoub/docDetail.action?docID=10047446. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*, 115–141. Hämtad 14 februari, 2009, från http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999k-ed-dem-marcia-esm.pdf

Gray, E. M. & Tall, D. O. (2001). Relationships between Embodied Objects and Symbolic Procepts: an Explanatory Theory of Success and Failure in Mathematics. I M. van den Heuvel-Panhuizen (red.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *25*, 65–72. Hämtad 14 februari, 2009, från http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001i-pme25-gray-tall.pdf

Grevholm, B. (2005). Kognitiva verktyg för lärande i matematik – tankekartor och begreppskartor. *Tangenten*, *1*, 22–29. Hämtad 12 april, 2009, från http://www.caspar.no/tangenten/2005/barbro_grevholm_1_2005.pdf

Grønmo, L. S. & Onstad, T. (red.). (2009). *Tegn til bedring*. *Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007*. Otta: Unipub. Hämtad 5 maj, 2009, från http://www.timss.no/rapport2007/Hele_TIMSS2007.pdf

Gulliksen, T. (1998). *Matematikk i praksis*. Utgave 4. Oslo: Universitetsforlaget.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight*. *A theory of mathematics education*. Orlando: Academic Press.

Hole, A. (1997). *Kalkulus studiebok*. Oslo: Universitetsforlaget.

Hähkiöniemi, M. (2004). Perceptual and Symbolic Representations as a Starting Point of the Acquisition of the Derivative. I M. Johnsen Høines & A. B. Fuglestad (red.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *28*(3), 73-80.

Jørgensen, J. A. (2006). Elevar si grafiske forståing av derivasjon. *Hovudoppgåve for Cand. Scient. i Matematikkdidaktikk*, Universitetet i Bergen.

Kalvø, T. (2002). Den deriverte på skråplanet. Bruk av datalogger i begrepsforståelse av den deriverte. *Hovedfagsoppgave i matematikkdidaktikk*, Høgskolen i Agder.

KD, Kunnskapsdepartementet. (2006). *Kunnskapsløftet - Læreplan i matematikk*. Hämtad 25 maj, 2009, från http://www.udir.no/templates/udir/TM_Læreplan.aspx?id=2100&laereplanid=212147

KUF, Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet. (1999). *Læreplan for videregående opplæring – Matematikk*. Hämtad 25 maj, 2009, från http://www.utdanningsdirektoratet.no/upload/larerplaner/Felles%20allmenne%20fag/lareplan_matematikk.rtf

Kvale, S. (1997). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: ad Notam Gyldendal.

Krager Vartdal, T. (2005). Det magiske året? En casestudie omkring grunnkurset i matematikk 1MX/1MY ved en videregående skole i skoleåret 2003/04 [Elektronisk version]. *Masteroppgave i Realfagdidaktikk*, Universitetet i Oslo.

Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education [Elektronisk version]. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37*(6), 457–467.

Lindstrøm, T. (1995). *Kalkulus*. Oslo: Universitetsforlaget.

Lindstrøm, T. (2006). *Kalkulus*. Oslo: Universitetsforlaget.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises [Elektronisk version]. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 29–55.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises [Elektronisk version]. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 405–427.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning [Elektronisk version]. *Educational Studies in Mathematics*, *67*, 255–276.

Lyngsnes, K. & Rismark, M. (2007). *Didaktisk arbeid*. Oslo: Gyldendal Akademisk.

Matematik. (1886). I *Nordisk familjebok, vol. 10*. Hämtad 20 maj, 2009, från http://runeberg.org/nf/

Niss, M. (2001). Den matematikdidaktiska forskningens karaktär och status. I B. Grevholm (red.), *Matematikdidaktik – Ett nordiskt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur.

Pettersson, K. (2008). Algoritmiska, intuitiva och formella aspekter av matematiken i dynamiskt samspel. En studie av hur studenter nyttjar sina begreppsuppfattningar inom matematisk analys [Elektronisk version]. *Akademisk Avhandling för Filosofie Doktorsexamen*, Matematiska vetenskaper, Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet.

Piaget, J. (1972). *The principles of genetic epistemology*. London : Routledge & Kegan Paul.

Postholm, M. B. (2005). *Kvalitativ metode. En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Oslo: Universitetsforlaget.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings [Elektronisk version]. *Educational Studies in Mathematics*, *70*, 111–126.

Ryve, A. (2006a). Vad är kunskap i matematik? [Elektronisk version]. *Nämnaren*, *2*, 7-9.

Ryve, A. (2006b). Approaching Mathematical Discourse: Two Analytical Frameworks and their Relation to Problem Solving Interactions. *Doktorsavhandling i Matematik*. Västerås:

Mälardalen University Press Dissertations, ISSN 1651-4238;30. Hämtad 24 april, 2009, från http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:mdh:diva-137

Schilhab, T. & Hansen, N. (2006). Når metoden dikterer begrebet. I C. Jantzen & T. Thellefsen (red.), *Videnskabelig begrebsdannelse*. Aalborg : Aalborg Universitetsforlag.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-making in Mathematics. I D. Grouws (red.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, s. 334–370. New York: Macmillan.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin [Elektronisk version]. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1–36.

Sfard, A. (2001). There is more to the discourse than meets the ears: Looking at thinking as communication to learn more about mathematical learning [Elektronisk version]. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 13–57.

Sfard, A. (2009). What's all the fuss about gestures? A commentary [Elektronisk version]. *Educational Studies in Mathematics*, *70*, 191–200.

Sjøberg, S. (2004). *Naturfag som Allmenndannelse – En Kritisk Fagdidaktikk*. 2. utgave. Oslo: Gyldendal. 1. utgave 1998.

Sjögren, J. (2004). *Vad kan man "se" i en graf?* Hämtad 1 april, 2009, från http://www.his.se/PageFiles/13021/Vad%20kan%20man%20se%20i%20en%20en%20graf.pdf?epslanguage=sv

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding [Elektronisk version]. *Mathematics Teaching*, *77*, 20–26.

Soleng, R. (2007). Derivasjon. Forelesning 24. oktober 2007. *Föreläsningsnotat* från hösten 2008. Hämtad 21 april, 2009, från http://uit.no/getfile.php?PageId=4557&FileId=928

Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap. Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press.

Sørhaug, T. (1996). Tykke og tynne beskrivelser. I T. Sørhaug (red.), *Fornuftens fantasier. Antropologiske essays om moderne livsformer*. Oslo: Universitetsforlaget.

Tall, D. O. (red.). (1991). Reflections. I *Advanced Mathematical Thinking*, s. 251–259. Hingham: Kluwer Academic Publishers. Hämtad 4 april, 2009, från http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991m-reflections-amt.pdf

Tall, D. O. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. I D. Grouws (red.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, s. 495–511. New York: Macmillan.

Tall, D. O. (1996). Functions and Calculus. I A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (red.), *International Handbook of Mathematics Education*, s. 289–325. Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. O. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity [Elektronisk version]. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151–169.

Tall, D. O. & Watson, A. (2001). *Schemas and Processes for Sketching the Gradient of a Graph*. Hämtad 14 april, 2009, från http://warwick.ac.uk/staff/David.Tall/drafts/dot2001-tall-watson-draft.pdf

Mat-1001 Kalkulus 1. (2008). Hämtad 25 maj, 2009, från http://uit.no/matstat/mat-1001/2

Viholainen, A. (2006). Why is a Discontinuous Function Differentiable? I J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (red.), *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *30*, 329–336. Prague: Charles University.

Vikse, J. T. (1999). Forståelse av derivasjon – Elevers forståelse av derivasjonsbegrepet. *Hovedoppgave i matematikkdidaktikk*, Høgskolen i Agder.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. I D. O. Tall (red.), *Advanced Mathematical Thinking*, s. 62–85. Hingham: Kluwer Academic Publishers. Hämtad 6 april, 2009, från http://site.ebrary.com/lib/tromsoub/docDetail.action?docID=10046992

BILAGOR

1 Informasjonsskriv og samtykkeerklæring

Forespørsel om å delta i undersøkelse og intervju i forbindelse med en masteroppgave.

Jeg er masterstudent i matematikk ved Universitetet i Tromsø og holder nå på med den avsluttende masteroppgaven. Temaet for oppgaven er matematisk begrepsforståelse. Jeg er interessert i å finne ut om det er forskjeller og likheter mellom begrepsforståelsen og anvendelsen av begrepet.

For å finne ut av dette, ønsker jeg etter denne skriftlige undersøkelse å ta kontakt med aktuelle informanter for å intervjue en og en av til sammen maksimalt 10 studenter som har blitt undervist i universitetsmatematikk og er over alderen 18 år.
Spørsmålene i undersøkelsen og i intervjuet vil dreie seg om det matematiske begrepet i ulike matematiske situasjoner.
Undersøkelsen besvares skriftlig og tar omtrent 15 minutter. Jeg trenger navn og telefonnummer eller e-postadresse ettersom jeg behøver tilgang til besvarelser i undersøkelsen der jeg kan spore tilbake til hvem den enkelte besvarelse tilhører for å sammen med personen kunne bli enige om tid og sted for intervjuet. Intervjuet tar omtrent en halv time og jeg vil bruke lydopptaker og ta notater mens vi snakker sammen.

Opplysningene vil bli behandlet konfidensielt, og ingen enkeltpersoner vil kunne kjenne seg igjen i den ferdige oppgaven. Opplysningene anonymiseres og opptakene slettes når oppgaven er ferdig, innen utgangen av 2009. *Det er frivillig å være med og du har mulighet til å trekke deg når som helst underveis, uten å måtte begrunne dette nærmere. Dersom du trekker deg vil alle innsamlede data om deg destrueres.*

Dersom du kan være med på denne skriftlige undersøkelse og eventuelt etterfølgende intervjue, er det fint om du skriver under på den vedlagte samtykkeerklæringen og gir den eller sender den til meg.

Hvis det er noe du lurer på kan du ringe meg på 41671628, eller sende en e-post til iq2@hotmail.com Du kan også kontakte mine veiledere:
Anne Birgitte Fyhn ved Institutt for pedagogikk og lærerutdanning på telefonnummer 776 46120 eller e-post anne.fyhn@sv.uit.no
Ragnar Soleng ved Institutt for matematikk og statistikk på telefonnummer 776 44014 eller e-post ragnar.soleng@matnat.uit.no
Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste A/S.

Med vennlig hilsen
Jonas Oskarsson
Bardehvalveien 10
9100 KVALØYSLETTA

Samtykkeerklæring:
Jeg har mottatt informasjon om studien av matematisk begrepsforståelse og ønsker å svare skriftlig på undersøkelsen og eventuelt å stille på etterfølgende intervju.

Signatur ………………………………… Telefonnummer ……………………………..

E-post……………………………………..

2 Kategorisering av derivata som process och eller objekt

	G		R		U		P		P			1															Σ
KAT→ STUD↓	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**	**Å**	**(kat/ stud)**
1	1	1		1	1			1		1	1		1										1					**7**
2		1		1	1									1		1	1	1							1			**7**
3	1	1		1	1			1		1						1	1	1									1	**8**
4	1	1		1	1			1							1							1	1	1	1		1	**9**
5		1												1								1			1			**3**
6		1		1										1											1			**3**
7														1														**1**
8	1	1		1					1									1					1			1		**5**
9	1	1		1	1									1									1		1	1	1	**7**
10		1		1				1						1									1			1		**5**
11	1	1		1	1		1	1	1					1								1	1	1	1			**10**
12		1		1	1					1			1	1	1		1											**7**
13	1	1		1	1		1	1							1	1	1			1	1		1					**10**
14	1	1		1	1	1		1							1	1	1	1									1	**9**
15		1	1	1	1	1		1	1			1		1		1	1		1	1			1					**12**
Totalt Gr1:15	**8**	**14**	**1**	**13**	**10**	**2**	**2**	**8**	**3**	**3**	**1**	**1**	**2**	**9**	**4**	**5**	**6**	**4**	**1**	**2**	**1**	**3**	**8**	**2**	**6**	**3**	**4**	
	G		R		U		P		P			2															**Σ**
KAT→ STUD↓	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**	**Å**	**(kat/ stud)**
16	1			1										1	1							1		1	1			**6**
17	1	1	1					1	1				1	1	1	1	1					1						**9**
18	1	1		1	1												1						1				1	**5**
19	1			1	1								1	1		1						1	1					**7**
20	1	1		1	1			1	1	1				1						1		1	1		1			**10**
Totalt Gr2: 5	**5**	**3**	**1**	**4**	**3**	**0**	**0**	**2**	**2**	**1**	**0**	**0**	**2**	**4**	**2**	**2**	**2**	**0**	**0**	**1**	**0**	**4**	**3**	**1**	**2**	**0**	**1**	
	G		R		U		P		P			3															**Σ**
KAT→ STUD↓	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**	**Å**	**(kat/ stud)**
21		1						1															1		1	1		**4**
22	1			1				1	1					1								1		1	1			**7**
23	1	1		1	1			1		1				1			1					1		1				**8**
Totalt Gr3: 3	**2**	**2**	**0**	**2**	**1**	**0**	**0**	**3**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**2**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**2**	**1**	**2**	**2**	**1**	**0**	
Totalt 23	**15**	**19**	**2**	**19**	**14**	**2**	**2**	**13**	**6**	**5**	**1**	**1**	**4**	**15**	**6**	**7**	**9**	**4**	**1**	**3**	**1**	**9**	**12**	**5**	**10**	**4**	**5**	
%	**65**	**83**	**9**	**83**	**61**	**9**	**9**	**57**	**26**	**22**	**4**	**4**	**17**	**65**	**26**	**30**	**39**	**17**	**4**	**13**	**4**	**39**	**52**	**22**	**43**	**17**	**22**	

Kolumn A till C innebär en tolkning från min sida om studenten ser/beskriver "derivatan" som: A process, B objekt eller C med hjälp av graf.
Kolumn D till Å motsvarar svarskategorier D till Å nedan.
Student 1 - 23 har ett ord/begrepp (=svarskategori) med i sitt svar till frågan: "Hva forstår du med DERIVATEN?"
Förekomsten av ordet representeras det med siffran "1" i tabellen ovanför.

A PROCESS
B OBJEKT
C GRAF
D FUNKSJON
E PUNKT
F DEFINISJONSMENGD
G INTERVALL
H STIGNINGSTALL (STIGNINGSRATE: 10, STIGNINGSPUNKT: 13)
I TANGENT(EN)
J FUNKSJONSVERDI, VERDIEN (ARGUMENT: 12, VARIABLER: 23)
K MÅLE
L MÅL
M ENDRING
N VEKST, AVT., STIGER, FORT, (HASTIGHET, FART)
O GRENSEVERDI(ER), LIM, 1/∞, MOMENTAN
P DEFINISJON
Q symboler
R POLYNOM, GRAD
S DERIVERBAR
T KONTINUERLIG
U MONOTOMINE EGENSKAPER
V f''(x) (Andrederivaten, andrederiverte)
W EKSTREMALPUNKT(ER), MAKS/MIN, TOPP/BUNN
X KONVEKS/KONKAV (KRUMNING: 22, 23)
Y GRAF(ISK)
Z ..DRØFTING.. (Å ANALYSERE GRAFER: 23)
Å INTEGRAL, INTEGRASJON, ANTIDERIVERTE

3 Intervjumall

HUSK Å **TENKE HØYT**!!!

Først noen innledende spørsmål:

Er derivate samme sak som å derivere?

Hvorfor er det bra å kunne derivere?

-Kan du finne en annen situasjon hvor man deriverer eller bruker derivaten?

Vet du når man IKKE kan bruke derivate eller derivasjon?

Er det forskjell på:

derivaten er null i et punkt og

null derivatet i et punkt.

I så fall hva?

Da går vi videre til visualisering av grafer.

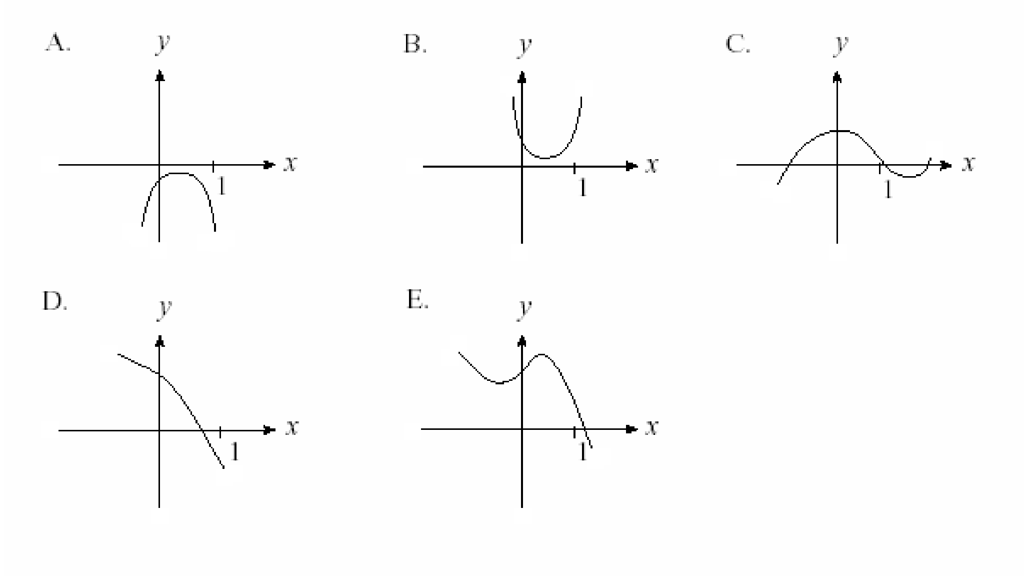
1.

Kan grafen til den deriverte funksjonen stige samtidig som derivaten til funksjonen er negativ?

Hvorfor / hvorfor ikke? **Tenk HØYT!**

2.
K 05
Les og tenk HØYT!

Hvilken av grafene nedenfor har følgende egenskaper:
$f'(0) > 0, f'(1) < 0$ og $f''(x)$ er negativ for alle x?



3.
K03
Akselerasjonen til et legeme som beveger seg langs en rett linje, svarer til
A. stigningstallet til vei-tid grafen
B. arealet under vei-tid grafen
C. stigningstallet til fart-tid grafen
D. arealet under fart-tid grafen
Tenk HØYT!

4.

Grafen $y = f'(x)$ er vist på figuren. Anta at funksjonen $y = f(x)$ viser salget av en ny mattebok de første årene. **PS! Grafen på figuren er grafen til den deriverte til *f*, ikke grafen til funksjonen selv.**

Begrunn svarene dine. **Tenk HØYT!**

a) Hva viser f' her?

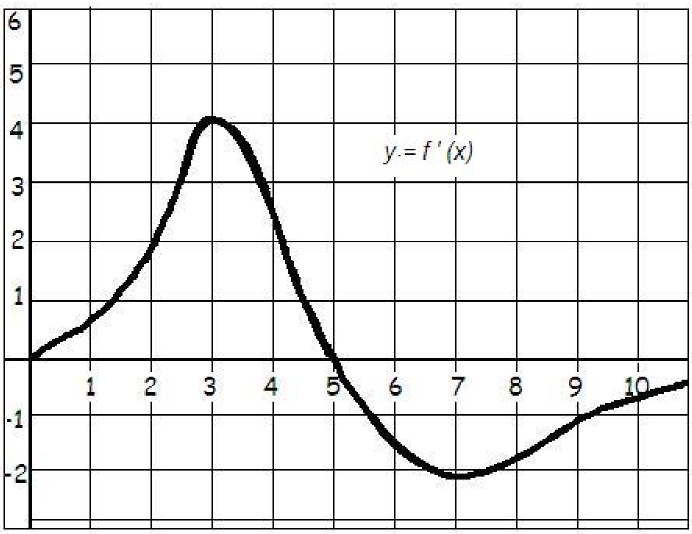
b) Hvilke/hvilket år er salget på topp?

c) Når øker salget mest?

d) Kan grafen til den deriverte funksjonen stige samtidig som derivaten til funksjonen er negativ?

Hvorfor / hvorfor ikke? **Tenk HØYT!**

e) Hvordan ser grafen til funksjonen $f(x)$ ut?

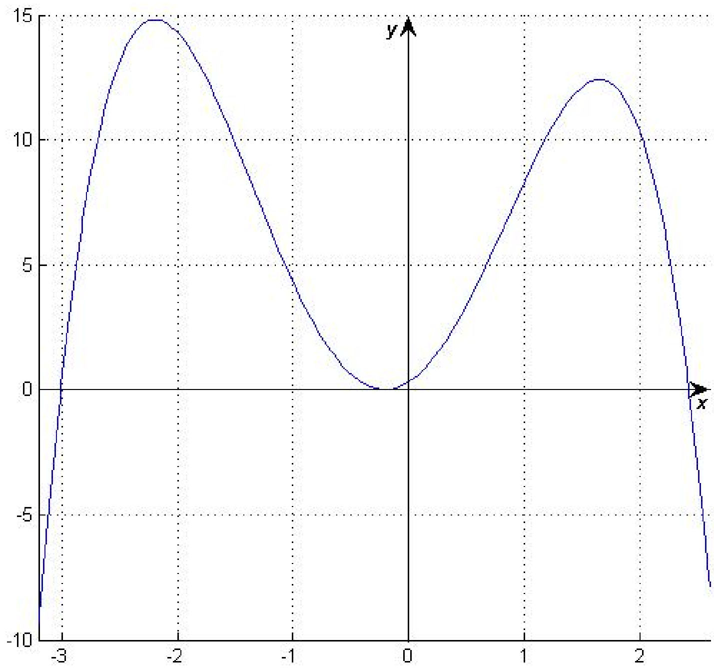


5.

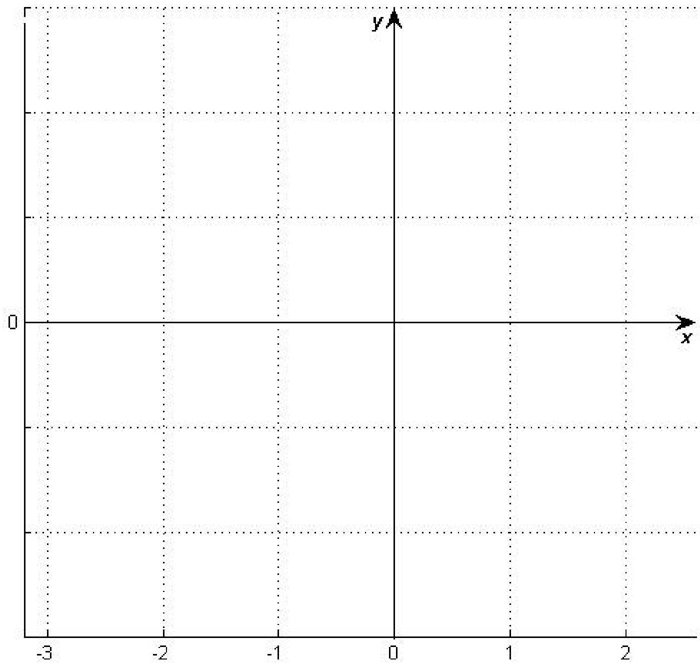
Grafen til en funksjon $f(x)$ er gitt i a).

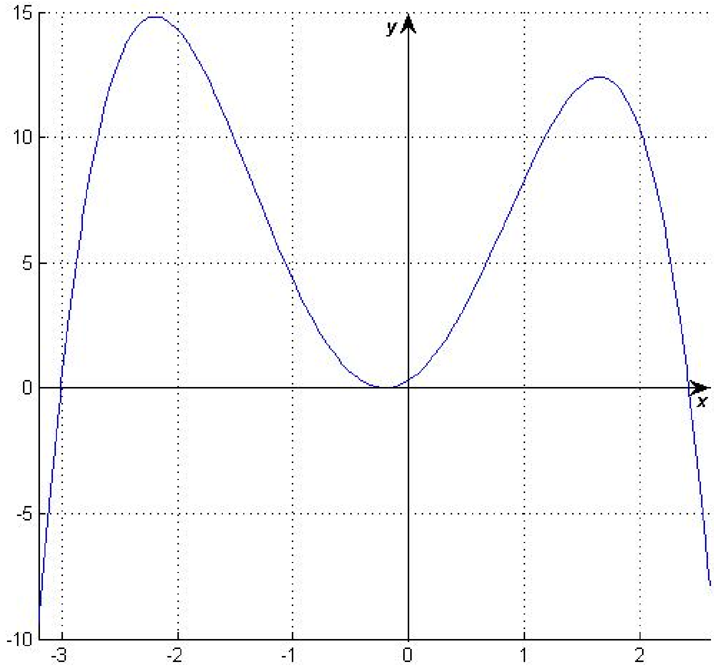
Les og **tenk HØYT** og i b) **tegn grafen til den deriverte** av funksjonen $f(x)$ som er gitt i a).

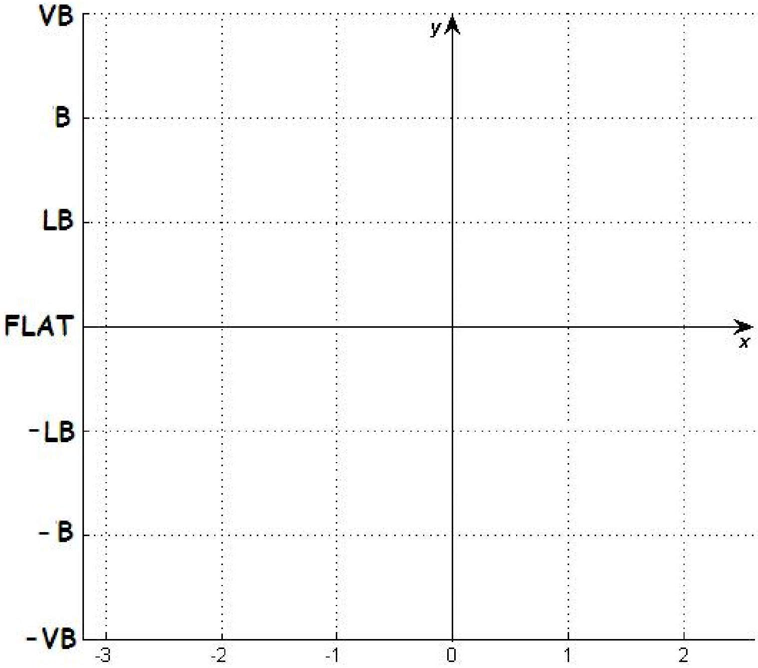
a)

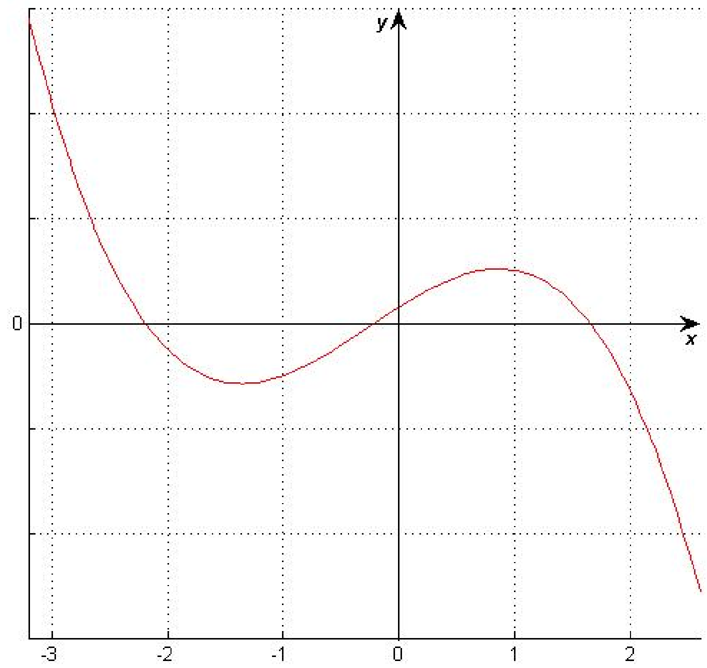


b)




15
10
5
0
-5
-10
-3
-2
-1
0
1
2
y
x


VB
B
LB
FLAT
-LB
- B
-VB
-3
-2
-1
0
1
2
y
x

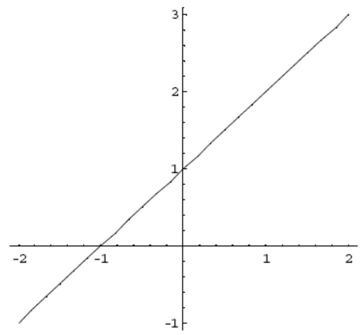


Syns du det med bratthet virker som en grei måte å tenke derivasjon på? Hvorfor?

Les og tenk HØYT!

E1.

Grafen til y = $(x^2-1)/(x-1)$ er gitt ved



a) Kan man se i grafen at funksjonen ikke er definert for $x = 1$?
b) Kan man se at funksjonen ikke er kontinuerlig da $x = 1$?
c) Hva er derivaten i (0,1)?
d) Kan man se det?

E2.

LES HØYT:

En fabrikk slipper ut 3 kg gift pr. døgn i et tjern som inneholder $2\cdot 10^9$ liter vann. Giften blander seg raskt utover i vannet. Via en elv strømmer det 10^7 liter rent vann inn i tjernet pr. døgn, og via en annen elv renner det dessuten 10^7 liter vann (jevnt blandet med gift) *ut* av tjernet pr. døgn. Anta at fabrikken starter sine utslipp ved $t = 0$, og at vannet i tjernet da er rent.
Kan man med hjelp av derivasjon finne ut hvor mye gift det finnes i tjernet som funksjon av tiden t, der t angis i døgn? Hvorfor / hvorfor ikke? **TENK HØYT!**

4 Transkriptioner av frågorna 1 - 4

Ettan

(6.30)
FRÅGA 1
Å // då vill jag att du tänker högt på den där / första spørsmålet (pekar på 1) det är några / 4 / 5 spørsmål som vi har totalt där / första är / kan grafen till den deriverte funktionen / stige samtidigt som derivaten til funksjonen er negativ?
(paus 5 sek)
1: Asså at derivata av funksjon e negativ / mener du at // ka som menes med det? at de eee // asså når du deriverer funksjon så får du et negativt uttrykk?
Ja eller öh *derivaten* til funksjonen er negativ / asså det du har varit inne på tidigare å prata om / att de e toppunkt eller bunnpunkt når det er null derivata
1: Mmm
Då är den ju inte / då är inte derivaten negativ eller positiv / då är den ju noll
1: Åhja sån! sett
// Så / kan *grafen* till den *deriverte* funktionen stige samtidigt som derivatan till funktionen är negativ?
// 1: Så derivata av funksjon / når den er negativ / så tenk æ på at den / synk // å hviss den synk når / derivata er negativt, så kan jo ikke grafen stige / det går jo ikke ant / hviss æ har riktig at når derivata av funksjon er [negativ
[Mmm
1: da synk grafen
Grafen til / den deriverte funksjonen?
1: Ja
Mmm // Ja men då har du gett ett bra svar på den
1: Får æ fasit? så æ hør om de e rett?
Ja vi kommer dit ska du se (fniss)
1: OK
Vi återgår till fråga 1 / Är den vanskeligt formulert / spørsmålet eller / det tog lite tid å sätta sig in i / [vad
1: [Ja
vad spør man mmm
1: Ja / det gjor æ / for det var litt forvirrandes det der *den* deriverte funksjon å *derivate* / men / æ tolka det nok som den samme tingen
Mmm
1: å derfor tenker æ at når derivaten til funksjon er negativ der sssynk / (visar med penna i luften representerandes en negativ tangent som följer en fiktiv konkav graf) grafen til den deriverte funksjon / å da kan den ikke stige samtidig //
Mmm men där är derivaten till *funktionen* negativ å här är det den *deriverte* funktionen / [det
1: æ vet ikke vad som er forskjellen mellom de [to
[precis å språkbruket är så viktigt hur / att man ska / för du svarar ju utefter hur du har förstått den där / [spørsmålet
1: [Ja
(9.00)
FRÅGA 2
(läser frågan högt och påpekar efter fyra sekunder att det bara är *en* graf som är rätt)
1: Den deriverte funksjon / når du sett inn *null* i den deriverte funksjon så får du et svar som er /

større enn null / å når du sett inn *en* så får du et svar som er *mindre* enn null // det må ju bety at / du har et / toppunkt / nei det kan du ikke ha // du må ha et vendepunkt eller et nullpunkt i / på *en* / trur æ / åsså / at f dobbeltderivert av x er *negativ* for alle x / det vil si // hmm // utifra di to første der så tenkte æ automatisk C men æ vet ikke om det stemmer for den der at dobbelderiverte av x er *negativ* for alle x //

Men om vi går tillbaks till det första där du började svara på att / du såg att det var en toppunkt / tänkte du / men du har svart det *förut* när det är en topp eller bunnpunkt så er derivaten lik…

1: Lik null // Nei det må være // nei for at / *den* e *posssitiv* å *den* e *negativ* (pekar på den första respektive den andra av de tre påståendena i fråga 2) / så betyr det at det går over fra å være // asså det e et *vendepunkt der*

Var då?

1: I / ja gott spørsmål (fniss) // det må ju være mellom *null* og *en*! / ja selvfølgelig! / å at f dobbelderivert av x er *negativ* for alle x det betyr at // det betyr at den e / kon*kav* trur æ / å då ville æ sagt / A (pekar på A)

Finns det nå andra alternativ?

1: Ja det er jo at / den der / at æ husker feil at når den er / negativ for alle x så e den *konveks* å då må det jo bli *B* / e no de æ tenker mennø

Å det är nånting du husker att andraderivatan kopplar du till

1: Konveks og konkav ja //

Å det framgick av det du skrev (pekar på svar i förundersökningen) att du inte husker nånting av den dobbelderiverte men det gör du ju nu!

1: (fniss) ja

Så ditt svar är / att du ser

1: Æ vil si A //

Men om du / om du / [kan du

1: [Ja

ta nå mer information från / *den* (pekar på första påståendet av de tre) / början / för å utesluta A eller B? // om det står mellan dem

1: Så æ ska liksom bestemme om det er A eller B på grunn av *den*? Nei / utifra *den* å *den*?

Ja som jag har uppfattat det så har du sagt på grund av den *där* (pekar på tredje påståendet) / at den är negativ för alla x så är den antingen konkav eller konvex // så antingen *den* eller *den* (pekar på alternativ A respektive B) / då är det bara *dom* (två) som är alternativen

1: Jo men du kan tenke det sånn at *der* (pekar på grafen till alternativ A i x = 0) er den / ff / når den er null så er den sst // jaa når du sett inn null i den deriverte funksjon så får du et tall som er større enn *null* å da *stig* / *den* (pekar fortfarande på x = 0 i grafen i A samtidigt som andra handen gör en stigande rörelse)

Mmm

1: Å mens *der* / (pekar på x = 1 i grafen i A) e den *negativ* å då synk den / å der stig den jo å der synk den (pekar först på x = 0 och sen på x = 1)

Mmm

1: Ergo / A er svaret

Yes / det var rätt svar

1: Aa (fniss)

(13.15)

FRÅGA 3

(läser frågan högt)

1: Her tenker æ fysikk (fniss)

Ja

1: Men nå skal vi se // akselerasjon e jo / definisjon på akselerasjon e jo / kor mye // fffarta øker eller synk i løpet av tida / så de må jo være // hmm / to vei-tid grafer og en fart-tid graf // det *må* jo være en // (5 sek) akselerasjon er meter per sekund i andra altså // vil æ si vei-tid / å // Ååh! (frustrerat) / det her ville æ ha husket ([fniss)

[Mmm

// 1: (läser viskandes *stigningstallet*) ville jo tru det går / på sst / nei vent nå // vei-tid // du skulle ha tegnet opp de her grafene *for* mæ! (fniss) / så ville det ha vært mye lettere

Mmm // det är sant / det ger ofta en hjälp å ha den *visuella* bilden

1: Ja // (7 sek) [for

[Nu må du skapa den själv ([fniss)

1: [Ja æ jobber med saken / æ bara slit med å tenke høyt når æ gjør det // men akselerasjon / må jo være // akselerasjon stiger jo / det e jo klart / men // når akselerasjon stig [så

[Varför säger du att den stiger?

//1: Det vet jeg ikke (fniss)

Du antar det alltså

1: Den treng jo ikke å stige / det e nok sant / men / ja enten så stiger den eller så synk den / men det har egentlig ingenting å si / det har bare med retningss / korsen du velger retninga // æ tenker sikkert litt for mye fysikk inn i det her nå / mennøh

Kan du läsa / spørsmålet igen? accelerationen

1: till et legeme som beveger seg langs en rett linje / svarer til sst / ja // (8 sek) det vil jo si at // (7 sek)

Du började med å säga det att accelerationen är … Det sa du / det kunde du utan sen blev du förvirrad när det stod på så många olika måten kanske

1: Ja

Du sa det / du du hade definitionen klar / vad är acceleration?

1: Meter per sekund i andre / altså kor fort den går på // langs tida / men det har jo / akselerasjon e jo en fartsøkning eller en fartsreduksjon // (8 sek)

Men där sa du just att det e // ändring på farten / fartsökning eller farts /

1: reduksjon ja // ja med det så skulle man jo tru at det va stigningstallet til fart-tid grafen // mennø næ æ e ikke helt overbevisst over den

Varför inte det?

1: Jeg vet ikke // fordi at du kan jo du har jo en formel som sier at / strekkning er lik // fart ganger tid

Mmm

1: Å dermed kan du jo bruke en vei-tid graf *åsså* / mennøh / ikke på samme måte som en fart-tid graf / vel å merke //

Mmm // (7 sek)

1: Stigningstallet til en fart-tid graf vil jo si // (6 sek) kor sss / fort den går på en bestemd tid // kan æ få si pass? ([fniss)

[Ja men du är inne på rätt / det du tänker här / det du sa så bra här också att / *stigningstallet* til en fart-tid graf / säger hur fort / farten / i förhållande till tid ökar eller minskar / alltså du har ju sagt att det *e* det [som

1: [Då *må* det jo være C som e svaret!

Mmm / det är det

1: (fniss) man bruker litt tid på det

Det svåraste är å argumentera / sig själv / alltså för sig själv att det är / att övertala sig själv vad som är [riktigt

1: [Jaa (fniss)

Det är bra / du var inne på det på *en* gång / det är bara att man kan bli förvirrad när det är så många som är lik också / så tänker man i andra banor

1: Ja

(18.18)
FRÅGA 4
(Ettan läser fråga 4 till och med 4a högt förutom den fetstilta informationen efter ”PS!” och säger uttryckligen att han eller hon redan har fått med sig den där ”PS!”)
1: Det viser jo // det viser jo ka tid du har // ka e de tallene her (pekar på x-axelns värden) er det måneder førresten?
De første åre*ne* (pekar på frågetexten)
1: Ja da er det måneder / det viser jo [at
[År*ene* / asså det är väl / flera år
1: Åja de første *år*an / ja ok / men det er jo at trr i år *tre* e det jo *størst* produksjon av matteboka å i år *syv* e det / hmm / produksjon lavest // åå / ja åsså stig den fra år null til år tre åssa synk den fra tre til syv åssa begynn den å stige igjen // det er sånn æ tolker den
Men när du igen ser att / fick med dig det där att det är grafen av den *deriverte* / så det är inte funktionen själv / det du tänkte på var säkert funktionen // du beskrev i alla fall //
1: Ja / hvis du har en funksjon så //
Ööhm / funktionen y av f av x / det är funktionen / [den visar
1: [Mmm
salget av en ny mattebok de första årena /
1: Ja
Å den *deriverte* är den som är på bilden /
1: Ja å utifrån den deriverte så kan du finne / toppunkt og bunnpunkt altså ka tid / det e solgt *mest* å ka tid det e solgt *minst* // av boka // mener æ (fniss)
Mmm / men du sa också // du sa att det var högst där vid / (hänvisar till grafen)
1: Vid år tre
År tre / och lägst vid år sju
1: Jaa
Då sålde de alltså // ja vi ska se / är salget på topp då? År tre som du sa? / det var det du sa då / [eller?
1: [Ja / det mener æ
Å när ökar salget mest?
1: Salget øke mest // (7 sek) da vil æ si der kurven er brattest / men det henger ikke akkurat sammen med de spørsmålene tidligere
Om det här är en ett mål på derivatan / det e ju det / y är lika med / [derivaten till f
1: [Ja OK!
f av x // så är / vad vill det si att // att den är högst vid år tre? / då är det *derivaten* som har störst verdi // vid år tre // och då // då kanske salget // öker som mest?
1: Jaa! / selvfølgelig
När derivaten är som störst / nu [såg du
1: [Ja / nå er æ med på den!
Ja!
1: Ja
Det är så lätt å se / du tänker funktionen men här [är
1: [Jeg tenker funksjon
[det derivatan till funktionen / ja
1: For som regel har vi jo / grafen på funksjon
Mmm
1: Ja selvfølgelig!
Och därför är det i fetstil (hänvisar till och pekar på det fetstilta ”PS!” i uppgiftstexten)
1: OK! (fniss) / *nå* var æ med (fniss)
Å då kan du // prova / vilket år // är salget på *topp* igen

1: Asså hvis den øker mest i år tre / minker mest i år syv / så vil æ tru at // (7 sek) vet ikke / æ tenker automatisk år *fem* / [men
[Mhm
1: E det riktig?
Mmm
1: OK (fniss)
Vad är derivatan i år *fem*?
1: // Null!
Mmm
1: Da / har du normalt et toppunkt på / selve funksjonsgrafen
Mmm / det året är salget /
1: På [topp
[E på topp
1: Ja!
Flott! Å nu såg du att när ökar salget mest? det är alltså
1: Vid år tre
När derivatan har störst verdi / istället för å tänka på tangenten till *funktionen* du ser / för funktionen på *bilden* e ju alltså funktionens derivata
1: Ja
Så det *kan* vara förvirrandes
1: Ja det *var* förvirrandes (fniss)
Ja precis / mennö / om du ser på D nu / kan *grafen* til den deriverte / ja läs högt gärna
1: (läser fråga 4d högt) / det er samme spørsmål som i sta ja / hvis grafen til den deriverte funksjon stig // så betyr det at // mhmhm // (9 sek)
Tänk högt!
1: (fniss) / ja // ja det må jo være *her* på grafen en plass det e nå greit nok / men [samtidig
[Å nu pekar du på den övre delen på grafen
1: Ja
Å *den* [säger att
1: [der den stig // fordi det er jo der den grafen til den deriverte funksjon stig / men samtidig som/
Stiger den nån *annan* stans? / [grafen
1: [Ja / den *stig* jo mellom *syv* og / år *elleve* også
Ja å då är det i undre delen av / av grafen här / så den stiger alltså på / grafen stiger på två forskjellig steder / *där* och *där* som du nyss har sagt
1: E spørsmålet bare om *grafen* kan stige når //
Mmm / ([läser fråga 4d högt på nytt)
1: *Det* kan den jo! // ja
När är derivaten negativ till funktionen?
1: Den er negativ fra år *fem* til år *elleve*
Jah
1: Å den *stig* mellom år *syv* og år *elleve* / ergo ja det kan den
Å där ser du / forskjellen mellom å ha bare text /
1: Ja
Å en graf å relatera till /
1: Ja (fniss)
Nu fick du svaret på fråga 1
1: Ja
(25.10)

Tvåan

(15.30)
FRÅGA 1
2: Ja // det ska vel kunne gå ann / for den / ska vi se her / *grafen* til / den vil stig // ja / det går ann
Varför då?
2: For / det er den andrederiverte som si nokko omm / asså / som si nokko omm kor *fort* / eller si nokko omm *endringa* i stigninga / ikke sant / så hvis // hvis den grafen til den deriverte funksjon stig / det vil være *umulig* dersom den *andrederiverte* er negativ // men det kan godt *være* slik sånn som *her*
Veldig bra
2: at den deriverte kan godt stig *sell* omm // fordi det kan godt hvis du tenker deg en et sånt kordinatsystem / så kan det godt hende at du nettopp har hadd en / den deriverte har vart / har vart / har nå *negativ* funksjonsverdi men sen på vei opp / det vil jo ta litt tid før den kommer over x-aksen igjen / ikke sant / (ritar med fingret på bordet grafen till den deriverade funktionen)

(17.00)
FRÅGA 2
(Tvåan läser frågan högt) // (10 sek)
2: La oss se på A / Ja / den vil ha f derivert av null større enn null / fordi den kurven stig / så den er grei / den vil / det vil ikke være sant for *B* for den grafen der *synk* / den *her* (pekar på alternativ C) ser ut som at f derivert av null er *lik* null // på D har vi f derivert av null *mindre* enn null og for E vil f derivert av null være *større* enn null / det første der vil være sant for *A* og *E*
Riktig
2: f derivert av *en* mindre enn null er andre spørsmålet aa *OK* // det vil være sant for *A* // det er *ikke* sant for *B* / det er sant for *C* / det er sant for *D* / og det er sant for *E* // OK // f andrederivert av x negativ for alle x / det vil si at den må / grafen må synk hele tida / det er / *ikke* sant for noen av funksjonan bortsett fra *D* / det er *kun D* / kor at / at den andrederiverte av x er *negativ* for alle x / hvis æ ser rett her //
Den andrederiverte?
2: Ja // aa vent litt / kanske æ sa / OK sa æ feil der? Ja selvfølgelig ja OK
Du *tänkte* på den förstaderiverte när du säger [att den
2: [Ja
[sjunker hela [tiden
2: [ja / selvfølgelig / selvfølgelig // ska vi se her // hvis den // andrederiverte er negativ / ja selvfølgelig // da betyr det at / den *her* (pekar på alternativ A) / *den* vil være / *den* vil oppfylle det // for den / der / der / stig / stigninga til funksjon avtar hele tiden /
Bra
2: Ja / det er rett // på *B* har vi at stigninga *øker* hele tiden / så *der* vil jo den være *positiv* for alle x / *her* har vi // at den vil ikke være *rett* for C / den vil ha et vendepunkt / nært *en* en plass
Bra du såg vändepunkter också
2: Ja / og // her igjen ser vi at den her vil ha *to* vendepunkt / en *tredje*gradsfunksjon / det er en *hyperbel* vi ser // så *E* vil heller ikke oppfylle det / da ska vi se på *D* // der *avtar* // stigninga hele tida *ser* det ut som / eller / ja / den den er vel kanskje ganske *lineær* sånn fra kanskje null komma to og så videre / så da vil jo den andrederiverte være lik *null* // ja / så i alle fall vil æ kunne / for å oppsummere / at det gjelder for / A // ja / da er det gyldig for alle x / (fniss) æ sa feil da æ tenkte på den førstederiverte det er sant

Å då har du / om du läser spørsmålet igjen / *vilken* av graferna nedanför har følgende egenskaper?
2: Ja // (viskar tyst alla tre egenskaperna och jämför med alternativ A) // det vil *kun* være A / som oppfyller alle de kriteriene

(22.11)
FRÅGA 3
2: Vel *A* her vil jo være *hastigheta* til objektet / *B* // e asså integralet / å de e jo tilbakelagt / strekning / blir det det? // det skul bli tilbakelagt strekning / hvis du har // ja / det er ikke nøye / det er i alle fall ikke rett svar / (fniss) // stigningstallet til fart i forhold til tid / grafen ja // *der* har du en / *det* er rett / for det er jo / *stigningstallet* er jo den deriverte / å den *deriverte* av farta er jo / er akselerasjon / så det er *C* som er rett svar
Å då har du inte ens *läst* / *D*?
2: *Nei* (fniss) / som er *arealet* under fart-tid *grafen* / ka *kunne* det være? // det må jo *være* // ka slags begrep skul *de* være?
Nu kan du jämföra B och D
2: Ja // ja æ fant ut at arealet under vei-tid grafen var tilbakelagt strekning // det skulle være lett å overføre den analogt / men // [korfor klare æ ikke?
[eller eller om du tänker // vad får du når du har
2: Ja / når æ integrer / integrer den? // aha som e den *motsatte* operasjon av å derivere // da får eg // vent litt / ehmm // av og til så / så går det litt i stå // men øh OK / vent litt / vent litt / ska vi se her / fart / derivert / kanskje det er *D* som må bli tilbakelagt strekning? for / kunne jo selvfølgelig være avhengig av fart // *B* deremot må bli // kor lang *tid* det har tatt til sammen / kor lang *tid* du har brukt på på det her / e det korrekt?
Det stämmer *mycket* bättre / när du sa om / det du sa om *B* först / stämmer bättre på *D*
2: Ja / så *B* e kor lang *tid* det har *tatt* // og *D* må bli kor lang strekning som e tilbakelagt på den tida

(26.00)
FRÅGA 4
2: Ka viser f derivert *her*? Den viser // da ska vi se her / den viser at f av x var salget av en ny mattebok // de første OK / de første åran / så du kan nok anta da at det er antall år på x aksen asså for f av x kommer av at det er antall år langs x aksen og antall bøker solgt // oppgennom ehm altså antall bøker solgt / for en gitt x verdi // langs [y aksen
[Är det det man ser *där*? (pekar på y-värdena)
2: Nei det vil jo være for *f* av x
Ja OK / bra
2: For *f derivert* av x deremot / så vil det jo være // selve *funksjon* vil vise / antall bøker solgt *per* år / for et gitt år *x* / ehm / sånn at vi kan se at fra år *null* til år *tre* så *steg* salget av bøker *per* år / men så *avtog* salget frem til år *syv* / å så ser det ut som om det *stiger* litt igjen da / fra der å å ut // ja / ka mer kan vi si? vil du at æ ska si mer?
F derivert visar *där* alltså / som du *sa* att
2: Kor kor / altså *den* viser / før det første viser den antall bøker / eller eller altså den viser / ehm stigninga for antall bøker solgt per år
Mmm
2: Så så vi kan si da at i ehm //
Å *stigninga* är alltså ökninga [eller
2: [Ja
eller [minskninga
2: [Ja / nemlig // så så vi kan si at i / ja / i år *tre* / *da* er salget / på *topp*

Så nu svarar du på (4)*b* ja?
2: Ja
År *tre* är salget på topp /
2: Ja
Fordi? der är en topp på den / deriverte grafen?
2: Ja / ja *der* [pekar på toppen av grafen] er // vent litt / æ sa feil / eeem / i år *fem* [pekar på år fem, där grafens *y*-värde går från att vara positiv till att vara negativ] / så går denee / deriverte fra å være po / der har vi et nullpunkt for den deriverte / der går den fra å være / ehm *positiv* til *negativ* / så når den deriverte går fra å være positiv til negativ / *da* har vi / et toppunkt / for f av x / så i år *fem* / retter æ meg selv da til / e e salget på topp
Å i (4)*c* när *ökar* salget mest?
2: *De* e når / *de* e jo år *tre* / *da* er den deriverte *størst* å da øker salget *mest* // (Tvåan läser 4d högt) Det / svarte ikke jeg på det *ista*?
Det gjorde du
2: Ja / og *det* etablerte vi / det var fullt mulig
Å hur ser du det i grafen?
2: Vi kan se på intervallet fra *syv* og utover // (läser 4e högt) vel / den vil ha et *toppunkt* i *fem* / i alle fall // å // få se her / den må / den *stiger* / helt opp til *fem* / siden at vi får f *derivert* av x *over* x / aksen // fra på intervallet fra *null* til *fem* så vet vi at grafen til *f* av x stig / hele det intervallet / men den stig *fortest* / på en måte / til å begynne med og deretter *avtar* f av x fra *fem* og *ut* / den avtar *mest* // i år *syv* // ikke sant? å den *stiger* da mest i år *tre*
(31.00)

Trean

(6.30)
FRÅGA 1
//(8 sek)//
3: Det er nok bra å / se før mæ / kordan det ser ut da / det er det som e / den deriverte / den deriverte funksjon / det vil jo være / det kan jo være ka som helst / å finne ut tangenten / å så som æ ser det så går jo ikke det annt / asså hvis stignings / hvis grafen går *oppover* / å du finner et *punkt* i den grafen / å // i asså det er en tangent der da / hvor du legger en tangent langs det punktet / å hvis *den* tangenten er positiv / så går jo grafen oppover der / æ kan ikke tenke mæ at derivaten kan være *negativ* så du får et negativt stigningstall å samtidig går grafen *oppover*
Vad är det för graf / då?
3: Da har du jo grafen *til* den deriverte funksjon // ja det er når den allerede er derivert / er det *det* du tenker?
Ja
3: OK / då er det grafen *til* / tangenten det der
Mmm // du förklarade att det *går* inte när man bara har *funktionen* själv / grafen till *funktionen* / *då* går det inte
3: Nei / da er det ikke mulig
Men nu om du ser
3: Hvis du ser / så det er den deriverte det er *tangenten* // samtidig som *derivate* til funksjon er negativ // (15 sek) // æ ser ikke kordan det kan være forskjellig
Det känns som samma sak då?
3: Det virker *veldig* som sånn samme tingen
Vi kommer tillbaka till den sen
3: Ja

(8.20)
FRÅGA 2
(Trean läser frågan högt) // (14 sek) //
Tänk gärna högt (fniss)
3: Ja / (fniss) det er litt vanskelig (fniss) / men / ska vi sjå / hvis vi ser / æ tar bare hver graf for alle tre punktan da / begynner med f derivert av null er / større enn null // så f derivert // stigningstallet til den // tangenten i // når x er lik null // det er *virkelig* vanskelig å se for seg / uten å / æ e van til å bare regne på det / så det er forferdelig vanskelig å se for seg / bare med å se / men // der / funksjon // å i punkten null // (5 sek) // f derivert av null e jo // f derivert av null vil jo være *større* enn null / i *A*
Ja
3: Ja //
Eller jaha ska jag säga (fniss) / OK är bättre att säga
3: F derivert av *en* / *mindre* enn null // (8 sek) // da ska vi sjå / prøve å se for sæ at funksjon / er lik en // (11 sek) // kan i hvert fall si at f dobbelderivert av x er negativ / det må det vel være for // for A / fordi den er konkav // å / usikker på f derivert av *en* er *mindre* enn null / æ klarer ikke helt å se for mæ *kordan* den tangenten går / asså f derivert av *en* / x er lik *en* der / den er *mindre* enn null fordi den går *nedover* // ja den *må* jo det / i *A* også / den *må* jo være mindre enn null // (7 sek) // nå blev æ litt usikker på *første* svaret mitt (fniss) / for f derivert av *null* blir jo feil da i så fall / f derivert av null kan jo ikke være *større* enn null // kan den det? // f deriv / jo den går oppover og *der* går den nedover / ja / da er den *større* enn null og den mindre enn null // ja OK // og da har du f dobbelderivert for x er *negativt*

for alle x // når du dubbelderiver så finn du / krumninga / å den er konkav / så ja // da mener æ at *A* skal tilfredsstille *alle* / så som *æ* ser det i hvert fall
Mmm
3: Å // å *B* / så tilfredsstiller den muligen *ingen* av de // som æ kan se det / fordi da er den jo / f derivert av *en* er definitivt større enn *null* / fordi den går jo *oppover* / å den er også *konveks* så den kan ikke være negativ for alle x // å C // (8 sek) // vanskelig å *se* for funksjonen den *ser* jo ut som om den er *null* / men det kan godt hende at den er *større* enn null / men // f derivert av null // å x aksen
Den ser ut å vara
3: *Den* ser ut å være *null* // så / det er ingen "*er lik* / (fniss) *null*" holdt æ på å si / så då vil æ si at den ikke // den er *ikke* verken *første* eller andre kondisjon er gjellendes // å den er / man kan *ikke* si at f derivert av x er *negativt* for *alle* x for den er jo *både* konkav og konveks
Nämen då har du bra greie på den här för att det är *en* av graferna som har alla egenskaper
3: Ja
Å då har du redan kommit fram till *den* (pekar på alternativ A)
3: Ja
Å det enda du kan *se* / du fortsätter å ser punkt för punkt och ser att det var inte de två
3: Mmm
Å *var* stämmer inte den *här*? (pekar på alternativ D) kan du / det räcker om du bara fokuserar på var de inte stämmer i sådana fall / för det kan ju *hända* att *den* (pekar på E) stämmer på alla eller *den* (pekar på D) stämmer på alla / och då måste du kanske fundera om på
3: Ja OK / ja // den er jo *negativ* for / den stemmer *ikke* / den går bort på en gang fordi den er *ikke* større enn null for f derivert av null (pekar på alternativ D) // den *her* ee (pekar på alternativ E) har et sånt polynom at den er konveks og konkav // så den dobbelderiverte kan *ikke* være negativ for *alle* x / så då *må* det være *A*
(Förklarar att uppgiften fanns med i TIMSS 1995 och att internationellt sett klarade 45 % av eleverna denna uppgiften och att de svenska och norska eleverna uppfattas att ha gjort bra ifrån sig på testen.)
3: OK // ja det er jo *artig* kordan en på en måte *først* når æ begynner så *skjønner* æ ikke *helt* ka en oppgave spør etter / men når æ børjer *se* for mæ grafen så *forstår* æ den med en [gang
[Precis / man må få tid å // det är det som är / det är ju intressant å se var det finns såna här kognitiva konflikter också / vad är det som är problem här
3: Mmm

(14.30)
FRÅGA 3
(Trean läser frågan högt) // (6 sek) //
3: C! // virker mest logisk for mæ // korsen *æ* ser det
Fordi?
3: Fordi at // det er *stigningstallet* til en *graf* / å for å finne akselerasjon så da tar du jo stigningstallet til tangenten / av farta / fartsgrafen / derfor kan det ikke være en vei-tid graf // så som æ tenker det / det er jo lenge siden vi har hatt fysikk / men det er (fniss) i alle fall sånn æ logisk klarer å tenke mæ frem til det // for arealet unner // vil det jo vært hvis det var motsatt // tenker æ / asså hvis det var en / hvis du *hadde* akselerasjon / en graf som viste akselerasjon // da kan æ tenke mæ at *farta* øker // det er jo ikke akkurat farta du skal finne *ut* // så har / strekninga og tida (visar y-axeln och x-axeln) // så har / så er strekning og tid / da er det kanskje *A*? / æ er litt usikker her / så æ begynner å tenke på om / du finner jo / det er jo da du får farta // det er jo når du har / kor langt du har kommet på / på *vei* i forhold til kor lang *tid* det har *tatt* // så vil du jo finne ut / *farta* // hvis du finner *akselerasjon der* så finner du ut *kor fort* han / forflytter seg i et punkt // *den* er æ litt

usikker på / men // at når æ *tenker* mæ litt om nå så trur æ *kanskje* æ vil ha valgt *A* / men *C* er ikke helt ulogisk heller / men som sagt / det er vanskelig å se for seg / hvis du har en graf som går //
Du kan gärna tegna [så
3: [Ja (Trean ritar ett två-axlat koordinatsystem under fråga 3) // i en vei-tid graf kor / eller har det no å si ka som er opp / ka som er x- og ka som er y-aksen? / er det naturlig å sette *vei* til å være x-aksen? har det no å si?
Det är ju hur graferna ser ut sen / alltså det påverkar [ju
3: [Ja det vil æ nok si / men æ vil tru at // tida går bortover og veien går oppover // (ritar och nämner värden på axlarna och tänker tyst under 37 sek) // æ *trur* de må bli *A* // ettersom æ kan se / for det er jo *kor* høy er *økninga* i farta? // eller nei / eller blir det kor høy?
Vad får du fram? / Du har ju gjort / tangenten *där* (pekar på tangenten som Trean ritat in i sitt koordinatsystem) till
3: Ja / tangenten til / asså her har du jo strekning / det er jo strekning
I vei-tid grafen
3: I vei-tid grafen ja
Så det är stigningstallet till vei-tid grafen du har *där*? (pekar på tangenten)
3: Ja
Å det är? vad är det?
3: Det er det æ prøver å tenke / om det er // det er jo kor / fort / det er kanskje *farta* // i det *punktet*? Det æ *tenker* er i hvert fall *det* at *kor* mye øker den? la oss si at den vil jo flate med *lav* akselerasjon æ trur nok den vil gå med brattere og brattere graf // derfor sku æ tru at vid *høy* akselerasjon så vil du få *bratt* // bratt graf / å då sku man tru at *A* er riktig svar for då får du akselerasjon // hvis det vart en fart-tid graf // hmm
Tegna upp den
3: Ja (Trean ritar upp den mellan det första koordinatsystemet och fråga 3) // over tid // når du er på // 2 sekunder har du nått / 6 meter per sekund // nei det må være *C* da / nå ser æ / det er fordi da er kor fort *farta* går opp i forhold til tida // ja / det er C
Å nu var det / du är *helt* säker på det?
3: Nå blev æ helt sikker på det / i forhold til A i forhold til i sta
Mmm / så det *här* är? vad [säger
3: [Det är [farta
[derivatan där?
3: Det må være / gjennomsnittsfarta i // i det punktet akkurat der
I en vei-tid graf?
3: Ja
Å nu har du fart-tid graf / å då får du?
3: Akselerasjon
Acceleration i en punkt
3: Ja / så første antagelsen var riktig
Mmm / det sa du direkt
3: Mmm
Å det är oftast det som är riktigt

(20.00)
FRÅGA 4
(Trean läser fråga 4 högt) // (8 sek) //
3: Ka har akslene noe å si i det her sammenhanget? er det bare antall salg over tid? // nå ska vi sjå / viser ny mattebok de første årene / ja asså det her er antageligvis / vil være // år og det vil være salget // som går i y-aksen // ja // den viser vel det at / salget ble / økte mer og

mer og mer og mer / i // ska vi si / *økninga* av salget *økte* mer og mer (pekar och följer grafen med fingret fram till tidpunkten tre år)

Mmm

3: Å // det begynte med å øke litt å litt å så økte det mer og mer å så // kordan ska æ forklare det med ord? men at den / i hvert fall / ikke *salget* økte ikke / men økninga av / salget / blir mer rett (fniss) / økninga av salget gikk opp / å så / dalte salget // å / eller // det er vanskelig å forklare det med ord / men / den viser i hvert fall at / *nedgangen* økte // altså // den ville jo selvfølgelig ikke solgt et *minusantall* når den krysser x-aksen / det er bare det at den / den har bare gått / kordan blir det? / veldig *fort* ned // for den deriverte viser *kor* mye den sell i en *punkt* // nei / kor mye salget øker i et punkt / så over langer tid / å rundt det *femte* året krysser den / å sellll / hvor blir det? / nedgangen ehm / nedgangen / øker / helt til den kommer til / år *syv* // kor / *oppgangen* blir kraftigere igjen / hadde den flatet ut på *syv* så hadde den holdt seg på akkurat samme salgstall hvert år / men siden den går *oppover* så viser den at // så viser den at / salget // på en måte *stig* da // at / eller / ja

Är det salget som stig?

3: Ikke *salget* som stig / men //

Som du började med att säga här

3: Ja // stigninga / ikke stigninga til *salget* men // det ville virkelig ha forklart med en graf og ikke med ord men ja

Du sa att salget / per bok såld per år ökade mer i början

3: Ja

Å sen // så ökar

3: Den øker mindre / salget øker mindre etter

Vad säger den här grafen? det står i fetstil här att

3: Det står / det det egentlig sier er at / først // den sier egentlig bare om / salget har minska eller gått ned i løpet av åran / å den sier jo det at fortsatt så øker salget // asså / år *en* solgte *mer* enn år *to*

Men år fyre?

3: År fyre solgte *mindre* enn år tre

Var det *positivt* salg eller *negativt* salg?

3: Det er fortsatt *positivt* salg / men det er en *nedgang* i forhold til / salget år *tre*

Ja / så nedgång på ökningen helt enkelt?

3: Ja / det er en nedgang på økningen / det blir mindre / mindre økning

Så i år *fem* / *efter* år fem / mellan år fem och år sju / vad händer där?

3: Nei det er jo ikke noe mer da at den / asså økninga er *lavere* enn den var / fra *en* til *to* for eksempel / så økningen går rett og slett bare ned

Men är det en *ökning* då / på?

3: Ja det blir jo en nedgang // æ ser ikke

En *nedgång* då?

3: Ja det er en *nedgang* på de åran / den sell mindre i // ja / kordan blir det?

Alltså mellan fem och sju så // vad säger det att grafen är *under* / nollpunkten på / [y-axeln

3: [Det sier at nedgangen / er // ska vi sjå / den begynner jo på *null* for den sell *null* bøker det første året // å så sell han så og så mange bøker // eller *null* bøker nulte året åsså etter et år har han solgt så og så mange bøker / når den kommer til år tre / så når den en pik med kor mange bøker man har solgt per år eller økninga / når den kommer ned mellom fem og syv / kommer man ned til syv så vil det si at den har / solgt / *mindre* bøker per år da / enn noensinne før / men det betyr ikke at den er nå lavere enn null høll æ på at si

Mmm / den är lavare än / a-alltså du menar inte / än *år* noll är den inte lavare än?

3: Ja (tveksamt)

Så vad / kan du säga i *b* då? (läser fråga 4b högt)

3: Det vil jo *fortsatt* si / ska vi sjå / f / y er lik f / salget av en ny mattebok / mener man da det *totale* salget eller / *det* året? // økninga er jo *null* i år tre // mellom *to* og *tre* øker det *mest* //
Så du svarar på C nu? / när ökar salget mest?
3: Mellom år to og tre
Då ser du att ökningen / stigningen är som
3: Stigningen er bråest
Men vad säger det / vad säger den här grafen? at det är ju den *deriverte* du pratar om
3: Ja
Å den deriverte är på // när är den på topp?
3: Den er på fyre
I år *tre* så är den på fyra
3: Ja
Å vad vill det säga? att då är alltså den deriverte störst
3: Ja / stigninga er størst i / altså *salget* trenger vel ikke å være størst men den deriverte vil være størst i / i tre
Å vad är den den deriverte då?
3: Den deriverte er økninga av salget / altså *stigninga* av salget er størst da / det vil si at den / ja / salget *stig* fortere / men det betyr jo ikke at den har solgt mest da / gjør det det? // eller gjør det det? den *stig* mest derfra til dit (följer grafen med pekfingret i intervallet då stigningen till $f'(x)$ är som störst) / å her går salget ned (pekar på grafen mellan år tre och fem) / her *minsker* det mest da (pekar på grafen på år sju)
Så om man går *tillbaks* till *funktionen* själv som är / som visar *salget* av en ny mattebok
3: Mmm
När / när ser du / att *salget* ökar mest om du tänker på funktionen då?
3: Ja
Den beskriver salget av en ny mattebok och hur ser du när den ökar / eller när den
3: Ja æ ser jo at den øker når tangenten er positiv
Ja / när tangenten är positiv då / å det är hela vägen fram till *fem* som den är positiv då
3: Ja
Å det har du svarat på / men i *B* / i vilket eller vilka år är salget på topp? så hur / då tänker du / den visar salget av en ny mattebok / å när är den på topp? // kan du se det utifrån *den* grafen? (pekar)
3: Nei æ tenker å trur at det ville vart // få sjå / stigningen går ned // rett før / æ tenker år tre / men det er bare for at stigninga er høyst da / for den flater jo ut og etter det så selger jo den *mindre* per år //
Men det är fortfarande en *ökning* i salg?
3: Ja / det er bare en *mindre* økning så det må være år *fem* da?
Varför det?
3: Fordi at den øker / så øker den jo bare i mindre grad // og når den krysser x-aksen // så har den en *lavere* økning enn den hadde i utgangspunktet her (pekar på origo) / *her* (pekar mellan år tre och år fem) hadde den en viss økning det vil si så og så mange bøker solgt / å når den kommer *her* (pekar på efter år sju) så er økninga *enda* mindre enn den var i utgangspunktet når boka begynte å bli solgt / så det må være i år *fem* / som salget var på topp
Mmm // det må vara om man tänker på / grafdrøfting om [du
3: [Mmm
ser på att derivatan är positiv *här* (pekar på grafen där $y > 0$) och negativ *här* (pekar på grafen där $y < 0$)
3: Ja

Positiv *före* år fem och negativ *efter* år fem
3: Ja
Å det vil si att / funktionen då / salget av ny mattebok / *positiv* / om du tänker [derivatan (visar en positiv stigning, genom gestikulation)
3: [Mmm ja
Åsså blir den negativ (visar genom gestikulation) / å då når den en topp i år fem
3: Ja
Då var det sånn du tänkte / mmm // (läser fråga 4d högt)
3: // (8 sek) // Eeja // kan den ikke det? Det var det jeg svarte på i sta / men / (Trean läser frågan igen högt) // funksjons derivate er jo negativ / unner *der* (pekar på grafen där y < 0) / det er når salget er på *topp* / og antall solgte bøker vil være på *topp* år *fem* / den øker jo fortsatt salg sell om
Efter år *sju* pekar du på då?
3: Ja etter år syv da // æ tenker åsså etter år *fem* / eller / fra *fem* og utover / den *minsker* jo ikke i salg / det er jo bare det at den / stigningstallet *begynner* å gå nedover // så spørsmålet er jo mellom *fem* og *syv* / da *minsker* den jo i salg
Då minskar den i salg
3: *Da* minsker den i salg / å *då* er derivaten / men *fortsatt* når den går *oppover* / er den fortsatt *negativ* fra *syv* t / nei *positiv* fra *syv* til / nei kordan blir det? // den er *negativ* fra syv til *ti* / *sell* om salget øker / så da kan *grafen* være
Är det *salget* som ökar där eller är det?
3: Nei ikke *salget* som öker men / *derivatet* øker å dermed får du det at / hvordan blir det nå? // stigninga / *der* er den på topp (pekar på grafen där y har sitt högsta värde) / mellom fem og syv går salget *ned* // og fra *syv* og åtte er *fortsatt* derivatet negativt / men stigendes
Å då kan du titta på spørsmålet igen (läser fråga 4d högt igen)
3: Ja / det må den kunne gjøre / utifra det æ ser her fordi at sell om
Så kan du visa var grafen stiger fast derivatan är negativ
3: Her / fra syv og oppover / for at den er fortsatt unner / nedanfor x-aksen men den går oppover / *den øker*
Då är det *exakt* samma spørsmål som där
3: Ikke sant
Men där ser man den inte framför sig
3: Æ kjente igjen spørsmålet det gjorde æ // to forskjellige svar
(32.30)

Fyran

(6.55)
FRÅGA 1
(Fyran läser fråga 1 högt och säger spontant ja) // (15 sek) //
4: Nå tenker æ i forhold til fysikken / åsså vil æ ta utgangspunkt i at / strekning derivert blir fart / så tar den ikke hensyn til / hvor du begynner og hvor du slutter // på den andre siden så fikk æ to i fysikk på videregående så æ vet ikke hvor bra det her blir men hvis æ tenker videre / så lenge den deriverte // hvis / stigningstallet er unner *null* / så vil jo grafen gå nedover // det må den jo / ja / så lenge stigningstallet er unner null så vil jo grafen synke / det eneste du justerer ved å / ha selve / slopen høll æ på å si / på grafen er hvor fort grafen *selv* nærmer seg oppover eller nedover / så hvis stigningstallet er negativt så vil grafen synke

(9.20)
FRÅGA 2
(Fyran läser de tre egenskaperna 1, 2 och 3 till fråga 2 delvis högt)
4: Æ vet ikke om æ forstod det her f derr / (Fyran upprepar egenskaperna 1 och 2) / OK // For å bare fjerne de som er // det er strengt asså den kan ikke være nøyaktig i punktet null høll æ på å si // plasseringa av alle grafene her er uvesentlig / på / det spiller ingen rolle hvor de her står i forhold til origo // det blir formen på grafene som er vesentlig her // f derivert i *null* ska være større enn *null* //
Du menar i förhållande till origo om grafen [hade
4: [Det spiller ingen rolle i forhold til x-linja // eller i forhold til hvor høyt opp den ligger / ettersom det er f derivert i null eller ikke i null // men den ska ligge mellom *en* og *null* / det gjør for så vidt *samtlige* grafer her så det er ingen som æ bare kan *plokke* ut *fort* // den dobbelderiverte er *negativ* // f *derivert* // er *større* enn null / det betyr at den *stiger* før null kommer og den *synker* etter at *en* har kommet // det betyr at / å det ska være en konkav graf / fordi at f dobbelderivert er negativ for alle / så A stemmer / det kommer til å være *riktig*
Stämmer för alla tre?
4: A stemmer passe faktisk / for alle tre / ja // ikke b
Vad är det som / vad ser du där att den ikke stemmer?
4: Det er en konveks graf
Ja
4: Så den er ikke kon negativ for alle x // det stemmer for så vidt ikke heller for C / for C har en konkav og en konveks del / så da er ikke dobbelderiverte negativ for alle x // du har / da kan du egentlig bare fjerne e og / for det er samme gærne / både konkav og konveks // å / nå vet æ ikke / det ser ikke ut som / de / er det en spesielt du ska frem til? for når æ ser på D her så er den // den er for så vidt / konkav / men den ser ikke ut / den ser ikke ut til å bevege seg i en sånn mønster hele tida / det er kanskje ikke så fett nei // ska vi sjå / f derivert ska være større enn // stigningstallet ska være *større* enn null det blir jo ikke å stemme for stigningstallet til *D* er ikke større enn null
Var då?
4: Den er ikke større / stigningstallet er ikke større enn null for null // å det betyder at / stigningstallet synker konstant / derfor kan du fjerne *C* og *E* fordi at de ikke er negative for alle x // du kan fjerne *B* fordi at den er konveks ikke konkav å da kan ikke dobbelderiverte være negativ // og *D* kan du fjerne fordi at den er ikke positiv før / asså den er ikke større enn null før e null / å A må være det eneste logiske svar

(13.48)
FRÅGA 3
(Fyran läser fråga 3 högt) // (10 sek) //
4: (14.14) Stigningstallet unner vei-tid grafen er fart // arealet / nei / stigningstallet av vei-tid grafen er fart / arealet unner vei-tid grafen // husker ikke i farta / men det blir ikke rett / da går du feil vei høll æ på å si / stigningstallet til fart-tid grafen har du akselerasjon // arealet unner fart-tid grafen er da samme som stigningstallet til // arealet unner vei-tid grafen / nei / fart-tid grafen blir jo det samme som / stigningstallet / nei motsatt / det blir / det blir // asså arealet unner fart-tid grafen blir det samme som vei-tid grafen / så den er det nå heller ikke / svaret må bli *C* / stigningstallet til fart-tid grafen (15.04)

(15.20)
FRÅGA 4
(Fyran läser fråga 4 högt) // (5 sek) //
4: Den viser stigninga på salget / fra boka kom og til høydepunktet på salget som da blir fire og viser at salget sa dabber av / til asså / stigninga på salget dabber av / så på en stund så / etter at x er lik *fem* så vil / stigninga på salget da begynne / asså hvor mye man selger begynne å synke // så først vil du selge / litt så vil du selge fortere å fortere å fortere helt til du kommer opp til verdien fire her da / salget vil fremledes *øke*
Sälja fort? då menar du?
4: Selge fortere ut bøker / asså bøkene vil / man vil selge flere bøker per tid / antall bøker per tid går æ ut ifra / asså / ja / fortere å fortere å fortere flere å flere bøker per tid helt til du kommer til fire (på y-axeln) / du kommer fremdeles å selge flere bøker men du kommer ikke å fortsette til å selge så fort i forhold til det du gjorde før / det kommer å fortsette å synke helt til du kommer til et punkt hvor du / i *fem* hvor du har / plutselig vil grafen gå rett frem da solger du plutselig stabilt med bøker / eller / da har du kommet til et punkt hvor det ikke stiger langer / åssà vil du etter hvert vil salget begynne å synke
(Fyran ritar en horisontal linje vid tidpunkten fem som symboliserar att funktionens derivata är noll där, alltså vet fyran att funktionen har stigningstalet noll vid tidpunkten fem)
4: Då begynner salget for nå / alt du gjort nå er at du har i en veldig høy grad tatt å vist at du *øker* salget / åssà når du kommer til *fem* så er det som salget / eller grafen kanskje ser mer // ska vi sjå / korsen blir det her? // ja den blir // sånn / åssà plutselig kommer den til *fem* // så her har du / dobbelderiverte som da / bare blir oppåt *der* / åssà // vil salget hålle seg stabilt her i *fem* / går frem / altså vil / dabbe av / ettersom den ikke vil gå oppover den (pekar på x-axeln) // så vil den få et stigningstall som går nedover
(Fyran svarar alltså på fråga 4e, omedvetet)
4: (Fyran läser fråga 4b) // Fem! / det må være fem
Fordi?
4: Fordi det eneste du har *her* er stigning / alle tall opp til fem (efter x-axeln) er positive / så stigninga frem til fem er positiv / salget vil ikke gå ned før etter fem år
(Fyran läser fråga 4c högt)
4: Salget øker *mest* / i punktet / etter tre år // da er det på det punktet hvor / asså *her* / snupunktet på startgrafen hvor / salget øker *mest* i det punktet / så kanskje / ja / ideelle for / hvis æ vil ha tangentet til den
Å kopplat till derivatan så säger du att där salget ökar mest så är derivaten /
4: Så er derivaten / som høyst mulig høll æ på å si (fniss)
Mmm / ja / störst / [yes
4: [Aa
Å det ser man / här att det var i talet fyra där

4: Ja / stigningstallet på / den originale grafen er da høyest der / altså salgsstigninga / er høyest / så da øker salget mest
(Fyran läser fråga 4d)
4: Nei // for så lange derivat // nei vent / kan grafen til den derivarte ss // (läser fråga 4d igen högt) // det er jo lurespørsmål deluks da / for // om *grafen* til den *deriverte* kan st / stige / samtidig som derivatet altså i det punktet er *negativ* ? // (6 sek) // grafen kan ikke stige så lenge den deriverte / funksjonen er negativ / så lenge den deriverte funksjonen er negativ eller unner null så vil jo ikke / grafen stige
Vilken graf?
4: Den som man deriverer // kan *grafen* til den *deriverte* funksjonen // funksjonen stige samtidig som *derivata* / til funksjonen er *negativ* // hmmm // (viskar) grafen til den deriverte // samtidig som *derivatet* til funksjon / nå blev æ usikker her for at det æ lurer på da er om at hva mener man at / om grafen kan stige *sell* om den *her* synker ? eller om at den / mener de at den er unner *her*? // for grafen *kan* være stigende / den *er* stigende så lange den deriverte *er* over *null* / men den kan *synke* / men det blir jo samme som at da er grafen på sevd det er bare at den synker / *mot* nullpunktet som sier at den ikke stiger langer // så at det er et spørsmål da som det vil / men æ velger å si at / så lenge derivata av funksjonen er negativ / så lange den *er* unner *nullpunktet* eller unner *origo* // eller unner / ja / så lange den er negativ / så vil // grafen / utgangspunktgrafen synke // den vil gå ned
Då tänker du på / vilken graf?
4: Da tenker æ på startgrafen
Startgrafen?
4: Startgrafen vil synke så lenge den her er negativ / det spiller ingen rolle om den er negativ i en rett linje så lange den *er unner* null så vil grafen synke
Men om det står grafen till den *deriverte* funktionen / kan *den* stige?
4: Grafen til // den *deriverte* funksjonen / ja asså grafen til utgangsfunksjonen det er den som blir derivert
Nej / den den deri / *grafen* til den *deriverte* funksjonen
4: Kan stige
Vad är det *här*? / du ser på bilden
4: *Åja*! *ja* ja ja! *sånn* sett! ja!
PS! *Grafen* på figuren er *grafen* til den *deriverte* funksjonen f / ikke grafen til *funksjonen* selv
4: Ja / kan grafen til den deri / asså om den *her* grafen *her* kan *stige* samtidig som funksjonen er *negativ*? JA! // den har ingen / ja / *sånn* sett / hvis *det* er spørsmålet / ja / for // den *her* tar ikke hensyn til utgangspunkt / den andre kan ha en verdi som er på minus *2000* / og det spiller *ingen* rolle om den // om den her deriverte grafen asså det spiller ingen rolle om den *stiger* så lenge // den deriverte asså den deriverte av den grafen kan være // det spiller ingen rolle hvor mye unner null den er / for at // for at / grafen kan stige fremdeles / eller utgangspunktgrafen kan stige / den deriverte forteller bare om den stiger eller synker og hvor den stink stiger og synker eventuelt hvor fort men den trenger ikke å være [positiv
[Derivaten till ursprungsfunktionen är negativ / så den heller nedför i ursprungsfunktionen men grafen kan / den deriverte / grafen till den *deriverte* funktionen / kan den ändå stiga?
4: Æ må bare / hvis deriverte funksjonen stiger samtidig som derivatet til funksjon er negativ hvis derivatet til funksjon er negativ kan ikke
Så om du ser på figuren
4: Ja
Så ser du det är derivatan till // eller *funktionen* till den *deriverte* funktionen
4: Ja
Det är den du ser
4: Ja

Å / kan den gra / *i* den grafen / kan den stige när derivaten till ursprungsfunktionen är negativ? // kan du se det nånstans på bilden? var är // visar det här nånstans var derivatan till funktionen är negativ? // kan du se det? / mellan vilka år är derivaten till ursprungsfunktionen negativ?
4: *Fem* å // ut *her*?
Mmm / då är derivatan negativ
4: Negativ / ja da vil jo ikke grafen stige *da* / det er jo hele poenget
Nej / inte ursprungsgrafen / men kan grafen på *figuren* stiga?
4: Ja / selvfølgelig kan den det / hadde ikke grafen på figuren kunne stige *da* så hadde det ikke vært mulighet for å få stigning igjen
Nej men asså det är bara det som är spørsmålet det är det att / om den här grafen som man ser på bilden / det är grafen till den deriverte funktionen / kan den stige?
4: Om den stiger sell om den er negativ?
Sell om derivaten är negativ som du sa mellan år fem och framåt så kan den här grafen stige?
4: Selvfølgelig kan den det! hvis ikke den kunne stige igjen så hadde det vært ikke noe mer håp for matteboksalget i // da vet du at det hadde gått mot null uansett / du kan skifte kover så hadde du solgt mer igjen hadde du kommet over null over / stigning igjen
Känner du igen den där spørsmålet från tidigare?
4: Nei
Det var *exakt* samma som du svarte på *här* / spørsmål 1 (visar)
4: Aaah!
Identiskt
4: Ah / *sånn* sett
Å då var det klinkandes ”Nej”
4: Ja selvfølgelig!
Men här är det / svaret ”*Ja*”
4: Ja
Å det är om man har en *graf* till hjälp
4: Mmm
Så är tanken att man kan se //
4: Forstå det bedre ja
Ja / eller resonera bättre / så det är en slags *konflikt* man får själv // det hörde jag här / du gick tillbaks till ursprungsgrafen
4: Ja jeg lurte på [den
[Å tänkte på *den* hela tiden / inte på den hära / grafen till den *deriverte*
4: Nei
Så / det är väldigt viktigt hur man formulerar sig
4: Ja
För att du kan *tänka* rätt [men
4: Plutselig så mister man mange poeng på en eksamen / høll æ på å si / fordi at lærern synes det er gøy å formulere artigt
Mmmöjligt
4: Æ føler mæ *lurt*!
(Skrattar) / Nej då
4: (Skrattar)
Det är ofta det att man måste // sätta ting i ett sammanhäng och det [är
4: [Mmm
Å det är där för sig *själv* är det där / sammanhänget / men / när man kommer till en sån här kognitiv konflikt som det kallas för [då
4: [Mmm

Då är det nåt som talar emot / å då går man oftast tillbaks till det senaste man vet / som man är *helt* säker på
4: [Mmm
[Så här var det / å då / försöker man få det att passa in /
4: Mmm
Fastän det //
4: [Mmm
[*inte* riktigt stämmer
4: Ja

(26.40)

5 E-post

Till Ettan, Tvåan, Trean och Fyran

Ämne: Matematikkintervju
Datum: 26 mars 2009

Hej [Ettan];[Tvåan];[Trean];[Fyran]!

Jag har kommit en bit längre i min analys av intervjuerna. Har du tid och möjlighet att svara på följande frågor så vore jag väldigt tacksam.

Var intervjusituationen: 1 givandes eller 2 ikke givandes för dig? Motivera kort.

Under själva intervjun: 1 lärde du dig någonting eller 2 insåg du någonting? Motivera kort.

Tack på förhand
/Jonas Oskarsson

Från Ettan

Ämne: Svar: Matematikkintervju
Datum: 26 mars 2009

Intervjusituasjonen var givende på den måten at jeg fikk tenkt litt matte igjen og jeg innså at jeg kunne faktisk en del matte selv om jeg på forhånd følte at jeg ikke husket noen ting. Men det har jo med nettopp det vi snakket om; at det er lettere å forstå og vise det man kan i matte når man har konkrete oppgaver foran seg. Men ja, på den måten at jeg fikk litt mer selvtilit når det gjelder mine mattekunnskaper og at jeg fikk tenkt litt matte igjen (og jeg så at jeg hadde faktisk ikke glemt alt i matte), så var intervjusituasjonen givende. Ut over det hadde det ikke noen videre betydning for meg personlig. Jeg er bare glad jeg kunne være til hjelp for deg ;)

Jeg vil si at jeg både lærte og innså noe under intervjuet, kanskje mest det siste (innså noe). Nå husker jeg ikke så mye av oppgavene, men det "gikk opp en god del lys" for meg underveis i intervjuet. Så jeg syns det var intressant og lærerikt. Det hadde nok gitt meg mer utbytte dersom jeg hadde fortsatt med mattefag, men i og med at jeg ikke har noen fag som anngår matte, så føler jeg at det meste gikk ganske fort i glemmeboka. Med det kan godt være at dersom jeg får konkrete oppgaver å løse kommer de nye kunnskapene mine til nytte.

Vet ikke om dette var til hjelp, men jeg håper det.

Mvh. [Ettan]

Från Tvåan

Ämne: Svar: Matematikkintervju
Datum: 27 mars 2009

Syntes intervjuet var givende og interessant. Fikk prøvd meg på å forklare det jeg visste om den deriverte på en forståelig måte, noe som er nyttig for meg, siden jeg skal bli lærer. Dessuten så jeg noe jeg ikke hadde tenkt på før, nemlig å tegne en kurves bratthet i et koordinatsyste, og deretter forklare at det nettopp er dette som er kurven til den deriverte, i stedet for først å definere den deriverte, og deretter tegne kurven. Et bra pedagogisk triks, vil jeg si.
I det hele tatt, veldig interessant. Vil gjerne lese oppgaven når den er ferdig.
[Tvåan].

Från Trean

Ämne: Svar: Matematikkintervju
Datum: 27 mars 2009

Jeg synes intervjusituasjonen var veldig givende. Følte at den tok opp ting som jeg har tenkt mye på angående kalkulus og matte generelt, samt ting som jeg ikke hadde innsett. Følte samtidig at jeg lærte veldig mye nytt! Snakket om intervjuet og spørsmålene med flere venner og bekjente og som jeg sa de til de følte jeg at jeg fikk et ganske annet syn på matematikkforståelse.
Med vennlig hilsen,
[Trean]

Från Fyran

Har ej fått svar från Fyran.