UiT Norges arktiske universitet

Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

En komparativ studie av to ulike innfallsvinkler i brøkundervisning

En casestudie som sammenligner to klasser som får brøkundervisning enten via arealmodellen eller mengdemodellen

Brita Walle Nikolaisen og Vigdis Marie Larsen

Masteroppgave i matematikkdidaktikk – LER 3903 – Mai 2022

Forord

Denne mastergradsavhandlingen markerer avslutningen på vår videreutdanning som lærerspesialister i matematikk ved Universitetet i Tromsø. Det har vært tre innholdsrike, spennende og utviklende år som vi vil se tilbake på med glede. Masterprogrammet i matematikkdidaktikk har gitt oss verdifull kunnskap som vi vil ta med oss og nyttiggjøre oss i vårt videre arbeid i klasserommet. Det har til tider vært svært krevende å kombinere masterskrivingen med fulltidsjobb og familieliv. I perioder har vi opplevd arbeidet som å være i en tunnel, med en hvit prikk i det fjerne. Etter hvert som vi har nærmet oss målstreken har åpningen i tunnelen utvidet seg og nå er vi i mål!

Vi ønsker i den anledning å takke alle som har vært involvert i vår utdanningsreise. Først vil vi takke våre dedikerte og reflekterte medstudenter for gode diskusjoner, godt samarbeid og heiarop underveis. En spesiell takk til Heidi og Ina, som har vært støttende og positive diskusjonspartnere gjennom hele prosessen. Vi har vært heldige som har hatt engasjerte og inspirerende lærere med på veien, takk for det. Vi er takknemlige for at også Matematikksenteret har vært engasjert i prosessen.

Vi vil rette en stor takk til vår hovedveileder Monica Nymoen Hansen for konstruktive og nyttige tilbakemeldinger til alle døgnets tider, hverdag som helg, gjennom hele prosessen. I tillegg ønsker vi også å rette en stor takk til vår lærer og veileder Ove Gunnar Drageset for brutalt ærlige tilbakemeldinger, som i første omgang gjorde oss fortvilte og frustrerte, men som i etterkant var med på å løfte oss og vår oppgave fremover.

Vi vil også takke våre skjønne informanter som meldte seg villige til å delta i vårt forskningsprosjekt. I tillegg vil vi takke våre arbeidsgivere som har gitt oss muligheten til denne utdanningsreisen, det setter vi stor pris på. Takk også til våre flotte kollegaer som har tatt ansvar når vi har vært fraværende.

En stor takk til våre menn, Arild og Jonny, og minstemann Lukas, samt øvrige familie, for god støtte og forståelse etter lange og slitsomme dager. Brita sender en spesiell takk til Lukas for lånet av mamma Vigdis. Dere har vært tålmodige med oss. Vi gleder oss nå til å tilbringe mer tid sammen med dere alle, samt øvrige familie og venner. Da gjenstår det bare å takke hverandre for fantastisk samarbeid, uten hverandre ingen masteroppgave.

Tromsø, mai 2022

Brita og Vigdis

Sammendrag

Målet med denne masteroppgaven var å undersøke om to ulike innfallsvinkler, arealmodellen og mengdemodellen, kunne ha betydning for elevenes brøkforståelse. Bakgrunnen var vår erfaringsbaserte nysgjerrighet om hvorvidt undervisningen vi hadde drevet med i mange år, var den som ga elevene best grunnleggende forståelse i brøk. Studiens forskningsspørsmål er: *Hvilken betydning har undervisningens innfallsvinkel for elevenes forståelse i emnet brøk?*

Studien er hovedsakelig en kvalitativ studie, hvor kartleggingstester med kvantitativ opptelling er brukt som metode for datainnsamling. Gjennomføringen besto av en førtest, to ulike undervisningsopplegg i brøk basert på åtte økter og en ettertest. Kartleggingstesten ble satt sammen av 26 diagnostiske oppgaver og analysert for å gi innsikt i elevenes forståelse ut fra innfallsvinkel. Som grunnlag for kartleggingstesten tok vi utgangspunkt i 4 ulike misoppfatninger innen brøk: (1) nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse, (2) jo større nevner eller teller, jo større brøk, (3) differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken, (4) teller eller nevner som isolert tall, samt tre ekstra oppgaver. Oppgavene står under misoppfatning 5 videre i masteroppgaven.

Datamaterialet består av besvarelser fra 32 elever, fordelt på to klasser på 5.trinn. Vi sammenligner resultatene på besvarelsene ut fra de to ulike innfallsvinklene. På bakgrunn av dette anser vi studiet som en komparativ casestudie. I tillegg intervjuet vi fire elever, som hadde ulik utvikling fra før- til ettertest. Målet med intervjuene var å få en dypere innsikt i elevenes forståelse.

Resultatene viser at begge gruppene forbedret sin brøkkompetanse. Arealelevene hadde en gjennomsnittlig fremgang på 2,12 riktige besvarelser mot mengdeelevene som hadde en gjennomsnittlig fremgang på 5,25 riktige besvarelser. Studien viste at innenfor noen områder var resultatet forholdsvis likt mellom de to klassene, mens forskjellene var større innen andre områder.

Innholdsfortegnelse

Tabelliste

Figurliste

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av studien

Brøk har en viktig rolle i matematikkfaget på barneskolen, og har videre en sentral plass gjennom hele grunnskoleløpet. Allerede på småtrinnet introduseres elevene for enkle brøker gjennom likedeling, halvering, dobling og helhet. Elevene på mellomtrinnet skal, ifølge kunnskapsløftet heretter omtalt som LK20, både kunne regne med brøk samt finne fellesnevner og i tillegg fordype seg i brøkbegrepet (Utdanningsdirektoratet, 2019). Videre i skoleløpet, sier LK20, at de skal kunne forstå og bruke brøk i mange sammenhenger også innen algebra.

Brøk er ansett som et utfordrende emne for elevene. Streefland (1991) hevder at brøk anses som det mest problematiske området innen matematikkopplæringen og en viktig årsak til dette er at brøk er et svært sammensatt begrep. Ifølge Behr et al. (1983) er brøk et av de viktigste, men også et av de vanskeligste emner elevene møter innen matematikk. Hva er det som gjør brøk så vanskelig? En årsak er overgangen fra heltall til brøk. Reglene som var gjeldende for heltall kan ikke overføres direkte til å gjelde i arbeid med brøk (Lamon, 2012). Hun sier videre at elevene har lært at heltall representeres med ett symbol på tallinjen, men i arbeid med brøk vil mange ulike brøker, for eksempel $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ og $\frac{5}{10}$, representere samme verdi. Mange elever kan bli forvirret av dette og det kan være med på å gjøre at elever synes det er vanskelig å forstå. I tillegg kan brøk være utfordrende fordi det tradisjonelt har vært undervist instrumentelt, hvor hovedvekt har vært lagt på regler og ikke på forståelse. Med instrumentelt mener Skemp (1976) at undervisningen er preget av pugging av algoritmer og med liten vekt på å forstå det som ligger bak algoritmen. Empson og Levi (2011) sier at noen elever raskt utvikler forståelse, mens andre vil trenge flere ulike representasjonsformer for å utvikle en grunnleggende forståelse. Tidligere forskning viser ifølge Kleve (2014) at lærerens kompetanse i matematikk spiller en avgjørende rolle for hvilken matematikkundervisning elevene møter i skolen.

Når elevene opplever et emne som krevende å lære, vil de gjøre feil i arbeidet sitt (Li & Li, 2008). Noen feil er tilfeldige, for eksempel kan elevene ha lest oppgaven for raskt og ikke fått med seg hva den spør etter. Andre feil kan være mer systematiske og hvor man kan se et mønster (Brekke, 2002). Slike feil kan skyldes misoppfatninger, og ifølge Brekke (2002) er ikke misoppfatninger tilfeldige. Ofte kan en overgeneralisering av tidligere kunnskap ligge bak elevenes misoppfatninger. Videre sier han at det er viktig at lærere kjenner til feilsvar som kan skyldes en misoppfatning, da disse ofte er til hinder for ny læring.

Vi har over mange år lest at norske elever skårer dårligere i matematikk, enn elever i våre naboland. Ifølge TIMSS 2015 viser det seg at norske elever på 5.trinn presterer bra i matematikk, men at prestasjonene er svakest innen emneområdet tall hvor vi finner oppgaver innenfor brøk (Bergem et al., 2016). Videre hevder de at elever på 9.trinn presterer omtrent gjennomsnittlig i matematikk, men prestasjonene innen algebra er svake. Resultater fra TIMSS Advanced 2015 viser at elever på 13. trinn presterer svakest i algebra (Grønmo et al., 2016). Dette stemmer overens med Siegler et al. (2012) sine funn som omhandler brøkkunnskapene til elever på barnetrinnet. De hevder at elevers kunnskap innen brøk, hindrer senere prestasjoner i matematikk generelt og spesielt innen algebra. De sier videre at brøk har en viktigere betydning for senere prestasjoner i matematikk og yrkeslivet enn andre kunnskapsområder innen matematikkfaget. Med bakgrunn i funnene til Siegler et al. (2012), sett opp mot våre elevers prestasjoner, kan det tenkes at resultatene i algebra på 9. og 13. trinn kan ha sammenheng med resultatene på 5.trinn innen emnet tall, hvor brøk inngår.

Vår bakgrunn som lærere, med til sammen 45 års praksis i grunnskolen, har gjort oss undrende til på hvilken måte brøk, tradisjonelt, har vært undervist i norsk skole. Vi har erfart at en stor del av elevene synes brøk er et omfattende og vanskelig emne i matematikk. Elevene sliter med brøkforståelsen, og preges av dette gjennom hele skoleløpet. Utfordringene rundt brøk har gjort oss nysgjerrige på hvordan elevenes første, ordentlige, møte med brøk kan legges til rette. Det vanlige er å starte med brøk som del av en helhet, hvor man tradisjonelt starter innlæringen via arealmodellen (Bjerke et al., 2013). Dette er én mulig innfallsvinkel i brøkinnlæringen del av en helhet. I tillegg har vi mengdemodellen og lengdemodellen som mulige innfallsvinkler.

Vi har lest mye forskningslitteratur og mange mastere, men har ikke greid å finne noen som sammenligner innfallsvinkler for å se om der er forskjell i hvorvidt en innfallsvinkel skaper bedre forståelse enn en annen. Det ble naturlig å stille spørsmål om innfallsvinkelen kan ha betydning for elevenes brøkforståelse. Kan to ulike innfallsvinkler, som det å møte brøk som del av en helhet via mengdebegrepet kontra det å møte brøk som del av en helhet via arealbegrepet, ha betydning for elevenes brøkforståelse? Ut ifra dette, kan vi ikke se annet enn at vårt forskningsprosjekt er nybrottsarbeid og forhåpentligvis gjør vi funn som videre forskning kan se nytte i.

1.2 Formål og forskningsspørsmål

Basert på hvor viktig brøk er for videre arbeid innen algebra samt i forhold til prosent og desimaltall, ønsker vi å undersøke hvorvidt innfallsvinkelen har betydning for om de får en god og grunnleggende forståelse i emnet.

På bakgrunn av dette er vi kommet frem til følgende problemstilling:

Hvilken betydning har undervisningens innfallsvinkel for elevenes forståelse i emnet brøk?

Med *innfallsvinkel* mener vi representasjonen man velger å starte med, altså elevenes første ordentlige møte med brøk. Videre defineres *forståelse* som når brøkdelen ses på som en del av en helhet, og mengden eller størrelsen på brøkdelen ses i relasjon til helheten (Empson & Levi, 2011).

1.3 Oppgavens oppbygning

Vår studie består av seks kapitler. I det første kapittelet, innledningskapittelet, presenterer vi bakgrunnen for valg av tema og vår problemstilling. Kapittel to presenterer det teoretiske rammeverket vårt. Her viser vi til både teori og tidligere forskning rundt temaet. Vi vil se på mulige årsaker til at brøk oppleves utfordrende for elever og vi vil gå i dybden på aspektet del av helhet. Videre beskrives ulike misoppfatninger knyttet til brøk som vi ser på som aktuelle i forhold til vår studie. Med dette ønsker vi å gi leseren innsikt i hvilket teorigrunnlag vi har forankret forskningsprosjektet i. I det tredje kapittelet tar vi for oss våre metodiske valg under forskningsprosessen, hvor vi beskriver forskningsmetodene, datainnsamlingen og bearbeiding av innsamlet data. I tillegg drøfter vi kvaliteten på forskningsprosjektet. I kapittel fire analyseres funnene våre ved å presentere resultater av før- og ettertestene sett opp mot misoppfatninger. Avslutningsvis sammenligner vi resultatene for de to klassene. Analysen vil bli fremstilt i tabeller og diagrammer for å gi leseren et godt bilde av resultatet på kartleggingen. I tillegg analyseres intervju av enkeltelever for å underbygge funn og for å få en dypere forståelse av hvordan elevene tenker, når de løser oppgavene. I kapittel fem drøfter vi funnene fra analysekapittelet opp mot det teoretiske rammeverket, presentert i kapittel to. Til slutt, i kapittel seks, vil vi forsøke å konkludere ved å besvare vår problemstilling og samtidig foreslår vi hvordan en kan arbeide videre innen forskningsfeltet. I referanser velger vi å bruke forfattere(e) samt årstall.

2 Teori og tidligere forskning

I dette kapittelet gjør vi rede for teori og forskning vi har valgt for å finne svar på om innfallsvinkelen har betydning for elevenes forståelse i emnet brøk. Først presenterer vi læringsteorien konstruktivisme som grunnlag for det å bruke misoppfatninger som utgangspunkt for vår studie. Vi tar for oss teori om brøk, samt brøkens fem aspekter, før vi til slutt tar for oss brøk som del av en helhet. I emnet brøk er det mange elever som havner i misoppfatninger og på bakgrunn av dette vil vi redegjøre for misoppfatninger generelt, samt misoppfatninger i forhold til brøk. Videre redegjør vi for hvordan diagnostisk undervisning som arbeidsmetode kan benyttes slik at elevene ikke fortsetter å være i misoppfatning. Til slutt er det naturlig å knytte det hele til dybdelæring, som vi anser for å være et overordnet mål i all undervisning.

2.1 Konstruktivisme

Med konstruktivisme menes en bestemt tanke rundt hvordan elever lærer, hvor elevens egne handlinger og erfaringer danner grunnlaget for læring (Fosnot & Perry, 2005). Ifølge Piaget (referert i Lyngsnes & Rismark, 2014) går hans teori ut på at når ny kunnskap enkelt tilpasses, og fremmes av allerede lært og forstått kunnskap, kalles dette assimilasjon. De sier videre at eleven konstruerer sin egen kunnskap gjennom en aktiv og subjektiv prosess når den bygger på et sunt grunnlag. Dette betyr at læring ikke kan fylles på utenfra, men at læringen konstrueres i hodet på den som lærer.

En elev reorganiserer ny kunnskap, når ny kunnskap ikke helt passer inn i allerede lært og forstått kunnskap og det er behov for ny forståelse. Ifølge Piaget (referert i Lyngsnes & Rismark, 2014) kalles dette akkommodasjon og det er i dette steget misoppfatninger kan fremkomme. I brøkens verden kan dette innebære at de bruker regneregler for heltall når de regner med brøk (Lamon, 2012). Piaget (referert i Lyngsnes & Rismark, 2014) sier at når en elev danner nye skjemaer på bakgrunn av en konflikt mellom assimilering og akkommodering, kalles det ekvilibrasjon.

Et konstruktivistisk læringssyn har konsekvenser for undervisningen og det er viktig at læreren legger til rette for at eleven selv kan *konstruere* kunnskap og forståelse (Fosnot & Perry, 2005). Ved å ta utgangspunkt i en misoppfatning eleven har, og på bakgrunn av denne skape en kognitiv konflikt, kan læreren legger til rette for at eleven selv oppdager at fremgangsmåten ikke er riktig. For eksempel: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ vil være en misoppfatning. Ved å gi eleven utfordringer der han oppdager at det han gjør blir feil, for eksempel be han tegne regnestykket som brøk, vil eleven kunne se at svaret ikke kan være riktig. Med dette legges det til rette for at eleven selv kan komme frem til riktig fremgangsmåte. Ifølge William (2018) kalles dette for formativ vurdering og innebærer at læreren på bakgrunn av elevens tilbakemeldinger, ut fra for eksempel en misoppfatning, endrer sin undervisning slik at den skaper læring. På denne måten kan det legges til rette for at eleven selv *konstruere* ny kunnskap og forståelse.

2.2 Brøk

Ifølge Empson og Levi (2011) defineres brøk som en størrelse, der en enhet er delt i to eller flere like store deler. Videre sier de at brøk er alle tall som kan skrives på formen $\frac{a}{b}$ der a og b er hele tall, og b ≠ 0. De sier også at tallet over brøkstreken, a, kalles for teller, og denne representerer hvor mange like deler vi har, og at tallet under brøkstreken, b, kalles nevner. Denne forteller oss hvor mange deler en enhet er delt inn i, noe som stemmer overens med Van de Walle et al. (2014) sin definisjon av brøk. Brøk gir oss altså mulighet til å uttrykke tallstørrelser mellom de hele tallene. Vi skiller mellom ekte brøk og uekte brøk. I en ekte brøk er telleren mindre enn nevneren, eks $\frac{2}{3}$. En uekte brøk har større teller enn nevner, og den kan også skrives som blandet tall, eks $\frac{17}{3} = 5\,\frac{2}{3}$ (Van de Walle et al., 2014).

En viktig årsak for å lære brøk er at brøk uttrykker en størrelse eller et tall mellom 0 og 1 helt nøyaktig, i motsetning til desimaltall som kan være kun tilnærming (Empson & Levi, 2011). De sier i tillegg at det kan være vanskelig å forstå desimaltall om man ikke forstår brøk, fordi desimaltall er spesialtilfeller av brøk. Videre sier de at det er lettere å regne med desimaltall, men det kan være vanskelig å forstå dersom man ikke også forstår brøk. Vår erfaring er at brøk brukes mye i *dagliglivet*, ved for eksempel å regne prosent, uten at sammenhengen med brøk tydeliggjøres.

Behr et al. (1983) sier at det er tre perspektiver som er viktig i forhold til brøk: psykologisk, praktisk og matematisk. De sier at det psykologiske perspektivet bygger på at brøk gir elevene muligheter til å utvikle og utvide tenkemåter som igjen åpner for videre intellektuell utvikling. Videre sier de at når elevene tar i bruk brøk i dagligdagse situasjoner handler dette om det praktiske perspektivet. Det siste perspektivet, er ifølge Behr et al. (1983), det matematiske perspektivet hvor eleven bruker sin brøkforståelse for å utvikle regneferdigheter innen algebra. Disse perspektivene forteller oss at det å beherske brøk vil gjøre hverdagen vår enklere og det vil bidra til at vi utvikler oss som mennesker.

Siegler et al. (2012) hevder at brøk har en viktigere betydning for senere prestasjon i matematikk og yrkesliv, enn andre kunnskapsområder innen matematikkfaget. Subramaniam (2013) har kommet frem til at brøk er viktig å beherske fordi det danner grunnlaget for å forstå prosent og desimaltall. Videre sier han at det er nødvendig å beherske i forhold til innlæring av algebra. Van de Walle et al. (2014) sier at dersom elevene har svak forståelse for brøkregning vil de kunne slite med å forstå algebra.

Brøk har en sentral rolle i matematikkfaget i norsk skole (Utdanningsdirektoratet, 2019). Ifølge LK20 brukes brøk på småtrinnet i dagligdagse situasjoner som for eksempel en kvart liter melk, en halv pizza og et halvt eple (ibid). Dette henger sammen med det Empson og Levi (2011) sier om det å lære å dele likt. Elevenes første møte med brøk er gjerne stambrøker med teller lik én og et heltall som nevner.

Ifølge LK20 står det at på mellomtrinnet videreutvikles brøkbegrepet og elevene skal kunne regne med brøk, finne fellesnevner og fordype seg i brøkbegrepet (Utdanningsdirektoratet, 2019). Kompetansemålene legger opp til at elevene skal kunne forstå og bruke brøk i ulike sammenhenger, også innen algebra. Videre står det at emnet brøk er sentralt i 5.- 8.klasse og i tillegg som underbyggende kunnskap gjennom hele skoleløpet, inkludert videregående skole. Brøk er viktig fordi det danner grunnlaget for matematikkforståelse gjennom hele skoleløpet (Siegler et al., 2012).

Selv om brøkens omfang i barneskolen er betydelig, er det likevel mange elever som synes brøk er et vanskelig og omfattende tema i matematikk. Ifølge Streefland (1991) er brøk uten tvil det mest problematiske området innen matematikkopplæringen og begrunner dette med at brøk er et svært sammensatt begrep. Brown et al. (2010) sier at elever som har dårlig multiplikativt resonnement vil ha mangelfull forståelse for brøkens ulike aspekter. Videre sier de at elevene ikke klarer å se sammenhengen mellom rasjonale tall.

På bakgrunn av dette vil vi se nærmere på følgende tre årsaker, som er sentrale i forhold til begynneropplæringen i brøk. En av årsakene er det kognitive spranget fra heltall til brøk (Lamon, 2012; Ni & Zhou, 2005). Ni og Zhou (2005) omtaler det som «whole number bias» når elevene bruker heltallstenkning når de skal forstå og anvende brøk. Elevene tror at egenskapene de lærte om hele tall også gjelder for brøk. De vil si at $\frac{1}{9}$ er større enn $\frac{1}{8}$, fordi 9 er større enn 8. Et annet eksempel er at de mener at $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$. Her ser elevene på tallene i de ulike brøkene som isolerte heltall. For elevene kan det være vanskelig å forstå regnereglene for brøk og de velger å bruke regnereglene for naturlige heltallene (Empson og Levi, 2011).

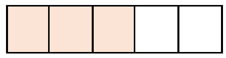
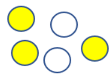
En annen årsak til at brøk er utfordrende for mange elever skriver seg fra undervisningen elevene har fått i emnet. Både Neagoy (2017) og Bjerke et al. (2013) hevder at undervisning i regning med brøk, i for stor grad handler om å memorere algoritmer. Dette skjer uten at det er etablert en god forståelse av brøkbegrepet hos elevene. Undervisningen kan også være preget av lite variasjon i representasjonsformer. Watanabe (2007) hevder i sin studie, som viser til resultater i TIMSS (2003), at en av årsakene til at japanske elever gjør det bedre enn amerikanske elever, i brøk, kan henge sammen med at de i undervisningen anvender ulike modeller. Videre sier han at japanerne introduserer brøk med lineær modell, både større og mindre enn én, i form av tallinje eller flytende væske. Han sier også at amerikanske elever i stor grad blir introdusert for brøk ved hjelp av arealmodell, og da kun som mindre enn én. Sistnevnte stemmer godt med det vi finner i norske lærebøker, og er også i tråd med det Bjerke et al. (2012) hevder at norske elever møter i sin brøkinnlæring. Alrø og Skovsmose (2002) omtaler dette som et oppgaveparadigme og definerer det som tavleundervisning, pugging av algoritmer, oppgaveløsning med kun én løsningsstrategi og korrigering av feil. På denne måten har det ikke vært tradisjon i å utfordre elevene sin tenkning, men det å løse mange like oppgaver har vært fokus. Wæge (2007) omtaler dette som lærebok- og oppgavefokusert. En slik undervisning, preget av få representasjonsformer, og memorering av algoritmer vil ha søkelys på instrumentell forståelse (Skemp, 1976).

En tredje årsak som gjør brøk problematisk for elevene er kompleksiteten i brøkbegrepet. Brøk består av fem ulike aspekter (Behr et al., 1984; Lamon, 2012; Van der Walle et al., 2014). Elevene må beherske alle fem aspektene for å inneha en god brøkforståelse og om det legges opp til å jobbe med bare ett av aspektene vil det gi mangelfull forståelse (Empson & Levi, 2011).

2.2.1 Brøkens fem aspekter

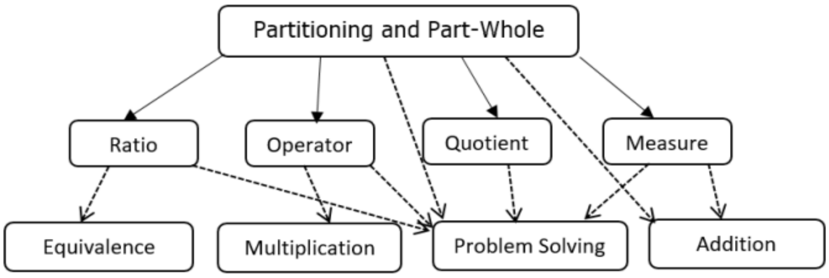
Brøk kan være del av en helhet, kvotient, operator, tallstørrelse eller forhold (Kieren, 1981; Lamon, 2012). Del av en helhet kan omfatte del av et område, del av en mengde eller del av en lengde. I tillegg skal elevene forstå at en brøkdel er svaret på et divisjonsstykke, altså kvotienten. Når elevene sammenligner to størrelser og den ene størrelsen er en brøkdel av den andre, forstår de brøk som operator. Dette innebærer at de vil kunne sortere brøker etter størrelse. Når det gjelder tallstørrelse betyr dette at de skal kunne plassere brøk på tallinjen og på bakgrunn av dette få forståelse for sammenhengen mellom brøk, desimaltall og prosent. Brøk som forhold betyr sammenligning mellom to mengder. Dette betyr at elevene både skal forstå forholdet del-del og forholdet del-hel.

Aspektene handler om ulike måter man kan tolke en brøk på, som fremstilt i tabell 1

Aspekter ved brøk	**Tolkning av $\frac{3}{5}$**
Del av helhet	$\frac{3}{5}$ betyr 3 like store deler av en enhet som er delt i 5 like store deler. De spiste $\frac{3}{5}$ av pizzaen.  $\frac{3}{5}$ av ballene er gule 
Tallstørrelse	Stine gikk $\frac{3}{5}$ mil på ski. Tallet $\frac{3}{5}$ er større enn $\frac{1}{2}$ og mindre enn 1. $\frac{3}{5}$ er et tall mellom 0 og 1 på tallinja.
Kvotient	$\frac{3}{5}$ kan bety 3 pærer delt på 5 elever.
Operator	$\frac{3}{5}$ av et tall, en mengde eller en størrelse. Eks: $\frac{3}{5}$ av 300 m.
Forhold	Sammenligne to eller flere deler med hverandre eller delene med helheten. 3 jenter av 5 elever i klassen (del – hel) 3 jenter og 5 gutter i klassen (del-del)

Tabell 1 Egenprodusert tabell med oversikt over de ulike aspektene

I tabellen ovenfor viser vi brøkens fem aspekter. Det er viktig å poengtere at alle aspektene henger sammen, og avhenger av hverandre for å skape dybdeforståelse av brøk. Tabellen viser at brøk kan defineres og tolkes på forskjellige måter i de ulike aspekter. Behr et al. (1983) har fremstilt dette i en teoretisk modell, og ut fra denne modellen vil vi se nærmere på de ulike aspektene.



Figur 1 Modell som viser sammenhengen mellom de ulike aspekter ved brøk, likeverdige brøker, regneoperasjoner på brøk og problemløsning (Behr et al., 1983)

De stiplede pilene er forslag til mulige sammenhenger og de heltrukne pilene anses som etablerte sammenhenger (Behr et al., 1983). Her ser vi at alle aspektene henger sammen og skal elevene få en god brøkforståelse må de beherske alle fem (Bjerke et al., 2013). I modellen er de ulike aspektene plassert øverst, hvor *Partitioning and Part-Whole* blir sett på som det mest fundamentale, fordi dette bygger opp under de andre aspektene (Behr et al., 1983). Vi ser at modellen viser hvordan brøkbegrepets fem aspekter henger sammen med operasjoner på brøk, likeverdige brøker og problemløsning. Ifølge Behr et al. (1983) er det å kunne dele en helhet i like store deler grunnleggende for alle de andre aspektene. Videre sier de at brøk som forhold kan være utgangspunkt for å introdusere likeverdige brøker og for å utvikle forståelse for multiplikasjon kan aspektet operator være nyttig.

Behr et al. (1983) sier at det er nødvendig å få en forståelse for alle fem aspektene for å kunne løse oppgaver som involverer brøk. Lamon (2012) mener at modellene egner seg forskjellig ut fra om man skal lære seg likeverdige brøker, addisjon, subtraksjon, multiplikasjon eller divisjon. Forskning viser at norske elever har for ensidig fokus på arealmodellen i sin innlæring av brøk (Bjerke et al., 2013). Lamon (2012) sier at tradisjonelt har «brøk som del av en helhet» fått størst oppmerksomhet i undervisningen, og ut fra dette har brøk og del av helhet, blitt synonymt. Videre sier hun at skal man bli god i brøk og få et godt brøkbegrep må elevene få jobbe med alle de ulike aspektene.

Siden vi i vår studie har fokus på hvilken innfallsvinkel som har størst betydning knyttet til brøk som del av helhet, vil vi kun presentere aspektet del av helhet, arealmodellen og mengdemodellen, nærmere.

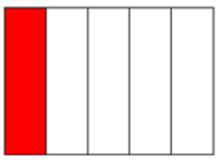
2.2.2 Del av en helhet

Dette aspektet introduseres tidlig i skoleløpet (Behr et al., 1983) og de aller fleste lærebøkene har et stort søkelys på brøk som del av en helhet (Van de Walle et al., 2014). Videre sier Van de Walle et al. (2014) at dette aspektet er et effektivt utgangspunkt for å bygge videre forståelse av brøk og Behr et al. (1983) sier at aspektet er fundamentalt for senere tolkninger av rasjonale tall. Under dette aspektet refererer brøken $\frac{a}{b}$ til a deler av b like store deler av en hel (Behr et al., 1983; Lamon, 2012) og brøk forteller oss bare om forholdet mellom delen og helheten (Empson & Levi, 2011).

Del av helhet kan være del av en mengde (eks. elevgruppe, $\frac{3}{5}$ av elevene syklet til skolen), del av et område/figur eller del av en lengde (eks. vi gikk $3\frac{1}{2}$ km) (Van de Walle et al., 2014). Aspektet del-hel handler om å kunne dele opp et kontinuerlig objekt eller et sett av diskrete objekter i delmengder med lik størrelse (Lamon, 2012; Behr et al., 1983). Del av helhet kan presenteres med ulike modeller ut fra om det er del av en hel, del av en mengde eller del av en lengde (Lamon, 2012).

2.2.3 Arealmodellen

I en arealmodell er det en figur som utgjør helheten (Van de Walle et al., 2014). Figuren er gjerne en sirkel (pizza) eller et rektangel (kake) og det er størrelsen på arealet som bestemmer brøkdelene (Van de Walle et al., 2014). I norske lærebøker blir ofte arealmodeller fremstilt som sirkler og omtalt i klasserom som pizza. Deles figuren tydelig i like store deler er det lett å se hvilken brøk som illustreres. Det som er viktig er at arealet i delene er det samme, ikke nødvendigvis at delene er like (Empson & Levi, 2011; Van de Walle et al., 2014).

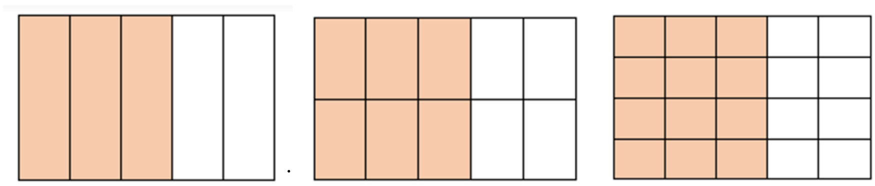


Figur 2 Egenprodusert figur arealmodellen

På bildet over ser vi et rektangel delt opp i 5 like deler og en av delene er markert. Vi har brøken $\frac{1}{5}$. I kontinuerlige objekter ser vi på brøk som del av et areal, og slike visuelle representasjoner kaller vi arealmodeller (Behr et al., 1983; Van de Walle et al., 2014).

Ifølge Van de Walle et al. (2014) er arealmodellen gunstig for å vise utvidelse av brøk. En fin oppgave er å gi elevene et A4 ark som de skal brette mange ganger, før de bretter arket ut igjen. De kan brette arket på ulike måter, men alle delene må ha samme areal. Videre skal elevene fargelegge noen av delene og ut fra disse finne ulike brøker som beskriver hvor mye av arket som er fargelagt.

For å vise brøken $\frac{3}{5}$ kan vi dele opp et rektangel i fem like kolonner og fargelegge 3 av dem.

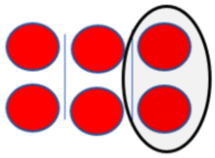


Figur 3 Egenprodusert figur arealmodell 3 av 5 deler

Videre kan vi dele med vannrette streker, og tegner vi inn en vannrett strek vil hver femdel bli delt i to. Da får vi dobbelt så mange deler, slik at vi får totalt $2 \cdot 5 = 10$ like deler. Vi ser at de tre femdelene som er fargelagt, nå representerer $2 \cdot 3 = 6$ tideler. Ser vi på figuren helt til høyre er det tegnet inn ytterligere to vannrette streker og antall deler dobles enda en gang, både de som er fargelagt og totalen. Nå har vi delt figuren i 20 deler og 12 av dem er fargelagt.

2.2.4 Mengdemodellen

I en mengdemodell er det en bestemt gruppe eller mengde som utgjør helheten (Van de Walle et al., 2014). Videre sier de at det kun er antallet som avgjør brøkdelen i en mengdemodell.

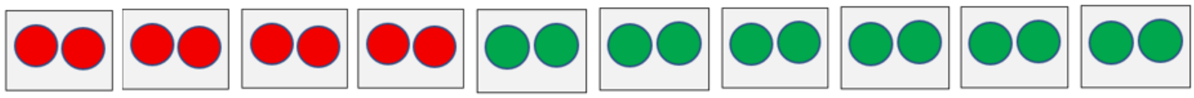


Figur 4 Egenprodusert figur mengdemodell

På bildet over ser vi seks brikker (diskré objekter) som er delt i tre like store deler. Hver del består av to brikker og det er satt ring rundt en av delene. Vi har brøken $\frac{1}{3}$. Dette bildet kan også representere $\frac{2}{6}$. Dette er det som i teorien kalles likeverdige brøker: to ulike brøker, som angir samme størrelse/mengde (Van de Walle et al., 2014). I diskrete objekter ser vi på brøk som del av en mengde og slike visuelle representasjoner kaller vi mengdemodeller (Behr et al., 1983; Van de Walle et al., 2014).

Ifølge Van de Walle et al. (2014) kan mengdemodellen brukes for å vise utvidelse av brøk. Dette kan gjøres ved at hvert element deles i to. Om man har sju epler, tre røde og fire grønne, er andelen røde epler $\frac{3}{7}$. Deler man hvert eple i to, får vi 14 halve epler, hvorav 6 er røde. Da er andelen røde epler $\frac{6}{14}$.

Vi kan også bruke mengdemodellen om vi ønsker å forkorte brøk ved at elementene grupperes. Utgangspunktet kan være 20 brikker, 8 røde og 12 grønne. Andelen grønne er da $\frac{12}{20}$. Om vi grupperer brikkene i par med lik farge, hvor mange av parene har røde brikker og hvor mange har grønne brikker?



Figur 5 Egenprodusert figur mengdemodell med 20 brikker

Andelen grønne blir da $\frac{6}{10}$. Brøken kan videre forkortes ved å sette sammen to og to par.

De ulike modellene egner seg forskjellig ut fra om man skal lære om likeverdige brøker eller læringen omhandler addisjon, subtraksjon, divisjon eller multiplikasjon av brøk (Lamon, 2012). Videre mener Lamon (2012) at for å beherske dette aspektet er det viktig å kunne identifisere det hele og vite at alle delene må være like store. Ifølge forskning er brøk som del av en helhet det aspektet de fleste elevene behersker best (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Hart et al. (1981) hevder at mengdemodellen regnes for å ligge på et høyere vanskelighetsnivå, enn arealmodellen og allerede tidlig i innlæringen kan skape forståelse for likeverdige brøker og dermed også forkortelse og utvidelse av brøk. Van de Walle et al. (2014) sier at mengdemodellen kan skape forståelse for situasjoner fra den virkelige verden, hvor gruppering inngår, i tillegg til at den også kan skape forståelse for brøk som forhold.

Arealmodellen og mengdemodellen oppsummerer vi slik:

Modell	Hva det hele er	Hva en del er	Hvordan brøk visualiseres
Arealmodellen	Areal definert av en figur	Figuren er delt i deler og alle har likt areal	Deler av figuren er skravert
Mengdemodellen	Antall i en definert mengde	Mengden er delt i deler hvor det er like mange i hver del	Antallet i en delmengde

Tabell 2 Egenprodusert tabell med oppsummering av arealmodellen og mengdemodellen

2.3 Misoppfatninger

Elever gjør feil i sitt arbeid med matematikk. Noen feil er tilfeldige og kan komme på bakgrunn av unøyaktighet i utregningen eller at elevene ikke har lest oppgaven nøye nok. Andre feil er ikke tilfeldige og kalles misoppfatninger (Brekke, 2002). Videre sier han at bak misoppfatninger ligger det en bestemt tankegang som brukes konsekvent og man ser ofte at feilene går igjen som et mønster. Misoppfatninger kan vanligvis relateres til elevens forkunnskap, og elevers misoppfatninger kan ses i sammenheng med instrumentell forståelse (Skemp, 1976). Med dette mener han at kunnskapen elevene har utelukkende er basert på regler og algoritmer. Det er viktig at ikke misoppfatninger blir behandlet som noe negativt, da dette vil kunne forvirre eleven og svekke tilliten til egne forkunnskaper. Boaler og Dweck (2016) sier at misoppfatninger må ses på som noe positivt og mulighet til å lære noe nytt.

2.3.1 Ulike misoppfatninger knyttet til brøk

Mange elever opplever at overgangen fra arbeid med heltall til arbeid med brøk er utfordrende. Oppgaver og spørsmål som er nøye planlagt på forhånd gir mulighet til å avsløre elevens tenkning og ut fra dette avdekke om feilsvar er en utregningsfeil eller en misoppfatning (William, 2007). For å vise hva vi mener med dette har vi tatt med en oppgave fra TIMSS der spørsmålene er ganske like, men med forskjellig resultat. Eksempelet viser at i den første oppgaven har 88 % av elevene svart rett, og ut fra dette kan man tro at elevene har forstått oppgaven. Ved å ta med oppgave to, kan man avdekke misoppfatning. Her ser vi at bare 46 % av elevene har denne rett.

Item 1 (success rate 88%)
Which fraction is the smallest?

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$

Item 2 (success rate 46%)
Which fraction is the largest?

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{5}{8}$ (d) $\frac{7}{10}$

Figur 6 To oppgaver fra TIMSS (William, 2007)

Vinner (referert i William, 2007) sier at en grunn til at det er så markant forskjell på hvor mange elever som har løst oppgavene riktig, kan være at elevene har misoppfatning som innebærer at den minste brøken er den med størst nevner og den største brøken er den med minst nevner. Har elevene denne misoppfatningen vil de få rett på den første oppgaven, men feil på den andre (ibid).

Det er viktig at lærere setter seg inn i hvilke misoppfatninger som kan oppstå når elevene regner med brøk slik at man kan avdekke om elevene er i en misoppfatning eller om de bare har tilfeldige feil (Bjerke et al., 2013).

Videre beskrives de ulike misoppfatningen vi har hatt fokus på i vår studie.

(1) Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse

Elever som er i denne misoppfatningen tar ikke hensyn til størrelsen på brøkdelen, men fokuserer på antall deler. De har ikke utviklet en god nok forståelse for at alle delene må være like store. Ifølge Van de Walle et al. (2014) er det avgjørende at elever forstår likedeling for å komme ut av denne misoppfatningen. I vårt oppgavesett (bl.a. oppgave 8) vil elever som har denne misoppfatningen mene at sirkelen helt til høyre også tilsvarer $\frac{1}{3}$ for 1 av 3 deler er fargelagt. De vil ikke ta hensyn til at delene ikke er like store.

I en studie utført på småtrinnselever fant Watson et al. (1999) at mange elever hadde problemer med å dele en sirkel i like store deler, og veldig mange av elevene delte slik sirkelen til høyre i oppgave 8 er delt opp, med to parallelle kutt. De argumenterte for at delene var like store fordi delene var omtrent like brede. Mye kan tyde på at de har overført kunnskap de har for likedeling av rektangel, til også å gjelde for sirkler, noe som er i tråd med det Watson et al. (1999) fant i sin studie. Ryan og Williams (2007) hevder at elever på småtrinnet ikke forstår at delene skal være like store, og at studien viser at dette kan henge sammen med at også lærere har mangelfull forståelse for brøk. Petit et al. (2015) viser til at like viktig som telling er for elevers utvikling av heltallsforståelse, er deling av objekter eller et sett av objekter, for barns utvikling av brøkforståelse.

(2) Jo større nevner eller teller, jo større brøk

Under denne misoppfatningen kan man se at elevene har en overgeneralisering av kunnskap om de hele tallene, og at de enten bare ser på nevnerne eller tellerne når de skal sammenligne brøk (Lamon, 2012). De ser på teller og nevner som isolerte tall og tar ikke hensyn til forholdet mellom dem når de vurderer størrelsene til brøk. Ni og Zhou (2005) omtaler dette som «whole number bias». De vil kunne si at $\frac{1}{5}$ er større enn $\frac{1}{4}$, fordi 5 er større enn 4. De vil også kunne si at $\frac{4}{16}$ er større enn $\frac{3}{5}$ fordi både telleren og nevneren er større i $\frac{4}{16}$. Ifølge Pearn og Stephens (2004) viser dette at elevene ikke har utviklet et godt brøkbegrep. Razak et al. (2012) fant i en studie ut at 25 % av 13 åringene som deltok i studien, rangerte stambrøker etter størrelsen på nevneren. I en annen studie fra Sør-Afrika refererer Newstead og Murray (1998) til en oppgave som handler om denne typen misoppfatning. Elevene skulle rangere brøkene $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$ og $\frac{2}{5}$ fra minst til størst. Her var det 16 % av elevene på 4.trinn og 38 % av elevene på 6.trinn som rangerte de etter størrelsen på nevneren: $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$ og $\frac{2}{9}$.

(3) Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken

Denne misoppfatningen kan vise seg når elevene skal sammenligne størrelsen til en brøk. Vi vil også kunne finne tegn til denne misoppfatningen når de skal finne likeverdige brøker. Ifølge Bjerke et al. (2013) innebærer dette at elevene tenker additivt i stedet for å betrakte brøk som en multiplikativ relasjon mellom teller og nevner. De vil kunne si at brøkene $\frac{4}{5}$ og $\frac{5}{6}$ er like store fordi differansen mellom teller og nevner er lik i begge brøkene. Dette blir i litteraturen omtalt som «gap thinking» (Bjerke et al., 2013; Mitchell & Horne, 2010). Et annet eksempel på det som kalles «gap thinking» er når noen sier at $\frac{3}{5}$ er større enn $\frac{6}{9}$ på bakgrunn av at differansen (gapet) er større mellom 6 og 9, enn mellom 3 og 5.

(4) Teller eller nevner som isolert tall

Vi vil også oppleve at elever vil se på brøk som to isolerte tall og de velger å forholde seg til bare telleren eller bare nevneren. Elever som er i denne misoppfatningen ser ikke på hele brøken som en størrelse og får derfor heller ikke forståelse for likeverdighet i brøker (Van de Walle et al., 2014). Skal man klare å avdekke denne misoppfatningen er det viktig at elevene får møte oppgaver med variert helhet. Om elevene bare møter oppgaver som sett ring rundt $\frac{1}{5}$ av 5 prikker, vil elevene som forholder seg til telleren få riktig svar. Om elevene møter en oppgave som sier at de skal sette ring rundt $\frac{1}{5}$ av 15 prikker, vil en slik fremgangsmåte gi feil svar. Elever som har tegn på denne misoppfatningen kan da sette ring rundt fem prikker fordi nevneren er fem, eller de kan sette ring rundt bare en prikk. Ryan og Williams (2007) fant liknende tenkning hos både 8- og 10-åringer under standardiseringen av MaLT[1]. Her hadde 50

[1] Matematikkvurdering for læring og undervisning - MaLT (hoddereducation.co.uk)

% av tiåringene skravert to eller tre deler i oppgaven: skravér $\frac{2}{3}$ av et rektangel delt i seks like store deler.

(5) Andre misoppfatning

- Oppgave 6 – tester om elevene klarer å angi en brøk mellom to brøker
- Oppgave 14 – tester om elevene tar hensyn til helheten
- Oppgave 16 – tester om elevene skjønner likedeling og likeverdige brøker

I denne studien vil ikke disse misoppfatningene bli utdypet ytterligere. Oppgavene var med fordi vi ville se om de ga utslag mellom de to klassene når vi sammenlignet det totale resultatet.

Vi har tatt utgangspunkt i de fire misoppfatningene vi har beskrevet over. Det finnes flere andre misoppfatninger knyttet til brøk[2], men vi har plukket ut de misoppfatninger vi mener vil gi svar på vårt forskningsspørsmål.

2.4 Diagnostiske oppgaver

Når elevene jobber med diagnostiske oppgaver får læreren mulighet til å få klarhet i hvilke tanker og misoppfatning elevene har om ulike begreper (Brekke, 2002). Videre sier han at diagnostiske oppgaver med fordel kan gis før en undervisningssekvens fordi det viser seg at elevene gjerne greier å se for seg hvordan oppgaven kan løses, til tross for at de ikke tidligere har løst lignende oppgaver. Formålet med slike oppgaver er at læreren skal kunne legge opp undervisningen ut fra type misoppfatning innenfor et problemområde slik at eleven ikke fortsetter å være i misoppfatning (Brekke, 2002). Videre sier han at dersom eleven forblir i misoppfatning, kan dette hindre videre læring. Formativ vurdering kan anses som en videreutvikling av begrepet diagnostisk undervisning. William (2018) sier at vurdering som støtter læring kalles formativ vurdering og den skjer i klasserommet. Han sier videre at læreren er bevisst at vurderingen skal være både feedback og en oppskrift på hvordan lære mer. I tillegg sier han at en test er formativ når resultatet blir brukt til å gi elevene konkret informasjon om hvordan de skal jobbe videre for å øke sin kompetanse. Ifølge William (2018) innebærer dette at læreren legger opp sin undervisning med bakgrunn i elevenes tilbakemeldinger.

[2] Misoppfatninger i matematikk | Matematikksenteret

Brekke (2002) sier videre at diagnostiske oppgaver *før* undervisning står i kontrast til tradisjonelle prøver som har vært brukt som avslutning på et kapittel eller et emne, hvor elevene er blitt testet i det de skulle ha lært. Han sier også at når en tar i bruk diagnostiske oppgaver før undervisning bør de siktes inn på de spesielle misoppfatningene læreren er ute etter å avsløre, i tillegg til at læreren får innblikk i elevens løsningsstrategier. Oppgavene inneholder gjerne rom for tegning og forklaring og vil være verdifull informasjon for læreren. Ifølge Brekke (2002) kan dette oppleves feil for enkelte lærere og elever og det blir da viktig at elevene får forklaring til hvordan oppgavene skal brukes i etterkant.

Ved å bruke de samme oppgavene både før og etter en undervisningssekvens får man målt om undervisningen har tilført elevene ny kunnskap, og hjulpet elevene ut av misoppfatning. Det viser seg å være nødvendig at flere oppgaver belyser samme område, fordi da får man avdekket om det er snakk om tilfeldige feil, eller om de er systematiske og derfor beror på misoppfatning (Brekke, 2002).

Det er ikke alle oppgaver som egner seg som diagnostiske oppgaver (Brekke, 2002). For eksempel vil en oppgave som 0,24: 2 = 0,12 ikke gi oss noen indikasjon på at eleven er i misoppfatning, mens en oppgave som 0,12: 2 kan gi svaret 0,6, noe som viser at eleven ikke forstår hva desimaltall er og ser på tallene før og etter komma som to selvstendige tall. Når oppgaver konstrueres diagnostisk skal det kun være riktig metode, og forståelse bak, som kan føre frem til riktig svar (Brekke, 2002).

2.5 Dybdelæring

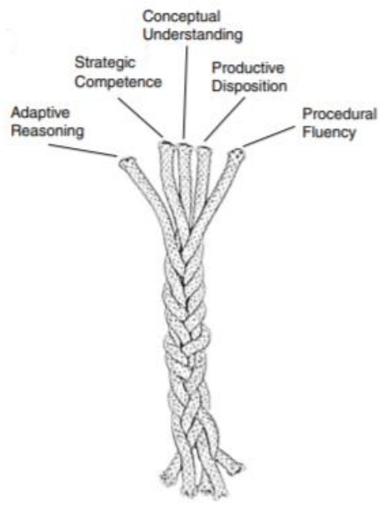
I vår oppgave, hvor vi ønsker å se hvilken innfallsvinkel som skaper best grunnleggende forståelse hos elevene, er det naturlig å knytte dette til dybdelæringsbegrepet. Kunnskapsdepartementet (2017) definerer dybdelæring som å utvikle varig forståelse av kunnskaper og begreper og forstå sammenhenger slik at man kan dra nytte av det man har lært i nye situasjoner.

Målet er at elevene skal greie å reflektere kritisk over sin egen læring, både sammen med andre, men også alene. For å oppnå dette er det nødvendig at det blir lagt til rette for dybdelæring slik at elevene tilegner seg den kompetansen de trenger for fremtiden (Kunnskapsdepartementet, 2017). Dette i kontrast til Alrø og Skovsmose (2002) sin beskrivelse av oppgaveparadigme.

I overordnet del i læreplanverket defineres kompetanse veldig likt dybdelæring. I LK20 står det at eleven skal oppnå kompetanse som medfører kunnskap, ferdigheter og holdninger som gir han bakgrunn for å løse oppgaver og mestre utfordringer i både ukjente og kjente situasjoner og sammenhenger (Kunnskapsdepartementet, 2017). Videre sier de at evne til refleksjon og kritisk tenkning er sentralt i denne sammenhengen. I vår studie vil det bety hva det vil si å bygge opp elevenes grunnleggende kompetanse i brøk, med utgangspunkt i aspektet brøk som del av en helhet.

LK20 vektlegger kjerneelementer i fagene. Det spesielle med de seks kjerneelementene i matematikk er at de samsvarer med dybdelæringsbegrepet og kompetansebegrepet i overordnet del (Utdanningsdirektoratet, 2019). Kjerneelememntene forteller hva som er målet for faget, både hva undervisningen skal inneholde, men også hvordan undervisningen skal foregå. De seks kjerneelementene i matematikk er *utforskning og problemløsning, modellering og anvendelse, resonnering og argumentasjon, representasjon og kommunikasjon, abstraksjon og generalisering, matematiske kunnskapsområde* (Utdanningsdirekctoratet, 2019).

Kilpatrick et al. (2001) utviklet en modell innenfor feltet, som de kalte *Mathematical Proficiency,* og som på norsk går under navnet *"Trådmodellen".* Modellen er satt sammen av fem sammenflettede tråder som hver og én viser hva som er nødvendig for å lære seg matematikk (figur 7).



Figur 7 Intertwined Strands og Proficiency (Kilpatrick et al., 2001:117)

De fem trådene er: *conceptual understanding, procedural fluency, strategic competence, adaptive reasoning* og *productive disposition.* Matematikksenteret har valgt å oversette trådene til *forståelse, beregning, anvendelse, resonnering og engasjement*[3]. Trådene må utvikles samtidig, de er i et avhengighetsforhold til hverandre, de underbygger hverandre og vil sammen skape matematisk kompetanse. Dette stemmer med det Ludvigsenutvalget i NOU, (2015:8) sier om at dybdelæring er når elevene utvikler forståelse for begreper og ser sammenhenger innenfor et fag, men også mellom fag. Overflatelæring, står som motsetning til dybdelæring og vektlegger faktakunnskap uten at man forstår det bakenforliggende og kan sette kunnskapen i sammenheng (NOU, 2015:8).

Om dybdelæring sier Kilpatrick et al. (2001) at hvordan elever representerer og kobler sammen deler av kunnskap vil være en nøkkelfaktor for om de kan bruke denne kunnskapen i problemløsning og videre læring.

Conceptual understanding (Kilpatrick et al., 2001) handler om å utvikle begrepsforståelse, se matematikken i sammenheng og forstå den som noe mer enn metoder, algoritmer og faktakunnskap. Skemp (1976) har satt navn på to ulike retninger innenfor matematisk forståelse, *relasjonell* og *instrumentell* forståelse. Relasjonell forståelse vil si å forstå *hva* og *hvorfor* man velger som man gjør, når man løser ulike oppgaver. Instrumentell forståelse er regel- og prosedyrestyrt, uten at eleven forstår bakgrunnen for regelen eller prosedyren. Hiebert og Lefevre (1986) kaller dette konseptuell (relasjonell) og prosedural (instrumentell) kunnskap. Når en elev innehar *conceptual understanding* er eleven i stand til å koble sammen det eleven allerede kan med nye ideer og se disse i sammenheng.

Denne tråden vil være sentral i forhold til vår forskning, da vi er ute etter å se om der er forskjell i hvilken dypere forståelse de to innfallsvinklene skaper hos elevene. Når undervisningen gjøres med fokus på kjerneelementene vil dette være bevisst jobbing mot tidligere erfaringer og kunnskap og bygger på dette ved å gi utfordringer og støtte slik at det skapes forståelse og ny kunnskap. På denne måten skaper en dybdelæring. Når en elev kan ta i bruk ulike representasjoner, velge den eller de mest passende, viser dette *conceptual understanding* (Kilpatrick, et al., 2001).

En elev som mener at $\frac{4}{5}$ og $\frac{7}{8}$ har lik verdi, har ikke forståelse for at bitene blir mindre jo større nevneren er dersom helheten er lik. Dette tyder på at eleven ikke har et godt nok innarbeidet brøkbegrep. Eleven har ikke utviklet relasjonell forståelse.

---

[3] https://www.matematikksenteret.no/l%C3%A6replan-i-matematikk/fra-l%C3%A6replan-til-praksis

Procedural fluency (Kilpatrick et al., 2001) handler om at eleven skal ha kunnskap og ferdigheter om prosedyrer og kunne bruke disse fleksibelt, effektivt og nøyaktig når det er påkrevd. Denne kompetansen gjør at eleven raskt kan komme frem til et svar, men ikke nødvendigvis forstår alt. Den minner om det Skemp (1976) kaller *instrumentell* forståelse, men ifølge Kilpatrick et al. (2001) skal elevene lære prosedyrer ved å se sammenhenger mellom prosedyrer, kunne løse disse på ulike måter og dermed skape forståelse for prosedyren. Ma (2010) sier at begrepskunnskap kunnskap og prosedyrekunnskap ikke står seg godt alene, men at prosedyrekunnskap er en viktig del av begrepskunnskap. Undervisningen er også avhengig av at læreren har både begreps- og prosedyrekunnskap og kan bygge opp sin undervisning rundt dette. Kamii og Dominick (1998) sier at utvikling av algoritmer i matematikken har skjedd over lang tid og vi kan ikke velge å hoppe over prosessen mot algoritmen. Gjør vi det oppnår vi ikke dybdelæring.

I forhold til brøk innebærer dette å kunne stegene i hvordan en oppgave skal løses med tanke på algoritmer, regler og prosedyrer. Det å se at når en adderer to brøker, så legger en sammen tellerne og beholder nevnerne. I utvidet forstand vil dette bety at man også må kunne finne felles nevner der det er nødvendig, og forstå prosedyrene for dette. Når eleven forstår hvorfor, knyttes dette til conceptual understanding og han har oppnådd dybdelæring.

Strategic competence (Kilpatrick et al., 2001) handler om å kunne gjenkjenne og definere/beskrive matematiske problemer og oversette til matematisk språk og symbolspråk. Deretter forstå, og ta i bruk, de representasjoner som passer for å løse problemet og i tillegg vurdere om løsningen er plausibel.

For brøkundervisningen betyr det at når en elev forstår innholdet i et problem og kan velge en god måte å løse problemet på, velge riktig regneart og deretter å komme med en løsning for så å vurdere om denne kan være riktig, har eleven satt alle de tre trådene i aksjon.

Adaptive reasoning (Kilpatrick et al., 2001) handler om logisk tenkning som innebærer å kunne argumentere gyldig slik at man kan forklare og bevise en metode, påstand eller løsning. Eleven skal kunne utforme hypoteser og teste disse for deretter å kunne begrunne eller forkaste dem. Dette er det Skemp (1976) kaller for *relasjonell* forståelse hvor elevene må kunne ta i bruk ulike prosedyrer på bakgrunn av forståelse og dermed se sammenhenger slik at de kan resonnere over resultatet de har fått.

I del av helhet har eleven oppnådd dette når han ser sammenhengen mellom arealmodellen og mengdemodellen og i tillegg kan vise dette med ulike representasjoner. Når en elev kan forklare sammenhengen mellom brøk, desimaltall og prosent og kan bruke dette i for eksempel hoderegning har eleven god relasjonell forståelse. Dette kommer også frem når eleven bruker sin forståelse for multiplikasjon av brøk til å forstå divisjon av brøk. Eleven ser ikke disse som to adskilte ting.

Productive disposition (Kilpatrick et al., 2001) viser til å se matematikk som interessant, morsom, verdifull og nyttig. Den handler om å få eleven til å se mulighetene i matematikken og oppleve mestring ut fra egne forkunnskaper. Matematikk får verdi for eleven. Schoenfeld (1992) hevder at når eleven får interesse for matematikk, tar i bruk abstraksjonsprosesser og ser verdien av matematisering, innebærer det at eleven tenker matematisk, er aktiv, motivert, engasjert og utholdende i arbeid med matematikk.

På bakgrunn av de fire første trådene betyr productive disposition at eleven forstår at brøk er en nyttig kunnskap, som er verdifull i elevens hverdag. Brøk, det å dele likt, er noe eleven ofte tar i bruk når han skal jobbe med et problem ut fra blokkmodell i mange ulike hverdagssituasjoner.

Eksempelvis: Per, Lise og Anders har 76 kr til sammen, Lise har dobbelt så mye som Per, og Anders har 4 kr mer enn Per. Hvor mye har hver? Når eleven forstår at beløpet som er igjen etter å ha trukket 4 kr fra 76, skal deles i 4 like store brøkdeler tar eleven i bruk forkunnskaper i nye situasjoner, og har utviklet productive disposition.

Per	18 kr	
Lise	18 kr	18 kr
Anders	18 kr	+ 4

Figur 8 Egenprodusert figur, productive disposition

Til slutt kan man si at når alle trådene er jobbet godt med over tid og de er flettet sammen, utvikles en varig, fleksibel, nyttig og relevant forståelse som gir godt grunnlag for elevens videre matematikklæring. Grunnleggende matematikkompetanse vil ha betydning i elevens hverdagsliv, utdanningsløp og arbeidsliv (Kilpatrick et al., 2001). Eleven har utviklet matematisk kompetanse, altså dybdelæring som igjen kan kalles langtidslæring og en har jobbet dette frem gjennom vektlegging av kjerneelementene i matematikkfaget (Utdanningsdirektoratet, 2019).

3 Metodiske valg

Vi vil i dette kapittelet redegjøre for våre forskningsmetodiske valg for å finne svar på vår problemstilling:

«Hvilken betydning har undervisningens innfallsvinkel for elevenes forståelse i emnet brøk?»

I dette kapittelet presenterer vi vårt verdenssyn og vi utdyper våre metodiske valg. Videre forklarer og begrunner vi gjennomføringen av studien. Avslutningsvis vil vi argumentere for studiens validitet og reliabilitet, samt de forskningsetiske hensyn vi har tatt.

3.1 Forskningsmetode og kunnskapssyn

Med det greske ordet *methodos,* som betyr metode, menes *å følge en bestemt vei mot et mål* (Christoffersen & Johannessen, 2012, s.16*)*. De sier at det som kjennetegner en forskningsmetode er grundighet, åpenhet, systematikk og dokumentasjon. I tillegg sier de at metodelæren handler om veien frem mot det å studere om våre antakelser stemmer med virkeligheten, eller ikke.
Innen samfunnsforskning skilles det mellom to ulike tilnærmingsmetoder, kvalitativ og kvantitativ metode. Postholm og Jacobsen (2018) sier at det som kjennetegner kvalitativ metode er at man fremstiller virkeligheten i tekster, det kan være ved at forskeren skriver ned sine observasjoner, eller at det folk sier blir direkte nedskrevet. Gleiss og Sæther (2021) sier at kvalitativ metode egner seg om man ønsker en utforskende tilnærming, hvor man vil få frem informantenes tanker og måter å snakke om et fenomen på. Videre sier de at kvalitativ tilnærming gir forskeren mulighet til å gå i dybden på enkelte besvarelser, situasjoner eller tekster. Thagaard (2018) sier at man i kvalitativ forskingsmetode kan bruke observasjon, intervju, visuelle uttrykksformer eller analysering av tekster, og at det er nærhet mellom forskeren og informantene.

Ifølge Thagaard (2018) baserer kvantitativ metode seg på større avstand mellom informanter og forskere, hvor spørreskjema med faste alternativer ofte blir benyttet. Postholm og Jacobsen (2018) sier at kvantitative forskningsmetoder benytter seg av statistisk analyse for å formidle informasjon om virkeligheten. Gleiss og Sæther (2021) sier at kvantitativ metode egner seg best når man samler inn og analyserer data fra et større utvalg.

Hovedforskjellen mellom metodene er, ifølge Christoffersen og Johannessen (2012), graden av fleksibilitet i forskningen. Videre sier de at hva som er hensikten med prosjektet, og hvordan forskningsspørsmålet er formulert, er avgjørende for hvilken metode som er best egnet å bruke ved innsamling av data.

For å kunne besvare vår problemstilling valgte vi en kombinasjon av begge metodene, med hovedvekt på kvalitativ forskning. Den kvantitative delen i vår studie besto av opptelling av resultater, mens den kvalitative delen besto i analyse av resultater og intervju av enkeltelever. Metoden grenser mot Mixed Methods forskningsdesign (Cresswell, 2014). Ifølge Bryman (2006) vil en ved å kombinere metodene oppnå større fullstendighet, bedre illustrasjon og større troverdighet. Ivankova og Wingo (2018) sier at en kombinasjon av kvalitativ og kvantitativ metode vil kunne gi mer vitenskapelig solide og overførbare resultater. Cohen et al. (2018) sier at tar man i bruk flere modeller eller datakilder innenfor undersøkelsesfeltet, innebærer dette at man benytter seg av triangulering.
Når man sammenligner studieobjekter over tid og/eller rom, enten kvalitativt eller kvantitativ, kalles dette komparativ metode (Cohen et al., 2018). Videre sier de at metoden ofte benyttes når man vil forklare endring og sammenheng gjennom mønster av likheter og ulikheter og informasjonen inkluderer omfattende og detaljert datainnsamling.

Ifølge Postholm (2010) tar kvalitative forskere utgangspunkt i et verdenssyn eller et paradigme når de nærmer seg sin forskning. Hun begrunner dette med at forskere har med seg et syn på verden som er med på å styre retningen på forskningen og er et uttrykk for hvordan den enkelte forskeren oppfatter verden. Ifølge Postholm (2010) er det tre paradigmer: konstruktivisme, kognitivisme og positivisme. Hun sier at det konstruktivistiske paradigme regner mennesket som aktivt handlende og ansvarlig, siden kunnskap og forståelse skapes og konstrueres i sosial samhandling med andre mennesker. Paradigmene kognitivisme og positivisme kan i hovedsak forstås som ulike, men har begge en grunnidé hvor mennesket ikke selv konstruerer eller skaper kunnskapen som gradvis blir en del av individets livsverden (Postholm, 2010). Cresswell (2014) presenterer fire forskjellige verdenssyn som danner grunnlaget for forskerens handlinger; konstruktivisme, postpositivisme, advocacy/participatory og pragmatisme. Han hevder at det som skiller det pragmatiske verdenssyn fra andre verdenssyn er forskerens frihet i valg av metode. Videre sier han at man har frihet til å velge de metodene, datainnsamlingsmetodene, prosedyrene og teknikkene som egner seg best i forhold til det en ønsker å finne svar på.

Dette medfører at vi kan plassere vårt forskningsprosjekt innenfor et konstruktivistisk paradigme hvor kunnskap og forståelse skapes og konstrueres i sosial samhandling med andre mennesker.

3.2 Valg av metode

Det finnes ulike tilnærminger på hvordan man kan forske innenfor kvalitativ metode. Ifølge Christoffersen og Johannessen (2012) finnes det tre tradisjonelle tilnærminger: etnografi, fenomenologi og casestudie. Etnografi kjennetegnes ved at det er en fortolkning eller beskrivelse av en kultur, et sosialt system eller en sosial setting (Christoffersen & Johannessen, 2012). Om målet er å samle inn data som forteller noe om samfunn og kulturer benyttes en etnografisk tilnærming. Formålet til fenomenologien er å finne ut hvordan ting kan være, og ikke hva ting er (Christoffersen & Johannessen, 2012). Ønsker forskeren å forstå meningen med et fenomen, sett gjennom øynene til en informant eller en gruppe, benyttes en fenomenologisk tilnærming. Ønsker man å studere ett eller flere tilfeller over lengre eller kortere tid, benyttes en casestudie (Christoffersen & Johannessen, 2012).

Ifølge Christoffersen og Johannessen (2012) er det som kjennetegner en casestudie at det innhentes mye informasjon fra noen få enheter eller noen caser, over lengre eller kortere tid, og som inkluderer omfattende og detaljert datainnsamling. Videre sier de at det i casestudier kan gjennomføres åpne intervjuer og/eller observasjon. Postholm og Jacobsen (2018) hevder at casestudie er et forskningsdesign der en case studeres avgrenset i tid og rom. De sier videre at studiet kan rettes mot et eller flere individer, en gruppe, et program, en aktivitet, en organisasjon eller et partnerskap. I tillegg sier de, i likhet med Christoffersen og Johannessen (2012), at det å innhente mye informasjon over kortere eller lengre tid, fra noen caser eller få enheter, vil være en casestudie. Om man oppsummerer casestudie er det forskning hvor forskere innhenter mest mulig data om et avgrenset fenomen.

Ut fra vår problemstilling søker vi svar på innfallsvinkelens betydning for elevenes forståelse i emnet brøk. Vi forsker på en reell situasjon i to klasser, hvor vi over kort tid innhenter mye informasjon. På bakgrunn av dette vil vi plassere vår forskning innenfor en casestudie.

Ifølge Postholm og Jacobsen (2018) finnes det flere ulike forskningsdesign innenfor casestudier, og de ulike designene kan plasseres innenfor enkeltstudier eller komparative studier. Videre sier de at innenfor enkeltstudier søker man å gi forståelse innenfor en enkelt case, mens det i en komparativ casestudie er flere caser som studeres, for så å sammenlignes.

Cohen et al. (2018) kaller dette for en komparativ casestudie siden man systematisk sammenligner to grupper. I vår forskning benytter vi oss av to ulike innfallsvinkler i emnet brøk, i to ulike klasser, for så å systematisk sammenligne klassene for å se om det er forskjell mellom dem etter endt undervisningsperiode. I følge Yin (referert i Christoffersen & Johannessen, 2012) kan man dele inn casestudier i fire designstrategier. Hun sier videre at disse igjen arbeider ut fra to dimensjoner, der den ene sier noe om antall caser som studeres og den andre sier noe om antall analyseenheter i forskningsprosjektet. I vårt forskningsprosjekt innhenter vi informasjon fra to grupper med elever som mottar introduksjon av brøk med to ulike innfallsvinkler.

På bakgrunn av dette plasserer vi vår forskning som en komparativ casestudie, siden vi sammenligner forståelsen innen brøk, før og etter en undervisningsperiode i to klasser. Vi velger å se på elevgruppene som to caser, og anser forskningsprosjektet til å ha et flercasedesign. I og med at vi har både diagnostisk kartlegging og intervju, vil dette ifølge Yin (referert i Christoffersen & Johannessen, 2012) omtales som flere analyseenheter.

3.3 Utvalg

Ifølge Cohen et al. (2018) må forskeren ta stilling til fire faktorer i utvalget av informanter: størrelsen av utvalget, tilgang til utvalget, representativitet i utvalget og hvilken utvalgsstrategi som skal brukes. De sier videre at størrelsen avhenger av formålet med studien og at et større utvalg er bedre, siden det er mer pålitelig og mer generaliserbart. De sier også at i en kvalitativ forskning er det mer sannsynlig at størrelsen på utvalget er lite. Thagaard (2018) sier at siden kvalitative analyser både er tid- og ressurskrevende setter dette begrensninger for utvalget. Hun sier i tillegg at utvalget ikke burde være større enn at man kan gjennomføre grundige analyser.

Cohen et al. (2018) sier om utvalg at størrelsen avhenger av forskningsprosjektets formål, og i kvalitativ forskning er det tilstrekkelig med et lite utvalg. Formålet vårt er å sammenligne to klasser. I disse to klassene var det totale antall 32 elever med 16 elever i hver klasse, noe som svarer til tilstrekkelig antall i et lite utvalg. Ifølge Cohen et al. (2018) består et lite utvalg av et begrenset antall personer som er relevante for undersøkelsen. Vi navnga klassene med A og M, og bestemte at klasse A skulle jobbe med arealmodellen og klasse M skulle jobbe med mengdemodellen.

I strategisk utvelgelse velges informantene ut fra kvalifikasjoner eller egenskaper som svarer til problemstillingen (Thagaard, 2018). Christoffersen og Johannessen (2012) presenterer flere måter å sette sammen et strategisk utvalg på og en måte er kriteriebasert utvelgelse. De sier at ved et slik utgangspunkt velges informantene ut fra at de oppfyller spesielle kriterier.
For oss var det avgjørende å finne lærere som var villige til å gjennomføre allerede planlagt undervisning og som underviste på 5.trinn. Et kriterie var at undervisningen ble gjennomført slik vi hadde planlagt den, siden denne skulle gi oss svar på vår problemstilling.
Grunnleggende innlæring i brøk ligger på dette trinnet, ifølge LK20, og det er naturlig å tenke at elevene har relativt likt utgangspunkt innen brøk. Av bekvemmelighetshensyn ønsket vi informanter vi fikk raskt tilgang til da vi som masterstudenter i fulltidsjobb har begrenset tid til rådighet. På bakgrunn av dette valgte vi to lærere, som hadde hver sin 5.klasse, ved to forskjellige skoler. I samtale med lærerne kom det frem at ingen av klassene hadde hatt mye brøkundervisning tidligere, men begge hadde forholdt seg til kompetansemål fra K-06 noe som tilsier at klassene hadde tilnærmet lik brøkbakgrunn. Dette medfører at utvalget vårt var kriteriebasert.

Ifølge Cohen et al. (2018) må forskere sørge for at tilgang til informantene er tillatt og mulig å gjennomføre. Informantene våre er under 15 år. Vi måtte derfor skaffe oss tillatelse til å gjennomføre vår studie og sendte hjem samtykkeerklæring til foresatte. Vi opplyste om prosjektets formål samt at vi informerte om deres rett til å trekke samtykket underveis i prosessen, dersom de ønsket dette.

3.4 Datainnsamlingsmetode

Order *data* er flertallsformen av det latinske ordet *datum*, og betyr noe som er gitt (Christoffersen & Johannessen, 2012). Videre sier de at virkeligheten blir til data når noe blir observert og på en eller annen måte blir registrert. De sier også at data kan bestå av annet, som for eksempel sammenhengen mellom elevers skoleprestasjoner og at dette igjen kan kalles *empiri*, som betyr forsøk eller prøve.

Prosjektets hensikt, samt hvordan forskningsspørsmålet er formulert, er bestemmende for metodevalg i forhold til innsamling av data. Vi har valgt et todelt måleinstrument. Den ene delen består av før- og ettertester med diagnostiske oppgaver (vedlegg 1) fordi det er mest hensiktsmessig i forhold til at vi vil sammenligne utvikling av elevenes forståelse, på bakgrunn av to ulike tilnærminger til brøk. Vi ville også finne ut om det er merkbare forskjeller mellom de to innfallsvinklene i forhold til misoppfatninger. Den andre delen er intervju av et utvalg enkeltelever fordi det skulle gi oss dybdekunnskap i elevenes tanker i prosessen, sett i forhold til de valgte innfallsvinklene og i forhold til de ulike misoppfatningene. Ved at vi tar i bruk flere modeller eller datakilder sorterer dette under det Cohen et al. (2018) omtaler som triangulering.

Brøk har mange aspekter og modeller og vi måtte gjøre et utvalg innenfor rammen av hva en master skal inneholde. Vi valgte innføring i brøk på 5.trinn fordi elevene ofte har tilnærmet likt utgangspunkt på dette tidspunktet. Ifølge LK20 er innføring av brøk som eget emne lagt til 5.trinn og det første aspektet er *del av helhet* (Utdanningsdirektoratet, 2019). Del av helhet ble derfor det mest hensiktsmessige å ta utgangspunkt i. Den mest brukte modellen i lærebøker er arealmodellen og den ble et naturlig valg for oss. Hart et al. (1981) hevder at brøk som del av mengde ligger på et høyere vanskelighetsnivå enn arbeid med brøk som areal. For å kunne sammenligne to innfallsvinkler valgte vi mengdemodellen i tillegg, da vi opplever at denne er mest spennende å jobbe med fordi vi erfaringsmessig ser at elevene synes den er utfordrende.

3.4.1 Kartleggingsverktøy

En kartleggingstest som baserer seg på diagnostiske oppgaver er ute etter å identifisere misoppfatninger som elevene kan ha utviklet (Brekke, 2002). Videre sier han at den skal gi informasjon om elevenes løsningsstrategier. Han sier i tillegg at når man bruker samme oppgaver både før og etter en undervisningssekvens måler den hvorvidt undervisningen har hjulpet elevene ut av misoppfatningene.

Vårt overordnede formål med diagnostiske før- og ettertester var å måle endring i elevenes brøkforståelse på bakgrunn av to ulike innfallsvinkler i grunnleggende brøk. Hensikten med førtesten var å få en oversikt over elevenes utgangspunkt slik at ettertesten kunne gi oss et bilde av hva undervisningen hadde tilført elevene. Dette sammenfaller med det Cohen et al. (2018) kaller for *baseline assessment,* som måler elevenes utgangspunkt før oppstart av et undervisningsopplegg. De sier videre at en ettertest, etter endt undervisning vil være en *summativ test* for å måle læringen i det emnet undervisningen var sentrert rundt, da den oppsummerer temaet. Testene i vår studie sorterer under det Cohen et al. (2018) omtaler som *domain-referenced tests,* fordi elevene våre skulle testes i det *spesifikke innholdet* brøk som del av en helhet.

For å kunne svare på vår problemstilling passet det best med førtest, for så å gjennomføre en undervisningsperiode og deretter avslutte med ettertest. Målet med dette var å se hva undervisningen hadde tilført elevene noe som betyr at vi hadde en pragmatisk tilnærming til problemet. Med pragmatisk tilnærming menes ifølge Cohen et al. (2018) at en vektlegger en aksjonsorientert tilnærming hvor en ser etter årsakssammenhenger, "*what works",* og tilnærmingen kan benyttes både i kvantitativ og kvalitativ forskningsmetode. Ifølge Cohen et al. (2018) forteller kartlegging om elevenes ståsted i øyeblikket.

For å finne svar på om en elev har utviklet forståelse kan man ta i bruk både test og intervju. Kartleggingstester er i utgangspunktet kvantitative når de brukes til opptelling og registrering i større sammenhenger (Gleiss & Sæther, 2021). De egner seg til å se sammenhenger og trender og omhandler det vi avleser i tall, mengde og størrelsesforhold i forhold til et større utvalg. Brown et al. (2008) hevder at for å unngå at elevene skal huske hva de svarte i førtesten, vil det være tilstrekkelig med tre uker mellom før- og ettertest. På bakgrunn av dette planla vi hele datainnsamlingsperioden til å gå over fem uker hvor vi skulle gjennomføre førtest én uke før undervisningens oppstart, og ettertest én uke etter at undervisningen var avsluttet. For å få et riktig og rettferdig bilde av elevenes utvikling var det nødvendig at begge testene var identiske, noe som stemmer med det Brekke (2002) sier om før- og ettertester.
Vi valgte diagnostiske oppgaver som omhandlet misoppfatninger tilknyttet brøkaspektet del av helhet fordi vi ønsket å få innblikk i elevenes konstruerte læring. Vi fant ikke et ferdig utviklet måleinstrument som testet det vi ønsket og måtte derfor utvikle vårt eget. Cohen et al. (2018) sier at diagnostiske oppgaver avdekker om elevene har en misoppfatning.

Ifølge matematikksenteret finnes det mange ulike misoppfatninger knyttet til brøk og vi valgte å ta utgangspunkt i de fem misoppfatningene vi redegjorde for i teorikapittelet:

1. Nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse.
2. Jo større nevner eller teller, jo større brøk.
3. Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken.
4. Teller eller nevner er et isolert tall.
5. Andre misoppfatninger.

Vi har også lagt til grunn kriterier fra kapittel 27.7 i Cohen et al. (2018) *Constructing and validating a test* for vårt valg av oppgaver. I vår test medførte kriteriene at oppgavene måtte være diagnostiske og teste brøkkunnskaper i del av hel aspektet. Det faglige innholdet i oppgavene måtte være kjent og mengde tekst måtte ikke være for krevende. Alle oppgavene måtte være uavhengig av hverandre og testen måtte inneholde nok oppgaver til å teste hver misoppfatning.

Vi startet med å søke etter oppgaver i allerede validerte instrumenter som: Matematikksenterets læringsstøttene prøve i matematikk, i Realfagsløyper, i Alle teller (McIntosh, 2007) og i tidligere oppgaver i nasjonale prøver i regning. For å få tilstrekkelig antall oppgaver måtte vi også hente noen oppgaver fra *«Levels of students' conception of fractions»*[4] (Pantziara & Philippou, 2012) og i tillegg lage noen selv. Cohen et al. (2018) sier at i tester som er diagnostiske er det viktig å ha flere oppgaver som tester det samme, altså flere oppgaver som tester samme misoppfatning.

Ut fra dette satte vi sammen en kartleggingstest hvor vi hadde mange oppgaver til hver misoppfatning, samtidig som det var en variasjon i type oppgaver vi valgte ut. Med varierte oppgaver mener vi oppgaver hvor elevene kan ta i bruk ulike modeller for å representere tenkningen sin. Dette har vi omtalt i teoridelen og er i tråd med det Watanabe (2007) sier om at elever som møter få representasjonsformer ikke utvikler god nok forståelse av brøkbegrepet. I tillegg er modellering et av kjerneelementene i LK20, noe som vi tidligere beskrev i teoridelen (Utdanningsdirektoratet, 2019). De siste sju oppgavene var ikke med i førkartleggingen, men vi valgte å ta de med i ettertesten for å få et bedre grunnlag til å analysere elevenes totale utvikling. Vedlegg 2 viser en oversikt over innhold, oppgavens hensikt og hvor de ulike oppgavene er hentet fra.

Testmaterialet vårt besto av 26 diagnostiske oppgaver. Alle oppgavene hadde avsatt plass, slik at elevene kunne tegne, beskrive eller begrunne svaret sitt. Dersom elever har en misoppfatning kan en slik forklaringsrute gi oss utfyllende informasjon om dette. En forklaringsrute kan også gi oss indikasjoner på hvilke elever vi trenger mer informasjon fra.

---

[4] (PDF) Nivåer av studentenes "oppfatning" av brøker (researchgate.net)

Ifølge Wu et al. (2016) kan formålet med en slik test være å finne hvor mange elever som er i de ulike misoppfatningene.

Misoppfatning	Markering	Oppgave
Nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse	1	1, 2, 5, 8, 12, 21
Jo større nevner (eller teller), jo større brøk	2	3, 4, 7, 11, 13, 19, **20, 22**
Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken	3	10, 18, **20, 22**, 23
Teller eller nevner som isolert tall	4	9, 15, 17, 24, 25, 26
Ulike misoppfatninger	5	6, 14, 16

Tabell 3 Oversikt over misoppfatninger og tilhørende oppgaver

Da vi utarbeidet førtesten, valgte vi å sette opp oppgavene i en tabell hvor vi kategoriserte de ulike oppgavene innen tilhørende misoppfatning. Misoppfatningene er grundig beskrevet i teoridelen. Ved gjennomgang og registrering av elevsvar fra ettertesten viste svar i oppgave 20 og 22 at både misoppfatning 2 og 3 var til stede i forklaringene til elevene og derfor står disse oppført under to misoppfatninger (videre forklaring finnes i vedlegg 2).

Cohen et al. (2018) sier at pilotstudier er en viktig del av et forskningsprosjekt. Videre sier de at det finnes flere ulike måter for å gjennomføre pilotering av tester, basert på hensikten med pilotstudien. Vi kvalitetssikret testen ved å velge ut noen elever i 6.klasse som piloter. Hensikten med dette var å se om noen av oppgavene kunne være for vanskelige for våre informanter samt finne ut hvor lang tid vi måtte sette av til gjennomføringen. Cohen et al. (2018) sier at om tester blir for omfattende kan det føre til at elevene ikke opprettholder konsentrasjonen gjennom hele testen. Videre sier han at dette også kan føre til at oppgaver på slutten av testen kan få en høyere andel feilsvar enn oppgaver på starten av testen. På grunn av pilotenes tidsbruk valgte vi å dele opp både før- og ettertesten i to bolker. Elevene ga tilbakemelding om at alle oppgavene var greie å forholde seg til og dette medførte ingen endringer i oppgavesettet.

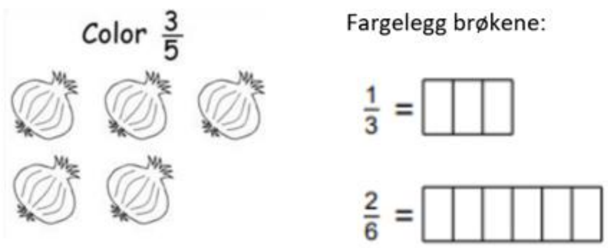
3.4.2 Undervisningsopplegg

Temaet for undervisningsoppleggene var brøk som del av en helhet. For at vi, på best mulig måte, skulle kunne sammenligne våre to innfallsvinkler utarbeidet vi undervisningsoppleggene så like som mulig. Hovedforskjellen ble et tydelig skille mellom arealmodellen (vedlegg 3) og mengdemodellen (vedlegg 4) som del av en helhet. Empson og Levi (2011) omtaler dette aspektet som et effektivt utgangspunkt for å bygge videre forståelse av brøk. De fleste lærebøker har stort søkelys på brøk som del av en helhet. Bakgrunnen for vår problemstilling var et ønske om å finne ut om hvorvidt det å starte innlæringen av brøk med mengdemodellen muligens skapte en dypere forståelse for brøkbegrepet, kontra det å starte med arealmodellen.

Vårt valg av arealmodell baserte seg på at dette er den vanligste innfallsvinkelen i innlæringen av brøk. I vår gjennomgang av læreverk fant vi at samtlige la hovedvekt på arealmodellen, hvor pizzamodellen var mest brukt. Innenfor denne innfallsvinkelen var det ikke vanskelig å finne oppgaver til åtte undervisningstimer. Vi brukte i hovedsak læreverket Matematikk til Cappelen Damm i utformingen av undervisningen som omhandlet arealmodellen. I tillegg tok vi i bruk ulikt brøkmateriell som vi hadde tilgjengelig.

Ved å utforme undervisningsopplegget til arealmodellen hadde vi et utgangspunkt for å utarbeide undervisningsopplegget for mengdemodellen. Å utarbeide dette undervisningsopplegget var imidlertid en stor og omfattende jobb da det er færre oppgaver som omhandler brøk som mengde i de ulike læreverkene. Ved å ta i bruk både læreverk etter K-06 og LK20 fant vi det meste vi trengte for å lage dette opplegget. I tillegg hentet vi også arbeidsark på Pinterest, både på norsk og engelsk. På denne måten prøvde vi å legge til rette for at undervisningsoppleggene ble så like som mulig, for å skape størst mulig reliabilitet i forskningen vår. Christoffersen og Johannessen (2012) sier at for å oppnå reliabilitet må dataene være pålitelige.

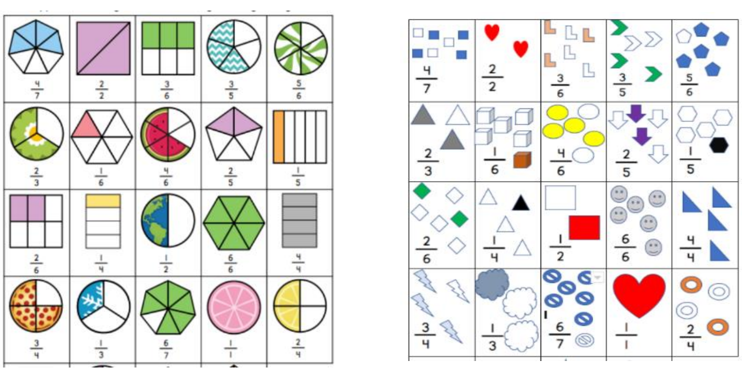
Eksempler fra arbeidsheftet til de to innfallsvinklene:



Figur 9 Eksempel oppgave mengdemodell og arealmodell

For å skape motivasjon og engasjement, valgte vi også å ha med noen praktiske oppgaver (vedlegg 5). Wæge og Nosrati (2018) sier at aktiviteter som elevene finner interessante og morsomme skaper motivasjon og engasjement og vil derfor føre til læring og utvikling. Disse oppgavene var både utforskende og problemløsende, noe som samsvarer med LK20. Brøk-bingo, en av de praktiske oppgavene som vi ønsket å ha med, fant vi bare som arealmodell og derfor utarbeidet vi vårt eget mengdebrett.

Brøk-bingo areal Brøk-bingo mengde



Figur 10 Brøk-bingo areal og brøk-bingo mengde

Ved å gjøre bevisste valg minsket vi muligheten for at det kunne bli forskjell i undervisningen med for eksempel ulikheter i aktivitet og utforsking i de to klassene. Et av de forskningsetiske hensyn forskere må ta vil være refleksjon over de konsekvensene forskjellige handlinger kan ha for forskningen (Gleiss & Sæther, 2021). Videre sier de at ved å ha en kritisk og spørrende holdning til egen forskning viser forskeren refleksivitet og valgene begrunnes og blir lettere å vurdere for leseren.

For å få tak i elevenes utvikling i forbindelse med en undervisningsperiode, måtte datainnsamlingsperioden gå over en viss tid. Undervisningen var fordelt over to uker, bestående av åtte undervisningsøkter. Det er ikke alltid ting blir som planlagt. På grunn av stort sykefravær blant elevene strakte undervisningsperioden seg over mer enn to uker, og det gikk mer enn én uke fra undervisningen var avsluttet til vi kunne gjennomføre ettertesten.

3.4.3 Intervju

I et konstruktivistisk verdenssyn, hvor det forutsettes at kunnskap konstrueres av menneskers tolkninger av virkeligheten, er intervju med åpne spørsmål en egnet metode (Cresswell, 2014). Et kvalitativt forskningsintervju kan brukes som støttende metode når man ønsker å utdype allerede innhentet data. Ifølge Gleiss og Sæther (2021) kan man bruke intervju for å utdype tester. De sier at en kvalitativ metode egner seg om man ønsker en utforskende tilnærming hvor man vil få frem informantenes tanker og måter å snakke om et fenomen på.

Ifølge Kvale (1996) kan et forskningsintervju bli vellykket, men det krever at den som intervjuer stiller de riktige spørsmålene og i så liten grad som mulig påvirker intervjuobjektets svar. Christoffersen og Johannessen (2012) sier at et semistrukturert intervju har som utgangspunkt en overordnet intervjuguide hvor tema, spørsmål og rekkefølge er fleksibel. Det vil si at man kan bevege seg fritt frem og tilbake i prosessen.
Et naturlig valg for oss ble semistrukturert intervju med åpent inngangsspørsmål, da formålet var å få tak i elevenes tankeprosesser.

3.4.4 Gjennomføring av intervju

Hensikten med intervju av enkeltelever var å få dybdekunnskap i elevenes tanker i prosessen, sett i forhold til å finne svar på vår problemstilling (Lyngsnes & Rismark, 2014). De utvalgte ble forespurt om å delta i intervjuprosessen og sa seg villige til å delta.
Vi utarbeidet intervjuguide (vedlegg 6) hvor vi valgte åpen struktur på inngangsspørsmålet vårt:

> *«Kan du forklare hvordan du tenkte da du løste denne oppgaven?»*

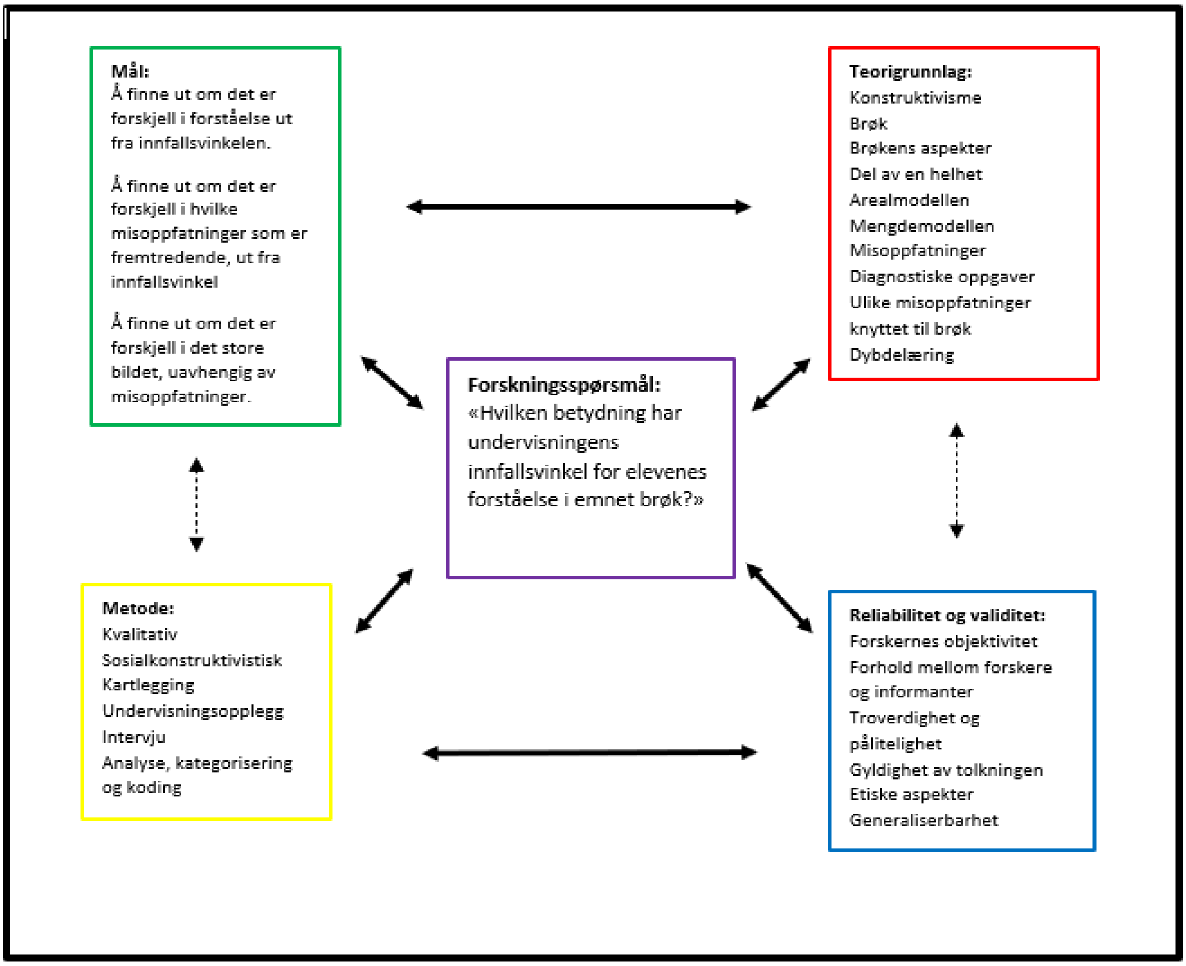
På bakgrunn av dette spørsmålet åpnet vi for at elevene kunne fortelle på egne premisser. Videre lot vi elevene styre prosessen, men vi hadde notert ned stikkord dersom vi skulle få behov for å drive elevene videre i prosessen. Vi intervjuet fire elever, to av arealelevene og to av mengdeelevene. For å få innsikt i elevenes konstruerte forståelse valgte vi elever som hadde svart feil på de utvalgte oppgavene på førtesten. To av de samme elevene hadde riktige svar på ettertesten, mens de to andre hadde svart feil på denne også.

Gleiss og Sæther (2021) sier at intervjustedet kan påvirke samtaledynamikken og bør være kjent for informanten. I tillegg sier de at det bør være et rolig sted uten bakgrunnsstøy og forstyrrelser. På bakgrunn av dette gjennomførte vi intervjuprosessen sammen, via nett, da dette var mest hensiktsmessig i forhold til skolenes beliggenhet. På grunn av Covid 19 måtte vi i tillegg ta smittevernhensyn i prosessen. En av oss var til stede fysisk og ledet intervjuet, den andre som fulgte på nett, noterte det som ble sagt underveis. Intervjuene foregikk i elevenes nære omgivelser, det vil si på skolene elevene tilhørte, for at situasjonen skulle være så trygg som mulig.

Umiddelbart etter at intervjuene var gjennomførte, transkriberte vi intervjuene sammen. Dette for å sikre at vi at fikk med oss hva elevene gjorde (pekte på, tegnet osv.) under intervjuet, slik at transkriberingen skulle bli så riktig som mulig, ut fra situasjonen (vedlegg 7).

3.4.5 Forskningdesign

Vi har valgt å bruke Maxwell (2013) sin modell som fundament for vårt forskningsdesign. Vi opplever modellen som gjenkjennende for vårt arbeid, da den viser hvordan faktorene påvirker hverandre, og sammen gir et helhetlig bilde. Den synliggjør at vi som forskere beveger oss frem og tilbake mellom komponentene.



Figur 11 Maxwells modell som fundament for vårt forskningsdesign

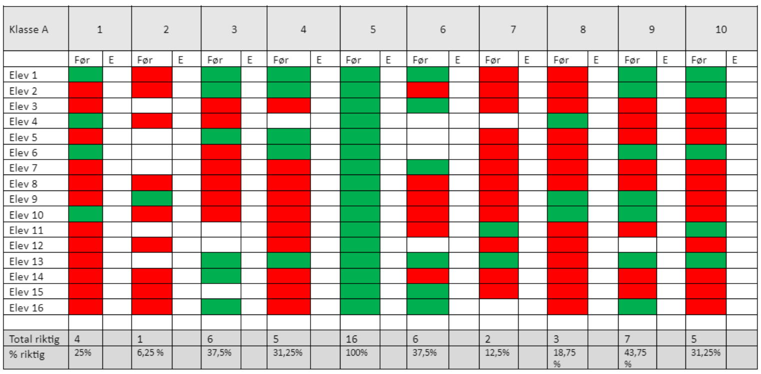
3.5 Analysemetode

Postholm og Jacobsen (2018) sier at hensikten med å finne en analysemetode er for å bearbeide og sortere datamaterialet som er innhentet gjennom forskningsperioden. Videre sier de at man må finne en analysemetode som gjør datamaterialet forståelig. Vårt datamateriale har fokus på resultater fra kartleggingstester og intervju som er innhentet i løpet av forskningsperioden. Thagaard (2018) sier at gjennom hele forskningsperioden pågår det en kontinuerlig prosess med analyse og tolkning av data. I dette kapittelet vil vi presentere fremgangsmåtene vi benyttet oss av for å organisere datamaterialet vårt.

3.5.1 Resultater av kartleggingsprøvene

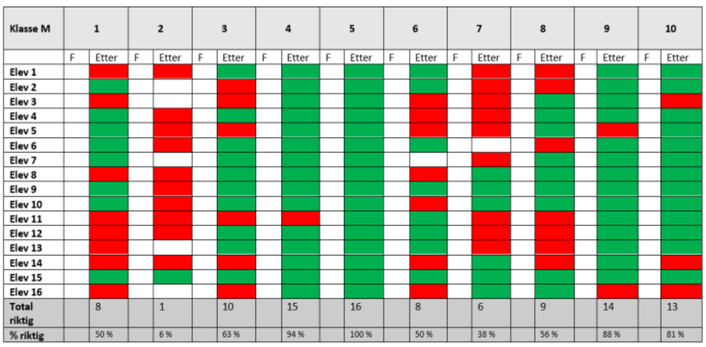
Ved valg av analyseverktøy søkte vi svar på vår problemstilling, og ville først se nærmere på elevenes utgangspunkt før undervisningen, for deretter å se utvikling og ståsted etter endt undervisning.

Allerede da vi gjennomgikk resultatene av kartleggingen og registrerte riktige og gale svar, startet vi analysearbeidet. Dette er i tråd med det Thagaard (2018) sier om en pågående prosess med analyse og tolkning av data gjennom hele studien. Vi utarbeidet tabeller der vi registrerte alle oppgaver både til før- og ettertesten (vedlegg 8) og registrerte elevene med nummer. Vi fargela rødt for feilsvar, grønt for riktig svar og hvitt for ubesvarte oppgaver. Noen oppgaver ble i tillegg fargelagt gule, da disse ikke var representert i førtesten. Vi delte opp tabellene i å bare gjelde førkartlegging slik at vi kunne sammenligne og sikre påliteligheten i forhold til elevenes forkunnskaper, noe som er i tråd med det Cohen et al. (2018) sier om baseline assessment. Under vises eksempler på vår registrering, både fra før- og ettertest.


Førkartlegging Klasse A 1 - 10

Klasse A	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E
Elev 1																				
Elev 2																				
Elev 3																				
Elev 4																				
Elev 5																				
Elev 6																				
Elev 7																				
Elev 8																				
Elev 9																				
Elev 10																				
Elev 11																				
Elev 12																				
Elev 13																				
Elev 14																				
Elev 15																				
Elev 16																				
Total riktig	4		1		6		5		16		6		2		3		7		5	
% riktig	25%		6,25 %		37,5%		31,25%		100%		37,5%		12,5%		18,75 %		43,75 %		31,25%	

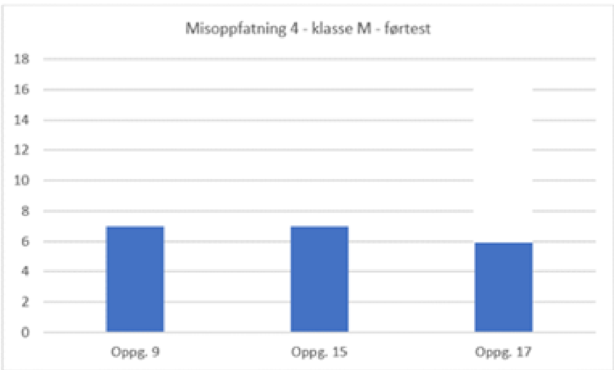
Tabell 4 Førtest 1 - 10 - klasse A


Etterkartlegging Klasse M 1-10

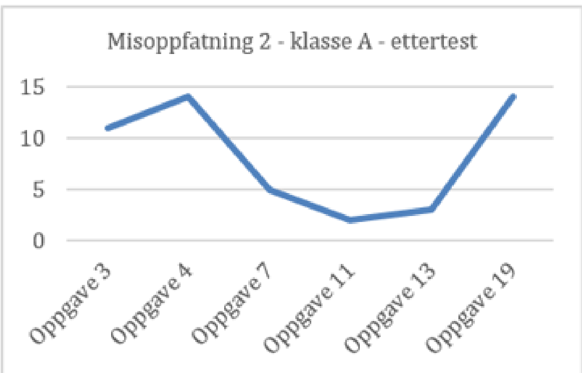
Klasse M	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter
Elev 1																				
Elev 2																				
Elev 3																				
Elev 4																				
Elev 5																				
Elev 6																				
Elev 7																				
Elev 8																				
Elev 9																				
Elev 10																				
Elev 11																				
Elev 12																				
Elev 13																				
Elev 14																				
Elev 15																				
Elev 16																				
Total riktig		8		1		10		15		16		8		6		9		14		13
% riktig		50 %		6 %		63 %		94 %		100 %		50 %		38 %		56 %		88 %		81 %

Tabell 5 Ettertest 1 - 10 - klasse M

Vi registrerte resultatene ut fra misoppfatning og deretter satte vi disse inn i tabell for før- og ettertest. Vi satte også resultatene fra klassene opp mot hverandre i samme tabell, både førtesten og ettertesten for å kunne sammenligne resultatene (vedlegg 8).
Videre utarbeidet vi tabeller over differanse i før- og ettertestene i prosent og satte de to klassene opp mot hverandre. Vi utarbeidet tabeller for hver av misoppfatningene hvor rubrikkens økning/nedgang viser klassens totale utvikling fra før- til ettertest som grunnlag for videre studie (vedlegg 8).
Gjennom en dynamisk prosess så vi hele tiden behov for nye registreringer og prosessen gikk frem og tilbake. Tabellene ble vårt grunnarbeid for å gjøre videre analyse og presentere resultatene i søylediagram og linjediagram.
Hensikten med å bruke linjediagram var å få et tydelig bilde av klassenes utgangspunkt, *baseline assessment*, sett i forhold til hverandre. Videre ble resultatene fra ettertestene, *summativ test*, brukt for å se den enkelte klasses utvikling, samt sammenligne klassenes utvikling i forhold til hverandre.



Figur 12 Misoppf. 4 - kl M - førtest



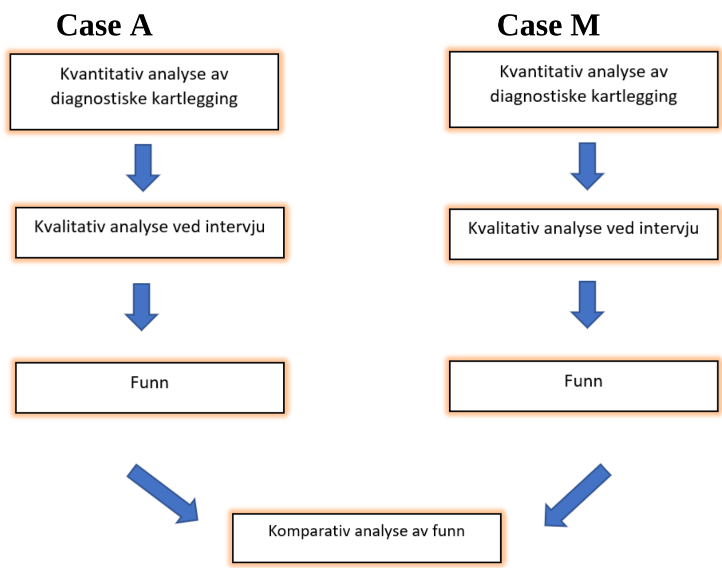
Figur 13 Misoppf 2 - kl 2 - ettertest

I tillegg til å se på resultatene ut fra misoppfatning hadde vi også som mål å sammenligne det totale resultatet i de to klassene for å se om det er forskjell i forståelse på bakgrunn av innfallsvinkel. Vi valgte også å intervjue elever i forhold til oppgaver der ettertesten viste stort sprik i resultat mellom de to klassene for å få innsikt i hvorvidt innfallsvinkelen kan ha hatt betydning for forståelsen til elevene.

3.5.2 Intervjuene

Ved å ha et åpent inngangsspørsmål i intervjuet, la vi til rette for at elevene kunne fortelle om sine tanker på egne premisser, uten påvirkning av oss. Det som var hensikten for oss var at elevenes svar skulle gi oss mulighet til å gå i dybden i elevenes forståelse av brøk. Oppgavene ble valgt ut på bakgrunn av at de viste tydelige forskjell i læringsendring i de to klassene (vedlegg 9).
Dessverre tok det lengre tid enn planlagt før vi fikk gjennomført intervjuene noe som skyldes stort elevfravær og Covid 19 i sirkulasjon. Dette kan ha vært med på at elevene husket litt dårlig, men ut fra forklaringer og svar syntes vi at vi fikk god informasjon.

Med utgangspunkt i våre registreringer valgte vi ut oppgaver innen areal og oppgaver innen mengde som de fire elevene skulle intervjues i.



Figur 14 Metodegangen - relasjon mellom kvantitativ og kvalitativ metode

3.6 Validitet og reliabilitet

Cohen et al. (2018) sier at for å kvalitetssikre et forskningsarbeid må det tas hensyn til reliabilitet og validitet. Videre sier de at man må diskutere begrepene opp mot den spesifikke tilnærmingen forskningsprosjektet er tilknyttet, fordi det stilles ulike krav til de forskjellige tilnærmingene. Når man vurderer reliabilitet og validitet i kvalitativ forskning oversettes dette gjerne til pålitelighet og gyldighet, ifølge Gleiss og Sæther (2021).

3.6.1 Validitet i forskningen vår

Validitet i forskning handler om hvor gyldig dataene, funnene og resultatene er, og er viktig for å få til effektiv forskning (Postholm & Jacobsen, 2018). Det skilles mellom intern og ekstern validitet. Intern validitet handler om at det man forsker på stemmer med det man sier at man forsker på (Postholm & Jacobsen, 2018). I tillegg sier de at ekstern validitet handler om hvorvidt resultater kan overføres til andre ikke studerte situasjoner og om forskningen er generaliserbar. Videre sier de at dette danner grunnlaget for hvorvidt man kan uttale seg om kausaliteten i forskningsarbeidet.

Datamaterialet består av kartleggingstester og intervju som er gjennomført i en naturlig situasjon både for elevene og lærerne. Lærerne som gjennomførte undervisningen var kjente, trygge voksne for elevene, noe som gjorde at det ble en kjent og trygg undervisningssituasjon. Kartleggingstestene var med på å styrke den indre validiteten siden vi kunne gå gjennom testene flere ganger ved behov.

Datamaterialet vårt består av diagnostiske kartleggingstester hvor gyldigheten i vår oppgave økes ved at vi tar i bruk *Matematikksenterets diagnostiske prøver*, samt tidligere *Nasjonale prøver* og oppgaver fra *Alle teller*. Som tidligere nevnt, se kartleggingsverktøy punkt 3.4.1, er disse oppgavene validert og pilotert av Matematikksenteret, noe som innebærer at de er testet ut på elever for å sjekke om de måler det de er tenkt til. For å få tilstrekkelig med oppgaver under hver misoppfatning måtte vi også hente noen oppgaver fra *«Levels of students' conception of fractions»* (Pantziara & Philippou, 2012), samt lage noen selv. I de egenproduserte oppgavene ønsket vi å måle forståelse innen misoppfatning 4: *teller eller nevner som isolert tall* gjennom bruk av andre representasjoner. Ved å ta utgangspunkt i allerede validerte oppgaver økte gyldigheten i de egenproduserte oppgavene.

Det essensielle i slike tester er at de er treffsikre og virkelig måler misoppfatninger og ikke andre variabler, som for eksempel utholdenhet eller leseferdighet. Det er viktig at oppgavene har en klar sammenheng med elevenes forståelse av brøk som del av en helhet. Ifølge DeVellis (2017) skal en perfekt reliabel test ikke reflektere noe annet enn sann skår, noe som i prinsippet er uoppnåelig da skåren alltid vil påvirkes av andre faktorer. For at elevene skulle

ha så like forhold som mulig ble testene gjennomført tidlig på dagen i begge klassene. Likevel kan det være ytre faktorer som påvirker den enkelte elev, som for eksempel dagsform, frokost og søvn. Dette var forhold som var utenfor vår kontroll, men kan ha vært med på å påvirke enkeltelevens besvarelser.
I forhold til validitet i studien ønsket vi så like grupper som mulig. For å etterstrebe validitet hadde vi samtaler med de respektive lærerne hvor vi kartla elevenes ståsted før forskningen startet. Begge klassene hadde tradisjonell klasseromsundervisning og hadde tilnærmet likt utgangspunkt i forhold til brøkinnlæring, se utvalg, punkt 3.3.

Ved at vi tok i bruk både kartleggingstest og intervju, styrket vi den interne validiteten. Ifølge Cohen et al. (2018) innebærer triangulering at man tar i bruk flere metoder eller datakilder innenfor undersøkelsesfeltet. De bruker også begrepet i utvidet forstand, som for eksempel at flere forskere forsker sammen. Siden vi er to forskere vil dette også være med på styrke validiteten.

Ekstern validitet handler om hvorvidt resultater kan overføres til andre ikke studerte situasjoner og om forskningen er generaliserbar (Postholm & Jacobsen, 2018). Vi anmoder at vår forskning leses i lys av at leseren kjenner seg igjen i våre beskrivelser og tolkninger. På bakgrunn av dette vil de kunne nyttiggjøre seg av resultatene våre, opp mot egen undervisning. Vår forskning baserer seg på et mindre utvalg og vil dermed ikke være generaliserbar. Gleiss og Sæther (2021) hevder at kvalitativ forskning i utgangspunktet ikke er generaliserbar fordi undersøkelsen baserer seg på et mindre utvalg og dermed ikke er representativt.

3.6.2 Reliabilitet i forskningen vår

I et forskningsprosjekt forteller reliabilitet hvor troverdig og pålitelig prosjektet er (Postholm & Jacobsen, 2018). En liten studie, som vår, lar seg vanskelig etterprøve slik som vi har gjort den. Ifølge Gleiss og Sæther (2021) vil det være ulike faktorer som kan være med å påvirke studien. De sier at forskernes bakgrunn og erfaring kan påvirke resultatene, i ulike kontekster, innen samme emne. Vi har forsøkt å gjennomføre forskningen på en tillitsvekkende og transparent måte. Gleiss og Sæther (2021) hevder at innenfor en sosialkonstruktivistisk tradisjon vil forskningsprosjekter ikke være repliserbare fordi forskerens posisjon har en sentral rolle og målet vil være at andre kan vurdere de valg forskeren har tatt.

Høsten 2021 bar preg av at Covid 19 påvirket både elevenes og vår hverdag. Stort fravær blant elevene gjorde at tidsplanen måtte revideres flere ganger. Dette medførte at vi hadde noen elever som ikke deltok på alle undervisningstimene, noe som selvfølgelig kan ha påvirket resultatet. Vi forsøkte, i så stor grad som mulig, at disse elevene fikk tatt igjen det tapte, men det vil likevel ikke være akkurat det samme som det de andre fikk.
I utgangspunktet hadde vi tenkt å være til stede i alle undervisningstimene, men på grunn av smittevernhensyn lot ikke dette seg gjøre. Vi fikk det likevel til i noen timer. Forskerens tilstedeværelse i klasserommet kan påvirke både elever og lærere og det er vanskelig å si hvorvidt vår tilstedeværelse hadde betydning for prosessen. Cohen et al. (2018) og Gleiss og Sæther (2021) sier at det er viktig å være bevisst at erfaring kan påvirke forskerens forskning. For å unngå dette søkte vi å ha en gjennomgående refleksiv tilnærming til prosessen.

For å sikre reliabiliteten i undervisningen gjennomførte vi samtaler med lærerne både underveis og avslutningsvis for å få innsyn i gjennomføringen. Ut fra samtale med lærerne fikk vi forståelse for at undervisningsopplegget ble fulgt slik det var planlagt, men vi kan ikke gå god for at det ble fulgt akkurat slik de var planlagt.

Både i datainnsamlings- og analyseprosessen har vi forsøkt å arbeide systematisk og være tydelige. Vi har beskrevet prosessen så åpen, ærlig og nøye som det lot seg gjøre. For å kvalitetssikre vår studie gjennomførte vi en pilotering av oppgavene i kartleggingsprøven vår. Ifølge Cohen et al. (2018) omhandler reliabilitet som ekvivalens to aspekter: for det første like måleinstrument for datainnsamling og for det andre *inter-rater reliability* som sikrer at de som forsker registrerer data på samme måte. Det første aspektet styrket vi med å benytte like før- og ettertester. Det andre aspektet sikret vi ved å først tolke datamaterialet hver for oss og deretter sammen. Cohen et al. (2018) hevder at inter-rater reliability beregnes ved formelen:

$$\frac{Antall\ enigheter}{Antall\ mulige\ enigheter} \cdot 100$$

For å beregne inter-rater reliability tok vi antall enigheter mellom oss og delte på antall muligheter.

Førtesten ga følgende inter-rater reliability:

$$\frac{Antall\ enigheter}{Antall\ mulige\ enigheter} = \frac{826}{832} \cdot 100\ \% = 99{,}3\ \%$$

Ettertesten ga følgende inter-rater reliability:

$$\frac{Antall\ enigheter}{Antall\ mulige\ enigheter} = \frac{822}{832} \cdot 100\ \% = 98{,}8\ \%$$

Resultatene viser en høy grad av enighet mellom oss som forskere, men slike tvilstilfeller vil alltid være en svakhet i en studie.

For å sikre best mulig reliabilitet var det naturlig å gå i dybden på informasjon fra kartleggingen og underbygge denne med intervju. Vi utarbeidet intervjuguide for å få så lik struktur som mulig under intervjuene. Ved at vi begge var til stede under intervjuene øker reliabiliteten, beskrevet under intervju, punkt 3.4.4. Ifølge Gleiss og Sæther (2021) er det viktig å være objektive og reflektere over bias som kan oppstå i forskningen. Vår erfaring, som mangeårige matematikklærere, kunne påvirke analysen, og gjøre det vanskelig å være 100% objektiv. Gjennom hele prosessen etterstrebet vi det å være så objektiv som overhodet mulig. På bakgrunn av våre beskrivelser og valg vil det være opp til leserne å avgjøre påliteligheten i vår forskning.

3.7 Etiske aspekter

Vår forskning som undersøker elevers utvikling innenfor et emne og skjer i deres naturlige setting, med få informanter, sorterer under kvalitativ metode. Postholm (2010) sier at i et godt kvalitativt forskningsprosjekt respekteres og verdsettes informantene gjennom hele prosessen. Vi var bevisste vårt etiske ansvar i forhold til informantene, altså elevene og lærerne, som deltok i studien.

Under planleggingen testet vi prosjektet hos Norsk senter for forskningsdata (NSD) og prosjektet ble ikke kategorisert som søknadspliktig, da det ikke inneholder lyd- eller bildeopptak. Videre tok vi utgangspunkt i *Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humanioras (NESH)* sine retningslinjer om forskning på mennesker. For oss innebar det plikt til å informere og innhente samtykke fra deltakerne. Vi utarbeidet, og delte ut, informasjonsskriv med samtykkeerklæring til elevene. Siden våre informanter går i 5.klasse stilles det krav om foresattes samtykke og signatur. Vi informerte elevene om forskningsprosjektet formål og forklarte hva deltakelsen deres innebar. De fikk også informasjon om at det var frivillig å delta og at de kunne trekke seg fra prosjektet til enhver tid. Videre utarbeidet vi også et skriv til lærerne, hvor det ble informert om deltakelse og deres mulighet til å trekke seg fra prosjektet. Informasjonsskrivene til både elever og lærer finnes i vedlegg 10 og vedlegg 11.

Når man forsker på barn er kravet om konfidensialitet viktig, og opplysninger om personlige forhold skal behandles fortrolig, og ved publisering må informantene anonymiseres (NESH, 2016). Vi valgte å ikke bruke elevenes navn når vi samlet inn data og ved analyse, men ga hver elev et eget nummer. Vårt datamateriale ble lagret på en trygg og sikker måte, og slettet og makulert etter bruk i henhold til *Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humanioras (NESH)* sine retningslinjer.

4 Analyse

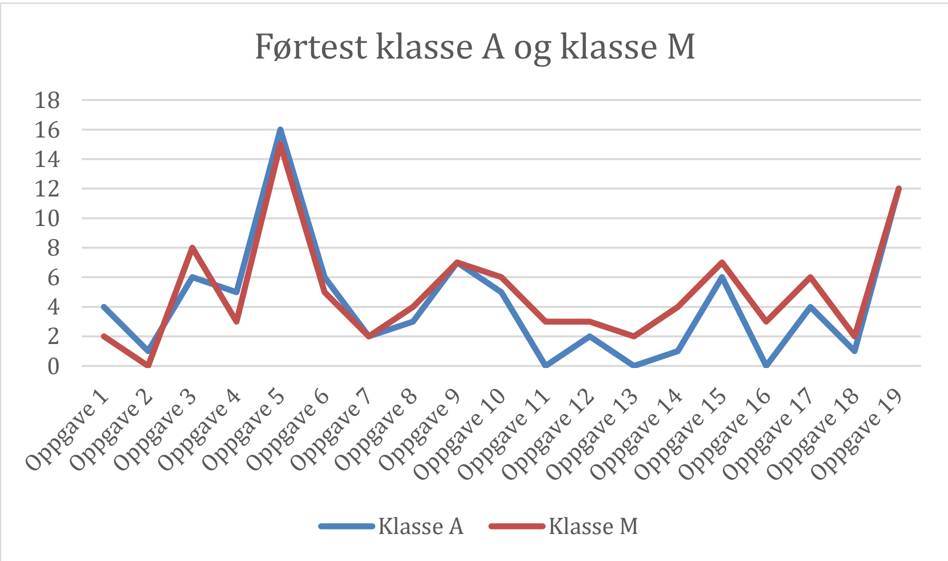
I analysedelen vår tar vi for oss resultatene på før- og ettertestene. Vi starter med å presentere oversikt over førtesten, for de to klassene, for å avklare klassenes utgangspunkt. Deretter sorterer vi oppgavene og resultatene innenfor hver av misoppfatningene, i forhold til førtesten. For å besvare vår problemstilling:

«Hvilken betydning har undervisningens innfallsvinkel for elevenes forståelse i emnet brøk?»

sammenligner vi klassenes resultater for alle misoppfatningene for å avdekke funn vi vil gå i dybden på og diskuterer videre. I to av misoppfatningene har vi også sortert oppgavene innen kategorier. Videre vil vi analysere ettertestene for å få en oversikt over de to klassenes utvikling. Til slutt vil vi presentere elevintervjuene for å kunne trekke disse inn i drøftingen.

4.1 Førtest

Figuren viser startpunktet, *baseline assessment* (Cohen et al., 2018), for hver av de to klassene.



Figur 15 Linjediagram førtest 1 -19, klasse A og klasse M

Førtesten bestod av 19 oppgaver basert på *Constructing and validating a test* (Cohen et al., 2018). X-aksen viser oppgavene og y-aksen viser antall riktige besvarelser. Diagrammet viser at klassene er relativt like på førtesten. Det er de samme oppgavene som har høy og lav skår, og vi ser at klassene følger hverandres kurve. Klasse A hadde flere riktige svar på fem av oppgavene og tre av disse oppgavene skilte bare med 1 poeng. Klasse M hadde flere riktig svar på elleve av oppgavene og fem av disse oppgaver skilte bare med 1 poeng. Tre av oppgavene var like for begge klassene. Klasse A hadde et gjennomsnitt på 5,13 riktige besvarelser, mens klasse M hadde et gjennomsnitt på 5,88 riktige besvarelser.

Oppgave 5 og oppgave 19 viste høy skår i begge klassene. I oppgave 5 kan resultatet tyde på at når elevene skal dele opp selv, lager de et bilde som skaper forståelse. Dette kan ifølge Fosnot og Perry (2005) tyde på at oppgaven er så enkel at elevene ut fra tidligere erfaringer konstruerer sin egen kunnskap gjennom en aktiv prosess.

I oppgave 19 kan elevene ha reflektert seg frem til at to femdeler er større, enn én femdel. Det er de samme oppgavene som utpeker seg som vanskelige, i begge klassene, spesielt oppgave 2, 7, 13 og 18 viser lav skår.

I analysen vil vi kommentere hver enkelt oppgave innenfor de ulike misoppfatningene. Når en elev har riktig besvarelse på en oppgave, anser vi eleven for å ikke ha misoppfatning. Videre anser vi elever som har feilsvar som tyder på misoppfatning, for å være i misoppfatning. William (2007) hevder at for å være helt sikre på at en elev er i misoppfatning må man gjennomføre dynamisk kartlegging, som er kartlegging med samtale. I tillegg er det nødvendig å ha flere oppgaver innen samme misoppfatning, for å avdekke om det virkelig er misoppfatning eller tilfeldige feil (Brekke, 2002).

4.1.1 Misoppfatning 1: Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse

Elever som er i denne misoppfatningen tar ikke hensyn til størrelsen på brøkdelen, men fokuserer på antall deler. De har ikke utviklet en god nok forståelse for at alle delene må være like store.

Tabellen under viser oversikt over oppgaver tilknyttet misoppfatning 1. Oppgave 21 er kun med i ettertesten og vil derfor ikke ha noe resultat i oppsummeringen, etter førtesten.

Nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse	1	1, 2, 5, 8, 12, 21

Tabell 6 Oppgaver til misoppfatning 4

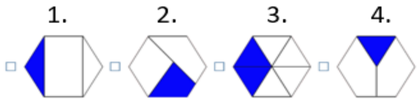
Kategorisering misoppfatning 1: Nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse

Vi har delt oppgavene under misoppfatning 1, *nevner representerer antall deler uavhengig av størrelsen,* i tre kategorier, hvor vi har sortert oppgavene etter utforming, fordi vi da får oversikt over hvilken handling som kreves av elevene. Samtlige kategorier har likedeling som grunnleggende mål. Kategori 1, *visuell ulik inndeling*, har ferdig oppdelte figurer, hvor noen deler er fargelagt. Det som skiller kategori 2, *dele/tegne fra ferdig oppgitt brøk*, fra kategori 1, er at i kategori 2 skal elevene tegne opp like store deler i en ferdig ramme, eller lage rammen selv. Den tredje kategorien, *angi brøkdel av oppdelt figur,* er kjente geometriske figurer som allerede er oppdelt, hvor det spørres etter en bestemt brøkdel av figuren.

Kategori 1 – Visuell ulik inndeling.

Oppgave 1 og 8 sjekker om elevene tar hensyn til at delene skal være like store i allerede ferdig oppdelte figurer. Forskjellen mellom disse oppgavene er at i oppgave 1 har ingen av figurene noe felles i oppdelingen, med unntak av figur tre som er den riktige. I oppgave 8 er to av figurene delt med utgangspunkt i sentrum, mens den siste er delt med to parallelle linjer, hvor bredden er lik i alle tre delene.

Oppgave 1 (flervalgsoppgave): Sett kryss foran den eller de av figurene der $\frac{1}{3}$ er fargelagt blå. Du kan sette flere kryss.



Elevsvar	Andel elevsvar
Figur 3 (riktig svar)	6
Figur 1, 2 og 4	15
Figur 1	4
Figur 2	4
Figur 4	2
Figur 1, 2, 3 og 4	1

Tabell 7 Resultat førtest oppgave 1, alle elever

Tabell 7 oppsummerer resultatet av besvarelsene på førtesten, for begge de to klassene, altså det totale antall elever som er med i studien.

Riktig svar i denne oppgaven var kryss ved figur 3, som har to av seks like deler blå. Elever som har riktig svar forstår at det er det samme som en av tre deler. Disse elevene viser at de har forstått at det skal deles likt, og de klarer å skille mellom figurer som har like deler og figurer som ikke har like deler. Noen få elever hadde krysset av for riktig svar på oppgave 1. Mer enn halvparten av elevene hadde svar som indikerte misoppfatning 1, *nevner* *representerer antall deler uavhengig av størrelse*, og de aller fleste krysset på alle figurene utenom den riktige. Dette tyder på at de bare teller antall deler og ikke ser på størrelsen på delene. De resterende svarene fordeler seg henholdsvis på figur 1, 2 eller 4, eller kryss på alle figurene. Av disse hadde de fleste krysset av for figur 1 eller 2. Elevene som har krysset på figur 1 kan ha tenkt at ved å dele med parallelle linjer vises tredeler, noe som kan forklares med at de kan ha tenkt som når de deler inn et rektangel. Elevene som har krysset for figur 2 kan ha tenkt at denne figuren var riktig siden den er delt i tre deler. Av de figurene som er delt i tre deler, er det denne figuren som har det største blå arealet, og som kan ha lik størrelse som de to andre delene i figur 2.

Oppgave 8 (flervalgsoppgave): Velg den, eller de, av figurene der $\frac{1}{3}$ er fargelagt rød.

Elevsvar	Andel elevsvar
Figur 2 (riktig svar)	7
Figur 2 og 3	22
Figur 1	1
Figur 1 og 2	1
Figur 1, 2 og 3	1

Tabell 8 Resultat førtest oppgave 8, alle elever

Tabell 8 oppsummerer resultatet av besvarelsene på førtesten, for begge de to klassene, altså det totale antall elever som er med i studien.

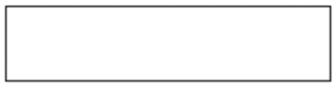
Riktig svar i denne oppgaven var kryss ved den midterste figuren (figur 2) der en tredel er fargelagt rød. Disse elevene viser at de har forstått at det skal deles likt, og de klarer å skille mellom figurer som har like deler og figurer som ikke har like deler. Under en firedel av elevene hadde krysset av for riktig svar på oppgave 8. Over halvparten av elevene hadde svar som indikerte misoppfatning. Disse elevene hadde krysset av på figur 2 og 3 som var delt i tre deler, uavhengig av om delene var like store eller ikke. De resterende svarene fordeler seg henholdsvis på figur 1, 1 og 2, eller kryss på alle figurene, noe som kan forklares med at elevene bare ser på telleren og som sorterer under misoppfatning 4, *teller eller nevner som isolert tall*.

Førtesten viser at under halvparten har svart riktig på oppgavene under kategori 1 - visuell ulik inndeling. Den viser også at omtrent halvparten av elevene har det mest brukte feilsvaret i denne kategorien.

Kategori 2 – Dele/tegne ut fra ferdig oppgitt brøk.

Oppgave 5 og 21 tester om elevene kan dele figuren i riktig antall, og fargelegge oppgitt brøkdel. Elevene skal selv dele figuren i riktig antall deler og fargelegge. Forskjellen mellom disse oppgavene er at i oppgave 5 er figuren innrammet som et rektangel og i oppgave 21 må elevene tegne figuren selv (oppgave 21 finnes kun i ettertesten og er derfor ikke med i oppsummeringen av resultatet etter førtesten).

Oppgave 5: Fargelegg tre firedeler ($\frac{3}{4}$) av denne figuren.



Elevsvar	Andel elevsvar
Riktig	31
Andre feilsvar	1

Tabell 9 Resultat førtest oppgave 5, alle elever

Riktig svar i denne oppgaven var å dele i fire deler og fargelegge tre av fire deler. Elevene som svarer riktig, viser at de klarer dele opp en figur i riktig antall like deler og fargelegge riktig brøkdel. Alle elevene unntatt én elev hadde riktig svar på oppgave 5. Eleven som hadde feil hadde satt fire loddrette streker inne i figuren og hadde fargelagt tre av de fem delene. Dette kan tyde på at eleven bruker nevner til å fortelle hvor mange streker han skal lage og ikke til antall deler figuren skal deles i, noe som indikerer at eleven ikke har forstått at nevneren forteller det totale antall deler en figur har.

Oppgave 21: Tegn en figur der $\frac{1}{4}$ er fargelagt. Oppgave 21 er kun med i ettertesten, men er tatt med i kategoriseringen. Riktig svar i denne oppgaven er å tegne en figur, dele denne opp i firedeler og fargelegge en del. Elever som svarer riktig på denne type oppgaver, viser at de klarer å tegne opp og dele opp en figur i riktig antall like deler, og fargelegge riktig brøkdel. Disse elevene har forståelse for at nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse og viser dette ved å tegne en modell.

Førtesten viser at alle elevene, unntatt én, har svart riktig på oppgavene under kategori 2 - dele/tegne ut fra ferdig oppgitt brøk.

Kategori 3 – Angi brøkdel av oppdelt figur

Oppgave 2 og 12 tester om elevene har kontroll på likedeling av en figur. Forskjellen mellom disse oppgavene er at oppgave 2 er en trekant, og oppgave 12 er et rektangel.

Oppgave 2: Hvor stor brøkdel av kostholdet til kaniner bør være høy, ifølge oversikten?

Elevsvar	Andel elevsvar
3/4 (riktig svar)	1
1/4	11
Nesten hele figuren (ikke brukt brøk)	4
1/3	2
1/2 eller 2/4	8
Ubesvart	6

Tabell 10 Resultat førtest oppgave 2, alle elever

Riktig svar i denne oppgaven var tre firedeler og elevene som svarer riktig viser at de klarer dele opp en figur i like store deler, selv om figuren i utgangspunktet har ulik inndeling. Det var kun én elev som hadde riktig svar på oppgave 2. Fire av elevene har svart at nesten hele består av høy, noe som forså vidt er riktig, men kan tyde på at de ikke forstår hvordan de skal dele inn figuren i like store deler, samt skrive det som brøk. Omtrent en tredel av elevene hadde svar som tyder på misoppfatning og de svarte en firedel. Dette kan tyde på at de ikke forstår likedeling og at de bare teller antall deler og ikke ser på størrelsen på delene. Omtrent en tredel av elevene har andre typer feilsvar, som halvparten og en tredel. De elevene som har svart en halv, kan ha tenkt at siden figuren deles på midten, så er delen «høy» halvparten. Resterende feilsvar som en tredel er vanskelig å forklare som misoppfatning. Seks elever har valgt å ikke besvare denne oppgaven og det kan for eksempel være fordi de ikke har møtt denne type oppgaver tidligere. Det vanligste å møte, i norske lærebøker, er arealfigurer som sirkler eller rektangler, hvor delene ofte har lik utforming.

Oppgave 12: Hvor stor brøkdel av flagget til Ecuador er rødt?

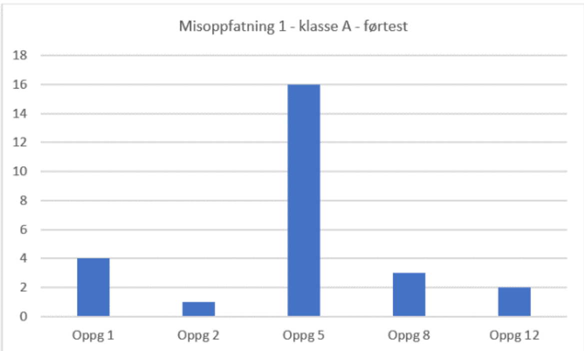
Elevsvar	Andel elevsvar
1/4 (riktig svar)	5
1/3	19
1/2 (andre feilsvar)	4
Ubesvart	4

Tabell 11 Resultat førtest oppgave 12, alle elever

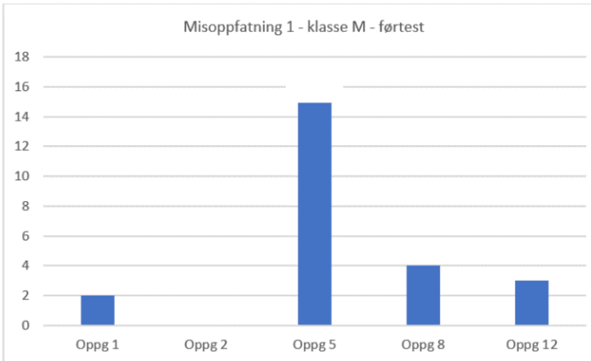
Riktig svar i denne oppgaven var en firedel og elevene som svarer dette viser at de klarer dele opp en figur i likedeling, selv om figuren i utgangspunktet har ulik inndeling. Det var noen få elever som hadde svart riktig på denne oppgaven. Over halvparten av elevene hadde svar som tyder på misoppfatning, noe som tyder på at de ikke forstår likedeling. Disse elevene hadde svart en tredel noe som tyder på at de bare teller antall deler og ikke ser på størrelsen på delene. Noen få elever hadde annet feilsvar og hadde svart en halv, noe som er vanskelig å forklare som misoppfatning. Fire elever har valgt å ikke besvare denne oppgaven. En mulig forklaring kan være at elevene ikke har møtt oppgaver hvor delene ikke er oppgitt som nevner, og at det blir vanskelig å angi brøken, når de ikke har et utgangspunkt.

Førtesten viser at noen få elever har svart riktig på oppgavene under kategori 3 - angi brøkdel av oppdelt figur.

Figurene under viser antall elever, på førtesten, som har svart riktig på de ulike oppgavene, på misoppfatning 1 - *nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse*, fordelt på klassene:



Figur 16 Misoppf 1 - førtest kl A - arealelever



Figur 17 Misoppf 1 - førtest kl M - mengeelever

Figur 16 og figur 17 viser at svært få elever har riktige svar på oppgave 1, 2, 8 og 12 i begge klassene. I disse oppgavene skulle elevene forholde seg til ferdig oppdelte figurer. Oppgave 5 hvor elevene skulle tegne selv, viser at dette mestrer nesten alle elevene.

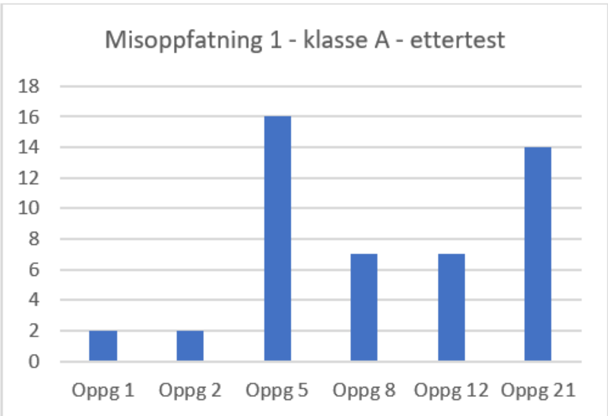
Førtest misoppfatning 1: Nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse.

Førtest	Avgitte svar	Klasse A	Klasse M
Oppgave 1	Figur 3	25 %	12 %
	Figur 1, 2 og 4	31 %	63 %
Oppgave 2	Riktig svar	6 %	0
	¼	25 %	44 %
Oppgave 5	Riktig svar	100 %	94 %
Oppgave 8	Figur 2	19 %	25 %
	Figur 2 og 3	69 %	69 %
Oppgave 12	¼	12 %	19 %
	1/3	50 %	69 %

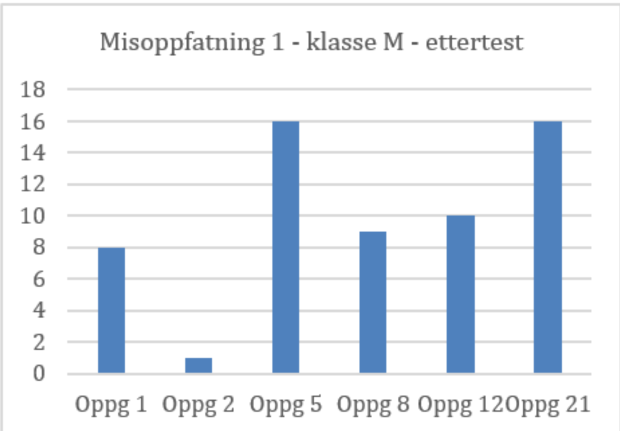
Tabell 12 Førtest misoppfatning 1 - andel riktige svar og svar som tyder på misoppfatning, angitt i prosent

Grønn farge viser oversikt over andel riktige svar, angitt i prosent, i de to klassene. Gul farge viser svar som tyder på misoppfatning, angitt i prosent. På denne type tabell vil ikke resultatene i den enkelte klasse, utgjøre 100 %. Hver klasse kan ha elever med andre feilsvar eller elever som ikke har besvart oppgaven. Denne prosentandelen er ikke tatt med i tabellen.

Figurene under viser hvor mange elever som har riktig svar på de ulike oppgavene i ettertesten, fordelt på klassene.



Figur 18 Misoppf 1 - kl A - ettertest



Figur 19 Misoppf 1 - kl M - ettertest

Ettertest misoppfatning 1: Nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse.

Ettertest	Avgitte svar	Klasse A	Klasse M
Oppgave 1	Figur 3	12 %	50 %
	Figur 1,2 og 4	44 %	25 %
Oppgave 2	3/4	12 %	6 %
	2/4	31 %	31 %
Oppgave 5	Riktig svar	100 %	100 %
Oppgave 8	Figur 2	44 %	56 %
	Figur 2, 3	56 %	44 %
Oppgave 12	1/4	44 %	63 %
	1/3	44 %	38 %
Oppgave 21	1/4	88 %	100 %
	1/5	6 %	0

Tabell 13 Ettertest misoppfatning 1 - andel riktige svar og svar som tyder på misoppfatning, angitt i prosent

Tabellen over viser at klassene har hatt utvikling innen alle kategoriene. Det er noen oppgaver som utpeker seg. Spesielt ser vi dette på oppgave 1 og 2. Oppgave 1, som sjekker om elevene tar hensyn til at delene skal være like store, i allerede ferdig oppdelte figurer, viser at klasse A har lavere skår på ettertesten, enn på førtesten, mens klasse M har økt sin skår betydelig på denne oppgaven. Oppgave 2 viser lav skår på begge klassene, både på før- og på ettertesten. Videre ser vi at oppgave 5, hvor elevene fargelegger tre firedeler selv, har spesielt høy skår både på før- og ettertesten i begge klassene.

Resultatet sortert etter misoppfatning 1, *nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse*, viser at klasse A har et gjennomsnitt på 1,63 antall riktige oppgaver og klasse M har et gjennomsnitt på 1,5 antall riktige oppgaver på førtesten.

Ettertesten viser at klasse A har et gjennomsnitt på 2,13 antall riktige oppgaver og klasse M har et gjennomsnitt på 2,75 antall riktige oppgaver.

Oversikt over klassenes gjennomsnittlige poengskår og endring fra før- til ettertest misoppfatning 1

Klasse	N	Gj.snitt førtest	Gj.snitt ettertest	Gj.snitt endringskår
A	16	1,63	2,13	0,5
M	16	1,5	2,75	1,25

Tabell 14 Oversikt over klassens gjennomsnittlige poengskår og endring fra før- til ettertest misoppfatning 1

Tabellen viser at klasse A har et høyere gjennomsnitt på førtesten, enn klasse M. Klasse M viser størst utvikling og et høyere gjennomsnitt, enn klasse A på ettertesten. Tabellen viser også gjennomsnittlig endringsskår for de fem oppgavene som var med på både før- og ettertest, og resultatet viser at klasse M - mengdeelevene har høyere endringsskår enn klasse A - arealelevene.

4.1.2 Misoppfatning 2: Jo større nevner eller teller, jo større brøk

Under denne misoppfatningen kan vi se at elevene har en overgeneralisering av kunnskap om de hele tallene, og at de enten bare ser på nevnerne eller tellerne når de skal sammenligne brøk. De ser på teller og nevner som isolerte tall og tar ikke hensyn til forholdet mellom dem når de vurderer størrelsene av brøken.

Tabellen under viser oversikt over oppgaver tilknyttet misoppfatning 2. Oppgave 20 og 22 er kun med i ettertesten og vil derfor ikke ha noe resultat i oppsummeringen, etter førtesten. Oppgavene under denne misoppfatningen er ikke kategorisert.

Jo større nevner (eller teller), jo større brøk	2	3, 4, 7, 11, 13, 19, **20, 22**

Tabell 15 Oversikt over oppgaver tilknyttet misoppfatning 2

Oppgave 3 (med forklaringsrute): Hanna kjøper to flasker brus. Hver flaske rommer $\frac{1}{2}$ liter. Hvor mange liter brus kjøper Hanna?

Elevsvar	**Andel elevsvar**
1 liter (riktig svar)	14
2/4	9
2/3	1
2 liter	4
Ubesvart	4

Tabell 16 Resultat førtest oppgave 3, alle elever

Riktig svar i denne oppgaven var 1 liter. Elevene som har svart riktig viser at de forstår at en todel er det samme som en halv. Litt under halvparten av elevene hadde krysset av for riktig svar på oppgave 3. Under halvparten av elevene hadde svar som indikerte misoppfatning og de hadde svart to firedels liter. Disse har doblet både teller og nevner, og kan ha tenkt jo større nevner eller teller, jo større brøk. De kan i tillegg ha tenkt at både teller og nevner skal dobles. Fem av elevene hadde andre feilsvar, fire av disse svarte 2 liter og en elev svarte to tredels liter, noe som er vanskelig å forklare som misoppfatning. Fire elever har valgt å ikke besvare denne oppgaven. En mulig forklaring kan være at de ikke har møtt på oppgaver hvor de skal addere eller multiplisere brøker, tidligere, i tillegg til at de kan være usikre på måleenheter.

Oppgave 4 (med forklaringsrute): Studér brøkene $\frac{1}{8}$ og $\frac{1}{9}$. Hvilken brøk er størst?

Elevsvar	Andel elevsvar
1/8 (riktig svar)	8
1/9	23
Ubesvart	1

Tabell 17 Resultat førtest oppgave 4, alle elever

Riktig svar i denne oppgaven er en åttedel og elevene som svarer riktig viser at de forstår at jo mindre nevner, jo større deler. En firedel av elevene hadde svart riktig på oppgave 4. Over halvparten av elevene hadde svar som indikerte misoppfatning og de hadde svart en nidel. Disse elevene tenker at jo større nevner, jo større brøk. En elev har valgt å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 7 (med forklaringsrute): Skriv en brøk som har dobbel så stor verdi som $\frac{1}{6}$.

Elevsvar	Andel elevsvar
1/3 eller 2/6 (riktig svar)	4
2/12	16
3/2	4
2/3	4
1/12	1
3/6	1
2/0	1
Ubesvart	1

Tabell 18 Resultat førtest oppgave 7, alle elever

Riktig svar i denne oppgaven er to seksdeler eller en tredel. Elevene som svarer riktig, forstår at det er bare telleren som endrer seg når man adderer brøker. De som har svart en tredel, forstår også likeverdige brøker og kan forklare at 1 av tre er det samme som to av seks. Svært få av elevene hadde svart riktig på oppgave 7. Halvparten av elevene hadde svar som indikerte misoppfatning og de hadde svart to tolvdeler. Dette forteller at de dobler både teller og nevner, og kan tenke at da bli brøken dobbelt så stor. Disse elevene viser ikke forståelse for likeverdige brøker. Under halvparten av elevene hadde andre feilsvar, som også kan indikerer misoppfatning og svarene fordelte seg ulikt. Samtlige av disse svarene hadde enten større nevner eller større teller, enn brøken som oppgaven oppga verdien til. En elev har valgt å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 11 (med forklaringsrute): Familien til Henrik er på biltur. Henrik spør om de har igjen $\frac{1}{3}$ av turen. Mor sier de har igjen mindre enn det. Hvor langt kan de ha igjen av turen?

Elevsvar	Andel elevsvar
< 1/3 (riktig svar)	3
1/2	10
2/3	7
4	1
0/3	6
Ubesvart	5

Tabell 19 Resultat førtest oppgave 11, alle elever

Riktig svar i denne oppgaven er alle brøker som er mindre enn en tredel og elevene som svarer riktig forstår at man må dele opp en tredel i mindre biter, slik at nevner blir større, og velge svar ut fra det. Svært få av elevene hadde svart riktig på oppgave 11. Riktige elevsvar fordelte seg slik: en elev hadde svart en firedel, en elev hadde svart en firedel eller en femdel, og den siste eleven hadde svart en firedel, en femdel og fortsatte med stambrøker opp til en tidel, og deretter skrevet osv. Under halvparten av elevene hadde svar som indikerte misoppfatning og de hadde svart en todel. Disse elevene kan ha tenkt at ved å gjøre nevneren mindre, blir brøken mindre. Nesten halvparten av elevene hadde andre feilsvar og svarene fordelte seg ulikt, noen kan forklares og andre er vanskelig å forklare. Elevene som har svart to tredeler kan ha lest feil på oppgaven og kan ha svart på det som mangler for å få fylt opp en tredel slik at det til sammen blir tre tredeler, som tilsvarer hele turen. Eleven som har svart null tredeler kan ha tenkt at null er mindre enn en. Fem elever har valgt å ikke besvare denne oppgaven og kan ha tenkt at oppgaven er umulig, fordi det finnes ingen brøk som er mindre enn en tredel.

Oppgave 13 (med forklaringsrute): Henrik og Kasper deler likt $\frac{1}{4}$ liter saft. Hvor mange liter får de hver?

Elevsvar	Andel elevsvar
1/8 liter (riktig svar)	2
0,5/4 liter	1
1/2 liter	10
0/2 liter	1
2/4 liter	1
2/2 liter	1
1 liter	2
3 liter	1
7 dl	1
5/0 liter	1
0/7 liter	1
Ubesvart	4

Tabell 20 Resultat førtest oppgave 13, alle elever

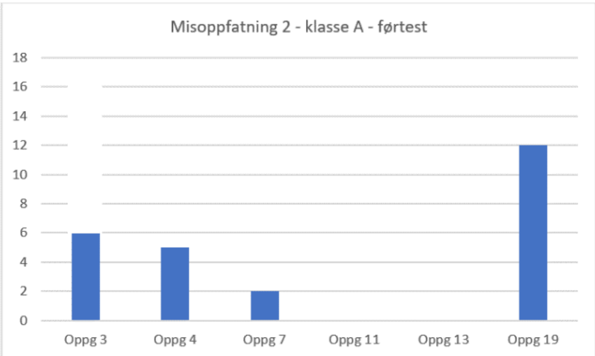
Riktig svar i denne oppgaven er en åttedel. Svært få av elevene hadde svart riktig på oppgave 13. Disse elevene har forstått at en firedel må deles i to like store deler og hele figuren blir da delt i åtte like store deler. En elev hadde svart null komma fem firedeler, denne eleven har forstått å dele en firedel i to, men ikke forstått å dele hele figuren i like store deler, slik at svaret ble en åttedel. Litt under halvparten av elevene hadde svar som indikerte misoppfatning og ti av disse hadde svart en todel. Misoppfatningen er at elevene deler nevneren i to. En elev hadde svart null todeler og en elev hadde svart to todeler. Disse elevene hadde enten halvert både teller og nevner, eller doblet teller og halvert nevner. En elev hadde svart to firedeler og denne eleven hadde bare doblet telleren. Under halvparten av elevene hadde andre feilsvar og svarene fordelte seg ulikt. Seks av elevene svarte at det blir hele liter og en elev svarte at det ble 7 dl, disse svarene er vanskelig å forklare. En elev hadde svart null sjudeler og en elev hadde svart fem nulldeler, begge disse svarene er også vanskelig å forklare. Tre elever hadde svart en firedel, som er likt utgangspunktet. Fire elever har valgt å ikke besvare denne oppgaven. Disse elevene kan ha valgt bort å besvare oppgaven fordi de er usikre på målenheter og fordi de ikke forstår hvordan de skal dele en firedel, spesielt telleren, i to like store deler.

Oppgave 19 (med forklaringsrute): Faren til Hanna spør om hun kan pante flaskene som ligger i garasjen. Hvis Hanna panter flaskene, skal hun få $\frac{1}{5}$ av panten som lønn. Hanna ønsker mer enn det i lønn. Hvor stor brøkdel kan Hanna foreslå at hun skal få?

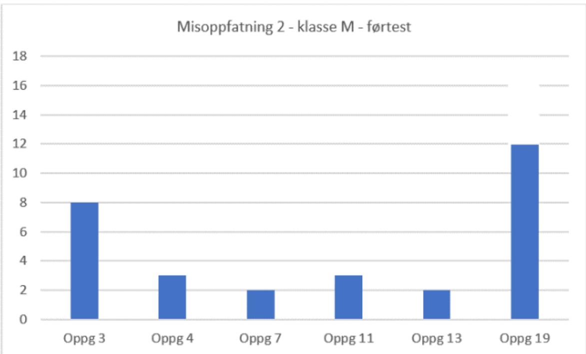
Elevsvar	Andel elevsvar
Riktig svar	24
1/5	4
2/1	2
1/7	1
1/8	1

Tabell 21 Resultat førtest oppgave 19, alle elever

Riktig svar i denne oppgaven er alle svar større enn en femdel. De fleste av elevene hadde svart riktig på oppgave 19. Disse elevene har forstått at om man beholder nevneren og øker telleren, vil hun få mere. Noen få av elevene hadde svar som indikerte misoppfatning og de hadde svart en åttedel, en sjudel eller to endeler. Disse elevene kan ha ment at jo større nevner eller teller, jo større brøkdel. Noen få av elevene hadde andre feilsvar og svarte en femdel, som var det samme som utgangspunktet, noe som indikerer at de ikke har forstått oppgaven. Figurene under viser antall elever som har svart riktig på de ulike oppgavene på førtesten, fordelt på klassene:



Figur 20 Misoppf 2 - kl A - førtest



Figur 21 Misoppf 2 - kl A - førtest

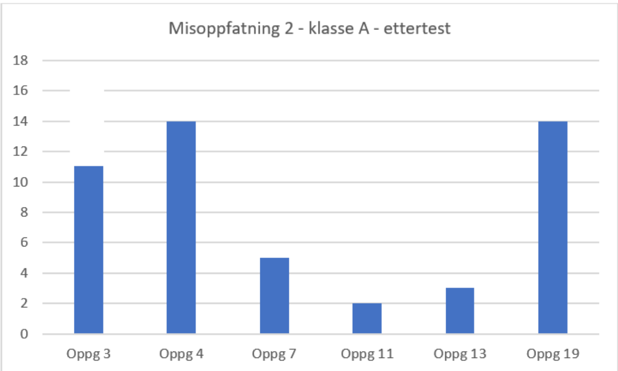
Førtest misoppfatning 2: Jo større nevner eller teller, jo større brøk

Førtest	Avgitte svar	Klasse A	Klasse M
Oppgave 3	1 liter	38 %	50 %
	2/4	31 %	25 %
Oppgave 4	1/8	31 %	19 %
	1/9	64 %	69 %
Oppgave 7	2/6	12 %	12 %
	2/12	31 %	69 %
Oppgave 11	<1/3	0	19 %
	1/2	31 %	31 %
Oppgave 13	1/8	0	12 %
	1/2	25 %	38 %
Oppgave 19	>1/5	75 %	75 %
	1/7 og 1/8	6 %	6 %

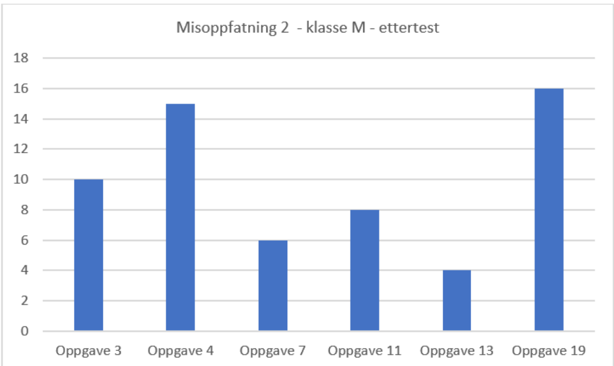
Tabell 22 Førtest misoppfatning 2 - andel riktige svar og svar som tyder på misoppfatning, angitt i prosent

Grønn farge viser oversikt over andel riktige svar, angitt i prosent, i de to klassene. Gul farge viser svar som tyder på misoppfatning, angitt i prosent. På denne type tabell vil ikke resultatene i den enkelte klasse, utgjøre 100 %. Hver klasse kan ha elever med andre feilsvar, eller elever som ikke har besvart oppgaven. Denne prosentandelen er ikke tatt med i tabellen.

Figurene under viser hvor mange elever som har riktig svar på de ulike oppgavene på ettertesten, fordelt på de to klassene.



Figur 22 Misoppf 2 - kl A - ettertest



Figur 23 Misoppf 2 - kl M - ettertest

Ettertest misoppfatning 2: Jo større nevner (eller teller), jo større brøk

Ettertest	Avgitte svar	Klasse A	Klasse M
Oppgave 3	1 liter	69 %	63 %
	2/4	19 %	31 %
Oppgave 4	1/8	88 %	94 %
	1/9	6 %	6 %
Oppgave 7	2/6	31 %	38 %
	2/12	38 %	38 %
Oppgave 11	<1/3	12 %	50 %
	1/2	31 %	38 %
Oppgave 13	1/8	19 %	25 %
	1/2	56 %	25 %
Oppgave 19	>1/5	88 %	100 %
	1/5	6 %	0

Tabell 23 Ettertest misoppfatning 2 - andel riktige svar og svar som tyder på misoppfatning, angitt i prosent

Tabellen viser at klassene har hatt positiv utvikling innen misoppfatning 2. Det er noen oppgaver som utpeker seg og spesielt ser vi dette på oppgave 4 og 19. Oppgave 4 som sjekker om elevene forstår hvilken brøk som er størst av $\frac{1}{8}$ og $\frac{1}{9}$, viser at klassene har hatt betydelig fremgang siden førtesten. Oppgave 19 har høy skår i begge klassene, både på før- og på ettertesten. Svært mange av elevene har i denne oppgaven forstått at jo mindre nevner, jo større deler av helheten. Oppgave 11 viser størst fremgang i klasse M - mengdeklassen, der halvparten av elevene har forstått hva som kan være mindre enn en tredel. Vi vil likevel si at resultatet på oppgavene til misoppfatning 2 viser god utvikling i begge klassene, siden begge klassene har økt antall riktige besvarelser, i gjennomsnitt med mer enn én oppgave.

Resultatet sortert etter misoppfatning 2, *jo større nevner eller teller, jo større brøk*, viser at klasse A har et gjennomsnitt på 1,56 antall riktige oppgaver, og klasse M har et gjennomsnitt på 1,88 antall riktige oppgaver på førtesten. Ettertesten viser at klasse A har et gjennomsnitt på 3,06 antall riktige oppgaver og klasse M har et gjennomsnitt på 3,69 antall riktige oppgaver.

Oversikt over klassenes gjennomsnittlige poengskår og endring fra før- til ettertest misoppfatning 2

Klasse	N	Gj.snitt førtest	Gj.snitt ettertest	Gj.snitt endringskår
A	16	1,56	3,06	1,5
M	16	1,88	3,69	1,81

Tabell 24 Oversikt over klassenes gjennomsnittlige poengskår fra før- til ettertest misoppfatning 2

Tabellen viser at klasse M - mengdeelevene, har et høyere gjennomsnitt på førtesten, enn klasse A - arealelevene. Klasse M viser størst utvikling og et høyere gjennomsnitt enn klasse A på ettertesten også. Tabellen viser også gjennomsnittlig endringsskår for de to klassene.

4.1.3 Misoppfatninger 3: Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken

Denne misoppfatningen kan vise seg når elevene skal sammenligne størrelsen til en brøk. Vi vil også kunne finne tegn til denne misoppfatningen når de skal finne likeverdige brøker. Et eksempel er at elevene tenker additivt, i stedet for å betrakte brøk som en multiplikativ relasjon mellom teller og nevner. Ifølge Bjerke et al. (2013) og Mitchell og Horne (2010) blir dette i litteraturen omtalt som *"gap thinking"*.

Tabellen under viser oversikt over oppgaver tilknyttet misoppfatning 3. Oppgave 20, 22 og 23 er kun med i ettertesten og vil derfor ikke ha noe resultat i oppsummeringen, etter førtesten. Oppgavene under denne misoppfatningen er ikke kategorisert.

Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken	3	10, 18, **20, 22**, 23

Tabell 25 Oppgaver til misoppfatning 3

Oppgave 10 (med forklaringsrute): Hva skal stå i den tomme ruta?

Elevsvar	Andel elevsvar
Riktig svar	11
2/1	12
2/3	6
2/2	1
Ubesvart	2

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\square}$$

Tabell 26 Resultat førtest oppgave 10, alle elever

Riktig svar i denne oppgaven er to firedeler. Under halvparten av elevene hadde svart riktig på oppgave 10. Disse elevene har forstått forholdet mellom teller og nevner og at når teller er halvparten av nevner, er det det samme som en halv. Litt over halvparten av elevene hadde svar som indikerte misoppfatning og de hadde svart to endeler eller to tredeler. Disse elevene passet på at differansen mellom teller og nevner var en, altså sorterer dette under *gap thinking*. En elev hadde annet feilsvar og svarte to todeler, noe som er vanskelig å forklare på annen måte enn at han ikke forstår likhetstegnet, i tillegg til at eleven ikke forstår at når teller og nevner er like, er det det samme som en hel. To elever har valgt å ikke besvare oppgaven.

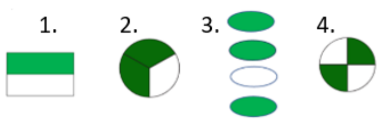
Oppgave 18 (med forklaringsrute): Skriv en brøk som har samme verdi som $\frac{4}{5}$.

Elevsvar	Andel elevsvar
8/10 (riktig svar)	3
5/4	8
7/8	6
2/3	1
4/5	3
1/8	1
Ubesvart	10

Tabell 27 Resultat førtest oppgave 18, alle elever

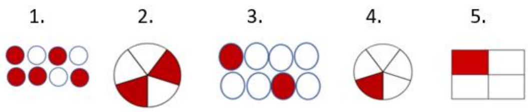
Riktig svar i denne oppgaven er brøker som er likeverdig med fire femdeler, for eksempel åtte tideler. Svært få av elevene hadde svart riktig på oppgave 18 og alle disse hadde svart åtte tideler. Disse elevene har forstått at man må dele opp brøkdelene i mindre, men like store deler og viser forståelse for likeverdige brøker. Nesten halvparten av elevene hadde svar som indikerte misoppfatning og de hadde svart med brøker som hadde én i differanse mellom teller og nevner. Disse svarene indikerer misoppfatning *differansen mellom teller og nevner angir størrelsen på brøken.* Fire elever hadde annet feilsvar og tre svarte fire femdeler, som er det samme som oppgavens utgangspunkt. En elev hadde svart en åttedel, noe som er vanskelig å forklare. Ti elever har valgt å ikke besvare oppgaven og en årsak til dette kan være at elevene ikke forstår at flere brøker kan ha samme verdi, altså likeverd.

Oppgave 20 (med forklaringsrute): Figurene nedenfor representerer ulike brøkverdier. Sett ring rundt de figurene som represent



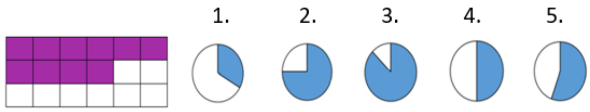
Oppgave 20 er kun med i ettertesten. Riktig svar i denne oppgaven er figur 1 og figur 4. Elevene som svarer riktig, viser at de har forstått at når teller er halvparten av nevner, er brøkene likeverdige. Disse elevene kan også visuelt se at om de flytter på delene i figur 4, utgjør de til sammen halve figuren. Denne oppgaven kan løses på flere måter ut fra misoppfatning. Dersom misoppfatning 2 ligger til grunn, har elevene satt ring rundt alle figurene som mangler en grønn.

Oppgave 22 (med forklaringsrute): Sett ring rundt figurene som representerer samme brøkverdi.



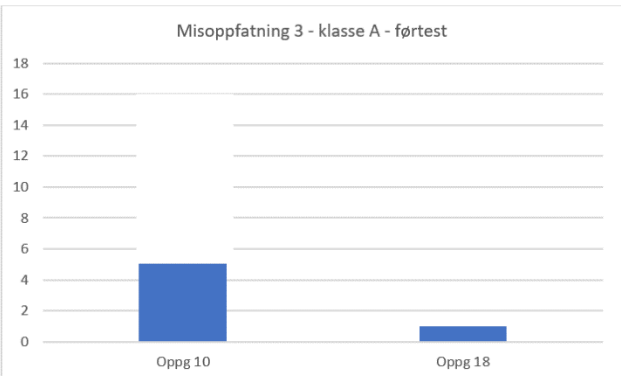
Oppgave 22 er kun med i ettertesten. Riktig svar i denne oppgaven er figur 3 og figur 5. Elevene som svarer riktig, viser at de har forstått at ved å gruppere sirklene i figur 3, slik at det blir fire like store grupper, har denne brøken samme verdi som figur 5, altså en firedel. Denne oppgaven kan løses på flere måter ut fra misoppfatning. Dersom misoppfatning 2 ligger til grunn, kan elevene ha satt ring rundt begge figurene som har en rød, eller de kan ha satt ring rundt de figurene som har tre hvite deler.

Oppgave 23 (med forklaringsrute): Hvilken av de fem sirklene representerer samme brøk som den i rektangelet? Sett ring rundt riktig sirkel.

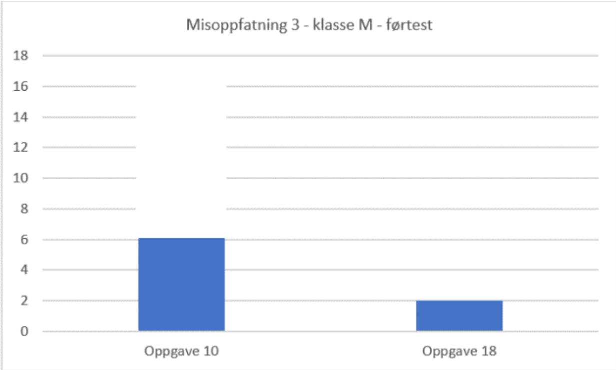


Oppgave 23 er kun med i ettertesten. Riktig svar i denne oppgaven er figur 5. Elevene som svarer riktig, har forstått at ti attendeler representerer litt over en halv og kan velge å eliminere bort de figurene det ikke kan være.

Figurene viser antall elever som har svart riktig på de ulike oppgavene på førtesten:



Figur 24 Misoppf 3 - kl A - førtest



Figur 25 Misoppf 3 - kl M - førtest

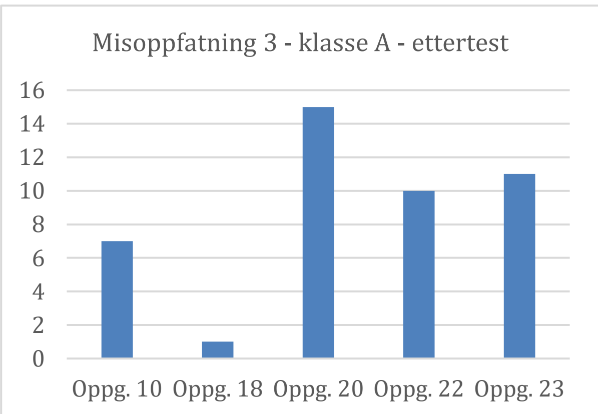
Førtest misoppfatning 3: Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken

Førtest	Avgitte svar	Klasse A	Klasse M
Oppgave 10	2/4	31 %	38 %
	1 i diff.	63 %	50 %
Oppgave 18	= 4/5	6 %	12 %

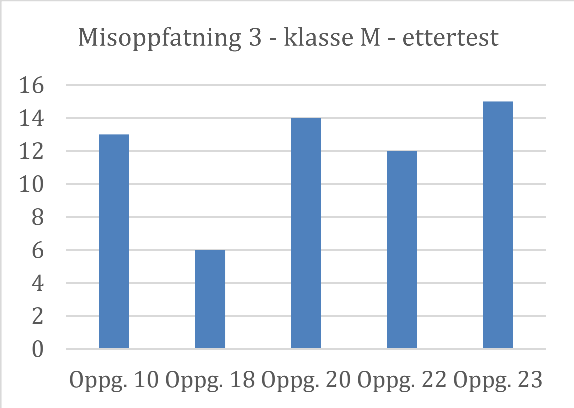
Tabell 28 Førtest misoppfatning 3 - andel riktige svar og svar som tyder på misoppfatning, angitt i prosent

Grønn farge viser oversikt over andel riktige svar, angitt i prosent, i de to klassene. Gul farge viser svar som tyder på misoppfatning, angitt i prosent. På denne type tabell vil ikke resultatene i den enkelte klasse, utgjøre 100 %. Hver klasse kan ha elever med andre feilsvar, eller elever som ikke har besvart oppgaven. Denne prosentandelen er ikke tatt med i tabellen.

Figurene under viser hvor mange elever som har riktig svar på de ulike oppgavene på ettertesten, fordelt på klassene.



Figur 26 Misoppf 3 - kl A - ettertest



Figur 27 Misoppf 3 - kl M - ettertest

Ettertest misoppfatning 3: Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken

Ettertest	Avgitte svar	Klasse A	Klasse B
Oppgave 10	2/4	44 %	81 %
	1 i diff.	31 %	19 %
Oppgave 18	= 4/5	6 %	38 %
	1 i diff.	50 %	44 %
Oppgave 20	Figur 1 og 4	94 %	88 %
	To andre fig.	6 %	12 %
Oppgave 22	Figur 3 og 5	63 %	81 %
	Figur 1 og 5	19 %	19 %
Oppgave 23	Figur 5	69 %	94 %
	Figur 2 el.3	25 %	6 %

Tabell 29 Ettertest misoppfatning 3 - andel riktige svar og svar som tyder på misoppfatning, angitt i prosent

Tabellene viser at klasse A - arealelevene har hatt lav og ingen utvikling på oppgave 10 og 18. Klasse M - mengdeelevene har hatt høy utvikling på oppgave 10, og noe mindre på oppgave 18. De tre siste oppgavene viser at klasse A skårer høyest på en av oppgavene og klasse M skårer høyest på to av oppgavene. Disse tre oppgavene viser høy skår på begge klassene.

Resultatet sortert etter misoppfatning 3, *differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken*, viser at klasse A har et gjennomsnitt på 0,38 antall riktige oppgaver, og klasse M har et gjennomsnitt på 0,5 antall riktige oppgaver på førtesten. Ettertesten viser at klasse A har et gjennomsnitt på 0,5 antall riktige oppgaver og klasse M har et gjennomsnitt på 1,19 antall riktige oppgaver.

Oversikt over klassenes gjennomsnittlige poengskår og endring fra før- til ettertest misoppfatning 3

Klasse	N	Gj.snitt førtest	Gj.snitt ettertest	Gj.snitt endringskår
A	16	0,38	0,5	0,12
M	16	0,50	1,19	0,69

Tabell 30 Oversikt over klassenes gjennomsnittlige poengskår fra før- til ettertest misoppfatning 3

Tabellen viser at klasse M - mengdeelevene har et høyere gjennomsnitt på førtesten, enn klasse A - arealelevene. Klasse M viser størst utvikling og et høyere gjennomsnitt enn klasse A på ettertesten også. Tabellen viser også gjennomsnittlig endringsskår for de to oppgavene som var med på både før- og ettertest.

4.1.4 Misoppfatning 4: Teller eller nevner som isolert tall

Elever som er i denne misoppfatningen vil se på brøk som to isolerte tall, og de velger å forholde seg til bare telleren eller bare nevneren. Skal man klare å avdekke denne misoppfatningen er det viktig at elevene får møte oppgaver med variert helhet.

Tabellen under viser oversikt over oppgaver tilknyttet misoppfatning 4. Oppgave 24, 25 og 26 er kun med i ettertesten og vil derfor ikke ha noe resultat i oppsummeringen etter førtesten.

Teller eller nevner som isolert tall	4	9, 15, 17, 24, 25, 26

Tabell 31 Oppgaver til misoppfatning 4

Kategorisering misoppfatning 4: Teller eller nevner som isolert tall

Vi har delt oppgavene under misoppfatning 4, teller eller nevner som isolert tall, i tre kategorier, hvor vi har sortert oppgavene etter utforming, fordi vi da får oversikt over hvilken handling som kreves av elevene. Samtlige kategorier har likedeling som grunnleggende mål. Kategori 1, visuell ulik inndeling, er mengdeoppgaver der et antall skal deles opp i en angitt brøkdel. Det som skiller kategori 2, fargelegge/skravere ut fra ferdig tegnet figur, fra kategori 1, er at i kategori 2 skal elevene fargelegge en angitt brøkdel i ferdig oppdelt figur. Den tredje kategorien, angitt brøkdel er ikke en stambrøk, er å finne en brøkdel som ikke er stambrøk.

Kategori 1 – Visuell ulik inndeling.

Oppgave 9 og 15 tester om elevene forstår at nevneren bestemmer antall deler helheten skal deles inn i. Forskjellen mellom disse oppgavene er antall deler totalt. Elever som svarer riktig på disse oppgavene, har forståelse for brøk som relativ størrelse. I oppgave 9 er utgangspunktet 12 brikker, og i oppgave 15 er utgangspunktet seks bokser.

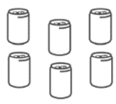
Oppgave 9: Tegn en ring rundt $\frac{1}{3}$ av brikkene

Elevsvar	Andel elevsvar
Ring rundt 4 brikker (riktig svar)	14
Ring rundt 3 brikker	7
Ring rundt 3 brikker, så en ring rundt en av de tre	6
Ring rundt 1 brikke	2
Ubesvart	3

Tabell 32 Resultat førtest oppgave 9, alle elever

Riktig svar i denne oppgaven er ring rundt fire av tolv brikker. Litt under halvparten av elevene hadde svart riktig på oppgave 9. Disse elevene forstår at de må gruppere 12 i like store grupper. Nesten halvparten av elevene hadde svar som indikerte misoppfatning og de hadde satt ring rundt en eller tre brikker eller ring rundt tre brikker med ring rundt en av de tre brikkene inni ringen. Disse elevene bruker tallet i telleren og/eller tallet i nevneren som indikasjon på antallet som skal ringes inn. Tre elever har valgt å ikke besvare oppgaven, noe som for eksempel kan skyldes at de ikke forstår å dele opp når de må dele en mengde og ikke et areal.

Oppgave 15: Tegn en ring rundt en tredel av boksene



Elevsvar	Andel elevsvar
Ring rundt to bokser (riktig svar)	13
Ring rundt 3 bokser	15
Ring rundt 1 boks	3
Ubesvart	1

Tabell 33 Resultat førtest oppgave 15, alle elever

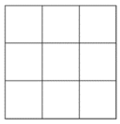
Riktig svar i denne oppgaven er ring rundt to av seks bokser. Litt under halvparten av elevene hadde svart riktig på oppgave 15. Disse elevene har forstått at man må dele seks i tre like store deler, gruppere i par. Over halvparten av elevene hadde svar som indikerte misoppfatning og de hadde satt ring rundt en eller tre bokser. Disse elevene bruker enten teller eller nevner som bestemmende for antall bokser. En elev har valgt å ikke besvare oppgaven.

Førtesten viser at under halvparten av elevene har svart riktig på oppgavene under kategori 1 – visuell ulik inndeling. Litt over halvparten av elevene hadde svar som indikerte misoppfatning.

Kategori 2 – Fargelegge/skravere ut fra ferdig tegnet figur.

I oppgave 17 og 25 skal elevene fargelegge/skravere oppgitt brøkdel av en ferdig oppdelt figur. Forskjellen mellom disse oppgavene er at i oppgave 17 tilsier oppgitt brøk at hele figuren skal fargelegges, mens i oppgave 25 tilsier brøken at en firedel av figuren skal fargelegges (oppgave 25 finnes kun i ettertesten).

Oppgave 17: Sett kryss i $\frac{3}{3}$ av rutene

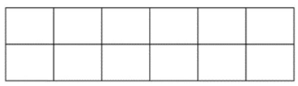


Elevsvar	Andel elevsvar
Kryss i alle rutene (riktig svar)	10
Kryss i 3 ruter	22

Tabell 34 Resultat førtest oppgave 17, alle elever

Riktig svar i denne oppgaven er kryss i ni ruter. Under halvparten av elevene hadde svart riktig på oppgave 17. Disse elevene har forstått at når teller og nevner er like store, er dette hele helheten og de kan også ha gruppert rutene i tre like store deler. De fleste hadde svar som indikerte misoppfatning og de hadde satt kryss i tre ruter. Disse elevene kan ha sett på tallet i teller eller nevner og brukt dette som indikator for antall ruter. Førtesten på oppgave 17 viser at få elever har riktig svar på denne.

Oppgave 25: Skravér eller fargelegg $\frac{1}{4}$ av rutene nedenfor.

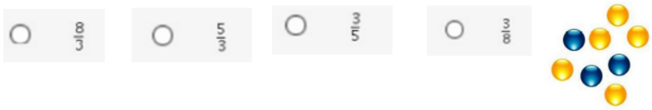


Oppgave 25 er kun med i ettertesten. Elevene som svarer riktig på denne oppgaven har forstått at tre ruter er tolv ruter delt i tre like store deler. Dersom elever krysser i fire ruter tyder det på at de forholder seg til størrelsen på nevneren, og elever som krysser i én rute forholder seg til størrelsen på telleren. Disse elevene kan være i misoppfatning og ser på teller og nevner som isolerte tall.

Kategori 3 – Angitt brøkdel er ikke en stambrøk.

Oppgave 24 og 26 tester om elevene forstår at det totale antallet er helheten av figuren. I tillegg tester de om elevene forstår at telleren angir antall brøkdeler når dette er mer enn én. Forskjellen mellom disse oppgavene er at oppgave 24 har bilde av en figur, med 3 blå og 5 gule klinkekuler, og denne er en flervalgsoppgave, mens oppgave 26 er en ren tekstoppgave. Disse oppgavene var ikke med i førtesten.

Oppgave 24: Jens har tre blå og fem gule klinkekuler. Hvor stor brøkdel av klinkekulene er blå?

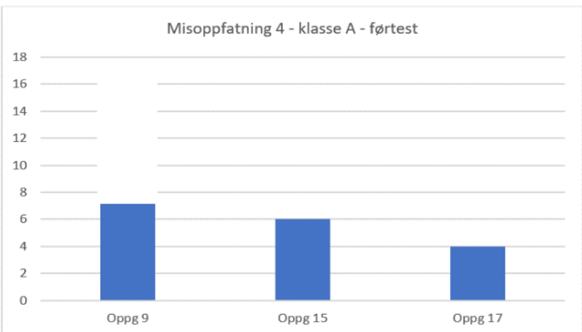


Oppgave 24 er kun med i ettertesten. Elevene som svarer riktig på denne oppgaven har forstått at de har en helhet på åtte klinkekuler og at de tre blå klinkekulene er tre deler av helheten på åtte deler. Elever som krysser på tre femdeler eller krysser på fem tredeler, kan se på teller og nevner som to isolerte tall og dette tyder på at de er i misoppfatning. Dersom elever krysser for åtte tredeler, kan dette indikere at de ikke har forståelse for hva teller og nevner står for.

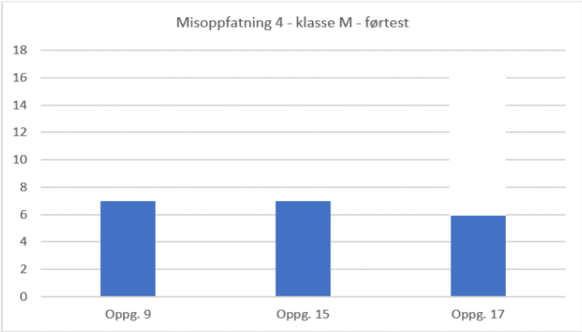
Oppgave 26 (med forklaringsrute): I klasse 5B er det 18 elever, $\frac{2}{3}$ spiller fotball. Hvor mange elever spiller fotball?

Oppgave 26 er kun med i ettertesten. Elevene som svarer riktig på denne oppgaven har forstått at man må gruppere helheten i tre like store grupper og ta antallet i to av disse gruppene for å finne antall fotballspillere i klassen. Elever som svarer ni spillere, kan ha delt antallet i klassen på teller, mens de som har svart seks spillere kan ha delt antallet i klassen på nevner. Disse elevene kan være i misoppfatning, og se på teller og nevner som isolerte tall.

Figurene viser antall elever som har svart riktig på de ulike oppgavene på førtesten:



Figur 28 Misoppf 4 - kl A - førstest



Figur 29 Misoppf 4 - kl M - førtest

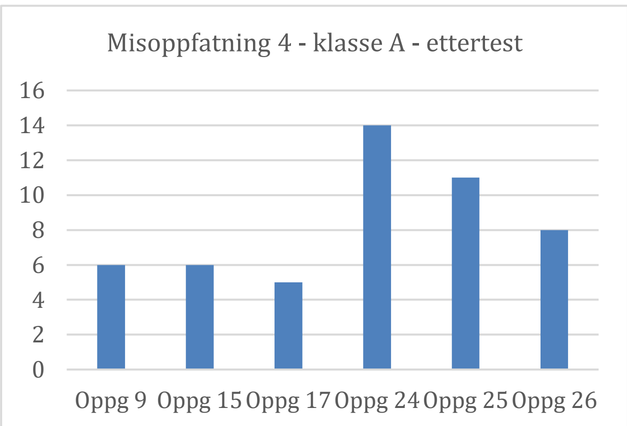
Førtest misoppfatning 4: Teller eller nevner som isolert tall

Førtest	Avgitte svar	Klasse A	Klasse M
Oppgave 9	4 brikker	44 %	44 %
	1 el. 3	50 %	44 %
Oppgave 15	2 bokser	38 %	44 %
	1 el. 3	63 %	50 %
Oppgave 17	9 ruter	25 %	38 %
	3 ruter	75 %	63 %

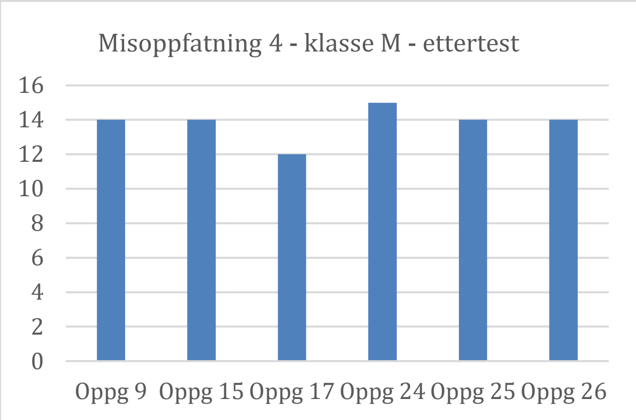
Tabell 35 Førtest misoppfatning 4 - andel riktige svar og svar som tyder på misoppfatning, angitt i prosent

Grønn farge viser oversikt over andel riktige svar, angitt i prosent, i de to klassene. Gul farge viser svar som tyder på misoppfatning, angitt i prosent. På denne type tabell vil ikke resultatene i den enkelte klasse, utgjøre 100 %. Hver klasse kan ha elever med andre feilsvar, eller elever som ikke har besvart oppgaven. Denne prosentandelen er ikke tatt med i tabellen.

Figurene viser antall elever som har svart riktig på de ulike oppgavene på ettertesten:



Figur 30 Misoppf 4 - kl A - ettertest



Figur 31 Misoppf 4 - kl M - ettertest

Ettertest misoppfatning 4: Teller eller nevner som isolert tall

Ettertest	Avgitte svar	Klasse A	Klasse M
Oppgave 9	4 brikker	38 %	88 %
	1 el. 3	56 %	12 %
Oppgave 15	2 bokser	38 %	88 %
	1 el. 3	63 %	12 %
Oppgave 17	9 ruter	31 %	75 %
	3 ruter	63 %	25 %
Oppgave 24	3/8	88 %	94 %
	3/5	12 %	6 %
Oppgave 25	1/4	69 %	88 %
	1 e. 4	25 %	12 %
Oppgave 26	12 elever	50 %	88 %
	6 el. 9	44 %	12 %

Tabell 36 Ettertest misoppfatning 4 - andel riktige svar og svar som tyder på misoppfatning, angitt i prosent

Tabellen viser at klasse A - arealelevene har nedgang i oppgave 9, uendret i oppgave 15 og økt med en riktig besvarelse i oppgave 17. Klasse A har høyere skår på de tre siste oppgavene, hvor oppgave 24 har høyest skår. Klasse M - mengdeelevene har betydelig økning på oppgavene 9, 15 og 17, hvor de fleste elevene svarte riktig. I tillegg har klasse M høy skår på oppgave 24, 25 og 26, også her svarte de fleste elevene riktig. Når vi sammenligner tallene i tabellene ser vi at utviklingen har vært markant høyere i klasse M, enn i klasse A.

Resultatet sortert etter misoppfatning 4, *teller og nevner er et isolert tall*, viser at klasse A har et gjennomsnitt på 1,06 antall riktige oppgaver og klasse M har et gjennomsnitt på 1,25 antall riktige oppgaver på førtesten. Ettertesten viser at klasse A har et gjennomsnitt på 1,06 antall riktige oppgaver og klasse M har et gjennomsnitt på 2,5 antall riktige oppgaver.

Oversikt over klassenes gjennomsnittlige poengskår og endring fra før- til ettertest misoppfatning 4

Klasse	N	Gj.snitt førtest	Gj.snitt ettertest	Gj.snitt endringskår
A	16	1,06	1,06	0
M	16	1,25	2,5	1,25

Tabell 37 Oversikt over klassenes gjennomsnittlige poengskår fra før- til ettertest misoppfatning 4

Tabellen viser at klasse M - mengdeelevene har et høyere gjennomsnitt på førtesten, enn klasse A - arealelevene. Klasse M viser størst utvikling og et høyere gjennomsnitt enn klasse A på ettertesten også. I tillegg viser tabellen at klasse A ikke har hatt utvikling innen denne misoppfatningen. Tabellen viser også gjennomsnittlig endringsskår for de tre oppgavene som var med på både før- og ettertest.

4.1.5 Misoppfatning 5: Andre misoppfatninger

- Oppgave 6 – tester om elevene klarer å angi en brøk mellom to brøker
- Oppgave 14 – tester om elevene tar hensyn til helheten
- Oppgave 16 – tester om elevene skjønner likedeling og likeverdige brøker

Ulike misoppfatninger	5	6, 14, 16

Tabell 38 Oppgaver til misoppfatning 5

I denne studien vil ikke disse misoppfatningene bli utdypet ytterligere. Oppgavene var med fordi vi ville se om de ga utslag mellom de to klassene, når vi sammenlignet det totale resultatet. Oppgavene under denne misoppfatningen er ikke kategorisert.

Oppgave 6 (med forklaringsrute): Skriv en brøk som har en verdi mellom $\frac{1}{3}$ og $\frac{2}{3}$.

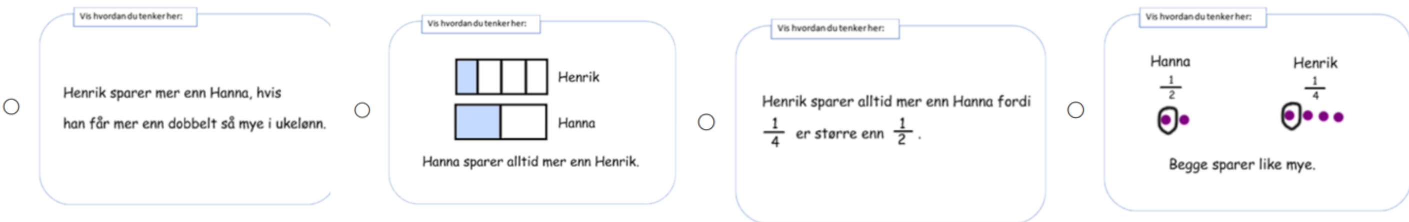
Elevsvar	Andel elevsvar
Riktig svar, en brøk mellom 1/3 og 2/3	12
Det finnes ingen brøk mellom disse to	6
1/4	4
1/5	3
2/2	1
3/3	1
1,5/3	1
Ubesvart	4

Tabell 39 Resultat førtest oppgave 6, alle elever

Riktig svar i denne oppgaven er alle brøker mellom en tredel og to tredeler. Under halvparten av elevene hadde svart riktig på oppgave 6 og alle disse hadde svart en halv. Disse elevene har skjønt at en tredel er mindre enn en halv og at to tredeler er større enn en halv. Noen få av elevene hadde svar som indikerte misoppfatning og de hadde svart en firedel eller en femdel. Disse elevene kan ha tenkt at når telleren fortsatt er én og nevneren øker, vil det være mer enn én tredel, men mindre enn to tredeler. Nesten halvparten av elevene hadde andre feilsvar. Seks av disse elevene hadde svart at det ikke finnes noen brøk mellom en tredel og to tredeler, og disse har ikke greid å se at brøker med ulik nevner kan ses i sammenheng. De resterende feilsvarene, to todeler og tre tredeler, er vanskelig å forklare. Fire elever har valgt å ikke besvare oppgaven, noe som kan indikere at de mener oppgaven ikke er mulig, fordi det ikke finnes noen brøk mellom en tredel og to tredeler.

Oppgave 14 (med forklaringsrute): Henrik og Hanna får ukepenger. Henrik sparer $\frac{1}{4}$ av pengene sine, mens Hanna sparer $\frac{1}{2}$ av pengene sine. Fire elever blir spurt om Henrik kan spare mer penger enn Hanna. Hvilken forklaring er riktig?

a) **b)** **c)** **d)**



Elevsvar	Andel elevsvar
Alternativ A (riktig svar)	6
Alternativ B	15
Alternativ C	3
Alternativ D	8

Tabell 40 Resultat førtest oppgave 14, alle elever

Riktig svar i denne oppgaven er alternativ a) Henrik sparer mer enn Hanna, hvis han får mer enn dobbelt så mye i ukelønn. Noen få av elevene hadde svart riktig på oppgave 14. Disse elevene har skjønt at brøk er en relativ størrelse, og at brøkdelen er avhengig av helheten. Nesten halvparten av elevene hadde svart alternativ b) Hanna sparer alltid mer enn Henrik. Disse elevene har ikke skjønt brøk som relativ størrelse og kan ha tenkt at en halv alltid er mer enn en firedel, ut fra bildet. Noen få hadde svart alternativ c) Henrik sparer alltid mer enn

Hanna, fordi en firedel er større enn en todel. Disse elevene kan ha tenkt at den største nevneren er den største brøken. Resten av elevene hadde svart alternativ d) begge sparer like mye. Disse elevene kan ha tenkt at siden telleren er lik har de spart like mye. Alle feilalternativene tyder på misoppfatning. Ingen elever har valgt å ikke besvare oppgaven. På grunn av oppgavens vanskegrad kan det tenkes at samtlige besvarte fordi det er en avkrysningsoppgave.

Oppgave 16 (har forklaringsrute): Knut deler et eple i to. Deretter deler han den ene halvdelen i to. Både a og b må være riktig besvart, for å få poeng.

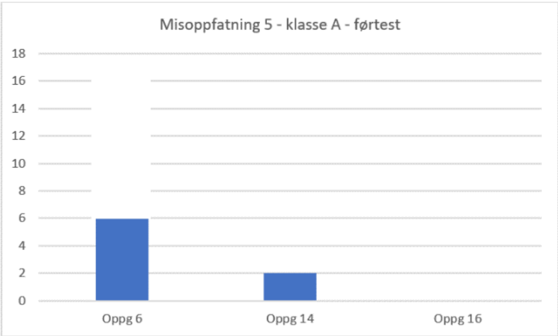
a) **Hvor mange eplebiter har Knut nå?**
b) **Hvor stor del av hele eplet er en av de minste eplebitene?**

Elevsvar	Andel elevsvar
Riktig svar	3
3 og 1/3	11
3 og 1/2	3
3 og 2/3	2
4 og 2/4	2
4 og 2	1
4 og 1/4	1
3 og 3/2	1
6 og 1/6	1
1/3 og 2/3	1
3/4 og 2/4	1
3/3 og 2/2	1
3 og ubesvart	1
Ubesvart	3

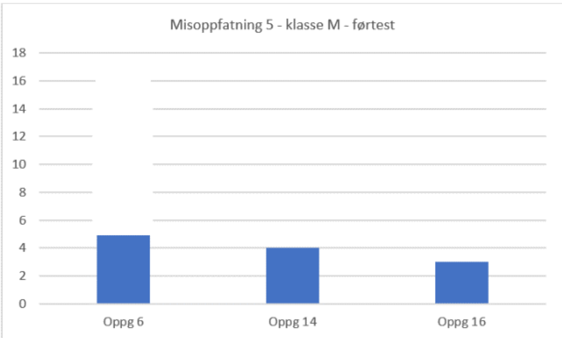
Tabell 41 Resultat førtest oppgave 16, alle elever

Riktig svar i denne oppgaven er a) tre og b) en firedel. Noen få av elevene hadde svart riktig på oppgave 16. Disse elevene har skjønt at eplet ble delt i tre deler, og at delene må være like store for å bestemme brøkdelen. Under halvparten av elevene hadde svar som indikerte misoppfatning og de hadde svart a) tre og b) en tredel. Disse elevene har riktig svar på a), men har ikke skjønt at delene må være like store for å bestemme brøkdelen. Nesten halvparten av elevene hadde andre feilsvar, disse vekslet mellom tre hele og fire hele, med ulike brøkdeler på b). Flere av disse er vanskelig å forklare. Tre elever har valgt å ikke besvare oppgaven. Disse elevene kan ha syntes det var vanskelig når oppgaven var todelt, og de måtte ha med seg antall deler til oppgave b, også.

Figurene viser antall elever som har svart riktig på de ulike oppgavene på førtesten:



Figur 32 Misoppf 5 - kl A - førtest



Figur 33 Misoppf 5 - kl M - førtest

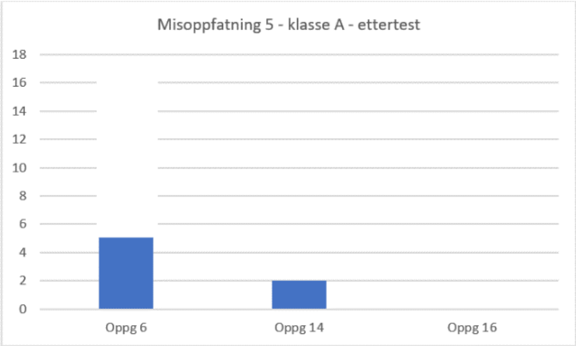
Førtest misoppfatning 5: Andre misoppfatninger

Førtest	Avgitte svar	Klasse A	Klasse M
Oppgave 6	Mellom 1/3 og 2/3	38 %	31 %
		25 %	0
Oppgave 14	A	12 %	25 %
		38 %	50 %
Oppgave 16	A=3 B=1/4	0	19 %
		31 %	38 %

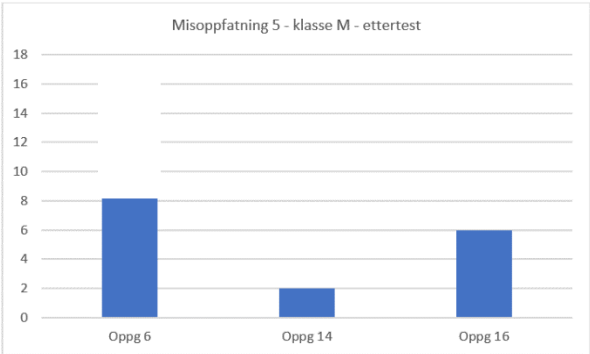
Tabell 42 Førtest misoppfatning 5 - andel riktige svar og svar som tyder på misoppfatning, angitt i prosent

Grønn farge viser oversikt over andel riktige svar, angitt i prosent, i de to klassene. Gul farge viser svar som tyder på misoppfatning, angitt i prosent. På denne type tabell vil ikke resultatene i den enkelte klasse, utgjøre 100 %. Hver klasse kan ha elever med andre feilsvar, eller elever som ikke har besvart oppgaven. Denne prosentandelen er ikke tatt med i tabellen.

Figurene viser antall elever som har svart riktig på de ulike oppgavene på ettertesten:



Figur 34 Misoppf 5 - kl A - ettertest



Figur 35 Misoppf 5 - kl M - ettertest

Ettertest misoppfatning 5: Andre misoppfatninger

Ettertest	Avgitte svar	Klasse A	Klasse M
Oppgave 6	Mellom 1/3 og 2/3	31 %	50 %
		25 %	6 %
Oppgave 14	A	12 %	12 %
		56 %	75 %
Oppgave 16	A=3 B=1/4	6 %	38 %
		6 %	19 %

Tabell 43 Ettertest misoppfatning 5 - andel riktige svar og svar som tyder på misoppfatning, angitt i prosent

Tabellen viser at klasse A - arealelevene har hatt nedgang på oppgave 6, uendret på oppgave 14 og økning med en riktig besvarelse på oppgave 16 (på førtesten hadde ingen elever riktig svar på denne oppgaven, og ettertesten viser at en elev har riktig svar). Klasse M - mengdeelevene, har økning med tre elever både på oppgave 6 og 16 og nedgang med to elever på oppgave 14.

Resultatet sortert etter misoppfatning 5, viser at klasse A har et gjennomsnitt på 0,5 antall riktige oppgaver og klasse M har et gjennomsnitt på 0,75 antall riktige oppgaver på førtesten.

Ettertesten viser at klasse A har et gjennomsnitt på 0,5 antall riktige oppgaver og klasse M har et gjennomsnitt på 1 antall riktige oppgaver.

Oversikt over klassenes gjennomsnittlige poengskår og endring fra før- til ettertest misoppfatning 5

Klasse	N	Gj.snitt førtest	Gj.snitt ettertest	Gj.snitt endringskår
A	16	0,50	0,50	0
M	16	0,75	1,00	0,25

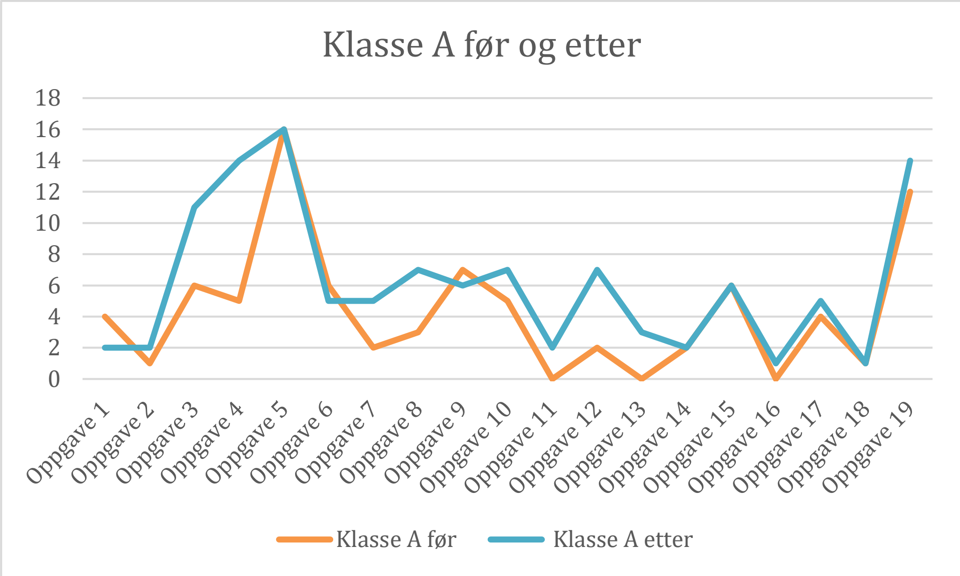
Tabell 44 Oversikt over klassenes gjennomsnittlige poengskår fra før- til ettertest misoppfatning 5

Tabellen viser at klasse M - mengdeelevene har et høyere gjennomsnitt på førtesten, enn klasse A. Klasse M viser størst utvikling og et høyere gjennomsnitt enn klasse A - arealelevene på ettertesten også. I tillegg viser tabellen at klasse A ikke har hatt utvikling innen denne misoppfatningen. Tabellen viser også gjennomsnittlig endringsskår for de to klassene.

4.2 Ettertest

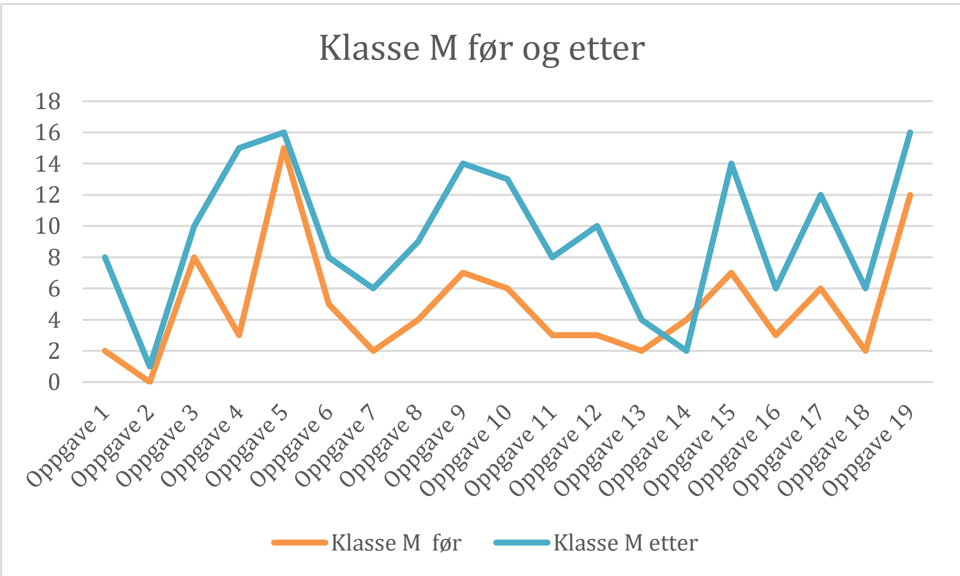
Hensikten med førtesten var å få en oversikt over elevenes utgangspunkt, og hører til under det Cohen et al., (2018) omtaler som *domain-referenced tests*, fordi elevene testes i det *spesifikke innholdet* brøk som del av en helhet. En ettertest, etter endt undervisning (*summativ test)*, vil vise hva undervisningen har tilført elevene, og som igjen betyr at vi søker en pragmatisk tilnærming til problemet.

Diagrammene som følger viser sluttpunktet etter endt undervisning, altså elevenes ståsted i øyeblikket (Cohen et al., 2018), for hver av de to klassene.



Figur 36 Linjediagram før- og ettertest 1 - 19 - kl A

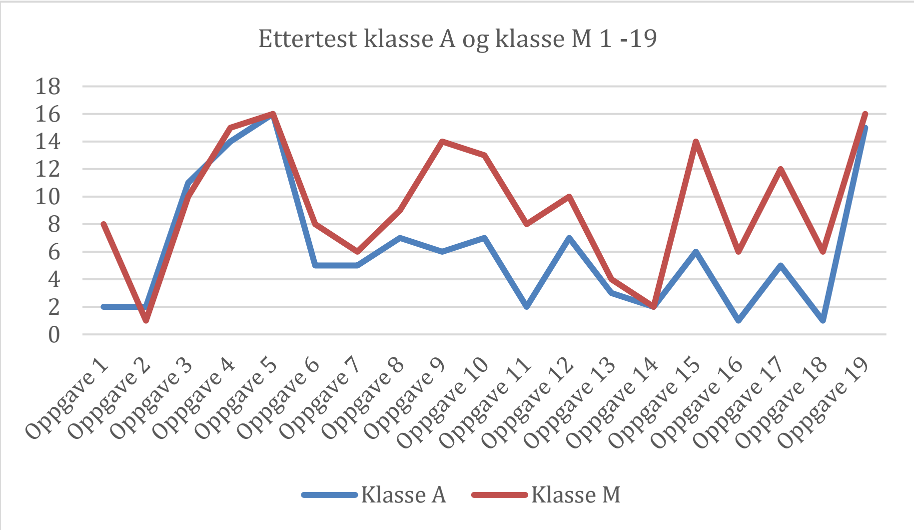
Diagrammet viser utvikling fra før- til ettertest, etter gjennomført undervisningsperiode i klasse A - arealelevene, hvor innfallsvinkelen har vært arealoppgaver. Oppgave 1, 6 og 9 viser nedgang i antall riktige besvarelser. Disse oppgavene tilhører tre ulike misoppfatning, misoppfatning 1, 4 og 5. Størst fremgang viser oppgave 3, 4 og 12. Disse oppgavene tilhører to ulike misoppfatninger, misoppfatning 1 og 2. Oppgave 5 og 19 viser høy skår både på før- og ettertesten. De resterende oppgavene viser liten eller ingen utvikling fra før- til ettertest.



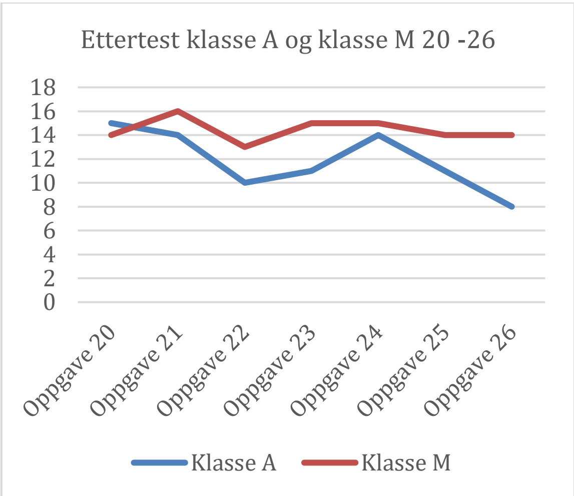
Figur 37 Linjediagram før- og ettertest 1 - 19 - kl M

Diagrammet viser utvikling fra før- til ettertest, etter gjennomført undervisningsperiode i klasse M - mengdeelevene, hvor innfallsvinkelen har vært mengdeoppgaver. Oppgave 14 viser nedgang i antall riktige besvarelser. Denne oppgaven tilhører misoppfatning 5. Diagrammet viser utvikling på samtlige av de resterende oppgavene. Størst fremgang viser oppgave 1, 4, 8, 9, 12, 15 og 17. Disse oppgavene tilhører tre ulike misoppfatninger, misoppfatning 1, 2 og 4. Oppgave 5 og 19 viser høy skår både på før- og ettertesten.

Diagrammet viser resultatet for begge klassene på ettertesten, sett opp mot hverandre.



Figur 38 Linjediagram ettertest 1- 19 - kl A og kl M



Figur 39 Linjediagram ettertest 20 - 26 - kl A og kl M

Diagrammet viser stor forskjell mellom de to klassene på oppgave 1, 9, 10, 11, 15, 17 og 26, til fordel klasse M - mengdeelevene. Disse oppgavene fordeler seg med en oppgave på hver av misoppfatningene 1, 2 og 3, og fire av oppgavene tilhører misoppfatning 4.

Oppgave 1, tilhørende misoppfatning 1, er en arealoppgave. Her ser vi at klasse A - arealelevene har hatt nedgang og klasse M har hatt betydelig økning. Oppgave 9, tilhørende misoppfatning 4, er en mengdeoppgave. Også i denne oppgave har klasse A har hatt nedgang og klasse M har hatt betydelig økning. Oppgave 10, tilhørende misoppfatning 3, tester om elevene forstår likeverdige brøker. Her ser vi at klasse A har en liten økning, kontra klasse M som har betydelig økning. Oppgave 11, tilhørende misoppfatning 2, tester om elevene forstår å dele inn en tredel i mindre deler. På denne oppgaven ser vi at klasse A har en liten økning, mens klasse M har betydelig økning. Oppgave 15, tilhørende misoppfatning 4, er en mengdeoppgave, og viser ingen økning i klasse A, mens klasse M har betydelig økning. Oppgave 17, tilhørende misoppfatning 4, er også en mengdeoppgave og viser at klasse A har kun økning med en riktig besvarelse, og klasse M har betydelig økning også her. Oppgave 26, tilhørende misoppfatning 4, er en mengdeoppgave. I klasse A har halvparten av elevene svart riktig, mens i klasse M har nesten alle riktig svar.

Oversikt over klassenes gjennomsnittlige poengskår og endring fra før- til ettertest oppg 1 - 19

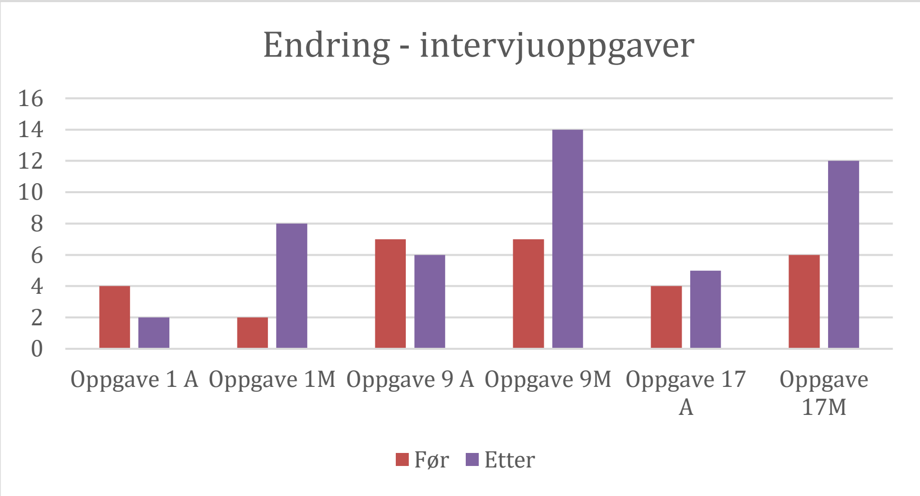
Klasse	N	Gj.snitt førtest	Gj.snitt ettertest	Gj.snitt endringskår
A	16	5,13	7,25	2,12
M	16	5,88	11,13	5,25

Tabell 45 Oversikt over klassenes gjennomsnittlige poengskår fra før- til ettertest oppgave 1 - 19

Tabellen viser gjennomsnittlig endringsskår for begge klassene. Oppgavene 20 - 26 er ikke med i denne tabellen, siden de ikke var med i førtesten. Klasse M - mengdeelevene har et høyere gjennomsnitt på førtesten, enn klasse A - arealelevene, det skiller 0,75 antall riktige oppgaver. Klasse M viser størst utvikling og et betydelig høyere gjennomsnitt enn klasse A på ettertesten, det skiller 3,88 antall riktige oppgaver. Tabellen viser gjennomsnittlig endringsskår for de to klassene, hvor klasse A økte med 2,12 antall riktige besvarelser og klasse M økte med 5,25 antall riktige besvarelser.

4.3 Intervju

Oppgavene til intervjuprosessen ble valgt ut fordi de viste tydelig forskjell i utvikling av forståelse hos elevene i de to klassene. Vi intervjuet fire elever og elevene ble plukket ut på bakgrunn av at de hadde feil på førtesten på de utvalgte oppgavene. To av elevene hadde også feil på ettertesten, mens de to andre hadde svart riktig på ettertesten. Hensikten med intervju av enkeltelever var å få dybdekunnskap i elevenes tanker i prosessen, sett i forhold til vår problemstilling. Dette stemmer godt med det konstruktivistiske verdenssynet hvor intervju med åpne spørsmål er en egnet metode (Cresswell, 2014). Ifølge Gleiss og Sæther (2021) kan man bruke intervju for å utdype tester.



Figur 40 Stolpediagram endring intervjuoppgaver

Det totale resultatet for klasse A - arealelevene viser økning på en av oppgavene (oppgave 17), og nedgang på to av oppgavene (oppgave 1 og 9), fra før- til ettertest. Klasse M - mengdeelevene hadde økning på alle tre oppgavene.

Videre i oppgaven utdyper vi funn fra analysedelen, vi vil se på utvikling av de to klassene, fra før- til ettertesten. For enkelthetsskyld har vi valgt å benytte begrepene *arealelevene* og *mengdeelevene* for å identifisere de to ulike klassene. *Arealelevene* tilsvarer klasse A i datamaterialet og er de elevene som hadde arealmodellen som innfallsvinkel. *Mengdeelevene* tilsvarer klasse M i datamaterialet og er de elevene som hadde mengdemodellen som innfallsvinkel.

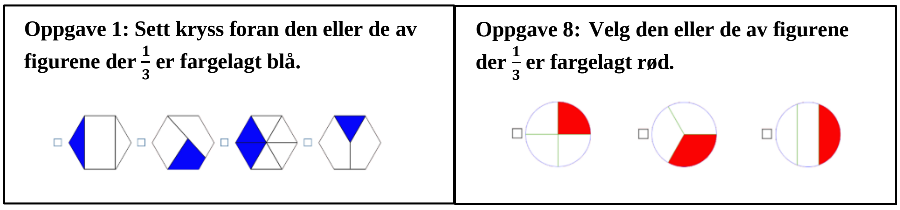
4.4 Utvikling av arealelevene fra før- til ettertest

4.4.1 Misoppfatning 1: Nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse

Resultatet på førtesten viste at arealelevene hadde lav skår på fire av fem oppgaver. Vi fant positiv utvikling på fire av oppgavene fra før- til ettertesten, men den gjennomsnittlige endringskåren viste en økning fra 1,63 riktige oppgaver på førtesten til 2,13 riktige oppgaver på ettertesten. Den lave endringskåren henger sammen med at tre av oppgavene viste svak økning i riktige elevsvar, og oppgave 1 utpekte seg spesielt fordi denne oppgaven viste nedgang fra fire til to riktige besvarelser. Resultatet på misoppfatning 1 kan tyde på at undervisningen ikke har ført elevene ut av misoppfatning. Mulig begrunnelser kan være at undervisningsopplegget hadde hatt for ensidig fokus på fargelegging og avlesning av fargelagte brøkdeler.

Oppgaver misoppfatning 1

Kategori 1 – visuell ulik inndeling.



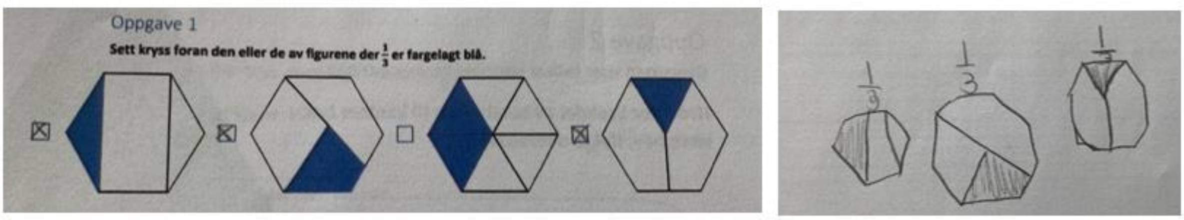
Figur 41 Oppgave 1 og oppgave 8

Oppgave 1 og 8 tester om elevene tar hensyn til at delene skal være like store i allerede ferdig oppdelte figurer. Forskjellen mellom disse oppgavene er at i oppgave 1 har ingen av figurene noe felles i oppdelingen, med unntak av figur tre som er den riktige. I oppgave 8 er to av figurene delt med utgangspunkt i sentrum, mens den siste er delt med to parallelle linjer, hvor bredden er lik i alle tre delene.

Det svake resultatet på ettertesten, med en nedgang fra fire til to riktige besvarelser på oppgave 1, kan tyde på at undervisningen ikke har tilført elevene forståelse for likedeling.

Resultatet på ettertesten viste at 13 arealelever var i misoppfatning *nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelsen.* Sju av arealelevene hadde krysset for figur 1, 2 og 4, mens fem av arealelevene hadde krysset på bare en av de tre nevnte figurene. Disse besvarelsene kan også være tegn på at elevene ikke forstår likedeling. Noen elever kan i tillegg ha lest oppgaven for dårlig og ikke forstått at de kunne krysse av for flere av figurene. På bakgrunn av resultatene på oppgavene, valgte vi ut oppgave 1 som en av våre intervjuoppgaver.

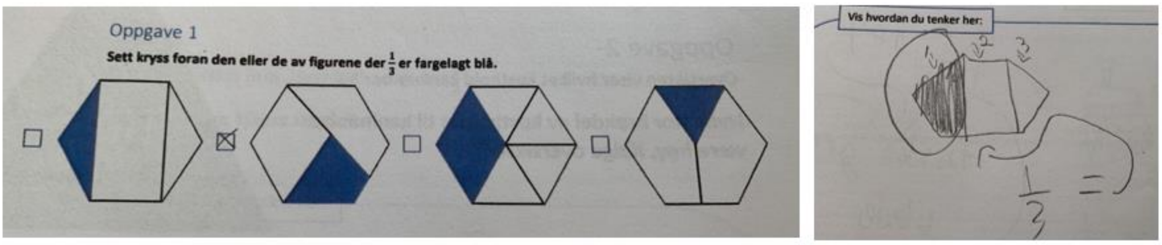
Intervjuobjekt 1 – arealelev – oppgave 1



Figur 42 Intervjuobjekt 1 - arealelev - oppgave 1

Elevens forklaring til oppgaven var at han telte delene i hver av figurene, og sa 1-2-3 og en er fargelagt. Han viste det samme på alle figurene han hadde krysset på. Dette underbygger at eleven er i misoppfatning 1. Denne eleven har ikke utviklet en god nok forståelse for at alle delene må være like store og det er behov for ny forståelse. Piaget (referert i Lyngsnes & Rismark, 2014) sier at dette kalles akkomodasjon og det er i dette steget misoppfatninger kan fremkomme.

Intervjuobjekt 2 – arealelev – oppgave 1



Figur 43 Intervjuobjekt 2 - arealelev - oppgave 1

Elevens forklaring til oppgaven var at hun krysset på figur nummer 2, og at denne oppgaven var vanskelig fordi ingen av de tre delene var like store. Eleven blir usikker og sier at det er sånn det må bli. Hun sier deretter at det er urettferdig om det ikke er likt og endrer sin forklaring til at det er figur 3 som er den riktige figuren. Hun forklarer endringen med at dersom man samler delene to og to, vil en tredel være blå. Gjennom intervjuprosessen ble eleven sin forståelse utfordret og eleven tilpasset ny kunnskap til allerede lært og forstått kunnskap, ifølge Piaget (referert i Lyngsnes og Rismark, 2014) omtales dette som assimilert kunnskap.

Oppgave 8 viser en økning fra tre til sju riktige besvarelser fra før- til ettertesten. Ettertesten viser fortsatt at mange elever er i misoppfatning, og alle disse eleven hadde krysset av for at figur 2 og figur 3 var riktig svar.

Arealelevene	Førtest	Ettertest	Økning/nedgang
Oppgave 1	25 %	12 %	-13 %
Oppgave 8	19 %	44 %	25 %

Tabell 46 Utvikling av forståelse arealelever, kategori 1, misoppfatning 1

Kategori 2 – Dele/tegne ut fra ferdig oppgitt brøk.

Oppgave 5: Fargelegg tre firedeler ($\frac{3}{4}$) av denne figuren. 	**Oppgave 21: Tegn en figur der $\frac{1}{4}$ er fargelagt.**

Figur 44 Oppgave 5 og oppgave 21

Oppgave 5 og 21 tester om elevene kan dele figuren i riktig antall deler og fargelegge oppgitt brøkdel. Forskjellen mellom disse oppgavene er at i oppgave 5 er figuren innrammet som et rektangel og i oppgave 21 må elevene tegne figuren selv (oppgave 21 finnes kun i ettertesten).

Begge oppgavene under denne kategorien viser høy skår hos arealelevene. Arealelevene har gjennomgående jobbet med denne type oppgaver i undervisningsperioden, noe som kan ha hatt betydning for resultatet. Det kan, i tillegg, ha betydning for forståelsen at de tegner selv og må tenke nøye gjennom hvordan de vil presentere figuren.

Arealelevene	Førtest	Ettertest	Økning/nedgang
Oppgave 5	100 %	100 %	0
Oppgave 21		88 %	

Tabell 47 Utvikling av forståelse arealelever, kategori 2, misoppfatning 1

Kategori 3 – Angi brøkdel av oppdelt figur.

Oppgave 2: Hvor stor brøkdel av kostholdet til kaniner bør være høy, ifølge oversikten? 	**Oppgave 12: Hvor stor brøkdel av flagget til Ecuador er rødt?** 

Figur 45 Oppgave 2 og oppgave 12

Oppgave 2 og 12 tester om elevene har kontroll på likedeling av en figur. Forskjellen mellom disse oppgavene er at oppgave 2 er en trekant og oppgave 12 er et rektangel.

Oppgave 2 viser lav skår både på før- og ettertesten. Resultatet kan indikerer at dette er en oppgavetype elevene er uvant med og at undervisningen ikke har ført frem. Undervisningen bygger på oppgaver hvor elevene arbeider med sirkler og rektangler hvor delene som oftest er likt inndelt.

Arealelevene	Førtest	Ettertest	Økning/nedgang
Oppgave 2	6 %	12 %	6 %
Oppgave 12	12 %	44 %	32 %

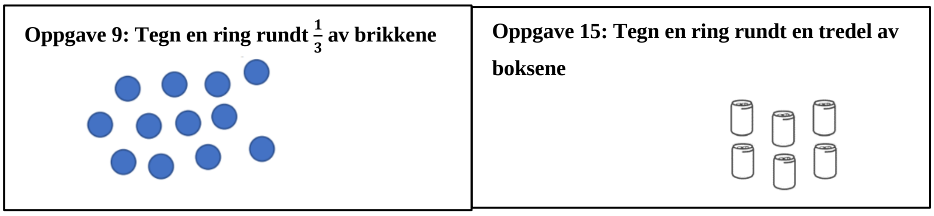
Tabell 48 Utvikling av forståelse arealelever, kategori 3, misoppfatning 1

4.4.2 Misoppfatning 4: Teller eller nevner som isolert tall

Resultatet på førtesten viste at arealelevene hadde lav skår på en (oppgave 17) av tre oppgaver, hvor bare fire hadde riktig besvarelse. På oppgave 9 og oppgave 15 hadde henholdsvis sju og seks av arealelevene riktig besvarelse. Ettertesten viste at arealelevene hadde nedgang på oppgave 9 med én riktig besvarelse, ingen utvikling på oppgave 15 og økning med én riktig besvarelse på oppgave 17. Den gjennomsnittlige endringskåren på disse oppgavene viste ingen økning. Videre viste de tre oppgavene som kun var på ettertesten, et noe bedre resultat. Oppgave 26 viste lavest skår, hvor halvparten av arealelevene hadde riktig besvarelse.

4.4.3 Oppgaver misoppfatning 4

Kategori 1 – visuell ulik inndeling.



Figur 46 Oppgave 9 og oppgave 15

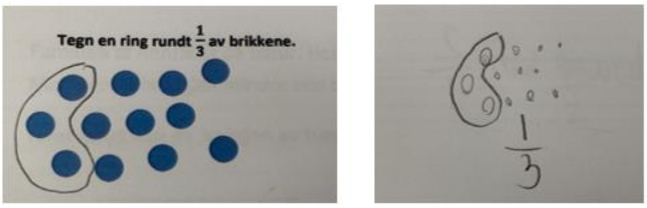
Oppgave 9 og 15 tester om elevene forstår at nevneren bestemmer antall deler helheten skal deles inn i. Forskjellen mellom disse oppgavene er antall deler totalt. Elever som svarer riktig på disse oppgavene, har forståelse for brøk som relativ størrelse.

Oppgave 9 har en nedgang fra sju til seks riktige besvarelser fra før- til ettertesten. Elever som ringer rundt tre brikker kan ha tatt utgangspunkt i nevner og sett på teller og nevner som isolerte tall. Elever som ringer rundt tre brikker, med ring rundt en av brikkene i ringen, kan ha brukt tallet i nevneren og tallet i telleren som indikasjon på det som skal ringes inn.

Resultatet på ettertesten viser at 9 elever er i misoppfatning *teller eller nevner som isolert tall.* Fem av arealeleven hadde det mest brukte feilsvaret på oppgave 9, som var ring rundt 3 brikker, mens fire elever hadde andre besvarelser som indikerte misoppfatning.

Oppgave 9 var også en av våre intervjuoppgaver.

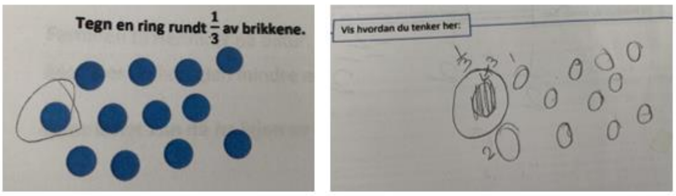
Intervjuobjekt 1 – arealelev – oppgave 9



Figur 47 Intervjuobjekt 1 - arealelev - oppgave 9

Eleven syntes at oppgaven var litt vanskelig og endret forklaring underveis i intervjuet. Han sa at han heller ville ha laget flere ringer med tre, og tatt ring rundt en av brikkene inni. Han forklarte at en tredel blir en brikke. Begge besvarelsene fra før og etter endringen kan tilsi at eleven ser på teller og nevner som isolerte tall, noe som tyder på at eleven er i misoppfatning.

Intervjuobjekt 2 – arealelev – oppgave 9



Figur 48 Intervjuobjekt 2 - arealelev - oppgave 9

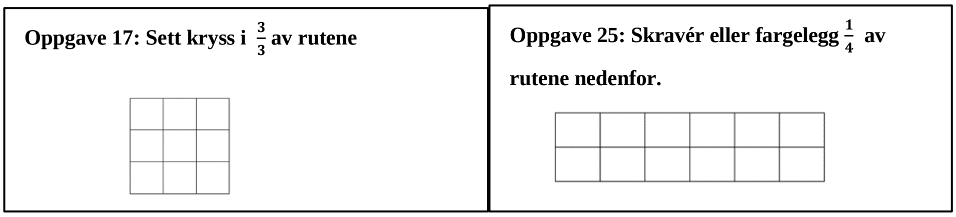
Eleven startet sin forklaring med å telle opp tre og tre brikker, og oppdaget at det ble fire grupper, for så å endre til at det skulle være tre grupper med fire i hver gruppe. Videre i intervjuet forklarer eleven at hun hadde tenkt at tallet én betydde at det skulle være ring rundt én brikke. Dette indikerer at eleven var i misoppfatning da hun gjorde ettertesten, men at hun reflekterte seg frem til riktig svar i løpet av intervjuet. Eleven tilpasset ny kunnskap til allerede lært og forstått kunnskap.

Oppgave 15 viser ingen endring fra før- til ettertesten, det er fortsatt seks elever som har riktig besvarelse. Resultatet på ettertesten viser at ti elever fortsatt er i misoppfatning, hvor sju elever hadde ringet rundt tre bokser og tre elever hadde ringet rundt én boks. Elevene ser på teller og nevner som isolert tall og velger å forholde seg til bare telleren eller bare nevneren.

Arealelevene	Førtest	Ettertest	Økning/nedgang
Oppgave 9	44 %	38 %	-6 %
Oppgave 15	38 %	38 %	0 %

Tabell 49 Utvikling av forståelse arealelever, kategori 1, misoppfatning 4

Kategori 2 – Fargelegge/skravere ut fra ferdig tegnet figur.



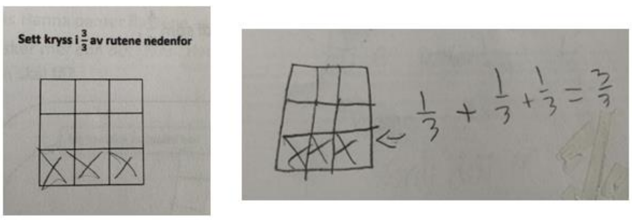
Figur 49 Oppgave 17 og oppgave 25

Oppgave 17 og 25 tester om elevene forstår hvor mange brøkdeler som skal fargelegges/skraveres i en ferdig oppdelt figur. Forskjellen er at i oppgave 17 skal hele figuren fargelegges, mens i oppgave 25 skal en stambrøk fargelegges. Begge oppgavene er like i at elevene selv må dele inn figuren i det antall deler nevneren tilsier, (oppgave 25 finnes kun i ettertesten).

Oppgave 17 har en økning fra fire til fem riktige besvarelser fra før- til ettertesten.

Resultatet på ettertesten viser at ni elever er i misoppfatning *teller eller nevner som isolert tall.* Fem av arealeleven hadde det mest brukte feilsvaret på oppgave 9, som var ring rundt tre brikker, mens fire elever hadde andre besvarelser som indikerte misoppfatning.
Oppgave 17 var også en av våre intervjuoppgaver.

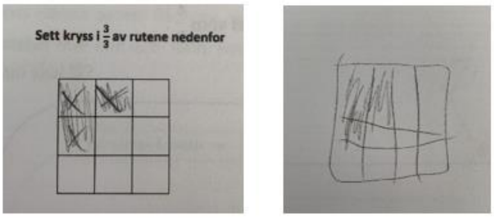
Intervjuobjekt 1 – arealelev – oppgave 17



Figur 50 Intervjuobjekt 1 - arealelev - oppgave 17

Eleven har krysset i tre ruter og forklarer det med at det var tre rader med tre ruter i hver, og da måtte man krysse en rute i hver rad, og at tre tredeler er tre ruter. Han sier videre at en tredel må være en rute, for da blir nevneren når du har en rad (han viser med fingeren). Eleven ser ikke hele figuren under ett, men ser en rad som en helhet, på bakgrunn av at nevneren er tre. Besvarelsen tilsier at eleven er i misoppfatning og ser på teller og nevner som isolerte tall.

Intervjuobjekt 2 – arealelev – oppgave 17



Figur 51 Intervjuobjekt 2 - arealelev - oppgave 17

Eleven starter sin forklaring med å si at hun hadde krysset tre ruter. Hun sier at en tredel pluss en tredel pluss en tredel er det samme som tre tredeler, og oppdager at hun har krysset feil. Hun sier at tre tredeler er hele og at en tredel må være tre ruter. Intervjuet viser at elev 2 hadde satt kryss i tre ruter og var i misoppfatning. Hun hadde tatt utgangspunkt i nevneren og så på teller og nevner som isolerte tall. Under intervjuet oppdager eleven, gjennom egen refleksjon, at hun har gjort feil og endrer til riktig svar som er kryss i alle rutene.

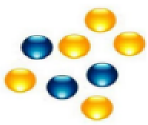
Oppgave 25 viser litt over middels skår hos arealelevene, hvor 11 elever hadde riktig besvarelse. Resultatet på ettertesten viser at de elever som har svart feil er i misoppfatning *teller eller nevner som isolert tall.* Disse elevene har krysset av i én rute eller i fire ruter.

Arealelevene	Førtest	Ettertest	Økning/nedgang
Oppgave 17	25 %	31 %	6 %
Oppgave 25		69 %	

Tabell 50 Utvikling av forståelse arealelever, kategori 2, misoppfatning 4

Kategori 3 – Angitt brøkdel er ikke en stambrøk.

Oppgave 24: Jens har tre blå og fem gule klinkekuler. Hvor stor brøkdel av klinkekulene er blå?



Oppgave 26: I klasse 5B er det 18 elever, $\frac{2}{3}$ spiller fotball. Hvor mange elever spiller fotball?

Figur 52 Oppgave 24 og oppgave 26

Oppgave 24 og 26 tester om elevene forstår at det totale antallet er helheten av figuren. I tillegg tester de om elevene forstår at telleren angir antall brøkdeler når dette er mer enn én. Forskjellen mellom disse oppgavene er at oppgave 24 har bilde med en figur, med tre blå og fem gule klinkekuler og denne er en flervalgsoppgave, mens oppgave 26 er en ren tekstoppgave. Disse oppgavene var ikke med i førtesten.

Oppgave 24 viser høy skår hos arealelevene, hvor 14 elever hadde riktig besvarelse. Arealelevene hadde ikke jobbet med denne type oppgaver i undervisningsperioden, men har likevel høy skår. I denne oppgaven kan arealelevene ha tenkt at nevneren angir helheten av figuren. Oppgaven er en flervalgsoppgave og det finnes kun ett alternativ med den aktuelle nevneren, noe som kan ha påvirket resultatet. Resultatet kan tyde på at elevene har tatt i bruk tidligere lært kunnskap og satt det inn i ny sammenheng.

Oppgave 26 viser middels skår, hvor 8 av 16 arealelever har riktig besvarelse. Oppgaven beveger seg bort fra stambrøk og har høyere vanskelighetsgrad enn de andre oppgavene under misoppfatning 4. Feilsvarene fordeler seg på enten seks elever eller ni elever. Dette tyder på at arealelevene har delt antall elever enten på teller eller nevner. Dette kan tyde på at elevene er i misoppfatning og har sett på teller eller nevner som isolerte tall.

Arealelevene	Førtest	Ettertest	Økning/nedgang
Oppgave 24		88 %	
Oppgave 26		50 %	

Tabell 51 Utvikling av forståelse arealelever, kategori 3, misoppfatning 4

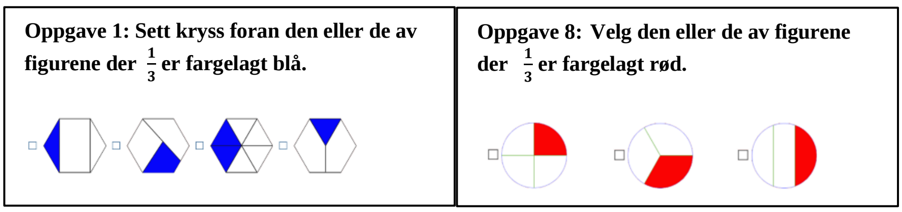
4.5 Utvikling av mengdeelevene fra før- til ettertest

4.5.1 Misoppfatning 1: Nevner representerer antall deler uavhengig av størrelse

Resultatet på førtesten viste at mengdeelevene hadde lav skår på fire av fem oppgaver. Mengdeelevene hadde positiv utvikling på alle oppgavene, og den totale gjennomsnittlige endringskåren viste en økning med 1,25 riktige besvarelser. Ettertesten viser at to av oppgavene har økt med bare en riktig besvarelse, mens de tre andre oppgavene viser økning på mellom fem og sju riktige besvarelser.

4.5.2 Oppgaver misoppfatning 1

Kategori 1 – visuell ulik inndeling.



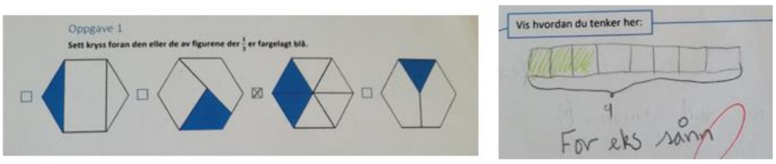
Figur 53 Oppgave 1 og oppgave 8

Oppgave 1 og 8 tester om elevene tar hensyn til at delene skal være like store i allerede ferdig oppdelte figurer.

Fraført- til ettertest viser en økning med seks, fra to til åtte riktige besvarelser på oppgave 1. Dette kan tyde på at elevene ser sammenhengen mellom mengdemodellen og arealmodellen og viser forståelse av gruppering for like deler. Ifølge Lamon (2012) er det viktig å kunne identifisere det hele og vite at alle delene må være like store.

Resultatet på ettertesten viser i tillegg at åtte elever er i misoppfatning *nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelsen.* Det mest brukte elevsvaret på oppgave 1 var kryss for figur 1, 2 og 4 og fire elever hadde svart dette. I tillegg har mengdeelevene besvarelser som figur 1, figur 2 og figur 1, 2, 3 og 4 og disse indikerer også misoppfatning. Oppgave 1 var også en av våre intervjuoppgaver.

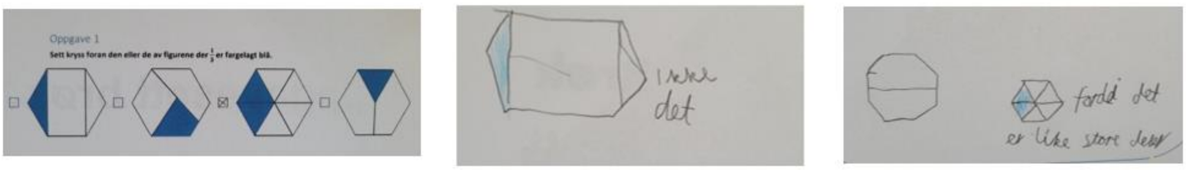
Intervjuobjekt 3 – mengdeelev – oppgave 1



Figur 54 Intervjuobjekt 3 - mengdeelev - oppgave 1

I starten synes eleven at det er vanskelig å forklare tenkningen sin. Hun forklarer at figur 3 er delt i seks like store deler og at de andre figurene ikke har like store deler. Hun sier at to av seks er det samme som en av tre og derfor blir figur 3 riktig. Eleven viser god forståelse for likedeling og kan samtidig redegjøre for likeverdige brøker. Dette kan tyde på at eleven ikke er i misoppfatning. Ifølge Van de Walle et al. (2014) kan mengdemodellen brukes til både utvidelse og forkorting av brøk. På denne måten kan elevene forstår likeverdige brøker.

Intervjuobjekt 4 – mengdeelev – oppgave 1



Figur 55 Intervjuobjekt 4 - mengdeelev - oppgave 1

Elevens tok utgangspunkt i riktig figur og forklarte at han grupperte to og to like store biter, slik at det ble tre grupper, og at en av de tre gruppene ble en tredel. Han forklarte videre at en tredel er det samme som to seksdeler. Også denne eleven viser god forståelse for likedeling og likeverdige brøker og dette kan tyde på at eleven ikke er i misoppfatning. Denne eleven hadde tilpasset ny kunnskap til allerede lært og forstått kunnskap, ifølge Piaget (referert i Lyngsnes og Rismark, 2014) omtales dette som assimilert kunnskap. I et konstruktivistisk perspektiv kan assimilert kunnskap være et steg mot dybdelæring.

Fra førtest- til ettertest viser en økning med fem, fra fire til ni riktige besvarelser på oppgave 8. Disse fem elevene har gått fra å være i misoppfatning, til å utvikle sin forståelse ut av misoppfatningen. Disse elevene kan ifølge Piaget (referert i Lyngsnes og Rismark, 2014) ha konstruert ny kunnskap og forståelse ved assimilasjon. Fortsatt er det sju elever som er i misoppfatning og alle disse elevene hadde krysset av for at figur 2 og figur 3 var riktig svar. Ved å ta utgangspunkt i den kjente misoppfatningen kan læreren skape en kognitiv konflikt hos elevene og på den måten vil undervisningsformen kunne være en tilrettelegger for å få eleven ut av misoppfatning (William, 2018).

Mengdeelevene	Førtest	Ettertest	Økning/nedgang
Oppgave 1	12 %	50 %	38 %
Oppgave 8	25 %	56 %	31 %

Tabell 52 Utvikling av forståelse mengdeelever, kategori 1, misoppfatning 1

Kategori 2 – Dele/tegne ut fra ferdig oppgitt brøk.

Oppgave 5: Fargelegg tre firedeler ($\frac{3}{4}$) av denne figuren.	**Oppgave 21: Tegn en figur der $\frac{1}{4}$ er fargelagt.**

Figur 56 Oppgave 5 og oppgave 21

I oppgave 5 og 21 elevene skal selv dele figuren i riktig antall deler og fargelegge. Oppgave 21 finnes kun i ettertesten. Begge oppgavene under denne kategorien viser høy skår hos mengdeelevene. Mengdeelevene har jobbe med fargelegging av mengdeoppgaver og resultatene på før- og ettertesten, i denne kategorien, viser at elevene har forstått å overføre kunnskap fra mengdemodellen til arealmodellen. På denne måten har mengdeelevene konstruert og utviklet sin egen kunnskap, dette kalles assimilert kunnskap ifølge Piaget (referert i Lyngsnes og Rismark, 2014).

Mengdeelevene	Førtest	Ettertest	Økning/nedgang
Oppgave 5	94 %	100 %	6 %
Oppgave 21		100 %	

Tabell 53 Utvikling av forståelse mengdeelever, kategori 2, misoppfatning 1

Kategori 3 – Angi brøkdel av oppdelt figur.

Oppgave 2: Hvor stor brøkdel av kostholdet til kaniner bør være høy, ifølge oversikten?	Oppgave 12: Hvor stor brøkdel av flagget til Ecuador er rødt?
	

Figur 57 Oppgave 2 og oppgave 12

Oppgave 2 og 12 tester om elevene har kontroll på likedeling av en figur, hvor delene i utgangspunktet ikke er likedelt.

Oppgave 2 viser lav skår både på før- og ettertesten. Resultatet kan indikerer at dette er en oppgavetype elevene er svært uvant med og at undervisningen ikke har ført frem. Dette tyder på at elevene ikke forstår å dele inn en figur som ikke er rektangulær og få like store deler (Watson et al., 1999). Til sammenligning ser vi at det er betydelig økning i antall riktige besvarelser på oppgave 12, fra før- til ettertesten, med økning på sju riktige besvarelser, fra tre riktige til ti riktige besvarelser. Denne figuren har rektangulær form. Dette kan tyde på at elevene forstår hvordan de skal dele likt når figuren er rektangulær (Lamon, 2012). Ettertesten viser at det fortsatt er seks elever som er i misoppfatning og de svarer en tredel, mot elleve elever på førtesten. Dette indikerer at fem elever er ført ut av misoppfatning og har bedret sin forståelse for likedeling.

Mengdeelevene	Førtest	Ettertest	Økning/nedgang
Oppgave 2	0	6 %	6 %
Oppgave 12	19 %	63 %	44 %

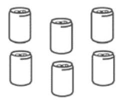
Tabell 54 Utvikling av forståelse mengdeelever, kategori 3, misoppfatning 1

4.5.3 Misoppfatning 4: Teller eller nevner som isolert tall

Resultatet på førtesten viste at mengdeelevene hadde henholdsvis sju riktige besvarelser både på oppgave 9 og på oppgave 15. På oppgave 17 var det seks riktige besvarelser. Ettertesten viste at mengdeelevene hadde doblet fra sju til fjorten riktige besvarelser på oppgave 9 og det samme på oppgave 15. Oppgave 17 hadde også en dobling fra førtest, fra seks til tolv riktige besvarelser. Den gjennomsnittlige endringskåren på disse oppgavene viste en økning på 1,25 riktige besvarelser. Videre viste de tre oppgavene som kun var på ettertesten, høy skår. Oppgave 24 hadde femten riktige besvarelser, og oppgave 25 og oppgave 26 viste fjorten riktige besvarelser hver.

4.5.4 Oppgaver misoppfatning 4

Kategori 1 – visuell ulik inndeling.

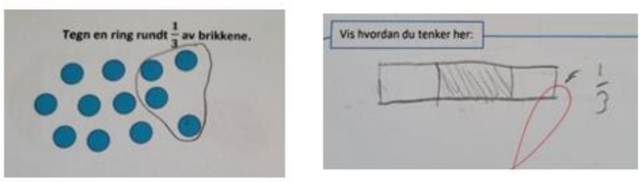
Oppgave 9: Tegn en ring rundt $\frac{1}{3}$ av brikkene	Oppgave 15: Tegn en ring rundt en tredel av boksene
	

Figur 58 Oppgave 9 og oppgave 15

Oppgave 9 og 15 tester om elevene forstår at nevneren bestemmer antall deler helheten skal deles inn i.

Oppgave 9 har en dobling, fra sju til fjorten riktige besvarelser, fra før- til ettertesten. En elev ser fortsatt ut til å være i misoppfatning og har satt ring rundt tre brikker. En elev har satt ring rundt to brikker, noe som er vanskelig å forklare. Eleven som har satt ring rundt tre brikker, har kun sett på nevneren når han løste oppgaven, noe som indikerer at eleven er i misoppfatning teller og nevner som isolert tall. Ifølge Ryan og Williams (2007) er dette en vanlig form for misoppfatning. Oppgave 9 var også en av våre intervjuoppgaver.

Intervjuobjekt 3 – mengdeelev – oppgave 9

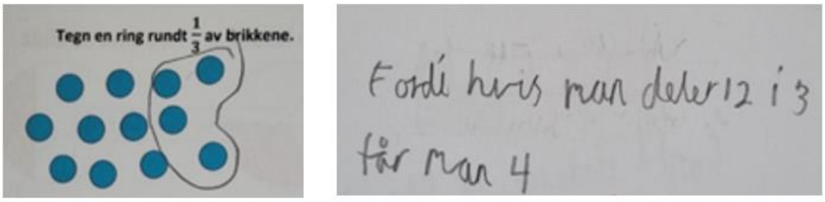


Figur 59 Intervjuobjekt 3 - mengdeelev - oppgave 9

Eleven testet ut først å dele i fire grupper og delte deretter i tre grupper, med like mange i hver gruppe. Hun forklarer betydningen av teller og nevner og presiserer at nevneren med tallet tre, innebærer at hele mengden skal deles i tre like store deler. Hun forklarer videre at en tredel er det samme som fire tolvdeler. Denne eleven viser god forståelse ved å vise tenkningen sin ved hjelp av blokkmodellen. Eleven viser dybdeforståelse for brøk som del av en mengde og kan også overføre kunnskapen til å forkorte brøken og finne likeverdige brøker. Ifølge Van de

Walle et al. (2014) kan mengdemodellen brukes for å vise utvidelse og forkorting av brøk og videreføres til likeverdige brøker.

Intervjuobjekt 4 – mengdeelev – oppgave 9



Figur 60 Intervjuobjekt 4 - mengdeelev - oppgave 9

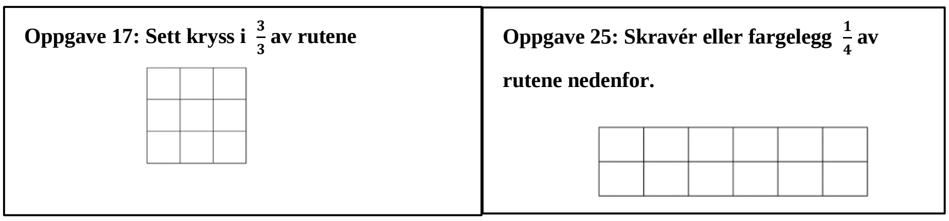
Eleven forklarer at han har delt tolv i tre og at fire brikker er det samme som en tredel. Denne eleven viser også god forståelse for brøk som del av en mengde og kan overføre kunnskapen til å forkorte brøken og finne likeverdige brøker.

Oppgave 15 har en dobling, fra sju til fjorten riktige besvarelser, fra før- til ettertesten. Resultatet på ettertesten viser at to elever fortsatt er i misoppfatning, hvor begge elevene hadde ringet rundt tre bokser. Disse ser på teller og nevner som isolert tall og velger å forholde seg til bare nevneren. Seks mengdeelever er i løpet av undervisningsperioden kommet ut av misoppfatning 4, *teller og nevner som isolert tall.*

Mengdeelevene	Førtest	Ettertest	Økning/nedgang
Oppgave 9	44 %	88 %	44 %
Oppgave 15	44 %	88 %	44 %

Tabell 55 Utvikling av forståelse mengdeelever, kategori 1, misoppfatning 4

Kategori 2 – Fargelegge/skravere ut fra ferdig tegnet figur.



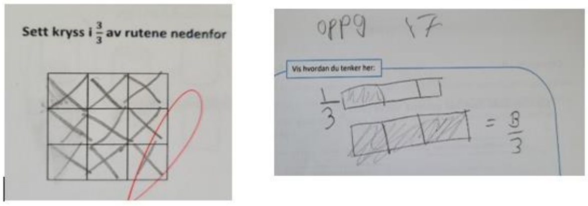
Figur 61 Oppgave 17 og oppgave 25

Oppgave 17 og 25 tester om elevene forstår hvor mange brøkdeler som skal fargelegges/skraveres i en ferdig oppdelt figur. Oppgave 25 finnes kun i ettertesten. Oppgave 17 har en økning med seks, fra seks til tolv riktige besvarelser fra før- til ettertest.

Resultatet på ettertesten viser at elever i misoppfatning *teller eller nevner som isolert tall,* har gått ned fra ti til fire elever. Eleven som var i misoppfatning hadde satt kryss i tre ruter, en tredel.

Oppgave 17 var også en av våre intervjuoppgaver.

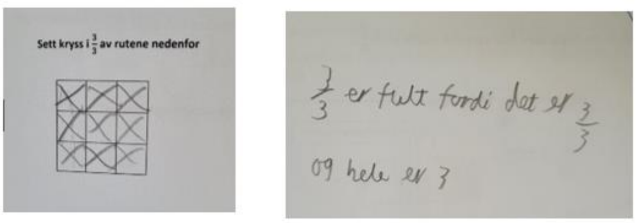
Intervjuobjekt 3 – mengdeelev – oppgave 17



Figur 62 Intervjuobjekt 3 - mengdeelev - oppgave 17

Eleven forklarer at en tredel må være en rad. Hun sier videre at for å få tre tredeler må man fargelegge alle og at tre tredeler er det samme som den hele. Hun viser forståelse for at hele figuren skal deles inn i like store deler og at når telleren og nevneren er like, er dette det samme som en hel. Eleven representerer tenkningen sin ved å tegne en blokkmodell og viser med dette overførbarhet mellom modeller. Denne eleven er ikke i misoppfatning og viser god forståelse for likedeling av figurer, med flere deler enn det telleren tilsier. Dette kan indikere at hun forstår likedeling og likeverdige brøker og er på god vei til dybdeforståelse for del av en helhet.

Intervjuobjekt 4 – mengdeelev – oppgave 17



Figur 63 Intervjuobjekt 4 - mengdeelev - oppgave 17

Eleven forklarer at tre tredeler er en hel og sier at det ikke kan være fire tredeler. Han sier videre at fire tredeler er ingenting, men etter en tenkepause sier han at da hadde det vært en del til. På spørsmål om hvor mye det da hadde vært verdt, svarer han at det hadde vært den hele, pluss en tredel til. Videre forklarer han brøken en tredel. Han sier at én er telleren, den teller opp hvor mange det er, og neveren som er tre, er helheten. Eleven leder seg selv inn på uekte brøk og sier først at det ikke finnes. Han reflekterer seg frem til at det må være en tredel mer enn den hele. På denne måten viser han at han kan gjøre om en uekte brøk til blandet tall. Eleven er kommet langt i dybdeforståelse innen brøk som del av en helhet. Denne eleven konstruerer sin egen kunnskap i løpet av prosessen, ifølge Piaget (referert i Lyngsnes og Rismark, 2014) kalles det for assimilasjon når ny kunnskap enkelt tilpasses og fremmes om allerede lært og forstått kunnskap. Denne eleven er ikke i misoppfatning.

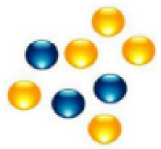
Oppgave 25 viser høy skår hos mengdeelevene, hvor 14 elever hadde riktig besvarelse. Resultatet på ettertesten viser at de to elevene som har svart feil er i misoppfatning *teller eller nevner som isolert tall.* Den ene eleven har krysset av i én rute og den andre eleven hadde krysset i fire ruter.

Mengdeelevene	Førtest	Ettertest	Økning/nedgang
Oppgave 17	38 %	75 %	37 %
Oppgave 25		88 %	

Tabell 56 Utvikling av forståelse mengdeelever, kategori 2, misoppfatning 4

Kategori 3 – Angitt brøkdel er ikke en stambrøk.

Oppgave 24: Jens har tre blå og fem gule klinkekuler. Hvor stor brøkdel av klinkekulene er blå?



Oppgave 26: I klasse 5B er det 18 elever, $\frac{2}{3}$ spiller fotball. Hvor mange elever spiller fotball?

Figur 64 Oppgave 24 og oppgave 26

Oppgave 24 og 26 tester om elevene forstår at det totale antallet er helheten av figuren. I tillegg tester de om elevene forstår at telleren angir antall brøkdeler når dette er mer enn én. Forskjellen mellom disse oppgavene er at oppgave 24 har bilde med en figur, med tre blå og fem gule klinkekuler, og denne er en flervalgsoppgave, mens oppgave 26 er en ren tekstoppgave. Disse oppgavene var ikke med i førtesten.

Oppgave 24 viser høy skår hos mengdeelevene, hvor 15 elever hadde riktig besvarelse. I denne oppgaven viser resultatet at mengdeelevene forstår del av en helhet som mengdemodell. Den ene elevene som hadde svart feil, er i misoppfatning *teller eller nevner som isolert tall*, og hadde krysset av for tre femdeler.

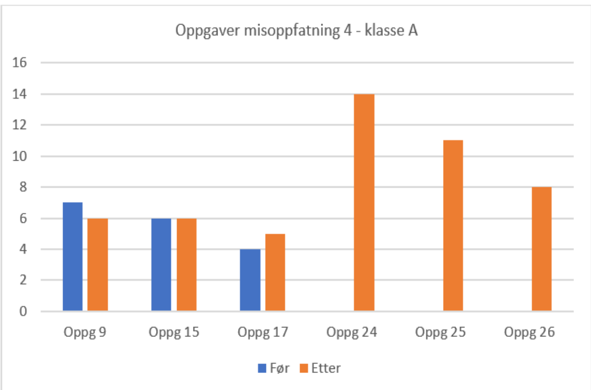
Oppgave 26 viser høy skår, hvor 14 av 16 mengdeelever har riktig besvarelse. Oppgaven beveger seg bort fra stambrøk og har høyere vanskelighetsgrad enn de andre oppgavene under misoppfatning 4. Feilsvarene fordeler seg på enten seks elever eller ni elever. Disse elevene har delt antall elever enten på teller eller nevner. Dette kan tyde på at elevene er i misoppfatning og har sett på teller eller nevner som isolerte tall.

Mengdeelevene	Førtest	Ettertest	Økning/nedgang
Oppgave 24		94 %	
Oppgave 26		88 %	

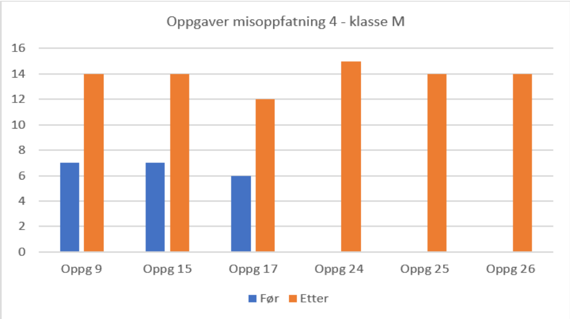
Tabell 57 Utvikling av forståelse mengdeelever, kategori 3, misoppfatning 4

4.6 Areal- og mengdeelevene oppsummert etter misoppfatning

Resultatet på misoppfatningene samlet viser at misoppfatning 1, 2, 3 og 5 er ganske like mellom klassene, med unntak av oppgave 1, misoppfatning 1, hvor mengdeeleven viser størst fremgang, mens arealelevene viser tilbakegang. På samtlige av disse misoppfatningene skårer likevel mengdeelevene noe over arealelevene i gjennomsnittlig forbedring. På misoppfatning 4 er forskjellene mellom klassene langt større, til fordel for mengdeelevene. Dette er den misoppfatningen som viser størst forskjell mellom klassene fra før- til ettertesten.



Figur 65 Oppgaver misoppf 4 - kl A



Figur 66 Oppgaver misoppf 4 - kl M

Figur 65 og 66 viser forskjellen i utvikling mellom de to klassen på misoppfatning 4, *teller eller nevner som isolert tall.* De øvrige diagrammene for sammenligning, finnes i vedlegg 12.

Vi har samlet alle resultater for før- og etter testene, klassevis og i forhold til hverandre i en egen tabell. Tabellen sammenligner gjennomsnittlig endringsskår i prosent og finnes i vedlegg 13, som oppsummering.

5 Drøfting

I dette kapittelet drøfter vi funnene vi presenterte i analysekapittelet og vi legger hovedvekt på de områdene hvor vi gjorde funn knyttet til forståelse. Vi forventet at begge klassene skulle utvikle sin brøkkompetanse etter endt undervisningsperiode, fordi før- og ettertest var identiske og undervisningsoppleggene var direkte rettet mot det elevene ble testet i. På grunn av tiden og størrelsen på en masteroppgave vil det ikke være mulig å gå i dybden på alt en finner interessant. Vi har gjort våre valg på bakgrunn av resultatene på kartleggingen, for å belyse og svare på vår problemstilling.

5.1 Oversiktsbilde

Først drøfter vi resultatet på misoppfatning 2, *jo større nevner eller teller, jo større brøk,* som belyser heltallstenkning. Dette var den misoppfatningen begge klassene utviklet seg mest i og hvor resultatet var relativt likt, men dog til fordel mengdeelevene.

Det var spesielt innenfor områdene likedeling, likeverdige brøker og bruk av modeller vi så de største forskjellene og det er naturlig å stille spørsmål ved mulige forklaringer som finnes. I den videre drøftingen vil vi ha fokus på disse tre områdene. Under likedeling har vi valgt å diskutere oppgave 1, fra misoppfatning 1, *nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse*. Oppgave 1 viser nedgang fra før- til ettertest hos arealelevene og betydelig fremgang hos mengdeelevene.

I tillegg drøfter vi funn i misoppfatning 4, *teller eller nevner som isolert tall*, som viser elevens forståelser i forhold til likeverdige brøker. Denne misoppfatningen utpeker seg med størst forskjell mellom de to klassene i endring fra før- til ettertest.

Ettertesten viste også forskjell mellom klassene i forhold til det å ta i bruk modeller i forklaringsrutene og vi så det som nødvendig å drøfte mulige årsaker til dette. Videre ser vi det som naturlig å dra inn dybdelæring i drøftingen, fordi vår forskning kan tyde på at den ene innfallsvinkelen kan gi bedre dybdeforståelse, enn den andre innfallsvinkelen, på noen områder. Til slutt vil vi bruke funnene til å oppsummere det totale bildet og sammenligne resultatene til de to klassene, for å kunne svare på vår problemstilling.

Ut fra resultatene av testene ser vi at både arealelevene og mengdeelevene har forbedret sin brøkkompetanse fra før- til ettertest. Hovedfunnet i vår forskning er at mengdeelevene har forbedret sin brøkkompetanse i større grad, enn arealelevene. Fra før- til ettertest, oppgave 1 -

19, vises et gjennomsnittlig endringskår av arealelevene på 2,12 riktige besvarelser og et gjennomsnittlig endringskår av mengdeelevene på 5,25 riktige besvarelser. Sju av oppgavene viser tydelig forskjell i utvikling mellom klassene, til fordel mengdeelevene og tolv av oppgavene viser liten forskjell mellom klassene (vedlegg 13). Forskjellen i endringskår kan indikere at innlæring via mengdemodellen skaper bedre grunnleggende forståelse, enn innlæring via arealmodellen på noen områder. Dette kan underbygges av at mengdemodellen regnes for å ligge på et høyere vanskelighetsnivå enn arealmodellen, fordi mengdemodellen forutsetter mer komplekse konstruksjoner hos elevene (Hart et al., 1981). Allerede tidlig i innlæringen, kan mengdemodellen skape forståelse for likeverdige brøker og dermed også forkortelse og utvidelse av brøk (Hart et al., 1981). Modellen kan, på enkelt vis skape forståelse for situasjoner fra den virkelige verden, hvor gruppering inngår og den egner seg også til å skape forståelse for brøk som forhold (Van de Walle et al., 2014). Behr et al. (1983) sin modell hevder at *Partitioning and Part-Whole* anses som det mest fundamentale aspektet innen brøk og våre funn kan tyde på at ensidig fokus på arealmodellen ikke skaper et godt nok brøkfundament. Bjerke et al. (2012) viser til at norsk skole har for ensidig fokus på arealmodellen i sin innlæring av brøk.

5.2 Heltallstenkning

Aspektet del av hel anses som selve kjernen i brøkundervisningen og danner dermed fundamentet for videre arbeid med brøk (Bjerke et al., 2013). Ved gjennomgang av førtesten erfarte vi mange kjente utfordringer i emnet brøk som del av en helhet. Misoppfatning 2, *jo større nevner eller teller, jo større brøk,* avdekker heltallstenkning hos eleven. Resultatene kan tyde på at elevene tok utgangspunkt i heltallstenkning i sitt arbeid. Dette kan bety at elevene tror at egenskapene de har lært om hele tall, også gjelder i arbeid med brøk. Ni og Zhou (2005) omtaler dette som «whole number bias» og Lamon (2012) sier at en av årsakene til elevens vansker er det kognitive spranget fra heltall til brøk, noe som vil kunne få betydning for regning med brøk senere. Det er viktig at elevene forstår at reglene som var gjeldende for heltall, ikke kan overføres direkte til å gjelde i arbeid med brøk. Resultatet på ettertestene viste at begge klassene økte sin kompetanse på oppgavene under misoppfatning 2, med gjennomsnittlig endringskår på 1,5 for arealelevene og 1,81 for mengdeelevene, i antall riktige besvarelser av totalt seks oppgaver. Ettertesten viste også at gjennomsnittet var på 3,06 for arealelevene og 3,69 for mengdeelevene i antall riktige besvarelser. Mye tyder på at begge innfallsvinklene gir elevene et forholdsvis likt grunnlag innen det å se på brøk som en tallstørrelse, men likevel et resultat med forbedringspotensialet.

Et eksempel som kan tyde på at elevene ikke klarer å se brøk som en tallstørrelse er når våre elever i oppgave 3, har doblet $\frac{1}{2}$, og fått til svar $\frac{2}{4}$. Disse elevene sorterer under det vi i teorien omtalte som «whole number bias» (Ni & Zhou, 2005). Årsaken til slike feil kan ifølge Lamon (2012) være det kognitive spranget fra heltall til brøk. Tidligere forskning viser at elever velger å bruke regnereglene for de naturlige heltallene når de regner med brøk (Empson og Levi, 2011).

Ifølge Lamon (2012) og Watanabe (2007) bør innlæring skje ved at elevene forstår at heltall representeres som ett symbol på tallinja, mens flere ulike brøker vil være representative for samme verdi. For å skape en god brøkforståelse er det viktig å planlegge en helhetlig opplæring der man ser sammenhengen mellom hele- og rasjonale tall, på ulike måter, også i forhold til brøk og prosent (Utdanningsdirektoratet 2019).

Mye tyder på at når elever tar i bruk erfarte regneregler for de naturlige heltallene, i regning med brøk, er forståelsen instrumentell. Dette innebærer ifølge Skemp (1976) at elevene tar i bruk tidligere innlærte prosedyrer og overfører disse til å gjelde brøk, uten å ha forstått brøkens verdi. Ifølge Kilpatrick et al. (2001) skal elevene lære prosedyrer ved å se sammenhenger mellom begreper og prosedyrekunnskap. For at elever skal kunne se sammenhenger kan det være avgjørende at de får jobbet med det å addere $\frac{1}{2}$ ved hjelp av ulike modeller, for selv å erfare at $\frac{2}{4}$ ikke kan være riktig svar. I dette arbeidet er det viktig at elevene gjøres i stand til å vurdere størrelsen til brøken og erfare at brøk er en verdi på tallinjen på lik linje med heltallene. Bare da vil elevene kunne vurdere hvorvidt svaret blir riktig når de for eksempel adderer $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{2}$ og får $\frac{2}{4}$ til svar, i tråd med det Ma (2010) sier om at begrepsforståelse og prosedyrebruk er i et avhengighetsforhold til hverandre. For å få et bedre resultat enn vi fikk på våre tester er det viktig at brøk som tall på tallinjen, vektlegges i større grad av lærere som en del av innlæringen, slik at det medvirker til å skape forståelse for det å regne med brøk.

For å utvikle relasjonell forståelse er det viktig at elevene har god begrepsforståelse og ser sammenhengen mellom hele tall og brøk (Kilpatrick et al., 2001). Ved å legge til rette for at elevene selv kan konstruere sin egen kunnskap for å skape forståelse, inngår dette i et konstruktivistisk læringssyn (Fosnot og Perry, 2005).

5.3 Likedeling

Når barn begynner på skolen, har de ofte erfaring med rettferdig deling. Tidlig i skoleløpet er det derfor viktig å ha fokus på likedeling, samt dobling, halvering og helhet, for å danne grunnlag for brøkforståelse. Likedeling kommer til syne i misoppfatning 1, *nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse*. Funnene i vår studie kan tyde på at undervisningen ikke har hatt nok fokus på delenes størrelse. I tillegg er en mulig forklaring at det er behov for flere og varierte delingsaktiviteter tidlig i skoleløpet. Ifølge Lamon (2012) er likedeling grunnleggende for å skape forståelse, noe som samsvarer med de funn som Ryan og Williams (2007) gjorde i sin studie. Studien til Ryan og Williams (2007) viste også at spesialiserte matematikklærere hadde samme misoppfatning som elevene, og det var ikke uvanlig at lærerne oppdaget at deres forståelse bygde på feil og overgeneralisering av tidligere kunnskap.

Oppgaven 1 er en arealoppgave med ulik inndeling. Resultatet viser at undervisningen ikke har ført til utvikling hos arealelevene og viser en nedgang fra fire til to riktige besvarelser, noe som kan indikere at elevene ikke har fått god nok forståelse for likedeling av figurer. For å beherske del hel aspektet er det ifølge Lamon (2012) viktig å kunne identifisere det hele, og vite at delene må være like store.

I norske lærebøker er det lite variasjon i brøkoppgavene. Brøkene er gjerne ferdig oppdelt i like store deler, hvor elevene skal navngi brøkdelene eller fargelegge ferdig oppdelte figurer. I tillegg ser vi at det er liten variasjon i hvilke figurer som benyttes i lærebøkene. De typiske figurene er sirkler og rektangler som er delt inn slik at delene, i utgangspunktet, er like store og inndelt på en tradisjonell måte. Elevene møter i liten grad oppgaver som er ulikt inndelt og utfordres dermed ikke i likedelingsprinsippet. For ensidig fokus på arealmodellen kan være en medvirkende årsak til det svake resultatet på oppgave 1 for arealelevene. Resultatet kan tyde på at fokus på arealmodellen, ikke gir umiddelbar forståelse for gruppering av like deler. Ut fra dette kan innlæringen anses som det Skemp (1976) omtaler som instrumentell, fordi elevene bare hadde jobbet med oppgaver der nevneren anga det antall deler figuren var delt inn i. Med det mener vi at elevene ikke hadde erfaring med at en figur som var delt inn i seks deler, også kunne grupperes til tre deler.

Vi opplever dette funnet som spesielt, fordi oppgave 1 er en arealoppgave. Et annet eksempel kan være oppgave 2, som viste at elevene ikke klarte å overføre kunnskap fra rektangler og sirkler, til også å gjelde trekanter. Trekanter kan tilsynelatende være vanskeligere å dele opp i like store deler. En mulig årsak kan være at lærere i norsk skole tar det som en selvfølge at elevene forstår likedelingsprinsippet og derfor ikke legger stor nok vekt på dette i innlæringen. En annen mulig årsak kan være at lærerne selv har mangelfull forståelse for likedeling (Ryan & Williams, 2007).

Oppgave 1 viste at den ene av arealelevene som ble intervjuet, ikke hadde utviklet forståelse for at størrelsen på delene hadde betydning og var i misoppfatning. Han telte bare delene uavhengig av delenes størrelse. Den andre arealeleven startet sin forklaring med å være i misoppfatning. Underveis i prosessen endret hun forklaringen med begrunnelse i at delene måtte være like store og kom da frem til riktig svar. Eleven dannet nye skjemaer på bakgrunn av en konflikt mellom assimilering og akkommodering. Piaget (referert i Lyngsnes & Rismark, 2014) omtaler dette som ekvilibrasjon, noe som betyr at det blir balanse mellom assimilering og akkommodering av denne spesielle situasjonen.

Til sammenligning hadde mengdeelevene økt med seks antall riktige besvarelser, fra 2 til 8, noe som kan tyde på at disse elevene ser sammenhengen mellom mengdemodellen og arealmodellen. Mengdemodellen bygger på gruppering av deler av en mengde og på bakgrunn av resultatet på denne oppgaven kan det se ut til at mengdeelevene overfører denne kunnskapen også til å gjelde arealmodellen. Dette igjen kan indikere at mengdemodellen kan være best egnet for å se sammenhengen mellom representasjonsformene og skape dypere forståelse for brøk (Hart et al., 1981). Intervjuprosessen viste at begge mengeelevene har god forståelse for likedeling og kunne redegjøre for likeverdige brøker. Ingen av disse elevene var i misoppfatning. Disse elevene konstruerte sin egen forståelse gjennom sine erfaringer og handlinger.

Oppgave 8, i vår kartlegging, er også et eksempel som avslører om elever forstår likedeling. Oppgaven består av tre sirkler med ulik inndeling, og elevene skal sette kryss for den eller de figurene, hvor en tredel er fargelagt rød. Oppgaven avdekker spesielt at arealelevene er i misoppfatning, da de krysset for begge figuren som var delt i tre deler, uavhengig av størrelsen på delene. Dette kan indikere at elevene tar i bruk kunnskap om likedeling av rektangelet og tror delene er like store fordi de ser like brede ut. Ifølge Watson et al. (1999) argumenterer elever for at delene er like store, når figuren er delt opp med to parallelle kutt som er omtrent like brede. Han sier videre at elevene overfører kunnskapen om rektangelet til også å gjelde for sirkler. Ved å ta utgangspunkt i en kjent misoppfatning, kan læreren skape en kognitiv konflikt hos eleven og på den måten vil undervisningsformen kunne legge til rette for å få eleven ut av misoppfatning og mot dybdelæring (Fosnot og Perry, 2005). Dette er i tråd med det William (2018) sier om formativ vurdering. Målet er at elevene skal greie å reflektere kritisk over sin egen læring. For å oppnå dybdelæring er det ifølge Kilpatrick et al. (2001) en nøkkelfaktor at elevene kan se sammenhenger og bruke denne kunnskapen i problemløsning og videre læring.

Resultater fra denne misoppfatningen kan indikere at arealelevene har møtt en for ensidig type oppgaver, noe som er i tråd med det Alrø og Skovsmose (2006) og Wæge (2007) hevder kan ha betydning for forståelsen. Til sammenligning kan våre funn tyde på at mengdeelevene i noe større grad kan overfører sin kunnskap fra mengdemodellen, til å skape forståelse for arealmodellen. Dette kan videre være et steg på vei mot det LK20 omtaler som dybdelæring (Utdanningsdirektoratet, 2019).

5.4 Likeverdige brøker

Ettertesten viste at mengdeelevene utviklet seg mest innen alle fem misoppfatningene, hvor misoppfatning 4, *teller eller nevner som isolert tall,* utmerket seg i størst grad. Misoppfatningen avdekker om elevene velger å forholde seg til bare telleren eller bare nevneren og oppgavene viser om elevene forstår likeverdige brøker, samt forkortelse og utvidelse av brøk. Funnene våre kan tyde på at mengdemodellen kan skape en bredere forståelse for brøkbegrepet, i tråd med det Hart et al. (1981) sier om at mengdemodellen er på et høyere vanskelighetsnivå, enn arealmodellen. Dette kan ha sammenheng med at mengdemodellen har en større representasjonsflate, og dermed kan gi større kognitiv utfordring, enn arealmodellen. Til sammenligning diskuteres det i artikkelen «Når brøk ikke er tall» av Bjerke et al. (2013), hvorvidt del av en hel aspektet er det mest hensiktsmessige aspektet å starte med, spesielt om arealmodellen blir ensidig brukt som innfallsvinkel. For at brøkbegrepet skal utvikles er det viktig at elevene møter brøk i form av ulike modeller som representasjoner (Watanabe, 2007).

Et eksempel på dette er oppgave 17 i vår kartlegging, hvor elevene skal sette kryss i $\frac{3}{3}$ av en kvadratisk figur med ni ruter. Fra før- til ettertest økte arealelevene fra fire til fem riktige besvarelser, hvor ni elever fortsatt var i misoppfatning og samtlige krysset i tre av ni ruter. Elever som krysser av i tre av ni ruter kan enten ha tatt utgangspunkt i teller eller nevner. Dette elevsvaret kan tyde på at elevene ikke greier å se sammenhengen mellom nideler og tredeler og kan indikere at elevene ikke har forståelse for at tre tredeler er hele figuren, når figuren er oppdelt i flere enn tre ruter. Disse elevene kan se brøk som del av en helhet som synonymt med at den totale inndelingen av figuren alltid må være den samme som det nevneren tilsier. Lamon (2012) sier at tradisjonelt har «brøk som del av en helhet» fått størst oppmerksomhet i undervisningen, og ut fra dette har brøk blitt synonymt med aspektet del av helhet. Vår erfaring er at aspektet del av helhet er det elevene møter i lærebøkene og det legges i liten grad vekt på de andre aspektene. Dette kan medføre at det kun er del av hel aspektet som oppfattes som brøk.

I intervjuene endret den ene arealeleven sin besvarelse (oppgave 17) til riktig svar, gjennom refleksjon og konstruktivistisk tankeprosess. Den andre eleven klarte ikke å se sammenheng med $\frac{3}{3}$ og hele figuren, når figuren hadde ni ruter. Intervjuet indikerer at eleven brukte tidligere lært kunnskap og av denne grunnen havnet i misoppfatning. Ifølge Piaget (referert i Lyngsnes & Rismark, 2014) kalles dette akkomodasjon og det er i dette steget misoppfatninger kan fremkomme.

Til sammenligning økte mengdeelevene fra seks til tolv riktige besvarelser, altså en dobling, hvor de resterende fire var i misoppfatning og hadde krysset av i tre ruter. Mengdeelevene sine forklaringer i intervjuene viste god dybdeforståelse. Elevene forklarte at $\frac{3}{3}$ var hele figuren, uavhengig av antall deler, brukte blokkmodell for å forklare tenkningen sin, i tillegg til at den ene av elevene reflekterte seg frem til både uekte brøk og blandet tall. Dette tyder på at elevene tilpasset ny kunnskap til allerede lært og forstått kunnskap. Kunnskapen ble ikke fylt på utenfra, men ble konstruert i hodet på eleven selv. Ifølge Piaget (referert i Lyngsnes & Rismark, 2014) omtales dette som assimilert kunnskap og elever som gjennomgår en slik prosess kan være et steg nærmere dybdelæring.

I oppgave 17 ser mengdeelevene sammenhengen mellom $\frac{1}{3}$ og $\frac{3}{9}$, noe som kan være en indikasjon på at mengdemodellen utvikler forståelse for likeverdige brøker. Sett opp mot resultatet for arealelevene, kan resultatet tyde på at dette skjer i mindre grad, via arealmodellen som innfallsvinkel. Resultatet indikerer at mengdemodellen kan ha tilført dypere forståelse for denne type oppgaver, noe som er i tråd med det Hart sier om at mengdemodellen kan skape forståelse for likeverdige brøker samt forkortelse og utvidelse av brøk. Elever som greier å koble sammen deler av kunnskap og viser begrepsforståelse, vil kunne være i stand til å bruke denne kunnskapen i problemløsning og videre læring (Kilpatrick et al., 2001).

Et annet eksempel er oppgave 9 i vår kartlegging, hvor elevene skal tegne en ring rundt $\frac{1}{3}$ av en mengde på tolv brikker. Fra før- til ettertest viste arealelevene en nedgang fra sju til seks riktige besvarelser. Fem elever var fortsatt i misoppfatning og samtlige satte ring rundt 3 brikker. Dette kan indikere at disse elevene er i misoppfatningen, *teller eller nevner som isolert tall.* Slike elevsvar kan også tyde på at elever ikke greier å overføre det de har lært fra arealmodellen til også å gjelde for en mengde som helhet. Van de Walle et al. (2014) omtaler dette som å se diskrete objekter som del av en mengde. Alrø & Skovsmose (2006) og Wæge (2007) sier at undervisning ikke bør bestå av tilnærmet like typer oppgaver da det kan gi et for ensidig fokus på arealmodellen.

I intervjuprosessen endret den ene arealeleven sin forklaring og viste enda tydeligere at han fortsatt var i misoppfatning. Når en elev tar i bruk det han allerede har lært fra arealmodellen og overfører dette til mengdemodellen, men fortsatt er i misoppfatning kan dette indikere at eleven ikke forstår å se på mengden som helheten. Dette tyder på at eleven har ikke oppnådd begrepsforståelse slik at han ser sammenhengen mellom arealmodell og mengdemodell. Den andre arealeleven var også i misoppfatning, men underveis i intervjuprosessen reflekterte hun seg frem til riktig besvarelse og endret svaret sitt. I motsetning til eleven over, utviklet denne eleven sin begrepsforståelse ved å overføre sin kunnskap fra arealmodellen til mengdemodellen, i tråd med *conceptual understanding* (Kilpatrick et al., 2001).

De to mengdeelevene hadde begge riktig besvarelse, hvor den ene tok i bruk blokkmodellen i sin forklaring og sier også at en tredel og fire tolvdeler er likeverdige brøker. Den andre eleven dividerer seg frem til riktig besvarelse. Besvarelsene indikerer stor grad av dybdeforståelse og elevene kan overføre sin kunnskap til både å forkorte og finne likeverdige brøker. Dette er i overenskomst med det Van de Walle et al. (2014) sier om at mengdemodellen egner seg til utvidelse og forkortelse og kan videreføres til likeverdige brøker. Elever som ved hjelp av kritisk tenkning og refleksjon kommer frem til et resultat, viser dybdeforståelse, i tråd med LK20 (Utdanningsdirektoratet, 2019).

Resultatet på ettertesten viser at arealelevene ikke har hatt noen utvikling innenfor misoppfatning 4, noe som kan tyde på at arealmodellen blir for ensidig og egner seg til å skape forståelse for brøk som del av et areal.

Resultatet på misoppfatning 4 kan tyde på at undervisningen ikke har tilført arealelevene nok dybdekunnskap innen del av en helhet. Mulig begrunnelser kan være at elevene ikke har erfart denne typen oppgaver i sin undervisning og hatt liten variasjon i representasjonsformene. Dette kan indikere at arealelevenes tenkning ikke har blitt utfordret i stor nok grad. Ifølge Fosnot og Perry (2005) er det viktig at undervisningen legger opp til at elevene selv kan konstruere kunnskap og forståelse.

5.5 Ulike modeller som representasjonsformer

Mye tyder på at det å jobbe med samme type oppgave over lengre tid gir elevene god kompetanse i å løse like oppgaver. Bjerke et al. (2012) sier at norske elever møter få representasjonsformer og at norske lærebøker har hovedvekt på arealmodellen, gjerne pizzamodellen i sine oppgaver. De fleste «problemløsningsoppgavene» er også knyttet til areal som pizza eller kake. Ifølge Lamon (2012) er det en fordel at del av helhet presenteres med ulike modeller, både i forhold til del av en hel, del av en mengde og del av lengde.

Førtesten, i vår studie, viste at når elevene fikk en ferdig tegnet ramme, fikk de til å dele opp i like store deler (oppgave 5). I andre typer oppgaver viste førtesten at forklaringsrutene ga oss lite informasjon om elevenes tenkning, noe som kan skyldes at de ikke hadde tidligere erfaring med modeller som verktøy i arbeidet med brøk. Dette gjelder både de elevene som har svart riktig og de som har svart feil. I forklaringsrutene har de skrevet at *«det er vanskelig å forklare»*, eller *«jeg vet ikke hvordan jeg skal forklare det»*. Undervisning som preges av få representasjonsformer og i tillegg preges av memorering av algoritmer, vil ha søkelys på instrumentell forståelse (Skemp, 1976). Ifølge Behr et al. (1983) vil ikke denne arbeidsformen, i henhold til det psykologiske perspektivet, gi elevene mulighet til å utvikle og utvide tenkemåter som igjen åpner for videre intellektuell utvikling.

Dette kan indikere at undervisningen bør preges av at elever får erfaring med ulike modeller, for å skape forståelse. Både areal, mengde og lengdemodeller er alle tre kategorier av modeller og det er, ifølge Van de Walle et al. (2014), nødvendig at elevene forstår brøk innen alle kategoriene. I motsetning til norske elever, skårer japanske elever høyt i emnet brøk. Watanabe (2007) hevder at japanerne introduserer brøk med ulike modeller, blant annet brøk som lineær modell, både større og mindre enn én, i form av tallinje eller flytende væske. Tradisjonelt har norske elever blitt introdusert for brøk ved hjelp av arealmodellen og da kun som mindre enn én (Bjerke et al., 2012). Førtesten viser at elevene ikke har erfaring med å tegne og forklare tenkningen sin i forhold til brøk. For at elevene skal kunne finne verdien av en brøk mellom to brøker, som for eksempel $\frac{2}{4}$ og $\frac{3}{4}$, er det viktig at man jobber med tallinje som representasjon. Elever må få erfaring med at tallinjen kan deles på flere måter. Ifølge Kilpatrick et al. (2001) sorterer dette under *conceptual understanding,* og elever viser god begrepsforståelse ved å velge den mest passende representasjonen.

Dersom elever blir introdusert for ulike modeller gis de større mulighet til å konstruere sin egen forståelse. Svak forståelse for brøk kan ifølge Bjerke et al. (2012) henge sammen med liten variasjon i representasjonsformer. Undervisningen må legge til rette slik at elever får mulighet til å konstruere sin egen forståelse (Fosnot & Perry, 2005) noe som bør ses i sammenheng med dybdelæring.

5.6 Dybdelæring

For å oppnå dybdelæring er det avgjørende at elever forstår brøkaspektene del av helhet, både som tallstørrelse på en tallinje og som relativ størrelse, i tillegg til at de må forstå brøk som forhold, operator og kvotient (Behr et al., 1983). Ved å ta utgangspunkt i elevers forkunnskaper, forsterke dem, og deretter skape ny læring, vil man ta steg mot dybdelæring (NOU, 2015:8). Når elever klarer å forstå prosedyrekunnskap på bakgrunn av begrepsmessig kunnskap er de enda et steg nærmere dybdelæring (Kilpatrick et al. 2001). Når undervisningen gjøres med fokus på kjerneelementene i LK20 vil dette være bevisst jobbing i forhold til tidligere erfaringer og kunnskap (Utdanningsdirektoratet, 2019). Videre bygger man på dette ved å gi utfordringer og støtte slik at det skapes forståelse og ny kunnskap. Tradisjonell brøkundervisning har vært preget av pugging av algoritmer (Bjerke et al., 2013; Neagoy, 2017). Algoritmer i matematikken er utviklet over lang tid, og vi vil ikke oppnå dybdelæring ved å hoppe over denne prosessen med elevene (Kamii & Dominick, 1998).

Ved å kun fokusere på arealmodellen, i del hel aspektet, kan det være vanskelig å oppnå dybdelæring fordi det er ikke alltid er arealmodellen som er best egnet for å løse en oppgave (Bjerke et al., 2013). Dette ser vi tydelig i oppgave 10, ($\frac{1}{2} = \frac{2}{}$) hvor arealelevene hadde lav skår på både før- og ettertesten, noe som kan skyldes at de ikke har erfaring med andre modeller enn arealmodellen. Til sammenligning hadde mengdeelevene god utvikling og nesten alle elevene hadde riktig besvarelse på ettertesten. Dette kan skyldes at mengdemodellen krever forståelse av likeverdighet, siden den består av flere deler, noe som er i tråd med det Hart et al. (1981) sier om at mengdemodellen inviterer elevens tenkning i større grad, enn arealmodellen.

Om dybdelæring sier Kilpatrick et al. (2001) at hvordan elever representerer og kobler sammen deler av kunnskap, vil være en nøkkelfaktor for om de kan bruke denne kunnskapen i problemløsning og videre læring.

Innen aspektet del av en helhet kan det se ut til at elevene må komme ut av heltallstenkning, forstå likedeling og kunne ta i bruk ulike modeller som representasjoner for brøk, for å oppnå dybdelæring. For å virkelig oppnå dybdelæring innen emnet brøk, er alle brøkens fem aspekter like viktige (Behr et al., 1983).

5.7 Drøfting av metode og studiens bidrag til forskningsfeltet

Vi vil i denne delen se på metodene vi har brukt i studien, med et kritisk blikk. I tillegg vil vi kommentere hva vi mener studien kan tilføre til forskningsfeltet.

Først vil vi vurdere kartleggingstesten vår. I etterkant ser vi at vi ville ha gjort noen endringer. For det første ville vi har tatt alle oppgavene våre også med på førtesten, fordi dette ville gitt oss et bedre bilde på endringskåren. I vår analyse og drøfting har vi måttet skille disse oppgavene fra oppgavene som var med på både før- og ettertesten. Forklaringsrutene viste at enkelte av våre oppgaver (oppgave 20 og 22) ga feilsvar som sorterte under flere misoppfatninger, og i en oppfølgingsstudie ville vi ha byttet ut disse oppgavene. Til tross for at kartleggingstesten kunne vært satt sammen annerledes, med noen endringer, vil vi si at testen fungerte tilfredsstillende.

På grunn av Covid 19 lot det seg ikke gjøre å være til stede i alle undervisningstimene slik vi hadde tenkt og på bakgrunn av dette har vi ingen garanti for at undervisningen ble akkurat slik vi hadde planlagt. Hadde vi hatt mulighet til å være til stede i alle timene, ville dette kunne påvirket oss og vår forskning. Vi kan ikke være sikre på at den praktiske og den utforskende delen av opplegget var like utforskende i begge klassene. Det samme gjelder tidsbruken og informasjonen den enkelte elev har fått. Vi hadde noen elever som ikke deltok på alle undervisningstimene, noe som selvfølgelig kan ha påvirket resultatet. Vi forsøkte, i så stor grad som mulig, å legge til rette for at disse elevene fikk undervisningen de hadde gått glipp av, uten at vi kan garantere at det ble den lik undervisningen som det de andre fikk. Uten sykdom og med større kontinuitet i undervisningen, for alle elevene, kunne resultatet blitt annerledes.

Siden vår studie er en kvalitativ studie med få informanter, vil det ikke være mulig å generalisere våre funn. Vi vil likevel si oss fornøyde og karakterisere vår studie som vellykket. Det er gjort mange studier innenfor ulike områder av brøk, men vi har ikke greid å finne noen som sammenligner ulike innfallsvinkler til brøk, og vi anser vårt forskningsprosjekt som nybrottsarbeid.

6 Konklusjon

I vår studie har vi undersøkt følgende problemstilling:

Hvilken betydning har undervisningens innfallsvinkel for elevenes forståelse i emnet brøk?

For å finne svar på vår problemstilling måtte vi utvikle to ulike undervisningsopplegg og gjennomføre de med to femteklasser, vi testet klassene før- og etter undervisningen og gjennomførte intervju. På bakgrunn av dette hadde studien vår et mixed methods design, hvor kartleggingstestene ble telt opp kvantitativt og analysert kvalitativt med fokus på misoppfatninger, ulike oppgaver og intervju. Ifølge Creswell (2014) er mixed methods design at forskeren benytter seg at både kvalitativ og kvantitativ metode, og i tillegg har en pragmatisk tilnærming. Den kvantitative opptellingen viste at både arealelevene og mengdeelevene hadde fremgang fra før- til ettertest i aspektet del av helhet. Førtesten gir et bilde av det Cohen et al. (2018) kaller baseline assessment og måler elevens utgangspunkt før oppstart av et undervisningsopplegg. De omtaler en ettertest etter endt undervisning som en summativ test, for å måle læringen i det emnet undervisningen var sentrert rundt.

Det totale bildet viser en større positiv fremgang hos mengdeelevene enn hos arealelevene. Arealelevene hadde en gjennomsnittlig fremgang på 2,12 riktige besvarelser mot mengdeelevene som hadde en gjennomsnittlig fremgang på 5,25 riktige besvarelser. Studien viste videre at innenfor noen områder var resultatet forholdsvis likt mellom de to klassene, mens forskjellene var større innen andre områder. Funnet indikerer at mengdemodellen som innfallsvinkel kan utvikle elevers forståelse i brøk som del av en helhet i større grad enn arealmodellen. Våre forventninger var at klassene skulle ha fremgang fra før- til ettertest på bakgrunn av at undervisningen var i tråd med det elevene ble testet i og testene var identiske.

De kvalitative funnene kan indikere at mengdeelevene fikk en dypere og en mer grunnleggende forståelse for brøk som del av en helhet, spesielt innenfor likeverdighet og bruk av modeller i sine forklaringer. Ifølge Hart et al. (1981) kan mengdemodellen skape forståelse for likeverdige brøker og dermed også forkortelse og utvidelse av brøk. Den kan i tillegg ifølge Van de Walle et al. (2014) skape forståelse for situasjoner hvor gruppering inngår, samt for brøk som forhold. Innenfor områdene heltallstenkning og likedeling er ikke resultatet like entydig, da ingen av gruppene utmerker seg, men skårer relativt likt, noe som indikerer at arealundervisningen lykkes på lik linje med mengdeundervisningen innen noen områder.

I undervisningssammenheng kan det være verdt å diskutere hvorvidt en dreining bort fra arealmodellen som den mest brukte innfallsvinkel, for i større grad å benytte mengdemodellen i aspektet del av helhet. På bakgrunn av vår studie kan det se ut til at mengdemodellen ikke står tilbake for arealmodellen for å forstå brøk som del av et areal. Basert på data og funn ser du til at arealmodellen kan ha vanskeligere for å skape forståelse for brøk som del av en mengde og funnene våre kan tyde på at arealmodellen blir for instrumentell og ikke gir nok rom for dybdelæring slik den når blir brukt.

Kanskje er det slik at for å skape dybdelæring innen aspektet del av helhet, må elevene møte alle de tre modellene *areal, mengde og lengde*? Trolig må de også få forståelse for alle aspektene innen brøkens verden slik at de kan nyttiggjøre seg dette i forhold til algebra, prosent, desimaltall og hverdagslivet ellers.

6.1 Veien videre

Etter å ha arbeidet med vår studie har vi fått en dypere innsikt i hvilken innfallsvinkel som skaper best grunnleggende forståelser i emnet brøk av arealmodellen og mengdemodellen. Med utgangspunkt i studien vår håper vi at også lærere kan ta lærdom av våre funn og utvikle sin brøkundervisning. Ut fra det vi har sett i vår studie kunne det vært spennende å gjøre en kvantitativ undersøkelse for å finne svar på innfallsvinkelens betydning i emnet brøk. Det kunne også være interessant å forske på hvorvidt en samtidig undervisning med alle tre modellene innen brøk som del av helhet, ville ført til en bedre forståelse hos elevene. Vi viser også til Bjerke et al. (2013) som sier at det hersker uenighet om hva utgangspunktet for brøkundervisning bør være. Videre viser de til at det er god dokumentasjon for at ensidig fokus på arealmodellen hemmer forståelsen for brøk og at endringen må starte hos lærerne.

Referanseliste

Alrø, H. & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and Learning in mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Behr, M., Lesh, T., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational-number concepts. I R. Lesh & M. Landau (Red.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Process* (s.91-125). New York: Academic Press.

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag*. Oslo: Scandinavian University Press (Universitetsforlaget).

Bjerke, A. H., Eriksen, E., Rodal, C. & Ånestad, G. (2013). Når brøk ikke er tall: Eksempler på misoppfatninger knyttet til brøk som tallstørrelse. I I. Pareliussen, B. B. Moen, R. A. & T. Solhaug (red), *FoU i praksis 2012 conference proceedings* (s.28-36). Trondheim: Akademika Forlag.

Brekke, G. (2002): *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk.* Oslo: Læringssenteret (Utdanningsdirektoratet).

Boaler, J., & Dweck, C. (2016). *Mathematical mindsets: unleashing students' potensial through creative math, inspiring messages, and innovative teaching.* San Francisco, Calif.: Jossey Bass Publishers.

Brown, G.T.L., Irving, S.E. & Keegan, P.J. (2008). *An Instruction to Educational Assessment, Measurement, and Evaluation: Improving the quality of teacher-based assessment* (2.utg.). Auckland, New Zealand: Pearson Education NZ.

Brown, M., Küchemann, D., and Hodgen, J. (2010). *The struggle to achieve multiplicative reasoning* 11-14. I M. Joubert & P. Andrews (Red.), Proceeding of the Seventh British Congress of Mathematics Education (BCME7), 30, 49-56. England: University of Manchester: BSRLM.

Bryman, A. (2006). Integrating quantitative and qualitative research: how is it done? *Qualitative Research*, 6(1), s.97-113. Hentet 22.02.22 fra https://drive.google.com/drive/folders/1fbl6iSlQ4oxKuy41-32inRJXcFKLDQVU

Charalambous, C. Y. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics,* 64(3), 293- 316. Hentet 22.02.22 fra https://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012): *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Oslo: Abstrakt forlag AS.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018): *Research methods in education.* New York: Routledge.

Cresswell, J.W. (2014). Research design: *Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches (4. utg.)* USA: SAGE Publications.

De Vellis, R.F. (2017). *Scale development: Theory and applications (4.utg.).* Thousands Oaks, California: Sage.

Empson, S. B. & Levi, L. (2011): *Extending Children's Mathematics, Fractions and Decimals.* Portsmouth: Heinemann.

Fosnot, C.T. & Perry, R.S. (2005). Constructivism: A Psychologial Theory of Learning. I C.T. Fosnot (Red.), *Constructivism: Therory, perspectives, and practice* (s. 8-38). Teachers College, Columbia UniversityTeachers College Press. Hentet 20.02.22 Constructivism: Theory, Perspectives, and Practice, Second Edition (beyondbitsandatoms.org)

Gleiss, M. S. & Sæther, E. (2021): *Forskningsmetode for lærerstudenter.* Oslo: Cappelen Damm AS.

Grønmo, L. S., Hole, A. & Onstad, T. (2016). Ett skritt fram og ett tilbake: TIMSS advanced 2015 Matematikk og fysikk i videregående skole. Cappelen Damm Akademisk/NOASP (Nordic Open Access Scholarly Publishing).

Hart, K., Brown, M.L., Küchemann, D.E., Kerslake, D., Ruddock, G. & Mc Cartney, M. (1981). Children's understanding of mathematics: 11-16. London: John Murray.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986) Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductury analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* (bd. 2, s.1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Ivankova, N. & Wingo, N. (2018). *Applying Mixed Methods in Action Research: Methodological Potentials and Advantages, American Behavioral Scientist*, 62(7), 978- 997. Hentet 20.02.22 fra https://doi.org/10.1177/0002764218772673

Kamii, C. & Dominick, A. (1998). The Harmful effects of algorithms in grades 1-4. *The teaching and learning of algorithms in school mathematics,* 19, 130-140.

Kieren, T.E. (1981). Five faces of mathematical knowledge building. I. Edmonton: Department of Secondary Education, University of Alabama.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington DC.: National Academy Press. Hentet 08.01.22 fra https://static1.squarespace.com/static/5b4fde59b27e395aa0453296/t/5bd2a5d89140b763780f0aab/1540531701125/Kilpatrick%2C+Swafford%2C+Findell+-+2001+-+Adding+It+Up+Helping+Children+Learn+Mathematics+copy.pdf

Kleve, B. (2014). Kunnskapskvartetten i matematikk. I. P. S. Andersen, I. C. Borge, T. S. Gustavsen & K. R. C. Hinna (red.) *QED 5-10: Matematikk for grunnskolelærerutdanningen bind 2* (s.589-618). Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Kvale, S. (1996). An Introduction to Qualitative Research Interviewing. London: SAGE Publications.

Lamon, S.J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3.utg.) Routledge Ltd - M.U.A.

Li, X. & Li, Y. (2008). Research on students' misconceptions to improve teaching and learning in school mathematics and science. School Science and Mathematics, 108(1), 4-8.

Lyngsnes, K.M. & Rismark, M. (2014). *Didaktisk arbeid* (3.utgave). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Ma, Liping. (2010): *Knowing and teaching elementary Mathematics* (2nd utg.). New York: Routledge, Taylor & Francis.

McIntosh, A. (2007). Alle Teller! Håndbok for lærere som underviser i matematikk i grunnskolen (M. R. Settemsdal & I. M. Stedøy-Johansen, Overs.). Trondheim: Skipnes.

Matematikksenteret.no: Fra læreplan til praksis. Hentet 26.01.22 fra https://www.matematikksenteret.no/l%C3%A6replan-i-matematikk/fra-l%C3%A6replan-til-praksis

Maxwell, J.A. (2013).*Qualitative Research Design. An Interactive Approach.* (3rd edition). California USA: SAGE Publications, Inc.

Mitchell, A. & Horne, M. (2010). *Gap thinking fractions pair comparisons is not whole number thinking : Is this what early equivalence thinking sounds like?* Innlegget presentert ved the Annual Meeting of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Freemantle, Western Australia. Abstract. Hentet 20.02.22 fra https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED520918.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Neagoy, M. (2017). U*npacking Fractions: Classroom-Tested Strategies to Build Students' Mathematical Understanding* ASCD.

NESH. (2016). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. Oslo. Hentet 14.03.22 fra https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Newstead, K. & Murray, H. (1998). Young students' constructions of fractions. PME CONFERENCE (s. 295-302).

Ni, Y. & Zhou, Y.-D. (2005). *Teaching and learning fraction and rational numbers : The origins and implications of whole number bias. Educational Psychologist, 40*(1), 27-52. Hentet 20.02.22 fra https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1207/s15326985ep4001_3

Pantziara, M. & Phillippou, G. (2012). Levels of students' «conceptions» of fractions. *An international Journal,* 79(1), 61-83. Hentet 20.2.22 fra https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-011-9338-x

Pearn, C. & Stephens, M. (2004). Why you have to prove to discover what year 8 students really think about fractions. I R. F. Putt & M. Mclean (Red.), *27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (s.430-437).

Postholm, M.B. (2010). *Kvalitativ metode; en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier*. Oslo: Universitetsforlaget.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D.I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanning.* Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Razak, F.A., Noordin, N., Alias, R. & Dollah, R. (2012). *How do 13-year olds in Malaysia compare fractions ? Procedia – Social and Behavioral Sciences, 42*(C), 100-105. Hentet 20.02.22 fra https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.04.171

Ryan, J. & Williams, J. (2007). Children's Mathematics 4-15. Learning from errors and misconceptions. Berkshire, England: Open University Press. McGraw - Hill Education.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., David-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological science*, 23(7), 691- 697. Hentet 20.02.22 fra https://doi.org/10.1177%2F0956797612440101

Shoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. I.D. Grouws (Red.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (s.334-370).* New York: MacMillan.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School.*

Solem, I., Alseth, B., Eriksen, E. & Smestad, B. (2020). *Tall og tanke 2. Matematikkundervining på 5. til 7. trinn.* Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education : A paradigm of developmental research* Springer Science & Business Media.

Subramaniam, K. (2013). Reseatch on the Learning of Fractions and Multiplicative Reasoning: A Review. I S. Chunawala (REd.), *The epiSTEME reviews: Research Trend in Science, Technology and Mathematics Education* (B.4). New Dehli, India: Macmillian.

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse. En innføring i kvalitative metoder.* Bergen: Fagbokforlaget.

Utdanningsdirektoratet (2006). Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04). Hentet 20.02.22 fra Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04) (udir.no)

Utdanningsdirektoratet (2019). *Dybdelæring.* Hentet 22.01.2022 fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/dybdelaring/

Utdanningsdirektoratet (2020). *Læreplanverket.* Hentet 27.01.2022 fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/

Utdanningsdirektoratet (2020). *Læreplan i matematikk (MAT01-05).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. Hentet 05.02.22 fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv19?lang=nob

Van De Walle, J.A. Karp, K.S., & Bay Williams, J.M. (2014). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally.* Essex: Pearson Education Limited.

Watanabe, T. (2007). Initial treatment of fractions in Japanese textbooks. *Focus on Learning Problems in Mathematic,* 29(2), 41-60.

Watson, J.M., Campbell, K. J. & Collis, K. F. (1999). *The structural development of the concept of fraction by young children. Journal of structural learning and intelligent systems, 13*(3-4), 171-193.

William, D. (2007). Keeping learning on track. I F. Lester (Red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (s.1053 – 1098).* Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.

William, D. (2018). *Embedded Formativ Assessment.* Second Edition. Bloomington, Indiana: Solution Tree Press.

Wu, M., Tam, H.P. & Jen, T. - H. (2016). *Educational measurement for applied researchers: Theory into practice.* Singapore: Springer Singapore.

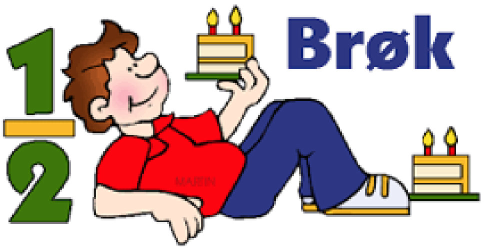
Wæge, K. (2007). *Elevenes motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning.* Trondheim: Norges Tekninsk-Naturvitenskaplige Universitetet (NTNU).

Wæge, K. & Nosrati, M., (2018). *Motivasjon i matematikk.* Oslo: Universitetsforlaget.

Vedlegg 1 Oppgavesett kartlegging

Oppgavesett brøk

Navn___________



- Les oppgaveteksten nøye på alle oppgavene.
- Gjør så godt du kan på alle oppgavene! Det er flott om du avgir et svar, selv om du er usikker.
- Vis/forklar svaret ditt der du får beskjed om dette.
- Lykke til 😊

Oppgave 1

Sett kryss i den eller de av figurene der $\frac{1}{3}$ er fargelagt blå.

Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 2

Oversikten viser hvilket kosthold kaniner bør ha.

Hvor stor brøkdel av kostholdet til kaniner bør være høy, ifølge oversikten?

Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 3

Hanna kjøper to flasker brus. Hver flaske rommer $\frac{1}{2}$ L.

Hvor mange liter brus kjøper Hanna?

Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 4

Studer brøkene $\frac{1}{8}$ og $\frac{1}{9}$.

Hvilken brøk er størst?

Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 5

Fargelegg tre firedeler ($\frac{3}{4}$) av denne figuren.

Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 6

Skriv en brøk som har en verdi mellom $\frac{1}{3}$ og $\frac{2}{3}$.

Forklar hvordan du tenker her:

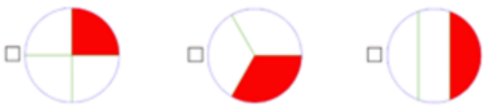
Oppgave 7

Skriv en brøk som har dobbelt så stor verdi som $\frac{1}{6}$.

Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 8

Velg den, eller de av figurene der $\frac{1}{3}$ er fargelagt rød



Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 9

Tegn en ring rundt $\frac{1}{3}$ av brikkene.

Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 10

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\square}$$

Hva skal stå i den tomme ruta?

Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 11

Familien til Henrik er på biltur. Henrik spør om de har igjen $\frac{1}{3}$ av turen. Mor sier de har igjen mindre enn det.

Hvor langt kan de ha igjen av turen?

Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 12

Hvor stor brøkdel av flagget til Ecuador er rødt?

Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 13

Henrik og Kasper deler likt $\frac{1}{4}$ L saft.

Hvor mange liter får de hver?

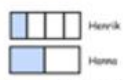
Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 14

Henrik og Hanna får ukepenger.
Henrik sparer $\frac{1}{4}$ av pengene sine, mens Hanna sparer $\frac{1}{2}$ av pengene sine.

Fire elever blir spurt om Henrik kan spare mer penger enn Hanna.

Hvilken forklaring er riktig?

- ○ Henrik sparer mer enn Hanna, hvis hun får mer enn dobbelt så mye i ukelønn.
- ○ 

Hanna sparer alltid mer enn Henrik.
- ○ Henrik sparer alltid mer enn Hanna fordi $\frac{1}{4}$ er større enn $\frac{1}{2}$.
- ○ 

Begge sparer like mye.

Oppgave 15

Tegn en ring rundt en tredel av boksene.

Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 16

Knut deler et eple i to. Deretter deler han den ene halvdelen i to.

a) Hvor mange eplebiter har Knut nå? ____

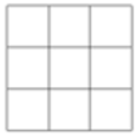
b) Hvor stor del av hele eplet er en av de minste eplebitene?

Skriv som brøk: ____

Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 17

Sett kryss i $\frac{3}{3}$ av rutene nedenfor



Forklar hvordan du tenker:

Oppgave 18

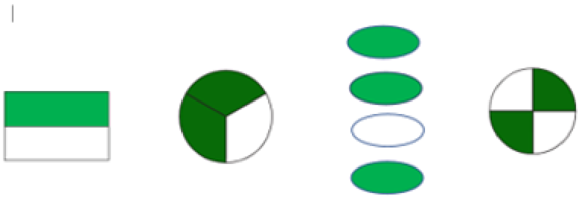
Skriv en brøk som har samme verdi som $\frac{4}{5}$.

Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 17

Oppgave 20

Figurene nedenfor representerer ulike brøkverdier. Sett ring rundt de figurene som har samme verdi.



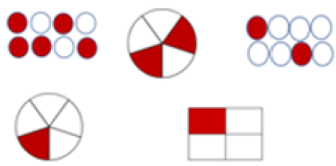
Oppgave 21

Tegn en figur der $\frac{1}{4}$ er fargelagt.

Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 22

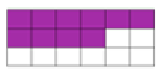
Sett ring rundt figurene som representerer samme brøkverdi.



Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 23

Hvilken av de fem sirklene representerer samme brøk som den i rektangelet?

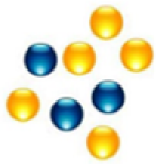


Forklar hvordan du tenker her:

Oppgave 24

Jens har tre blå og fem gule klinkekuler.

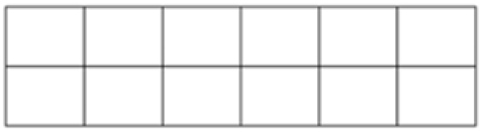
Hvor stor brøkdel av klinkekulene er blå?



- ○ $\frac{8}{3}$
- ○ $\frac{5}{3}$
- ○ $\frac{3}{5}$
- ○ $\frac{3}{8}$

Oppgave 25

Skraver eller fargelegg $\frac{1}{4}$ av rutene nedenfor.



Oppgave 26

I klasse 5B er det 18 elever, $\frac{2}{3}$ av elevene spiller fotball. Hvor mange elever spiller fotball?

Forklar hvordan du tenker her:

Vedlegg 2 Oversikt over hva oppgavene tester

Misoppfatning 1 - Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse

Misoppfatning 2 - Jo større nevner (eller teller), jo større brøk

Misoppfatning 3 - Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken

Misoppfatning 4 - Teller eller nevner som isolert tall

Misoppfatning 5 - Ulike misoppfatninger

Oppg	Innhold/oppgavens hensikt	Hentet fra
1	Tester om elevene tar hensyn til at delene skal være like store. Om de er i misoppfatning vil de kunne svare at alle de tre figurene som er delt i tre er rett, alternativ 1, 2, og 4. Misoppfatning 1.	Matematikksenteret
2	Tester om elevene har kontroll på likedeling av en figur. Misoppfatning 1.	Matematikksenteret
3	Tester om eleven forstår at en todel er det samme som halv. Misoppfatning 2.	Matematikksenteret
4	Tester om elevene ser på størrelsen til nevneren, når de skal avgjøre brøkens verdi. Ser isolert på verdien til tallene eller bruker kunnskapen de har om de hele tallene. Misoppfatning 2.	Matematikksenteret
5	Her skal elevene dele figuren inn i riktig antall deler, for så å fargelegge 3 deler. Tester om elevene deler figuren i like store deler. Misoppfatning 1.	Alle teller
6	Tester om elevene klarer å angi en brøk mellom to brøker med samme nevner. Misoppfatning 5.	Matematikksenteret
7	Tester om elevene kan finne brøk med dobbel så stor verdi som ⅙. Misoppfatning 2.	Realfagsløyper
8	Tester om elevene har kontroll på likedeling av en figur. Elevene som ikke tar hensyn til at delene er ulike i størrelse, vil kun se på antall deler når de angir svaret. Elever i denne misoppfatningen vil krysse av for alternativ 2 og 3. Misoppfatning 1.	Realfagsløyper
9	Tester om elevene har forstått at de må dele 12 i like store deler. Elevene kan se teller lik 1 og sette ring rundt 1 brikke (telleren i $\frac{1}{3}$). Eller de kan sette ring rundt 3 brikker (nevneren i $\frac{1}{3}$). Misoppfatning 4.	Realfagsløyper
10	Tester om elevene ser på differansen mellom teller og nevner. Elever som er i denne misoppfatningen, vil svare 3. Misoppfatning 3.	Realfagsløyper

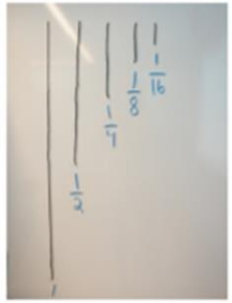
11	Elevene kan tenke at jo større nevner (eller teller), jo større brøk. Er de i denne misoppfatningen vil de kunne svare $\frac{1}{2}$, siden 2 er mindre enn 3. Misoppfatning 2.	Realfagsløyper.
12	Tester om elevene tar hensyn til at delene skal være like store. Mulig feilsvar $\frac{1}{3}$. Misoppfatning 1.	Realfagsløyper
13	Større nevner gir større brøk, er også i misoppfatning at mindre nevner gir mindre verdi. Her vil elever som er i misoppfatning svare at de får $\frac{1}{2}$l saft hver, siden to er mindre enn 4. Misoppfatning 2.	Realfagsløyper
14	I denne oppgaven skal elevene ta stilling til ulike forklaringer, om det er mulig at $\frac{1}{4}$ kan være større enn $\frac{1}{2}$. Om elevene velger svaret nede til venstre, kan eleven være i misoppfatning 2. Om eleven velges svaret ned til høyre, kan elevene være i misoppfatning 4. Misoppfatning 5.	Realfagsløyper
15	Tester om elevene har forstått at man må dele i tre like store deler, gruppere i par. Misoppfatning 4.	Alle teller
16	Tester om elvene har skjønt at delene må være like store for å bestemme brøkdelen. Misoppfatning 5.	Alle teller
17	Tester om elevene har forstått at når teller og nevner er like store, er dette hele helheten. Elevene som ser på teller og nevner som isolerte tall, og fargelegger tre ruter er i misoppfatning. Misoppfatning 4.	Realfagsløyper
18	Tester om elevene har forstått at man må dele opp brøkdelene i mindre like store deler. I denne misoppfatningen vil elevene kunne gi svaret $\frac{5}{6}$ - $\frac{6}{7}$ - $\frac{7}{8}$ Misoppfatning 3.	Realfagsløyper
19	Tester om elevene vet hvilke brøker som er større enn $\frac{1}{5}$. Elever som er i misoppfatning kan svare f.eks $\frac{1}{6}$ fordi de bruker det de har lært om hele tall, 6 er større enn 5, derfor er $\frac{1}{6}$ størst. Misoppfatning 2.	Matematikksenteret
20	Denne oppgaven kan løses på flere måter ut fra en evt. misoppfatning. Eks: de kan sette ring rundt figurene med likt antall grønn, eller de kan sette ring rundt alle figurene som mangler en grønn. Derfor går denne oppgaven mot to misoppfatninger. Misoppfatning 2 og 3.	Idé fra Pantziara & Philippou
21	Her skal elevene tegne figuren selv, og dele i like størrelse. Tester om elevene deler figuren i like store deler. Misoppfatning 1.	Egenprodusert
22	Denne er litt vanskeligere enn oppgave 20. Denne oppgaven kan også løses på flere måter ut fra en evt. misoppfatning. Eks: de kan sette ring rundt alle de som mangler tre rød, eller de kan sette ring rundt de figurene som har likt antall røde. Derfor går denne oppgaven også mot	Idé fra Pantziara & Philippou

	to misoppfatninger. Misoppfatning 2 og 3.	
23	Tester om elevene klarer å se verdien til brøken ut fra differansen mellom teller og nevner. Misoppfatning 3.	Idé fra Pantziara & Philippou
24	Elevene kan tolke blå og gul som to isolerte verdier, og krysse av for $\frac{3}{5}$. Misoppfatning 4.	Tidligere oppgave fra nasjonale prøve i regning
25	Tester om elevene kan finne $\frac{1}{4}$ av en figur delt inn i ruter. Misoppfatning 4.	Egenprodusert
26	Tester om elevene har forstått at man må dele helheten i tre like store deler og ta antallet i to av disse delene for å finne antall fotballspillere i klassen. Misoppfatning 4.	Egenprodusert

Vedlegg 3 Undervisningsopplegg arealmodell

Time 1 - intro

LAKRISBRØK



Tema
Tall og algebra

Trinn
S-M-U-V

Tidsbruk
30 minutter

Utstyr
Lakrislisser, saks, papirlapper, skrivesaker, tape

Forberedelse
Kjøp inn en pose lakrislisser per klasse (25 elever),

lag blanke lapper slik at alle elevene har en lapp hver.

Gjennomføring
Denne oppgaven gjennomføres ved introduksjon til brøk.

Lærer skriver følgende brøker på tavla:

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{8} \qquad \frac{1}{16}$$

Elevene bes deretter å velge en av disse brøkene og skrive hvor stor del av lakrislissen de ønsker å spise. Det kan være en fordel å ikke gi elevene lang betenkningstid! Lappen skal deretter snus og legges ytterst på pulten.

Lærer demonstrerer hvor stor del en halv lakrislisse er ved å klippe en lisse i to. Deretter henges den halve lissen opp på tavlen/veggen med tape slik at lissens lengde er synlig for hele elevgruppen. Deretter klippes den resterende halve i to like deler, og lissen som nå er en fjerdedel henges ved siden av den halve lissen. Slik fortsetter lærer til alle brøkene over er representert på tavlen. Elevene får deretter en lakrislisse på størrelsen med den brøken de har skrevet på lappen.

Etter gjennomføringen er det viktig med en diskusjon rundt resultatene. Hensikten med opplegget er å bevisstgjøre elevene slik at de er klar over at nevneren ikke avgjør en brøks verdi. Det er også lurt å diskutere hvordan resultatet ville blitt dersom lakrislissen i utgangspunktet var kortere eller lenger. Dette gjør at elevene starter en refleksjon rundt det faktum at brøken er avhengig av hvor stor en hel er.

Økt 1 – arbeidsark 1

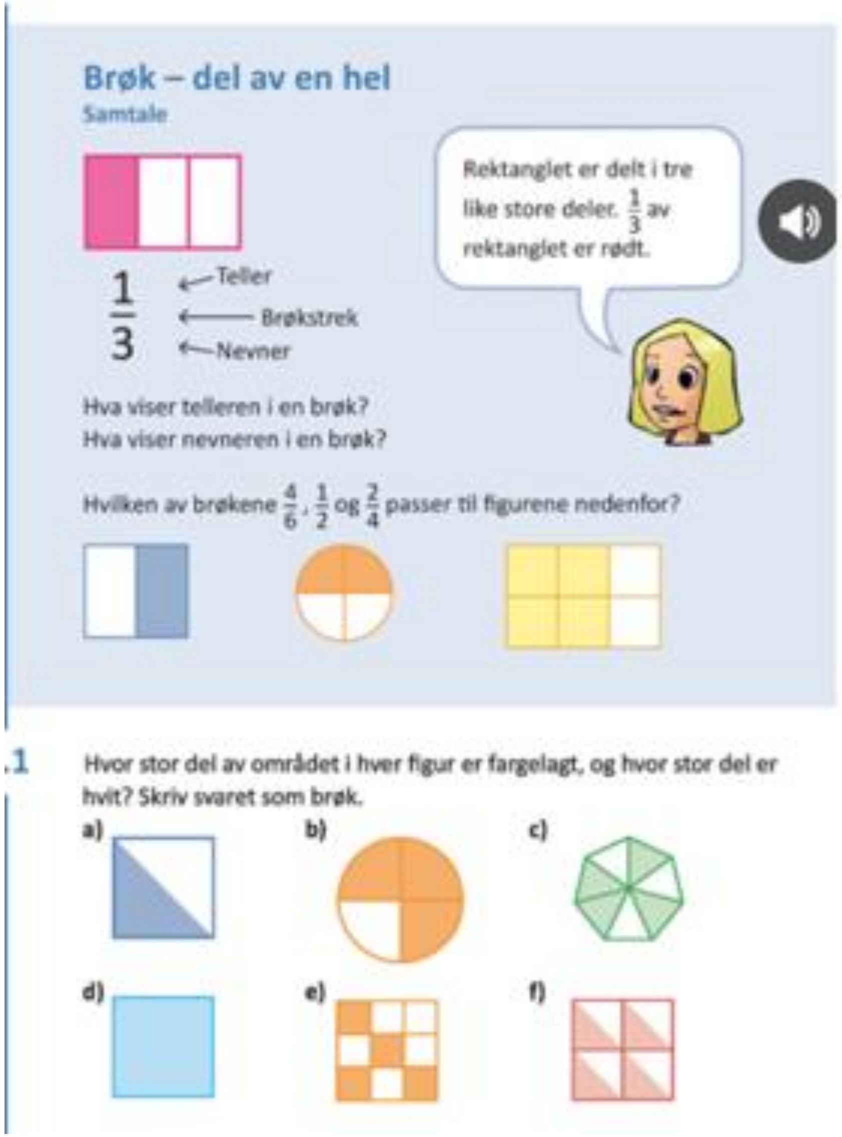
Fargelegg brøkene:

1. $\frac{1}{3}$ =
2. $\frac{1}{2}$ =
3. $\frac{2}{6}$ =
4. $\frac{4}{10}$ =
5. $\frac{2}{5}$ =
6. $\frac{6}{8}$ =
7. $\frac{1}{5}$ =
8. $\frac{3}{6}$ =
9. $\frac{6}{10}$ =
10. $\frac{2}{3}$ =
11. $\frac{2}{4}$ =
12. $\frac{1}{8}$ =
13. $\frac{4}{6}$ =
14. $\frac{2}{10}$ =
15. $\frac{4}{5}$ =
16. $\frac{1}{4}$ =
17. $\frac{1}{10}$ =
18. $\frac{7}{10}$ =
19. $\frac{3}{8}$ =
20. $\frac{5}{6}$ =

Time 2

Intro side 114 – 115 – radius

Kort 6, tegne kaker



Brøk – del av en hel
Samtale

Rektanglet er delt i tre like store deler. $\frac{1}{3}$ av rektanglet er rødt.

$\frac{1}{3}$ ← Teller, ← Brøkstrek, ← Nevner

Hva viser telleren i en brøk?
Hva viser nevneren i en brøk?

Hvilken av brøkene $\frac{4}{6}$, $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{4}$ passer til figurene nedenfor?

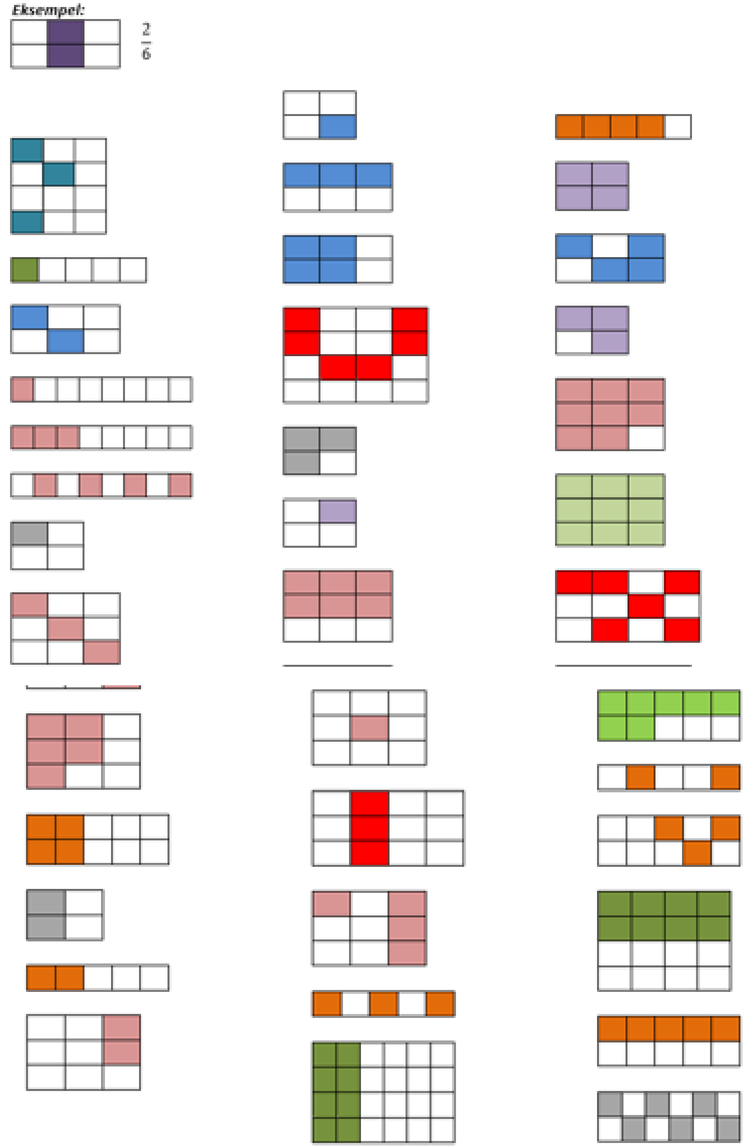
.1 Hvor stor del av området i hver figur er fargelagt, og hvor stor del er hvit? Skriv svaret som brøk.

a) b) c) d) e) f)

Økt 1 – arbeidsark 2

HVOR STOR DEL AV HVER TABELL ER FARGELAGT?
SKRIV BRØKEN VED SIDEN AV TABELLEN ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

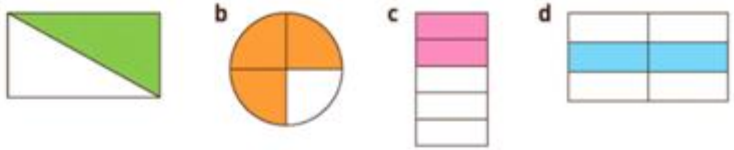
Eksempel:



Time 3 Arbeidsark 1

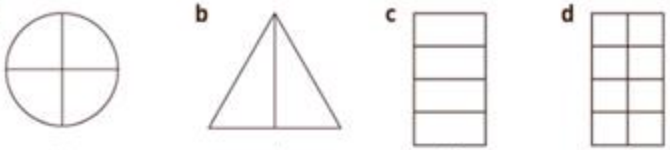
1 **Hvor stor del av figurene er fargelagt?**

a b c d



2 Fargelegg så stor del som brøkene viser.

a b c d

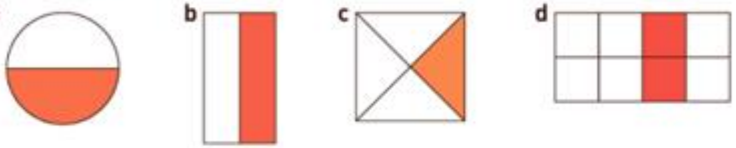


$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{8}$

3

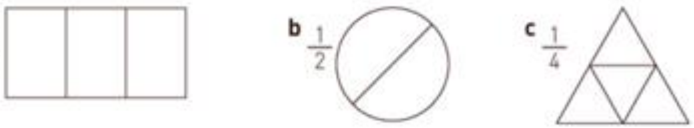
Hvor stor del av figurene er fargelagt?

a b c d



4 Fargelegg så stor del som brøkene viser.

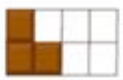
a $\frac{1}{3}$ b $\frac{1}{2}$ c $\frac{1}{4}$



5

a Hvor stor del av sjokoladen er spist?

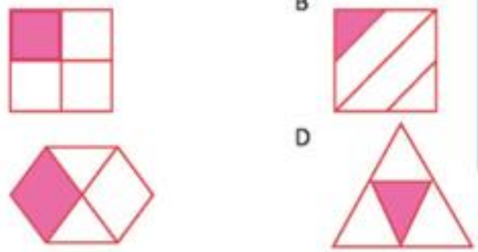
b Hvor stor del er igjen?



11.2

I hvilke figurer er $\frac{1}{4}$ av området fargelagt?

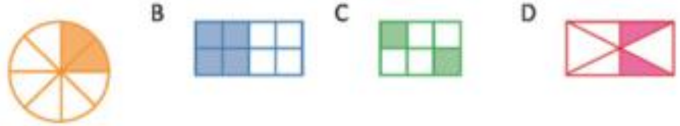
A B C D



11.3

I hvilke figurer er $\frac{2}{6}$ av området fargelagt?

A B C D



11.4

Lag figurer som passer til brøkene.

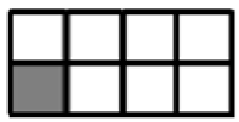
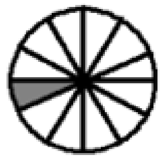
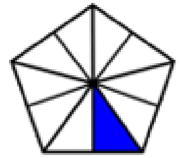
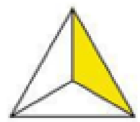
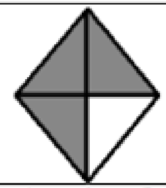
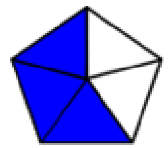
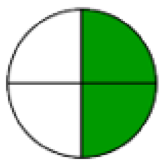
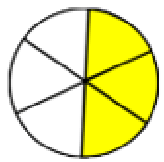
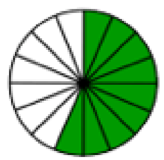
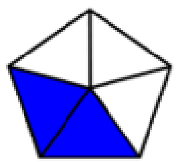
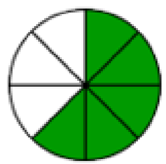
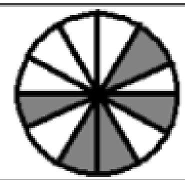
a) $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{4}{5}$ **d)** $\frac{3}{8}$

Sammen

- Legg seks kort med tallene 1, 2, 3, 4, 5 og 6 i en boks. Trekk to kort fra boksen.
- Det første kortet viser hvor mange kakestykker du spiser. Det andre kortet viser hvor mange kakestykker klassekameraten din spiser. Dere spiser opp hele kaken.
- Tegn kaken og skriv brøkene.
- Gjenta øvelsen fem ganger.

ikt 3 – arbeidsark 3

What fraction of the shape is shaded? Circle the correct answer.

		
$\frac{8}{1}$ $\frac{8}{7}$ $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$ $\frac{12}{1}$ $\frac{10}{11}$	$\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{10}{1}$
		
$\frac{3}{1}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{3}{5}$
		
$\frac{2}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{4}{2}$	$\frac{6}{3}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{2}{3}$	$\frac{7}{16}$ $\frac{16}{9}$ $\frac{9}{16}$
		
$\frac{3}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{2}$	$\frac{5}{8}$ $\frac{8}{5}$ $\frac{3}{5}$	$\frac{12}{5}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{5}{12}$

Time 3 – arbeidsark 2

Color the fraction.

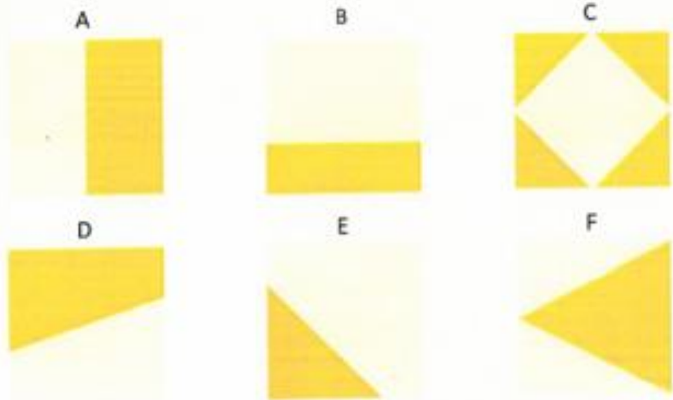
1. $\frac{2}{5}$ =
2. $\frac{7}{8}$ =
3. $\frac{2}{3}$ =
4. $\frac{3}{4}$ =
5. $\frac{1}{6}$ =
6. $\frac{1}{2}$ =
7. $\frac{7}{10}$ =
8. $\frac{4}{8}$ =
9. $\frac{5}{6}$ =
10. $\frac{1}{5}$ =
11. $\frac{6}{10}$ =
12. $\frac{2}{4}$ =
13. $\frac{4}{10}$ =
14. $\frac{5}{8}$ =
15. $\frac{3}{8}$ =
16. $\frac{3}{10}$ =
17. $\frac{1}{3}$ =
18. $\frac{9}{10}$ =
19. $\frac{2}{6}$ =
20. $\frac{4}{5}$ =

Time 4

Utforsking av kakeoppgave side 105 – matematikk

Utforsk sammen

Radius har bursdag og har invitert kjæresten Radine til selskap. Figurene nedenfor illustrerer hvordan kakene er delt opp.



Hvilke av kakene viser at Radius og Radine får like mye hver? Finn andre måter som en kvadratisk kake kan deles i to like store deler på.

Matematikk side 105 – 107

Økt 3 – arbeidsark 4

Oppgave 32

Fargelegg [illegible] av rutene i rutenettet.

1 Hvor stor del av figurene er farget, og hvor stor del er hvit? Skriv svaret som brøk.

Farget: ________

Hvit: ________

Farget: ________

Hvit: ________

65 Henrik bakte en sjokoladekake og delte den i åtte like store stykker.

a) Hva heter brøken som sier hvor stort ett kakestykke er? Skriv brøken.
b) Jens tar et stykke av kaka. Hvor stor del er igjen av kaka?
c) Henrik spiser et stykke selv og gir et stykke til bestemoren sin. Hvor mye har blitt spist av kaka, og hvor mye er igjen av kaka?

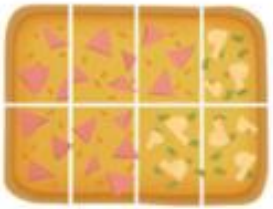
66 Jenny og Hugo hadde tre lakrissnører. De fant fort ut at det var vanskelig å dele tre lakrissnører. Derfor delte de hver av lakrissnørene i to.

a) Hvor mange biter har de nå?
b) Hvor mange biter får de hver hvis de deler likt?

Brøk – del av en hel

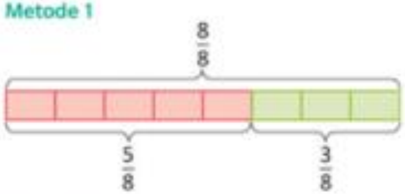
Samtale

Hvor mange deler er hele pizzaen delt i?
Hvor mange brøkdeler av pizzaen er med skinke?
Hvor mange brøkdeler av pizzaen er uten skinke?



5 — telleren viser hvor mange deler vi har
— — brøkstrek
8 — nevneren viser hvor mange deler det er i alt

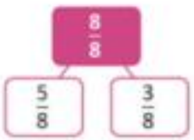
Metode 1



Svar: $\frac{5}{8}$ av pizzaen er med skinke

og $\frac{3}{8}$ av pizzaen uten skinke.

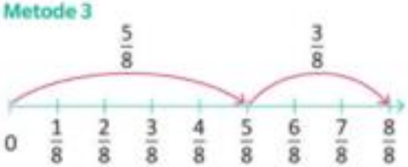
Metode 2



Svar: $\frac{5}{8}$ av pizzaen er med skinke

og $\frac{3}{8}$ av pizzaen uten skinke.

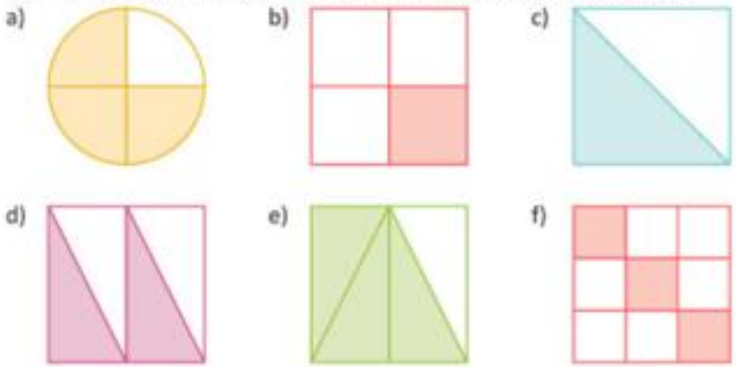
Metode 3



Svar: $\frac{5}{8}$ av pizzaen er med skinke

og $\frac{3}{8}$ av pizzaen uten skinke.

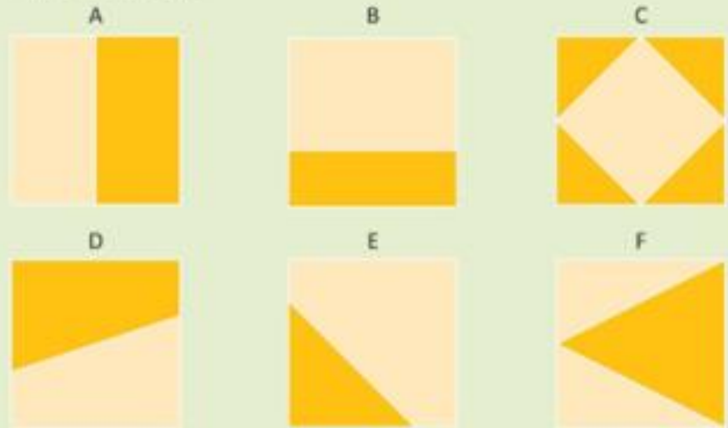
4.1 Hvor mange deler er figuren delt i, og hvor mange deler er fargelagt?



Utforsk sammen

KOPI

Radius har bursdag og har invitert kjæresten Radine til selskap. Figurene nedenfor illustrerer hvordan kakene er delt opp.



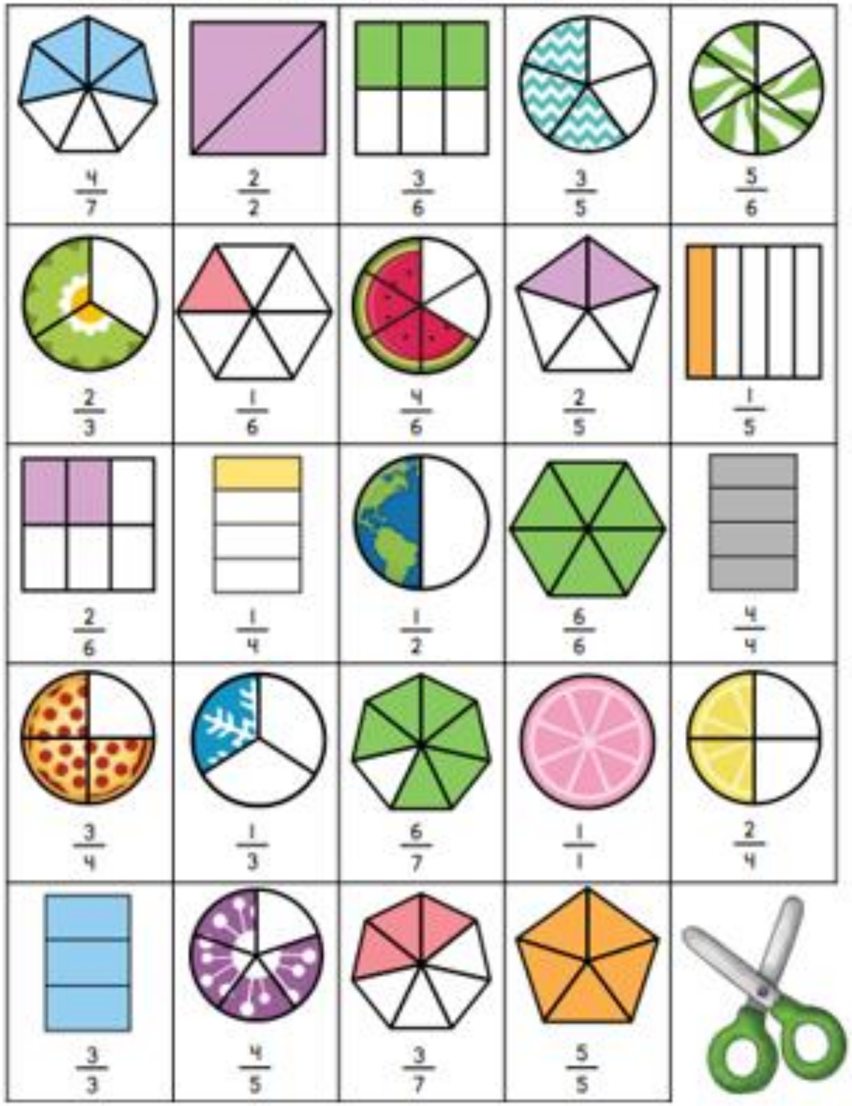
Hvilke av kakene viser at Radius og Radine får like mye hver? Finn andre måter som en kvadratisk kake kan deles i to like store deler på.

Time 5

Brøk-bingo fra Malimo

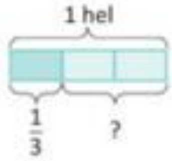
Brøk-bingo

Klipp ut rutene og bruk dem til å lage ditt eget bingobrett!

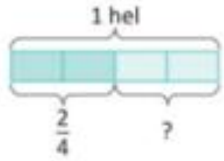


4.2 Det skal bli en hel til sammen. Skriv brøken som mangler.

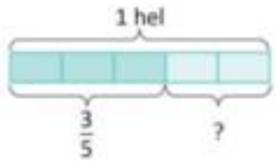
a)



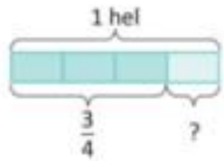
b)



c)

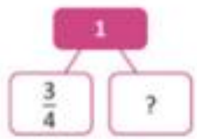


d)

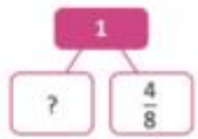


4.3 Det skal bli en hel til sammen. Skriv brøken som mangler.

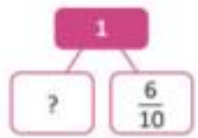
a)



b)



c)



4.4 Sett sammen to og to ballonger, slik at brøkene blir en hel til sammen.

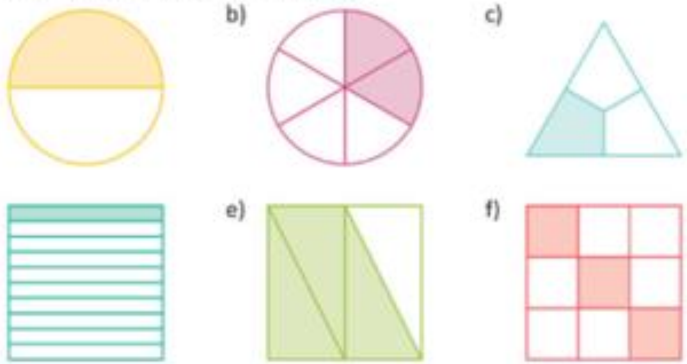
4.5 Hvilken figur og hvilken brøk hører sammen?

A B C D

$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{1}{8}$

4.6 Hvor stor brøkdel av figuren er fargelagt?

a) b) c) d) e) f)



4.7 Tegn figurer som passer til brøkene.

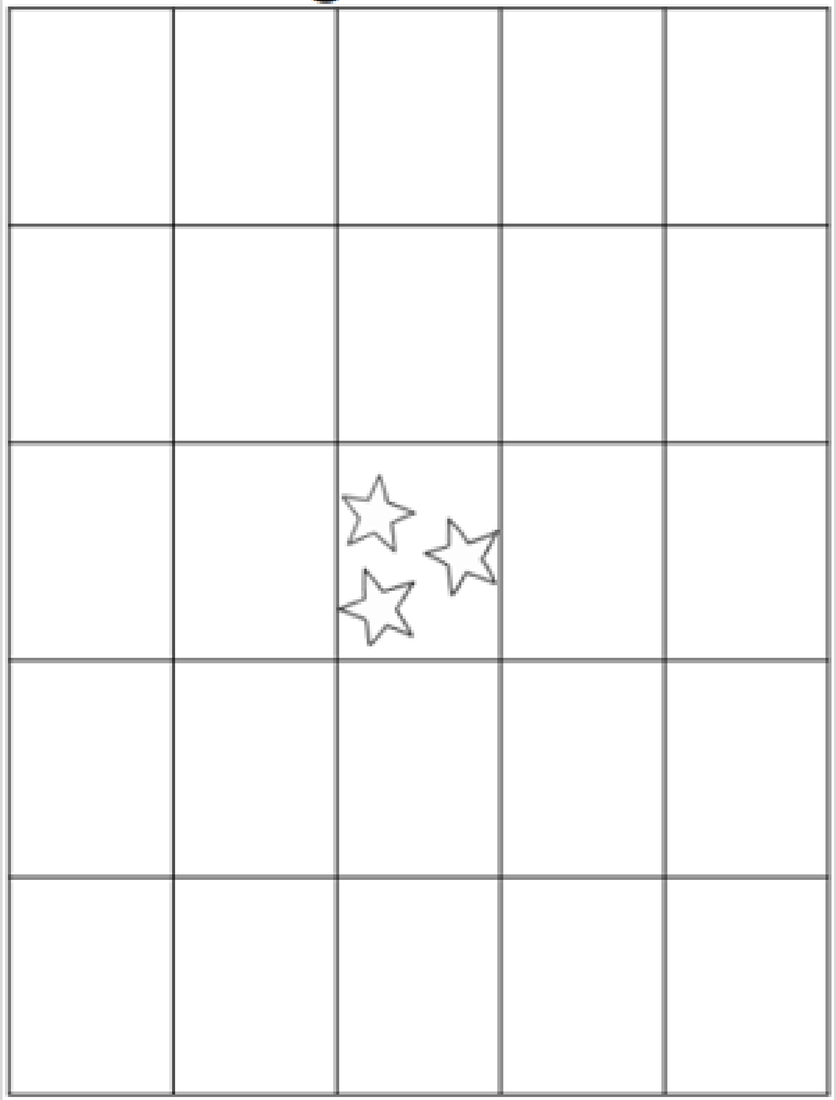
a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{3}{8}$

4.8 Det skal bli en hel til sammen. Skriv brøken som mangler.

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{19}{20}$

Navn:

Mitt bingobrett - BRØK!



Side 108 – 109 fra matematikk

Time 6 – likeverdige brøker

Intro likeverdige brøker – forklar hva likeverdige brøker er

Jobbe med oppgaver i hefte

Likeverdige brøker

Samtale

Henrik har spist en pizzabit,
Ada har spist to pizzabiter, og
Maxi har spist fire pizzabiter.
Alle har spist en halv pizza.
Hvordan er det mulig?

Metode 1

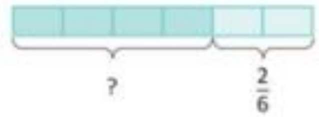
Metode 2

Metode 3

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

4.9 Stine har en sjokolade. Hun spiser opp $\frac{2}{6}$ av en hel sjokolade.

Hvor stor brøkdel av sjokoladen har hun igjen?



4.10 I Henriks bursdag har gjestene spist $\frac{7}{10}$ av kaken.

Hvor stor brøkdel av kaken er igjen?

4.11 Radius har hengt opp bilder på kjøleskapsdøra. $\frac{4}{8}$ av bildene er av han selv.

Hvor stor brøkdel av bildene er av andre?

4.12 Lag tekstoppgaver som passer til modellene.

a) 

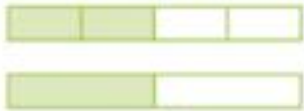
b) 

c) 

d) 

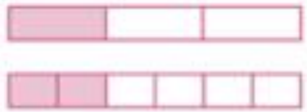
4.32 Skriv tallene som mangler, slik at brøkene får lik verdi.

a)



$\frac{2}{4} = \frac{\square}{2}$

b)

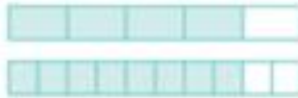


$\frac{1}{\square} = \frac{2}{6}$

c)

$\frac{\square}{5} = \frac{2}{10}$

d)



$\frac{4}{5} = \frac{8}{\square}$

4.33 Skriv tallet som mangler. Du kan gjerne tegne en modell som vist foran til hjelp.

a) $\frac{2}{4} = \frac{\square}{2}$ b) $\frac{1}{4} = \frac{2}{\square}$ c) $\frac{1}{3} = \frac{\square}{6}$

d) $\frac{2}{\square} = \frac{1}{5}$ e) $\frac{10}{10} = \frac{\square}{3}$ f) $\frac{5}{6} = \frac{10}{\square}$

4.34 Marius og Lars kjøper to like sjokolader. Marius deler sjokoladen sin i 12 like store biter, og Lars deler sin i 6 like store biter. Begge spiser halvpart av sjokoladen sin. Hvor mange sjokoladebiter spiser

a) Lars?

b) Marius?

4.35 Åtte elever deler to like pizzaer. Den ene pizzaen er delt i 4 like store biter, og den andre pizzaen er delt i 8 like store biter. Hvordan kan elevene fordele pizzastykkene for at alle skal få like mye?

4.36 På hvilke lapper finner du brøker med lik verdi?

A $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{4}$

B $\frac{1}{1}$ og $\frac{10}{10}$

C $\frac{2}{5}$ og $\frac{2}{8}$

D $\frac{4}{10}$ og $\frac{2}{5}$

E $\frac{3}{6}$ og $\frac{3}{9}$

F $\frac{10}{1}$ og $\frac{1}{10}$

4.37 Brøkene skal være likeverdige. Hvilke brøker mangler i tallfølgene?

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}, \frac{16}{32}$

b) $\frac{1}{4}, \frac{\square}{\square}, \frac{4}{16}, \frac{\square}{\square}, \frac{16}{64}$

c) $\frac{10}{10}, \frac{9}{9}, \frac{\square}{\square}, \frac{7}{7}, \frac{\square}{\square}$

d) $\frac{\square}{\square}, \frac{2}{10}, \frac{\square}{\square}, \frac{4}{20}, \frac{\square}{\square}$

Utforsk sammen

Hvor mange hundredeler er $\frac{1}{4}$?
Hvordan tenker dere?

Time 7

Brøk-kamp med kort

Matematikk med en kortstokk

Brøk-kamp 1

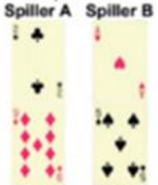
Et spill for to.

Dere trenger en kortstokk der alle 10-erne og bildekortene er fjernet.
Det er valgfritt om dere vil bruke to eller fire jokere.

1. Bland kortstokken godt og del kortene i to like store bunker.
2. Hver spiller får ei bunke hver.
3. Spillerne legger bunka på bordet foran seg med bildesiden ned.
4. Spillerne tar de to øverste kortene i bunka si og lager en brøk av dem. Kortet med minst verdi skal være teller. Har kortene samme verdi, er det valgfritt hvilket som blir valgt som teller.
5. Spilleren som får brøken med størst verdi, får begge kortene og kan legge dem underst i bunka si.

Eksempel

Spiller A Spiller B



Spiller A vinner de fire kortene.

$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$.

$\frac{2}{9} > \frac{2}{10}$ fordi 9-delen er større enn 10-delene.

Da er to 9-deler mer enn to 10-deler.

6. Spillerne bestemmer hvor lenge spillet skal gå. Det kan for eksempel være
   - ei avtalt tid, for eksempel 15 minutter, vinneren er den som da har flest kort i bunka si
   - spillet går til den ene spilleren ikke har flere kort igjen

Hvis dere ikke kan bli eige om hvilken brøk som er størst, kan dere bruke tallinjene som viser alle brøkene.

Brøk-kamp

Vi trenger en kortstokk, hvor 10 ere og bildekort er fjernet.

Del bunken i to, en bunke til hver elev. Hver elev tar de to øverste

Kortene og lager en brøk med disse. Det laveste skal kortet er

teller. Spilleren som får høyeste brøk vinner alle kortene.

4.38 Skriv en brøk som har lik verdi, og tegn en modell som passer til brøken.

a)  $\frac{1}{2}$

b)  $\frac{3}{9}$

c)  $\frac{4}{5}$

4.39 Skriv en brøk som har lik verdi som

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{8}$ c) $\frac{5}{10}$

4.40 Finn to og to brøker med lik verdi.

a) $\frac{6}{8}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{3}{4}$

b) $\frac{2}{8}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{10}$

4.41 Skriv tallet som mangler i teller eller nevner, for at brøkene skal være likeverdige.

a) $\frac{1}{2}$: $\frac{\square}{8} = \frac{3}{\square}$

b) $\frac{\square}{6}$: $\frac{1}{3} = \frac{3}{\square}$

c) $\frac{\square}{5}$: $\frac{2}{10} = \frac{4}{\square}$

d) $\frac{1}{4}$: $\frac{\square}{8} = \frac{3}{\square}$

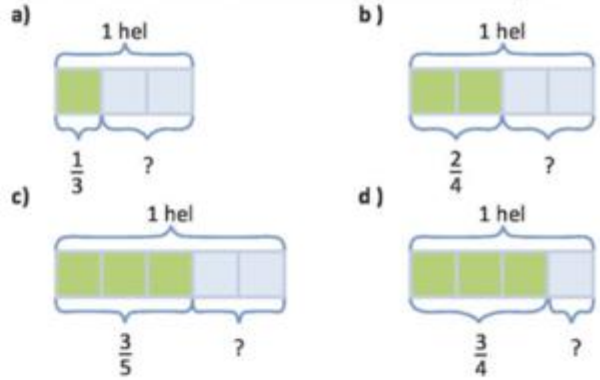
Time 8

En hel til sammen

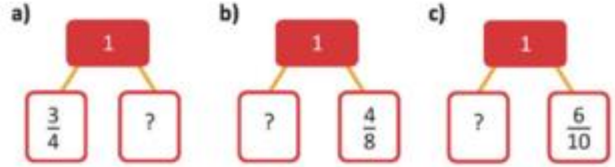
Hvilken brøk er størst?

Side 116 – 118

11.5 Det skal bli en hel til sammen. Skriv brøken som mangler.



11.6 Det skal bli en hel til sammen. Skriv brøken som mangler.



11.7

a) Sett sammen to ballonger slik at brøkene blir en hel til sammen.

b) Sett sammen to ballonger som gir mer enn en hel til sammen.

11.8 Det skal bli en hel til sammen. Skriv brøken som mangler.

a) $\frac{1}{3}$ og ▢ b) $\frac{4}{5}$ og ▢ c) $\frac{7}{10}$ og ▢

11.9 Per hadde en mugge med 1 L saft. Han drakk opp $\frac{3}{5}$ av saften.

a) Hvor mye saft hadde han igjen? Skriv svaret som brøk.

b) Hvor mange desiliter saft drakk Per?

c) Hvor mange desiliter saft var det igjen i flasken?

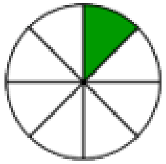
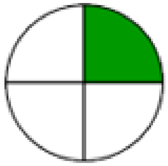
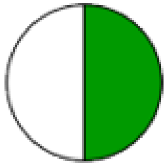
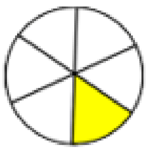
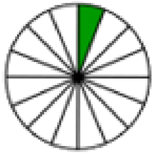
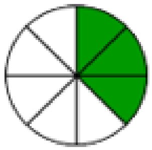
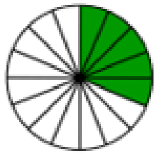
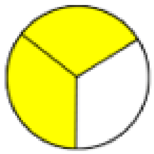
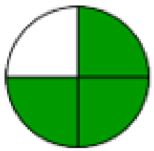
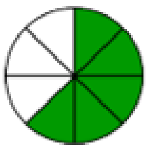
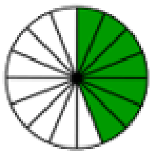
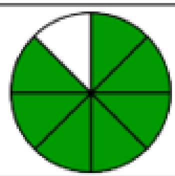
Sammen

Tre barn deler en sjokolade med 12 ruter slik:

- Hvor stor brøkdel får hvert barn?
- Må delene i en brøk være like store?
- Må delene i en brøk ha lik form?
- Tegn sjokoladen, og del den likt mellom to barn og fire barn.
- Skriv brøkdelen hvert barn får av sjokoladen.
- Hvis et barn får $\frac{1}{4}$ av sjokoladen og et annet barn får $\frac{1}{100}$ av den samme sjokoladen, hvem av dem får mest sjokolade?

Lekse 1 - hel

What fraction of the shape is shaded? Circle the correct answer.

		
$\frac{1}{6}$ $\frac{8}{1}$ $\frac{1}{8}$	$\frac{4}{1}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{4}$
		
$\frac{1}{6}$ $\frac{6}{1}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{16}{1}$	$\frac{3}{6}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{4}$
		
$\frac{5}{16}$ $\frac{16}{5}$ $\frac{5}{8}$	$\frac{3}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$	$\frac{3}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{3}$
		
$\frac{5}{16}$ $\frac{8}{5}$ $\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$ $\frac{7}{16}$ $\frac{16}{7}$	$\frac{8}{7}$ $\frac{7}{16}$ $\frac{7}{8}$

11.10 Sammenlign brøker med lik nevner.

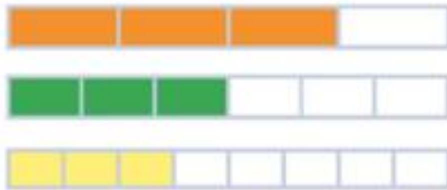

$\frac{3}{8}$


$\frac{5}{8}$


$\frac{6}{8}$

a) Hvilken brøk har minst verdi?
b) Hvilken brøk har størst verdi?

11.11 Sammenlign brøker med lik teller.


$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{3}{8}$

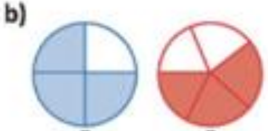
a) Hvilken brøk har minst verdi?
b) Hvilken brøk har størst verdi?

11.12 Hvilken brøk har størst verdi?

a)


$\frac{1}{8}$ eller $\frac{1}{4}$

b)

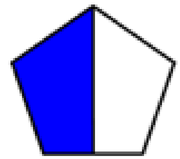
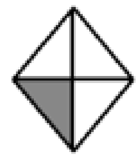
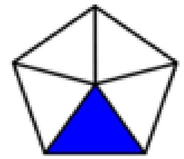
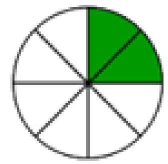
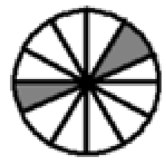
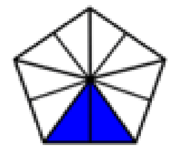
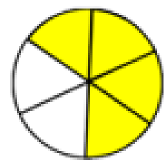
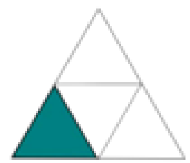
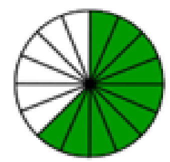
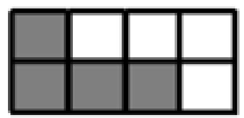
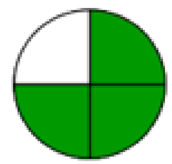
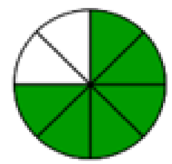

$\frac{3}{4}$ eller $\frac{3}{5}$

11.13 Sorter brøkene i stigende rekkefølge.

a) $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ **b)** $\frac{3}{6}, \frac{3}{4}, \frac{3}{10}$ **c)** $\frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{3}{9}$ **d)** $\frac{5}{10}, \frac{9}{10}, \frac{3}{10}$

Lekse 1

What fraction of the shape is shaded? Circle the correct answer.

		
$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{1}$	$\frac{4}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$ $\frac{5}{1}$ $\frac{4}{5}$
		
$\frac{1}{9}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{8}$	$\frac{9}{12}$ $\frac{3}{12}$ $\frac{2}{12}$	$\frac{10}{2}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{2}{8}$
		
$\frac{4}{6}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{6}{4}$	$\frac{4}{1}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{6}{12}$ $\frac{16}{10}$ $\frac{10}{16}$
		
$\frac{4}{8}$ $\frac{8}{4}$ $\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{3}{4}$	$\frac{6}{8}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{8}{6}$

Lekse 2 – hel

Brøk – del av en hel

Eksempel

Figuren nedenfor er delt i seks like store deler. Hele figuren er $\frac{6}{6}$, og hver del er $\frac{1}{6}$.

Hvor stor del av figuren er fargelagt?

$\frac{4}{6}$

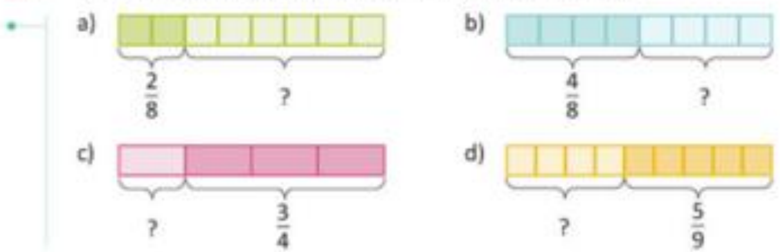
4 – *telleren* viser antall deler som er fargelagt

— – brøkstrek

6 – *nevneren* viser antall deler det er i alt

Svar: $\frac{4}{6}$ av figuren er fargelagt.

4.1 Det skal bli en hel til sammen. Skriv brøken som mangler.



Lekse 3 – hel

1 **a** Tre venner deler én pizza likt. Hvor mye får de hver? Skriv som brøk.

b Fem venner deler én pizza likt. Hvor mye får de hver? Skriv som brøk.

c Ti venner deler én pizza likt. Hvor mye får de hver? Skriv som brøk.

d Alle pizzaene er like store. Hvilken vennegruppe får mest pizza per person?

2 **a** Sorter brøkene fra minst til størst.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{3}$

13 Skriv brøkene fra minst til størst.

$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{15}$

14 Skriv brøkene fra minst til størst.

$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{3}{7}$

Lekse 2

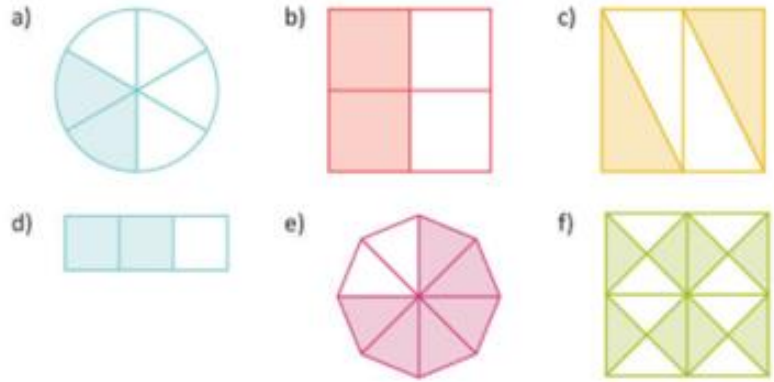
4.2 Det skal bli en hel til sammen. Skriv brøken som mangler.

a) 1: $\frac{1}{4}$?

b) 1: ? $\frac{3}{5}$

c) 1: $\frac{2}{3}$?

4.3 Hvor mange deler er figuren delt i, og hvor stor brøkdel av figuren er fargelagt?



4.4 Lag en figur som passer til brøken.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{6}$ d) $\frac{1}{5}$

4.5 Sett sammen to og to brøker som gir en hel til sammen.

$\frac{3}{8}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{6}{12}$ $\frac{3}{5}$

$\frac{6}{12}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{3}{7}$

Lekse 4 – hel

18 Teppet til Danielle er gult, grønt og blått.
Hvor stor brøkdel av teppet er

a blått **b** grønt

c gult **d** gult eller grønt

13 Skriv <, = eller > i rutene under.
Tegn eller begrunn svarene.

a $\frac{1}{4} \square \frac{1}{2}$ **b** $\frac{4}{8} \square \frac{1}{2}$

c $\frac{4}{6} \square \frac{1}{2}$ **d** $\frac{2}{6} \square \frac{1}{2}$

e $\frac{3}{10} \square \frac{1}{2}$ **f** $\frac{5}{7} \square \frac{1}{2}$

14 Skriv <, = eller > i rutene under.
Tegn eller begrunn svarene.

a $\frac{4}{8} \square \frac{3}{7}$ **b** $\frac{5}{10} \square \frac{1}{2}$

c $\frac{3}{5} \square \frac{2}{6}$ **d** $\frac{5}{8} \square \frac{4}{9}$

e $\frac{3}{10} \square \frac{3}{6}$ **f** $\frac{5}{7} \square \frac{2}{4}$

Det er lurt å sammenlikne brøkene med $\frac{1}{2}$.

Vedlegg 4 Undervisningsopplegg mengdemodell

Undervisningsopplegg – brøk – del av en mengde

Økt 1 - intro

LAKRISBRØK

Tema
Tall og algebra

Trinn
S-M-U-V

Tidsbruk
30 minutter

Utstyr
Lakrislisser, saks, papirlapper, skrivesaker, tape

Forberedelse
Kjøp inn en pose lakrislisser per klasse (25 elever).

lag blanke lapper slik at alle elevene har en lapp hver.

Gjennomføring
Denne oppgaven gjennomføres ved introduksjon til brøk.

Lærer skriver følgende brøker på tavla:

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{8} \qquad \frac{1}{16}$$

Elevene bes deretter å velge en av disse brøkene og skrive hvor stor del av lakrislissen de ønsker å spise. Det kan være en fordel å ikke gi elevene lang betenkningstid! Lappen skal deretter snus og legges ytterst på pulten.

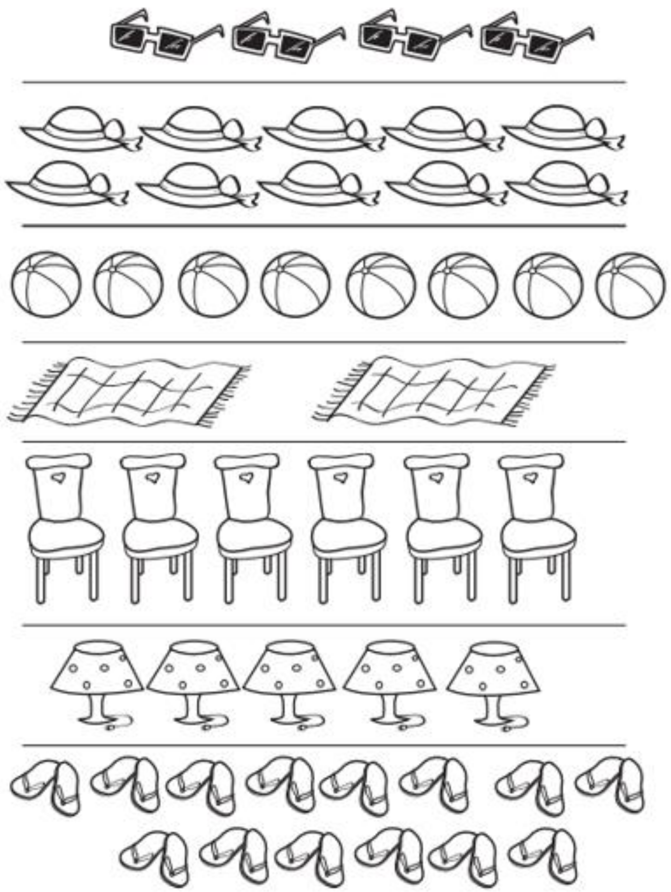
Lærer demonstrerer hvor stor del en halv lakrislisse er ved å klippe en lisse i to. Deretter henges den halve lissen opp på tavlen/veggen med tape slik at lissens lengde er synlig for hele elevgruppen. Deretter klippes den resterende halve i to like deler, og lissen som nå er en fjerdedel henges ved siden av den halve lissen. Slik fortsetter lærer til alle brøkene over er representert på tavlen. Elevene får deretter en lakrislisse på størrelsen med den brøken de har skrevet på lappen.

Etter gjennomføringen er det viktig med en diskusjon rundt resultatene. Hensikten med opplegget er å bevisstgjøre elevene slik at de er klar over at nevneren ikke avgjør en brøks verdi. Det er også lurt å diskutere hvordan resultatet ville blitt dersom lakrislissen i utgangspunktet var kortere eller lenger. Dette gjør at elevene starter en refleksjon rundt det faktum at brøken er avhengig av hvor stor en hel er.

Økt 1, arbeidsark 1

Find $\frac{1}{2}$

Circle $\frac{1}{2}$ of each group of items. Note: One of them does not split in half evenly. Do you know which one?



Education.com

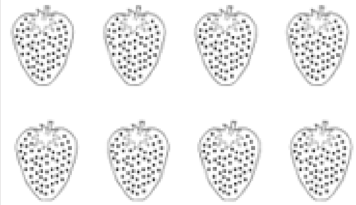
Find worksheets, games, lessons & more at education.com/res

Økt 1, arbeidsark 2

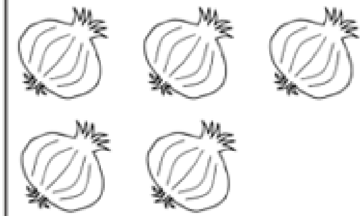
www.worksheetfun.com

Fractions

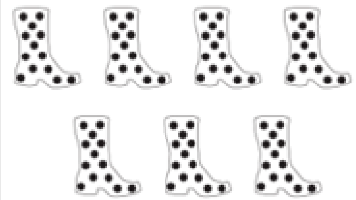
Color $\frac{5}{8}$



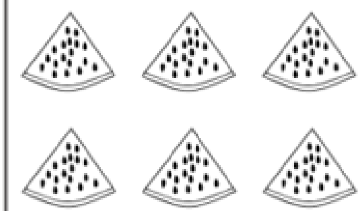
Color $\frac{3}{5}$



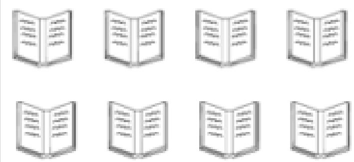
Color $\frac{6}{7}$



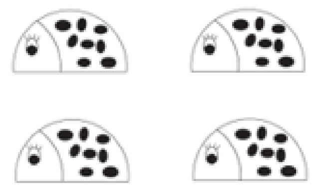
Color $\frac{4}{6}$



Color $\frac{7}{8}$



Color $\frac{1}{4}$



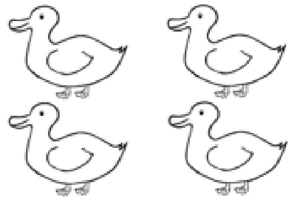
www.worksheetfun.com

Økt 1, arbeidsark 3

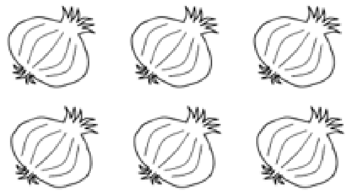
www.worksheetfun.com

Fractions

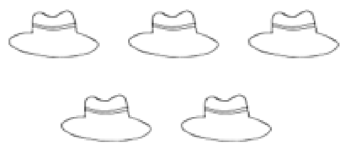
Color $\frac{3}{4}$



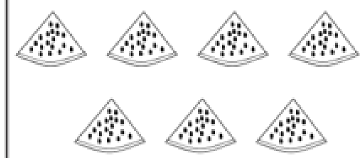
Color $\frac{5}{6}$



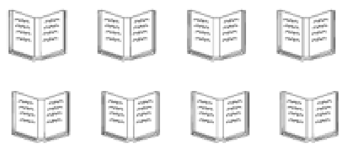
Color $\frac{2}{5}$



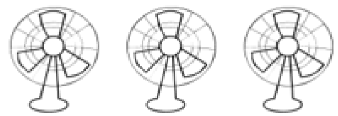
Color $\frac{5}{7}$



Color $\frac{6}{8}$



Color $\frac{2}{3}$



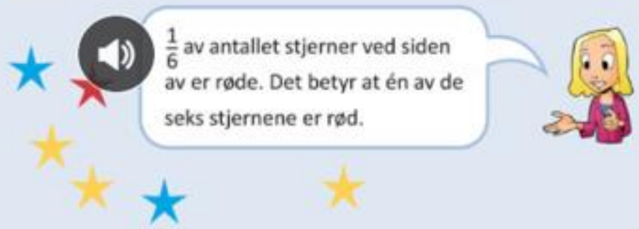
www.worksheetfun.com

Økt 2

Intro, del av mengde side 119 – 121 – Radius

Brøk – del av en mengde

Samtale



Hvor mange stjerner er det totalt?
Hvor stor brøkdel av stjernene er blå?
Hvor stor brøkdel av stjernene er gule?

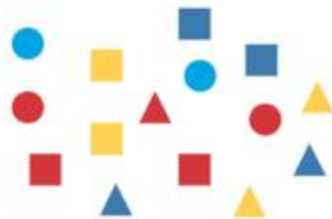
11.14 Se på tegningen.

a) Hvor mange blomster er det i alt?

b) Hvor stor brøkdel av alle blomstene er rosa?

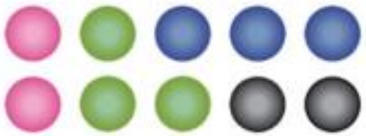
c) Hvilken farge har blomstene som det er flest av? Hvor stor brøkdel utgjør disse blomstene?

11.15 Hvor stor brøkdel av figurene er



a) firkanter b) sirkler
c) røde d) blå

11.16 Hedda har 10 sprettballer i ulike farger.



Hvor stor brøkdel av sprettballene er

a) rosa b) grønne c) blå og svarte

d) Hedda gir bort en svart og en blå sprettball. Hvor stor brøkdel av sprettballene som Hedda har igjen, er grønne?

11.17 Tegn ulike mengder som passer til brøkene nedenfor.

a) $\frac{3}{6}$ grønne b) $\frac{4}{8}$ blå

c) $\frac{1}{7}$ røde d) $\frac{3}{6}$ gule

Her er $\frac{2}{5}$ gule.

Sammen

Familien Jensen hadde seks kartonger med egg i kjøleskapet. I hver kartong var det seks egg.

- Hvor mange egg hadde familien Jensen?
- Halvparten av eggene var brune. Hvor mange egg var brune?
- Faren brukte $\frac{1}{4}$ av alle eggene til å lage vafler.
  Hvor mange egg brukte han?
- Hvor mange egg var det igjen i kjøleskapet etter at faren hadde stekt vafler?
- Lag flere oppgaver til hverandre.

Økt 3

Repetisjon med fellesoppgaver

Økt 3, arbeidsark 1. Du kan svare rett på arket.

Oppg.1.

Hvor stor del av kulene er gule?

a

b

a) ________________ b) ____________________

Oppg.2.

a Hvor mange baller ser du på bildet?

b Hvor mange er $\frac{1}{2}$ av ballene?

c Hvor mange er $\frac{1}{3}$ av ballene?

d Hvor mange er $\frac{2}{3}$ av ballene?

e Hvor mange er $\frac{1}{4}$ av ballene?

f Hvor mange er $\frac{3}{4}$ av ballene?

Oppg.3.

a Hvor stor brøkdel av dropsene i posen er prikkete?

b Hvor stor brøkdel av dropsene i posen er stripete?

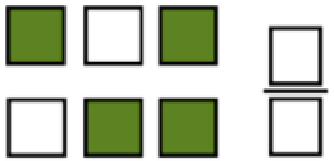
c Hvor stor brøkdel av dropsene i posen er gule?

d Brett en papirstrimmel, og fargelegg like stor brøkdel av papirstrimmelen med prikker, striper og gulfarge som det er drops i posen.

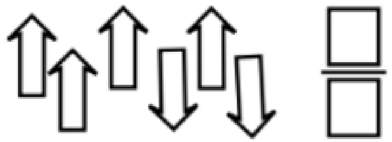
a)______ b)______ c)______ d) Må gjøres praktisk.

Økt 3, arbeidsark 2.

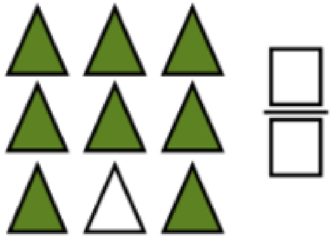
What fraction of the squares are white?



What fraction of the arrows point up?

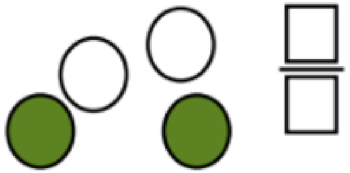


What fraction of the triangles are green?



What fraction of the stars are white?

What fraction of the circles are green?



What fraction of the stars are green?

Økt 3, arbeidsark 4.

Circle the correct answers.

What fraction of the group are men?	What fraction are women?
$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$

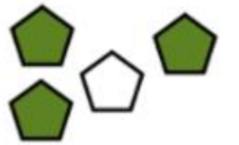
What fraction of the animals are cats?	What fraction of the animals are dogs?
$\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{2}{8}$

What fraction of the above are keys?	What fraction of the above are locks?
$\frac{3}{6}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{5}{7}$

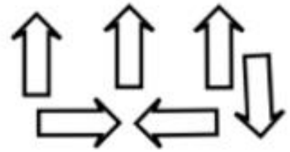
What fraction of the toys are cars?	What fraction of the toys are rockets?
$\frac{1}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{4}{7}$

Økt 3, arbeidsark 3

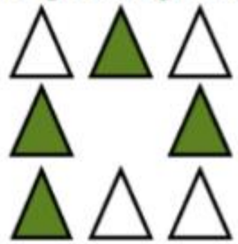
What fraction of the pentagons are green?



What fraction of the arrows point up?



What fraction of the triangles are green?



What fraction of the stars are white?

What fraction of the circles are green?

What fraction of the squares are green?

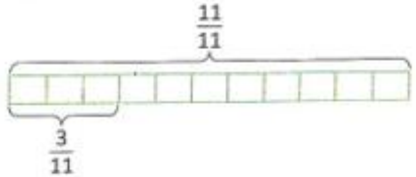
<u>**Økt 4**</u>

Gjennomgang av metode

Samtale

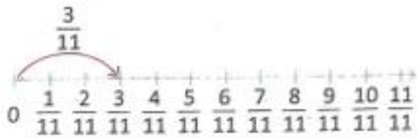
Hvor stor del av paprikaene er grønne?

Metode 1



Svar: $\frac{3}{11}$ av paprikaene er grønne.

Metode 2



Svar: $\frac{3}{11}$ av paprikaene er grønne.

Oppgaver til økt 4

4.13 Hvilke brøker passer til blomstene i buketten?

a) 

b) 

c) 

4.14 I en sjakkturnering er det 60 deltakere. 15 av deltakerne er jenter, og resten er gutter.

a) Hvor stor brøkdel av deltakerne er jenter?

b) Hvor stor brøkdel av deltakerne er gutter?

4.15 Tell antall gutter og jenter i klassen din. Hvor stor brøkdel av klassen er:

a) jenter?

b) gutter?

c) gutter, dersom to av guttene slutter?

4.16 Se på oversikten over favorittmaten til elevene i denne 5. klassen.

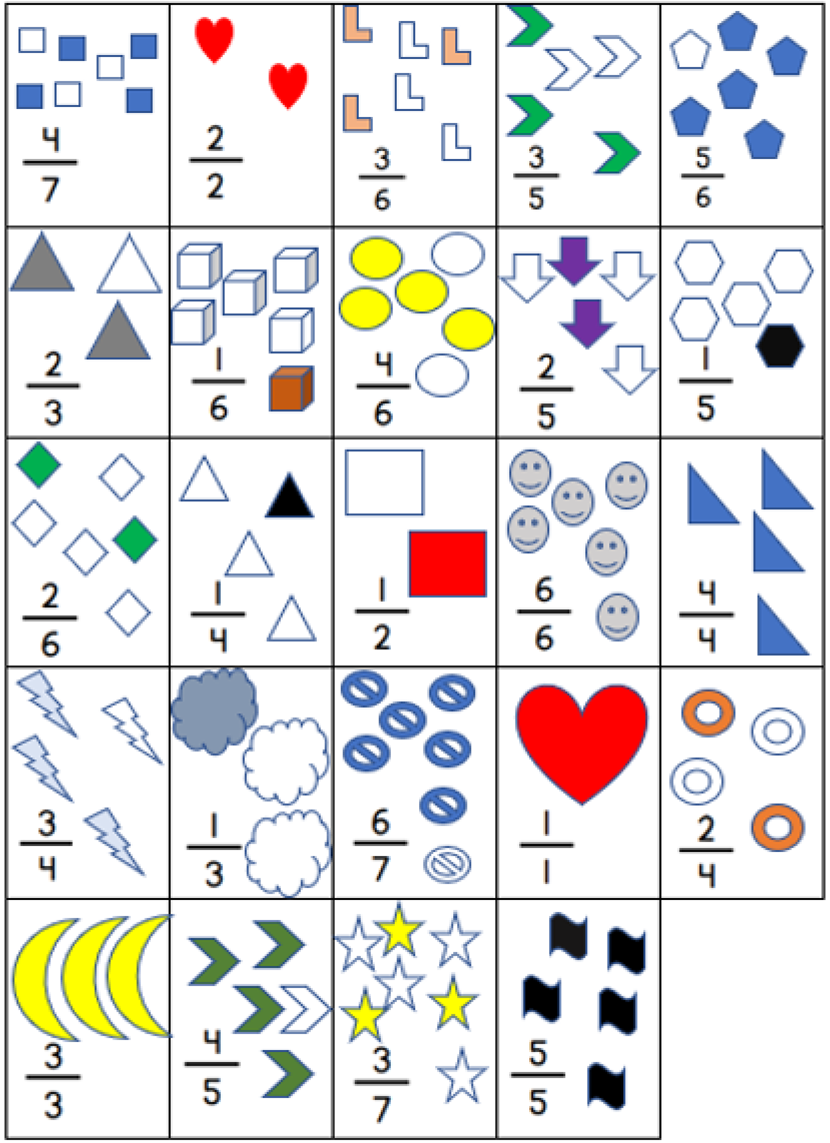
a) Hvor stor brøkdel av elevene liker taco best?

b) Hvor stor brøkdel av elevene liker fisk best?

Antall elever	Favorittmat
3	taco
11	kylling
5	fisk

Økt 5

Brøk-bingo del av mengde



.18 Petter lager muffins i ulike farger.
Han lager fire grønne, fire rosa og åtte blå.

a) Hvor stor brøkdel av muffinsene er rosa?

b) Hvor stor brøkdel av muffinsene er blå?

.19 Tegn åtte firkanter i kladdeboka di. Alle firkantene skal være like store. Fargelegg firkantene i ulike farger.

a) $\frac{2}{8}$ skal være blå **b)** $\frac{4}{8}$ grønne **c)** $\frac{1}{8}$ gul

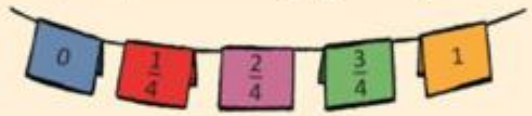
d) Hvor stor del av firkantene er ikke fargelagt?

.20 Skriv brøkene som mangler.

a)	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$			1
b)	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$			$\frac{6}{7}$	1
c)	$\frac{3}{8}$			$\frac{6}{8}$		1

Sammen

- Del klassen i fem grupper.
- Alle gruppene får hver sin snor, som de henger opp i klasserommet.
- Hver gruppe lager brøkkort, som henges på snora i stigende rekkefølge.
- Les brøkene på snora forlengs og baklengs.



Økt 6 – likeverdige brøker

Intro likeverdige brøker – forklar hva likeverdige brøker er

Jobbe med oppgaver i hefte.

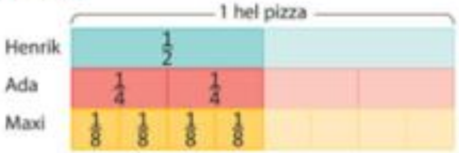
Likeverdige brøker

Samtale

Henrik har spist en pizzabit,
Ada har spist to pizzabiter, og
Maxi har spist fire pizzabiter.
Alle har spist en halv pizza.
Hvordan er det mulig?

Metode 1

Metode 2

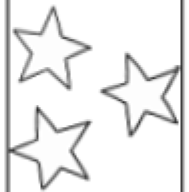


Metode 3

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

Navn:

Mitt bingobrett - BRØK!



a Forklar at bilde A viser at $\frac{4}{12}$ av eggene er prikkete.

b Forklar at bilde B viser at $\frac{2}{6}$ av eggene er prikkete.

c Forklar at bilde C viser at $\frac{1}{3}$ av eggene er prikkete.

d Hva er likt, og hva er ulikt på bilde A, B og C?

e Forklar at $\frac{4}{12} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

4.36 På hvilke lapper finner du brøker med lik verdi?

A $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{4}$

B $\frac{1}{1}$ og $\frac{10}{10}$

C $\frac{2}{5}$ og $\frac{2}{8}$

D $\frac{4}{10}$ og $\frac{2}{5}$

E $\frac{3}{6}$ og $\frac{3}{9}$

F $\frac{10}{1}$ og $\frac{1}{10}$

4.37 Brøkene skal være likeverdige. Hvilke brøker mangler i tallfølgene?

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \square, \square, \frac{16}{32}$

b) $\frac{1}{4}, \square, \frac{4}{16}, \square, \frac{16}{64}$

c) $\frac{10}{10}, \frac{9}{9}, \square, \frac{7}{7}, \square$

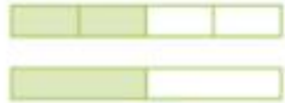
d) $\square, \frac{2}{10}, \square, \frac{4}{20}, \square$

Utforsk sammen

Hvor mange hundredeler er $\frac{1}{4}$?
Hvordan tenker dere?

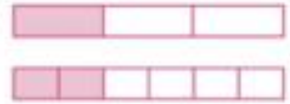
4.32 Skriv tallene som mangler, slik at brøkene får lik verdi.

a)



$\frac{2}{4} = \frac{\square}{2}$

b)

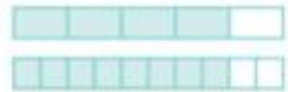


$\frac{1}{\square} = \frac{2}{6}$

c)

$\frac{\square}{5} = \frac{2}{10}$

d)



$\frac{4}{5} = \frac{8}{\square}$

4.33 Skriv tallet som mangler. Du kan gjerne tegne en modell som vist foran til hjelp.

a) $\frac{2}{4} = \frac{\square}{2}$

b) $\frac{1}{4} = \frac{2}{\square}$

c) $\frac{1}{3} = \frac{\square}{6}$

d) $\frac{2}{\square} = \frac{1}{5}$

e) $\frac{10}{10} = \frac{\square}{3}$

f) $\frac{5}{6} = \frac{10}{\square}$

4.34 Marius og Lars kjøper to like sjokolader. Marius deler sjokoladen sin i 12 like store biter, og Lars deler sin i 6 like store biter. Begge spiser halvparten av sjokoladen sin. Hvor mange sjokoladebiter spiser

a) Lars?

b) Marius?

Time 7

Brøk-kamp med kort

Matematikk med en kortstokk

Brøk-kamp 1

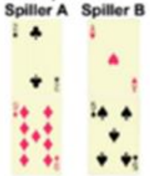
Et spill for to.

Dere trenger en kortstokk der alle 10-erne og bildekortene er fjernet.
Det er valgfritt om dere vil bruke to eller fire jokere.

1. Bland kortstokken godt og del kortene i to like store bunker.
2. Hver spiller får ei bunke hver.
3. Spillerne legger bunka på bordet foran seg med bildesiden ned.
4. Spillerne tar de to øverste kortene i bunka si og lager en brøk av dem. Kortet med minst verdi skal være teller. Har kortene samme verdi, er det valgfritt hvilket som blir valgt som teller.
5. Spilleren som får brøken med størst verdi, får begge kortene og kan legge dem underst i bunka si.

Eksempel

Spiller A **Spiller B**



Spiller A vinner de fire kortene.

$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$.

$\frac{2}{9} > \frac{2}{10}$ fordi 9-delen er større enn 10-delene.

Da er to 9-deler mer enn to 10-deler.

6. Spillerne bestemmer hvor lenge spillet skal gå.
   Det kan for eksempel være
   - ei avtalt tid, for eksempel 15 minutter, vinneren er den som da har flest kort i bunka si
   - spillet går til den ene spilleren ikke har flere kort igjen

Hvis dere ikke kan bli eige om hvilken brøk som er størst, kan dere bruke tallinjene som viser alle brøkene.

Brøk-kamp

Vi trenger en kortstokk, hvor 10 ere og bildekort er fjernet.

Del bunken i to, en bunke til hver elev. Hver elev tar de to øverste

Kortene og lager en brøk med disse. Det laveste skal kortet er

teller. Spilleren som får høyeste brøk vinner alle kortene.

4.38 Skriv en brøk som har lik verdi, og tegn en modell som passer til brøken.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{9}$ c) $\frac{4}{5}$

4.39 Skriv en brøk som har lik verdi som

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{8}$ c) $\frac{5}{10}$

4.40 Finn to og to brøker med lik verdi.

a) $\frac{6}{8}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{3}{4}$

b) $\frac{2}{8}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{10}$

4.41 Skriv tallet som mangler i teller eller nevner, for at brøkene skal være likeverdige.

a) $\frac{1}{2} = \frac{\square}{8} = \frac{3}{\square}$

b) $\frac{\square}{6} = \frac{1}{3} = \frac{3}{\square}$

c) $\frac{\square}{5} = \frac{2}{10} = \frac{4}{\square}$

d) $\frac{1}{4} = \frac{\square}{8} = \frac{3}{\square}$

Økt 8

En hel til sammen

Hvilken brøk er størst?

Å dele inn i brøkdeler

EKSEMPEL

På bildene er $\frac{1}{3}$ av bilene blå.

Bilde A | Bilde B | Bilde C

22 **a** Hvor mange personer ser du her?

b Hvor mange er $\frac{1}{2}$ av personene?

c Hvor mange er $\frac{1}{3}$ av personene?

d Hvor mange er $\frac{1}{4}$ av personene?

e Hvor mange er $\frac{3}{4}$ av personene?

f Hvor mange er $\frac{1}{6}$ av personene?

23 **a** Hvor mange dyr ser du her?

b Hvor mange er halvparten av dyrene?

c Hvor mange er $\frac{1}{6}$ av dyrene?

d Hvor mange er $\frac{1}{4}$ av dyrene?

e Hvor mange er $\frac{3}{4}$ av dyrene?

f Hvor mange er $\frac{1}{3}$ av dyrene?

24 Bestemor har bakt 18 muffins.
Hun gir bort halvparten og spiser $\frac{1}{3}$ av muffinsene som er igjen selv.

a Hvor mange muffins gir hun bort?

b Hvor mange muffins spiser hun selv?

c Hvor mange muffins har hun igjen?

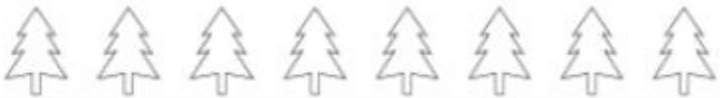
d Hvor stor brøkdel av muffinsene hun bakte, har hun igjen?

LEKSE 1, ark 1

Color $\frac{2}{7}$ of the circles RED.

Color $\frac{2}{5}$ of the clouds BLUE.

Color $\frac{3}{8}$ of the trees GREEN.



Color $\frac{1}{6}$ of the stars ORANGE.

Color $\frac{3}{4}$ of the piggy bank PINK.

Color $\frac{5}{6}$ of the piggy bank YELLOW.

34 Jakob og Hannah baker 40 boller.
Jakob får en firedel med seg hjem,
og Hannah får en femdel med seg hjem.

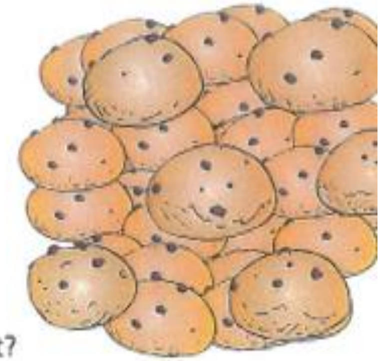
a Hvor mange boller får Jakob?

b Hvor mange boller får Hannah?

Resten av bollene gir de til vennene sine.

c Hvor mange boller gir de bort?

d Hvor stor brøkdel av bollene gir de bort?



35 På 5. trinn på Dalen skole er det 84 elever. En firedel av elevene spiller fotball, en seksdel spiller basket, en sjudel spiller et musikkinstrument, en tolvdel spiller sjakk, og en fjortendel danser. Det er ingen elever som er med på mer enn én fritidsaktivitet.

a Hvor mange spiller fotball?

b Hvor mange spiller basket?

c Hvor mange spiller et musikkinstrument?

d Hvor mange spiller sjakk?

e Hvor mange danser?

Resten av elevene har andre fritidsaktiviteter.

f Hvor mange elever har andre fritidsaktiviteter?

g Hvor stor brøkdel av elevene har andre fritidsaktiviteter?

LEKSE 2, ark 1

Del av en mengde

Eksempel

På et idrettsstevne vant Jan disse medaljene.
Hvor stor brøkdel av medaljene er av gull?

$\frac{3}{6}$

3 – *telleren* viser hvor mange medaljer som er gull
– brøkstrek
6 – *nevneren* viser hvor mange medaljer det er i alt

Svar: $\frac{3}{6}$ av medaljene er av gull.

4.6 Ada har samlet baller i et nett.
Hvor stor brøkdel av ballene er gule?

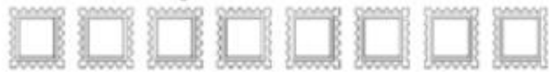
4.7 Bruk kortene nedenfor.

a) Hvor mange kort er det til sammen?
b) $\frac{3}{8}$ av kortene er svarte. Hvor stor brøkdel av kortene er røde?
c) Hvor stor brøkdel av kortene er bildekort?

LEKSE 1, ark 2

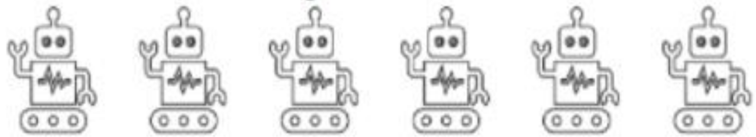
Color $\frac{3}{5}$ of the presents GREEN.

Color $\frac{2}{8}$ of the stamps ORANGE.



Color $\frac{3}{4}$ of the calculators RED.

Color $\frac{5}{6}$ of the robots BLUE.



Color $\frac{1}{7}$ of the light bulbs YELLOW.

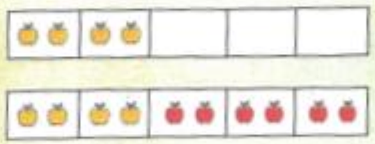
Color $\frac{1}{2}$ of the fish GREY.

LEKSE 3

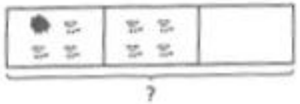
$\frac{2}{5}$ av eplene er gule. Det er 4 gule epler.

Hvor mange epler er det til sammen?

Det er 10 epler til sammen.



36 **a** $\frac{2}{3}$ av sauene til en bonde er inne i fjøset.
Det er 8 sauer inne i fjøset.
Hvor mange sauer har bonden til sammen?



b $\frac{2}{3}$ av plommene i hagen er gule. Det er 12 gule plommer i hagen.
Hvor mange plommer er det til sammen?

c $\frac{2}{6}$ av elevene i klasse 5A spiller håndball. Det er 8 i klassen som spiller håndball. Hvor mange elever er det i klassen?

d $\frac{3}{12}$ av musikantene i korpset spiller slagverk. Det er 6 musikanter som spiller slagverk. Hvor mange musikanter er det i korpset?

e $\frac{3}{4}$ av dropsene i en pose er 18 drops. Hvor mange drops er det i posen?

13 Skriv brøkene fra minst til størst.

$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{15}$

14 Skriv brøkene fra minst til størst.

$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{3}{7}$

Tegn, eller se for deg brøksirkler!

LEKSE 2, ark 2

4.8 Se på fruktfatet ved siden av. Hvor stor del av frukten er
a) epler?
b) appelsiner?
c) appelsiner og bananer?

4.9 Lag minst fem ulike brøker som passer til tegningen nedenfor.

4.10 Pappa har kokt pølser til Siri og Nils. Siri har spist 2 pølser, Nils har spist 3 pølser, og det er 2 pølser igjen i kjelen.
a) Hvor stor brøkdel av pølsene har Siri spist?
b) Hvor stor brøkdel av pølsene har Nils spist?

4.11 Det er ulike fruktis i frysedisken.
Plex kjøper en pakke med jordbæris og en pakke med melonis.

Hvor stor brøkdel av isen i frysedisken kjøper Plex?

12 Skriv brøken som viser hvor stor del av kulene som er røde. Er brøkene større enn, mindre enn eller lik $\frac{1}{2}$? Begrunn svaret.

a

b

c

d

Eksempel

$\frac{5}{8}$ av brikkene er røde.

Brøken er større enn $\frac{1}{2}$ fordi 5 er mer enn halvparten av 8.

13 Skriv <, = eller > i rutene under.
Tegn eller begrunn svarene.

a $\frac{1}{4} \square \frac{1}{2}$ **b** $\frac{4}{8} \square \frac{1}{2}$

c $\frac{4}{6} \square \frac{1}{2}$ **d** $\frac{2}{6} \square \frac{1}{2}$

e $\frac{3}{10} \square \frac{1}{2}$ **f** $\frac{5}{7} \square \frac{1}{2}$

14 Skriv <, = eller > i rutene under.
Tegn eller begrunn svarene.

a $\frac{4}{8} \square \frac{3}{7}$ **b** $\frac{5}{10} \square \frac{1}{2}$

c $\frac{3}{5} \square \frac{2}{6}$ **d** $\frac{5}{8} \square \frac{4}{9}$

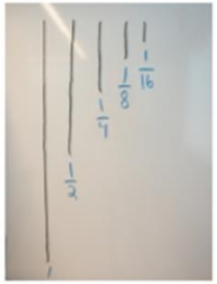
e $\frac{3}{10} \square \frac{3}{6}$ **f** $\frac{5}{7} \square \frac{2}{4}$

Det er lurt å sammenlikne brøkene med $\frac{1}{2}$.

Vedlegg 5 Praktiske oppgaver for begge klassene

Time 1 - intro

LAKRISBRØK



Tema
Tall og algebra

Trinn
S-M-U-V

Tidsbruk
30 minutter

Utstyr
Lakrislisser, saks, papirlapper, skrivesaker, tape

Forberedelse
Kjøp inn en pose lakrislisser per klasse (25 elever),

lag blanke lapper slik at alle elevene har en lapp hver.

Gjennomføring
Denne oppgaven gjennomføres ved introduksjon til brøk.

Lærer skriver følgende brøker på tavla:

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{8} \qquad \frac{1}{16}$$

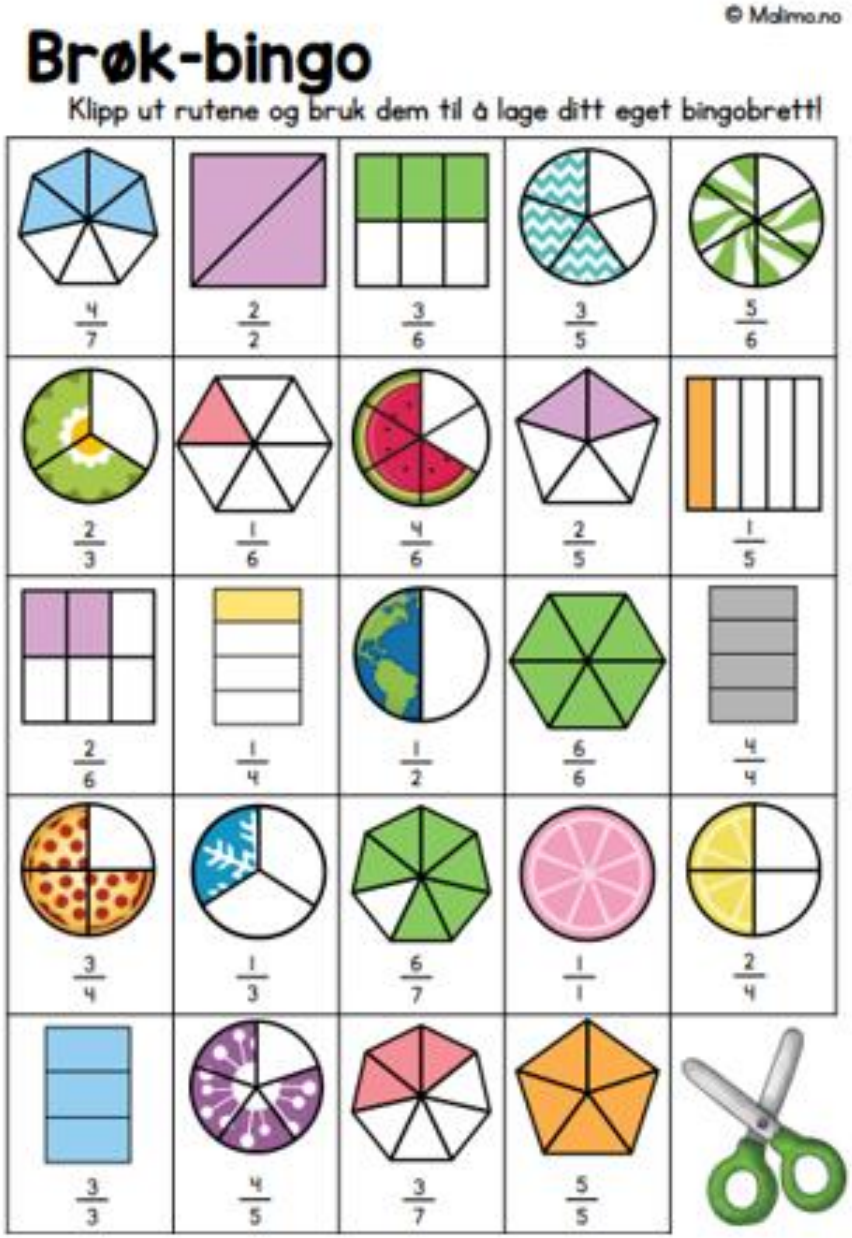
Elevene bes deretter å velge en av disse brøkene og skrive hvor stor del av lakrislissen de ønsker å spise. Det kan være en fordel å ikke gi elevene lang betenkningstid! Lappen skal deretter snus og legges ytterst på pulten.

Lærer demonstrerer hvor stor del en halv lakrislisse er ved å klippe en lisse i to. Deretter henges den halve lissen opp på tavlen/veggen med tape slik at lissens lengde er synlig for hele elevgruppen. Deretter klippes den resterende halve i to like deler, og lissen som nå er en fjerdedel henges ved siden av den halve lissen. Slik fortsetter lærer til alle brøkene over er representert på tavlen. Elevene får deretter en lakrislisse på størrelsen med den brøken de har skrevet på lappen.

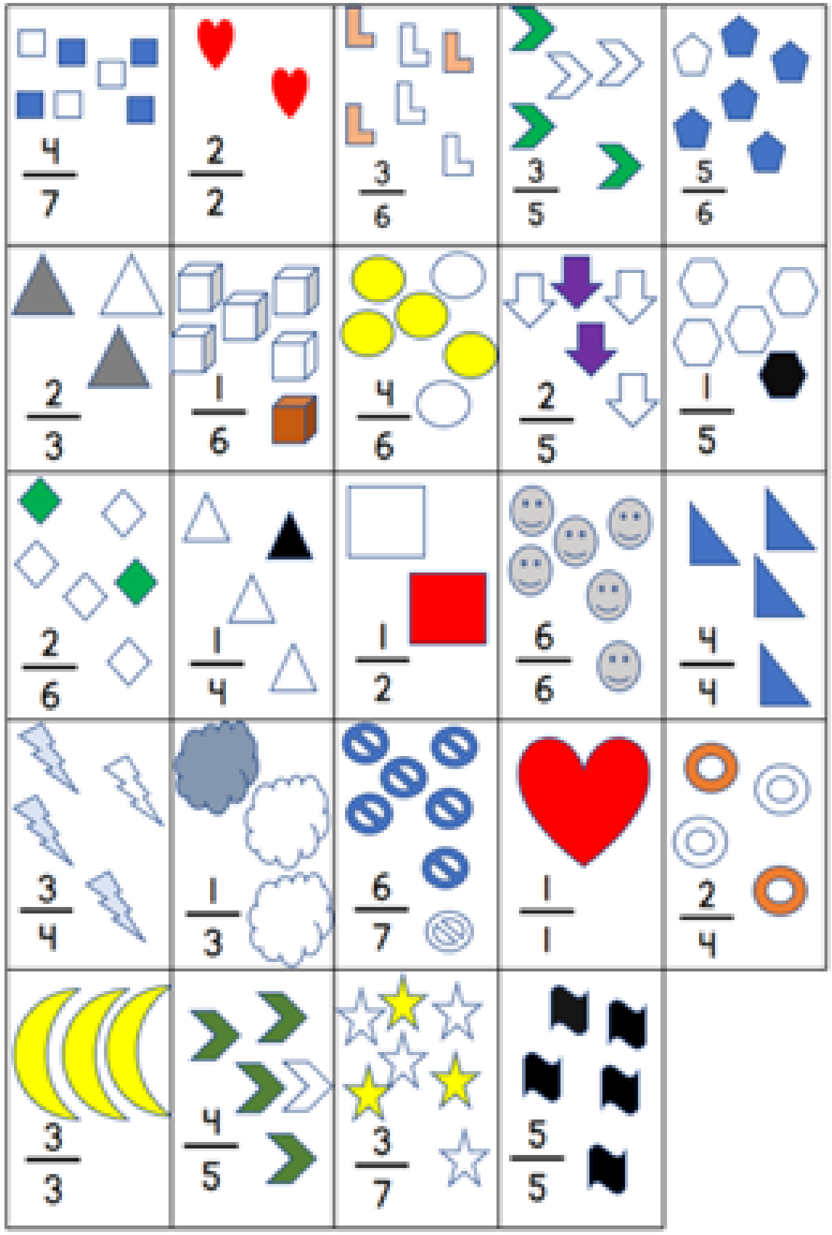
Etter gjennomføringen er det viktig med en diskusjon rundt resultatene. Hensikten med opplegget er å bevisstgjøre elevene slik at de er klar over at nevneren ikke avgjør en brøks verdi. Det er også lurt å diskutere hvordan resultatet ville blitt dersom lakrislissen i utgangspunktet var kortere eller lenger. Dette gjør at elevene starter en refleksjon rundt det faktum at brøken er avhengig av hvor stor en hel er.

Time 5

Brøk-bingo fra Malimo



BRØKBINGO – MENGDE, egenprodusert



Time 7

Brøk-kamp med kort

Matematikk med en kortstokk

Brøk-kamp 1

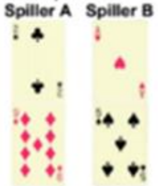
Et spill for to.

Dere trenger en kortstokk der alle 10-erne og bildekortene er fjernet.
Det er valgfritt om dere vil bruke to eller fire jokere.

1. Bland kortstokken godt og del kortene i to like store bunker.
2. Hver spiller får ei bunke hver.
3. Spillerne legger bunka på bordet foran seg med bildesiden ned.
4. Spillerne tar de to øverste kortene i bunka si og lager en brøk av dem. Kortet med minst verdi skal være teller. Har kortene samme verdi, er det valgfritt hvilket som blir valgt som teller.
5. Spilleren som får brøken med størst verdi, får begge kortene og kan legge dem underst i bunka si.

Eksempel

Spiller A **Spiller B**



Spiller A vinner de fire kortene.

$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$.

$\frac{2}{9} > \frac{2}{10}$ fordi 9-delen er større enn 10-delene.

Da er to 9-deler mer enn to 10-deler.

6. Spillerne bestemmer hvor lenge spillet skal gå. Det kan for eksempel være
   - ei avtalt tid, for eksempel 15 minutter, vinneren er den som da har flest kort i bunka si
   - spillet går til den ene spilleren ikke har flere kort igjen

Hvis dere ikke kan bli eige om hvilken brøk som er størst, kan dere bruke tallinjene som viser alle brøkene.

Brøk-kamp

Vi trenger en kortstokk, hvor 10 ere og bildekort er fjernet.

Del bunken i to, en bunke til hver elev. Hver elev tar de to øverste

Kortene og lager en brøk med disse. Det laveste skal kortet er

teller. Spilleren som får høyeste brøk vinner alle kortene.

Vedlegg 6 Intervjuguide

Ved å ta i bruk intervju vil vi prøve å få forståelse for hva som ligger bak elevers svar på de oppgavene vi har valgt ut.

Gjennom utdypende spørsmål er vi ute etter bekreftelse på at det er de aktuelle misoppfatningene som er grunnen til svarene deres.

I utgangspunktet tenker vi at vi gjennomfører intervjuet på en dynamisk måte, der eleven har oppgavearket foran seg. Eleven noteres bare som et nummer og intervjuet vil på denne måten være anonymt. En av oss er intervjuer, mens den andre noterer. Vi tar ikke opp lyd eller bilde, og det derfor ikke meldepliktig ifølge Personvernforbundet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelige datatjeneste (NSD).

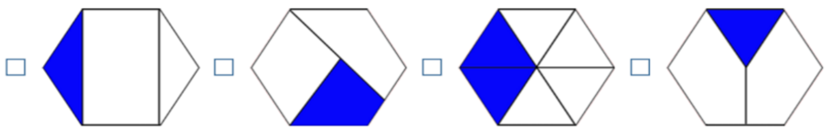
Oppgavene vi har valgt ut, er i forhold til misoppfatningene:

- *Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelsen*
- *Teller eller nevner som isolerte tall*

Misoppfatning 1: Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse

Oppgave 1

Sett kryss foran den eller de av figurene der $\frac{1}{3}$ er fargelagt blå.



Aktuelle spørsmål:

- Hvordan har du tenkt når du har løst denne oppgaven?
  - ⅓, størrelse, form

  - Så du sier at…?, Så du mener…?, Hva mener du med det?, Hvorfor tror du det?,

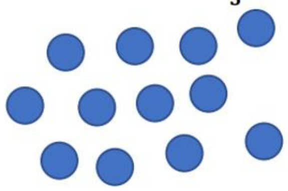
  - Er det noe du har gjort her som du nå vil endre på?

<u>Misoppfatning 4: Teller eller nevner som isolert tall</u>

<u>Aktuelle oppgaver:</u>

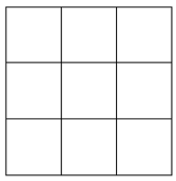
Oppgave 9

Tegn en ring rundt $\frac{1}{3}$ av brikkene.



Oppgave 17

Sett kryss i $\frac{3}{3}$ av rutene nedenfor



<u>Aktuelle spørsmål:</u>

- Hvordan tenkte du i oppgave 9 og 17?

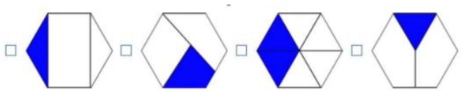
  - Kan du forklare tallene i brøken?

  - Så du sier at…?, Så du mener…?, Hva mener du med det?, Hvorfor tror du det?,

- Er det noe du har gjort her som du nå vil endre på?

Vedlegg 7 Elevintervju

Oppgave 1: Sett kryss foran den eller de av figurene der $\frac{1}{3}$ er fargelagt blå.



Oppgave 1 – sjekker om elevene tar hensyn til at delene skal være like store. Om de er i misoppfatning vil de kunne svare at alle de tre figurene som er delt i tre er rett, alternativ 1, 2 og 4, misoppfatning 1.

Elev 1:

Lærer: Her er oppgave 1. Kan du forklare hvordan du tenkte her?

Elev: Den her? Eleven peker på oppgave 1 og leser «Sett kryss foran den eller de figurene der en tredel er fargelagt blå.» Eleven ble stille og tenkte.

Lærer: En tredel er fargelagt blå.

Elev: Peker, den, den og den (hopper over den riktige.) Den her, for eksempel, (peker på den første) 1-2-3, og en er fargelagt. Viser det samme på de andre han har krysset av.

Lærer: Bra forklaring på hvordan du hadde tenkt. Eleven nikker.

Oppsummert: Intervjuet viser at elev 1 ikke har fått forståelse for at delene må være like store.

Elev 2:

Lærer: Leser oppgave 1, Sett kryss foran den eller de av figurene der en tredel er fargelagt blå.

Lærer: Her har du tegnet kjempebra.

Elev: Jeg krysset på nummer 2.

Lærer: Kan du forklare hvordan du tenkte?

Elev: Jeg husker ikke helt. Eeeeee…den var vanskelig, fordi ingen av dem var like store, men de er jo delt i tre deler, likevel, så det må jo bli sånn, eller… (tenker litt).

Lærer: Hva tenker du når du sier det?

Elev: Det blir urettferdig om det ikke er likt. Deler man den så stor og så stor (tegner ulike biter med fingeren) blir det ikke likt. Mmmm… (tenker) Jeg tror det er den, der det er to der og to der og to der (peker på figur 3, der to seksdeler er fargelagt blå).

Lærer: Ville du endret svaret ditt i dag?

Elev: Ja, det er nummer tre som er riktig.

Oppsummert: Intervjuet viser at elev 2 hadde krysset på figur 2, men syntes det ble urettferdig. Under intervjuet endret eleven til riktig figur, og forklarte at da ble det like store deler. Eleven har utviklet forståelse for likedeling.

Elev 3:

Lærer: Her er oppgave 1. Leser oppgaven for eleven. Kan du forklare hvordan du har tenkt da du løste denne oppgaven?

Elev: Vet ikke egentlig.

Lærer: Hvorfor valgte du denne figuren?

Elev: Vet ikke, vet at de seks er delt opp i like store deler.

Lærer: Enn de andre?

Elev: Trur ikke det…

Lærer: Hvorfor?

Elev: De er ikke like store.

Lærer: forstår jeg deg rett? Du mener at delene må være like store?

Elev: Ja, og to av seks er det samme som en av tre. Derfor er den riktig, de andre kan ikke være riktige.

Oppsummert: Intervjuet viser at elev 3 hadde krysset på riktig figur, hun virket noe usikker i starten av intervjuet, men viser utover i intervjuet god forståelse for likedeling.

Elev 4:

Lærer: Her er oppgave 1. Leser oppgaven for eleven. Kan du forklare hvordan du har tenkt da du løste denne oppgaven?

Elev: Jeg tenkte sånn, fordi det er like deler. Først dele den opp i tre (eleven tegner med fingeren rundt de to blå) så sier han: en gruppe av de tre og det ble en tredel.

Lærer: Kunne det ha vært noen annet?

Elev: Ja, en tredel er det samme som to seksdeler.

Oppsummert: Intervjuet viser at elev 4 tar utgangspunkt i at delene skal være like store, og grupperer med fingeren to av seks blå, og sier at det blir en tredel

Oppgave 9: Tegn en ring rundt $\frac{1}{3}$ av brikkene.

Oppgave 9 - elevene kan se teller lik 1 og sette ring rundt 1 brikke (telleren i $\frac{1}{3}$). Eller de kan sette ring rundt 3 brikker (nevneren i $\frac{1}{3}$), misoppfatning 4.

Elev 1:

Lærer: Så går vi videre til neste oppgave. Leser oppgaven. «Tegn en ring rundt en tredel av brikkene.»

Elev: Den her var litt vanskelig. På grunn av da tenkte jeg en tredel eh, ja, hvis du tar en tredel…eleven hadde satt ring rundt en brikke og satte ny ring rundt denne og to til.

Lærer: Husker du navn på delene i brøken?

Elev: Ja, teller oppe og nevner nede.

Lærer: Hva betyr telleren?

Elev: Hvor mange det skulle være inni? (Spørrende.) Å, no skjønte æ. Æ ville tatt ring rundt en og en til den tredje. Æ ville ha gjort sånn som æ hadde gjort med de andre. Eleven peker på brikkene han har ringet rundt.

Lærer: Så du ville ha laget flere like ringer som de du allerede laget?

Elev: Ja, det ville jeg. Jeg ville tatt ring rundt tre, også tatt ring rundt en av de tre. Jeg ville ha gjort det med alle.

Lærer: Hva blir en tredel da?

Elev: Det blir en brikke.

Lærer: Likte du å jobbe med brøk?

Elev: Det var artig å jobbe med det her. Det va litt forskjellige oppgaver.

Oppsummert: Intervjuet viser at elev 1 ser på teller og nevner som isolerte tall, noe som tyder på at elevene er i misoppfatning.

Elev 2:

Lærer: Her skulle du tegne rundt en tredel av brikkene. Hvordan tenkte du?

Elev: Vet ikke. (Eleven har tegnet ring rundt én brikke). Det er 1 -2 og 3, 1 -2 og 3 og 1- 2- 3.

Vet ikke helt? Alle skulle være like mye… (tenker), de skulle vært delt i tre…da blir det fire i hver gruppe. Delt i fire i ei gruppe, det er det samme som en tredel.

Lærer: Nå var du flink til å forklare. Husker du hvordan du tenkte da du satte ring rundt 1 brikke?

Elev: Jeg tenkte at tallet en betydde at det skulle være ring rundt en brikke.

Lærer: Ville du endret på svaret i dag?

Elev: Ja, for nå skjønte jeg mer.

Oppsummert: Intervjuet viser at elev 2 hadde satt ring rundt en brikke. Under intervjuet endret eleven til riktig svar, og forklarte at hun ville delt i grupper på 4. Dette betyr at elev reflekterte seg ut av misoppfatning hun var i.

Elev 3:

Lærer: Her er oppgave 9. Leser oppgaven for eleven. Kan du forklare hvordan du har tenkt da du løste denne oppgaven?

Elev: Jeg prøvde meg frem. Jeg telte. Det ble først fire grupper, men det ble ikke rett. Så delte jeg de i tre grupper med like mange i hver gruppe.

Lærer: Kan du forklare en tredel?

Elev: En er telleren, den forteller hvor mange/mye av en hel. Tre er nevner, og betyr alt sammen.

Lærer: Kunne du skrevet en tredel annerledes?

Elev: Ja, en tredel er det samme som fire tolvdeler som når jeg delte opp brikkene i oppgaven.

Eleven hadde tegnet en blokkmodell (rektangel), og delt den opp i tre like store deler og fargelagt en av delene.

Oppsummert: Intervjuet viser at elev 3 forklarer at hun måtte gruppere, og at nevneren forteller antall grupper og at en tredel ble fire brikker. Denne eleven viser god forståelse for brøk som del av en mengde og kan også overføre kunnskapen til å forkorte brøken og finne likeverdige brøker.

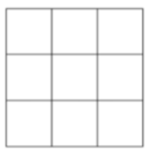
Elev 4:

Lærer: Her er oppgave 9. Leser oppgaven for eleven. Kan du forklare hvordan du har tenkt da du løste denne oppgaven?

Elev: En tredel har bare delt dem i tre. Deler man tolv i tre får man fire. Fire brikker er en tredel.

Oppsummert: Intervjuet viser at elev 4, sier at ved å dele tolv i tre, får man fire brikker i en tredel. Denne eleven viser god forståelse for brøk som del av en mengde og kan også overføre kunnskapen til å forkorte brøken og finne likeverdige brøker.

Oppgave 17: Sett kryss i $\frac{3}{3}$ av rutene nedenfor.



Oppgave 17 – Elevene ser på teller og nevner som isolerte tall og fargelegger tre ruter, misoppfatning 4.

Elev 1:

Lærer: Så går vi videre til neste oppgave. Leser oppg.17: Sett kryss i tre tredeler av rutene.

Elev: Jeg har krysset tre ruter.

Lærer: Hva tenkte du da?

Elev: Jeg tenkte at det var tre rader med tre ruter, og krysset i en av rutene i hver rad.

Lærer: Så du mener at tre tredeler er tre ruter?

Elev: Ja, det må bli sånn.

Lærer: Hva tenker du at en tredel er da?

Elev: Det må være en rute (eleven setter pekefingeren på en rute).

Lærer: Om du skulle fargelegge en tredel av hele figuren, ville du ha fargelagt en rute da?

Elev: Ja, for da blir nevneren tre når du har en rad (viser med å dra fingeren over en rad).

Oppsummert: Intervjuet viser at elev 1 ser på teller og nevner som isolerte tall, og er i misoppfatning. Intervjuet fører ikke eleven ut av denne misoppfatningen.

Elev 2:

Lærer: Leser oppgaven: Sett kryss i tre tredeler av rutene.

Elev: Jeg har krysset 3 ruter. En tredel pluss en tredel pluss en tredel er det samme som tre tredeler, åååå tre tredeler er hele.

Lærer: Hva tenker du at en tredel er da?

Elev: Det må være tre ruter. Jeg skulle krysset i alle de ni rutene. Det er det som er riktig.

Lærer: Vet du hva de ulike delene i brøken heter?

Elev: Oppe…husker ikke.

Lærer: t-t-t-

Elev: Teller eller noe sånt.

Lærer: Enn nede? Nev…(loser)…

Elev: Ingen svar

Oppsummert: Intervjuet viser at elev 2 hadde satt ring rundt tre brikker og var i misoppfatning og hadde tatt utgangspunkt i nevneren. Hun så på teller og nevner som isolerte tall. Under intervjuet oppdager eleven, gjennom egen refleksjon, at hun har gjort feil og endrer til riktig svar som er kryss i alle rutene.

Elev 3:

Lærer: Her er oppgave 17. Leser oppgaven for eleven. Kan du forklare hvordan du har tenkt da du løste denne oppgaven?

Elev: Jeg tenkte at en tredel er en rad. For å få tre tredeler, måtte man fargelegge alle. Tre tredeler er det samme som den hele.

Oppsummert: Intervjuet viser at elev 3 deler opp rader i tredeler og forklarer at tre tredeler må være hele figuren. Eleven viser forståelse for at hele figuren skal deles inn i like store deler, og at når teller og nevner er like, er dette det samme som en hel.

Elev 4:

Lærer: Her er oppgave 17. Leser oppgaven for eleven. Kan du forklare hvordan du har tenkt da du løste denne oppgaven?

Elev: Tre tredeler er en hel. Kan ikke være fire tredeler.

Lærer: Hva er fire tredeler?

Elev: Det er jo ingenting, eller jo…(tenkepause) da hadde det vært en del til.

Lærer: Hvor mye hadde det vært verdt da?

Elev: En tredel. Da hadde det blitt den hele, pluss en tredel til.

Lærer: Så bra, helt riktig. Kan du forklare brøken en tredel ?

Elev: Én er telleren, teller opp hvor masse det er. Tre er nevneren, hvor mye det har vært.

Lærer: Kan du forklare hva du mener med hvor mye det har vært?

Elev: Jaaa, ehhh… alt sammen, det hele.

Oppsummert: Intervjuet viser at elev 4 forklarer at den hele er tre tredeler. Eleven leder seg selv inn på uekte brøk, og sier først at det ikke finnes. Han reflekterer seg frem til at det må være en tredel mer enn den hele. På denne måten viser han at han kan gjøre om uekte brøk til blandet tall. Eleven viser god forståelse av betydningen av teller og nevner.

Vedlegg 8 Registrering før- og ettertest

Førkartlegging Klasse A 1 - 10

Klasse A	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E
Elev 1																				
Elev 2																				
Elev 3																				
Elev 4																				
Elev 5																				
Elev 6																				
Elev 7																				
Elev 8																				
Elev 9																				
Elev 10																				
Elev 11																				
Elev 12																				
Elev 13																				
Elev 14																				
Elev 15																				
Elev 16																				
Total riktig	4		1		6		5		16		6		2		3		7		5	
% riktig	25 %		6 %		38 %		31 %		100 %		38 %		12 %		19 %		44 %		31 %	

Førkartlegging Klasse A 11 - 19

Klasse A	11		12		13		14		15		16		17		18		19	
	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E
Elev 1																		
Elev 2																		
Elev 3																		
Elev 4																		
Elev 5																		
Elev 6																		
Elev 7																		
Elev 8																		
Elev 9																		
Elev 10																		
Elev 11																		
Elev 12																		
Elev 13																		
Elev 14																		
Elev 15																		
Elev 16																		
Total riktig	0		2		0		1		6		0		4		1		12	
% riktig	0		12 %		0		6 %		38 %		0		25 %		6 %		75 %	

Etterkartlegging Klasse A 1 - 10

Klasse A	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter
Elev 1																				
Elev 2																				
Elev 3																				
Elev 4																				
Elev 5																				
Elev 6																				
Elev 7																				
Elev 8																				
Elev 9																				
Elev 10																				
Elev 11																				
Elev 12																				
Elev 13																				
Elev 14																				
Elev 15																				
Elev 16																				
Total riktig		2		2		11		14		16		5		5		7		6		7
% riktig		12 %		12 %		69 %		88 %		100 %		31 %		31 %		44 %		38 %		44 %

Etterkartlegging Klasse A 11 - 19

Klasse A	11		12		13		14		15		16		17		18		19	
	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter
Elev 1																		
Elev 2																		
Elev 3																		
Elev 4																		
Elev 5																		
Elev 6																		
Elev 7																		
Elev 8																		
Elev 9																		
Elev 10																		
Elev 11																		
Elev 12																		
Elev 13																		
Elev 14																		
Elev 15																		
Elev 16																		
Total riktig		2		7		3		2		6		1		5		1		15
% riktig		12 %		44 %		19 %		12 %		38 %		6 %		31 %		6 %		94 %

Etterkartlegging Klasse A 20 - 26

Klasse A	20		21		22		23		24		25		26	
	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter
Elev 1														
Elev 2														
Elev 3														
Elev 4														
Elev 5														
Elev 6														
Elev 7														
Elev 8														
Elev 9														
Elev 10														
Elev 11														
Elev 12														
Elev 13														
Elev 14														
Elev 15														
Elev 16														
Total riktig		15		14		10		11		14		11		8
% riktig		94 %		88 %		63 %		69 %		88 %		69 %		50 %

Før- og etterkartlegging Klasse A 1 - 10

Klasse A	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter
Elev 1																				
Elev 2																				
Elev 3																				
Elev 4																				
Elev 5																				
Elev 6																				
Elev 7																				
Elev 8																				
Elev 9																				
Elev 10																				
Elev 11																				
Elev 12																				
Elev 13																				
Elev 14																				
Elev 15																				
Elev 16																				
Total	4	2	1	2	6	11	5	14	16	16	6	5	2	5	3	7	7	6	5	7
%	25 %	12 %	6 %	12 %	38 %	69 %	31 %	88 %	100 %	100 %	38 %	31 %	12 %	31 %	19 %	44 %	44 %	38 %	31 %	44 %

Før- og etterkartlegging Klasse A 11 - 19

Klasse A	11		12		13		14		15		16		17		18		19	
	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter
Elev 1																		
Elev 2																		
Elev 3																		
Elev 4																		
Elev 5																		
Elev 6																		
Elev 7																		
Elev 8																		
Elev 9																		
Elev 10																		
Elev 11																		
Elev 12																		
Elev 13																		
Elev 14																		
Elev 15																		
Elev 16																		
Total riktig	0	2	2	7	0	3	2	2	6	6	0	1	4	5	1	1	12	14
% riktig	0	12 %	12 %	44 %	0	19 %	12 %	12 %	38 %	38 %	0	6 %	25 %	31 %	6 %	6 %	75 %	88 %

Førkartlegging Klasse M 1 - 10

Klasse M	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E
Elev 1																				
Elev 2																				
Elev 3																				
Elev 4																				
Elev 5																				
Elev 6																				
Elev 7																				
Elev 8																				
Elev 9																				
Elev 10																				
Elev 11																				
Elev 12																				
Elev 13																				
Elev 14																				
Elev 15																				
Elev 16																				
Total riktig	2		0		8		3		15		5		2		4		7		6	
% riktig	12 %		0		50 %		19 %		94 %		31 %		12 %		25 %		44 %		38 %	

Førkartlegging Klasse M 11-19

Klasse M	11		12		13		14		15		16		17		18		19	
	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E	Før	E
Elev 1																		
Elev 2																		
Elev 3																		
Elev 4																		
Elev 5																		
Elev 6																		
Elev 7																		
Elev 8																		
Elev 9																		
Elev 10																		
Elev 11																		
Elev 12																		
Elev 13																		
Elev 14																		
Elev 15																		
Elev 16																		
Total riktig	3		3		2		4		7		3		6		2		12	
% riktig	19 %		19 %		12 %		25 %		44 %		19 %		38 %		12 %		75 %	

Etterkartlegging Klasse M 1-10

Klasse M	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter
Elev 1																				
Elev 2																				
Elev 3																				
Elev 4																				
Elev 5																				
Elev 6																				
Elev 7																				
Elev 8																				
Elev 9																				
Elev 10																				
Elev 11																				
Elev 12																				
Elev 13																				
Elev 14																				
Elev 15																				
Elev 16																				
Total riktig		8		1		10		15		16		8		6		9		14		13
% riktig		50 %		6 %		63 %		94 %		100 %		50 %		38 %		56 %		88 %		81 %

Etterkartlegging Klasse M 11-19

Klasse M	11		12		13		14		15		16		17		18		19	
	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter	F	Etter
Elev 1																		
Elev 2																		
Elev 3																		
Elev 4																		
Elev 5																		
Elev 6																		
Elev 7																		
Elev 8																		
Elev 9																		
Elev 10																		
Elev 11																		
Elev 12																		
Elev 13																		
Elev 14																		
Elev 15																		
Elev 16																		
Total riktig		8		10		4		2		14		6		12		6		16
% riktig		50 %		63 %		25 %		12 %		88 %		38 %		75 %		38 %		100 %

Etterkartlegging Klasse M 20 - 26

Klasse M	20		21		22		23		24		25		26	
	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter
Elev 1														
Elev 2														
Elev 3														
Elev 4														
Elev 5														
Elev 6														
Elev 7														
Elev 8														
Elev 9														
Elev 10														
Elev 11														
Elev 12														
Elev 13														
Elev 14														
Elev 15														
Elev 16														
Total riktig		14		16		13		15		15		14		14
% riktig		88 %		100%		81 %		94 %		94 %		88 %		88 %

Før- og etterkartlegging Klasse M 1 - 10

Klasse M	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter
Elev 1																				
Elev 2																				
Elev 3																				
Elev 4																				
Elev 5																				
Elev 6																				
Elev 7																				
Elev 8																				
Elev 9																				
Elev 10																				
Elev 11																				
Elev 12																				
Elev 13																				
Elev 14																				
Elev 15																				
Elev 16																				
Total riktig	2	8	0	1	8	10	3	15	15	16	5	8	2	6	4	9	7	14	6	13
% riktig	12 %	50 %	0	6 %	50 %	63 %	19 %	94 %	94 %	100 %	31 %	50 %	12 %	38 %	25 %	56 %	44 %	88 %	38 %	81 %

Før - og etterkartlegging klasse M 11-19

Klasse M	11		12		13		14		15		16		17		18		19	
	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter	Før	Etter
Elev 1																		
Elev 2																		
Elev 3																		
Elev 4																		
Elev 5																		
Elev 6																		
Elev 7																		
Elev 8																		
Elev 9																		
Elev 10																		
Elev 11																		
Elev 12																		
Elev 13																		
Elev 14																		
Elev 15																		
Elev 16																		
Total riktig	3	8	3	10	2	4	4	2	7	14	3	6	6	12	2	6	12	16
% riktig	19 %	50%	19 %	63 %	12 %	25 %	25 %	12 %	44 %	88 %	19 %	38 %	38 %	75 %	12 %	38 %	75 %	100 %

Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse – misoppfatning 1

A	Oppgave 1		Oppgave 2		Oppgave 5		Oppgave 8		Oppgave 12		Oppgave 21		M	Oppgave 1		Oppgave 2		Oppgave 5		Oppgave 8		Oppgave 12		Oppgave 21	
	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E		F	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E
1													1												
2													2												
3													3												
4													4												
5													5												
6													6												
7													7												
8													8												
9													9												
10													10												
11													11												
12													12												
13													13												
14													14												
15													15												
16													16												
17													17												

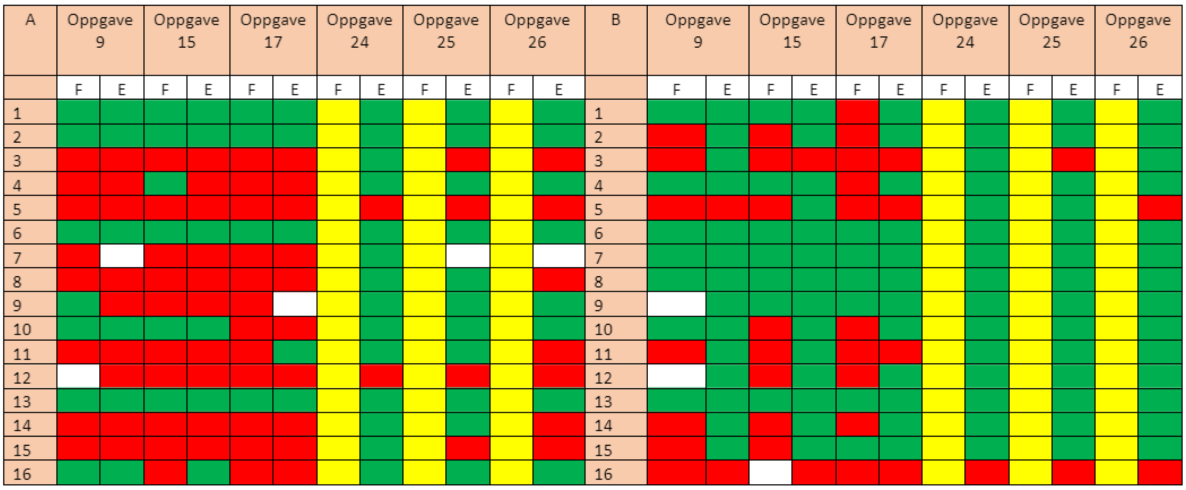
Jo større nevner eller teller, jo større brøk – misoppfatning 2

A	Oppgave 3		Oppgave 4		Oppgave 7		Oppgave 11		Oppgave 13		Oppgave 19		M	Oppgave 3		Oppgave 4		Oppgave 7		Oppgave 11		Oppgave 13		Oppgave 19	
	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E		F	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E
1													1												
2													2												
3													3												
4													4												
5													5												
6													6												
7													7												
8													8												
9													9												
10													10												
11													11												
12													12												
13													13												
14													14												
15													15												
16													16												

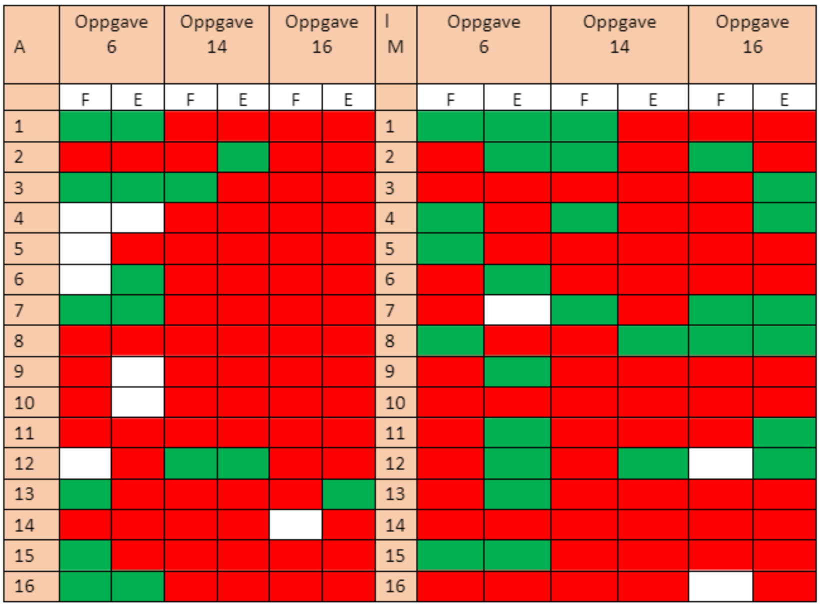
Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken – misoppfatning 3

A	Oppgave 10		Oppgave 18		Oppgave 20		Oppgave 22		Oppgave 23		M	Oppgave 10		Oppgave 18		Oppgave 20		Oppgave 22		Oppgave 23	
	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E		F	E	F	E	F	E	F	E	F	E
1											1										
2											2										
3											3										
4											4										
5											5										
6											6										
7											7										
8											8										
9											9										
10											10										
11											11										
12											12										
13											13										
14											14										
15											15										
16											16										

Teller eller nevner som isolert tall – misoppfatning 4



Ulike misoppfatning 5



Differanse før - og etterkartlegging i prosent: misoppfatning 1 – nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse

	Kl. A - før	Kl. A -etter	Økning/ nedgang	Kl. M - før	Kl. M - etter	Økning/ nedgang
Oppgave 1	25 %	12 %	- 13 %	12 %	50 %	+38 %
Oppgave 2	6 %	12 %	+ 6 %	0	6 %	+6 %
Oppgave 5	100 %	100 %	0	94 %	100 %	+6 %
Oppgave 8	19 %	44 %	+25 %	25 %	56 %	+31 %
Oppgave 12	12 %	44 %	+32 %	19 %	63 %	+44 %
Oppgave 21		88 %			100 %	

Differanse før - og etterkartlegging i prosent: misoppfatning 2 – jo større nevner eller teller, jo større brøk

	Kl. A - før	Kl. A -etter	Økning/ nedgang	Kl. M - før	Kl. M - etter	Økning/ nedgang
Oppgave 3	38 %	69 %	+31 %	50 %	63 %	+13 %
Oppgave 4	31 %	88 %	+ 57 %	19 %	94 %	+75 %
Oppgave 7	12 %	31 %	+ 19 %	12 %	38 %	+26 %
Oppgave 11	0	12 %	+ 12 %	19 %	50 %	+31 %
Oppgave 13	0	19 %	+ 19 %	12 %	25 %	+13 %
Oppgave 19	75 %	88 %	+ 13 %	75 %	100 %	+25 %

Differanse før - og etterkartlegging i prosent: misoppfatning 3 – differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken

	Kl. A - før	Kl. A -etter	Økning/ nedgang	Kl. M - før	Kl. M - etter	Økning/ nedgang
Oppgave 10	31 %	44 %	+13 %	38 %	81 %	+43 %
Oppgave 18	6 %	6 %	0 %	12 %	37 %	+25 %
Oppgave 20		94 %			88 %	
Oppgave 22		63 %			81 %	
Oppgave 23		69 %			94 %	

Differanse før - og etterkartlegging i prosent: misoppfatning 4 – teller eller nevner som isolert tall

	Kl. A - før	Kl. A -etter	Økning/ nedgang	Kl. M - før	Kl. M - etter	Økning/ nedgang
Oppgave 9	44 %	38 %	-6 %	44 %	88 %	+44 %
Oppgave 15	38 %	38 %	0 %	44 %	88 %	+44 %
Oppgave 17	25 %	31 %	+6 %	38 %	75 %	+37 %
Oppgave 24		88 %			94 %	
Oppgave 25		69 %			88 %	
Oppgave 26		50 %			88 %	

Differanse før - og etterkartlegging i prosent: misoppfatning 5 – ulike misoppfatninger

	Kl. A - før	Kl. A -etter	Økning/ nedgang	Kl. M - før	Kl. M - etter	Økning/ nedgang
Oppgave 6	38 %	31 %	-7 %	31 %	50 %	+19 %
Oppgave 14	12 %	12 %	0 %	25 %	12 %	-13 %
Oppgave 16	0	6 %	+ 6 %	19 %	38 %	+19 %

Vedlegg 9 Utvalgte oppgaver til intervju

Klasse A

Oppgave 1 – hvilke figurer er krysset av?

Elev	Førkartlegging	Etterkartlegging
1		1, 2, 4
2	1, 2, 4	2
3	1	1, 2, 4
4		2
5	1, 2, 4	2
6		
7	1, 2, 4	1, 2, 4
8	1	1, 2, 4
9	2	1, 2, 4
10		
11	1, 2, 4	1, 2, 4
12	1	1
13	1, 2, 4	1, 2, 4
14	1	1, 3
15	1, 4	4
16	4	

Klasse A

Oppgave 9 – antall sirkler ringet rundt?

Elev	Førkartlegging	Etterkartlegging
1		
2		
3	Ring rundt 3 + 3	Ring rundt 3
4	Ring rundt 3	Ring rundt 1
5	Ring rundt 3	Ring rundt 3
6		
7	Ring rundt 3 også 1 av de 3	
8	Ring rundt 1	Ring rundt alle 1 og 1, så en ring rundt alle 12
9		Ring rundt 3, 3, 3, 3 og så ring rundt en i hver treer
10		
11	Ring rundt 3 og 3	Ring rundt 3
12		Ring rundt 3, så ring rundt 1 av de 3
13		
14	Ring rundt 3 brikker	Ring rundt 3
15	Ring rundt 3 brikker	Ring rundt 3
16		

Klasse A

Oppgave 17 – antall ruter som er fargelagt?

Elev	Førkartlegging	Etterkartlegging
1		
2		
3	3	3
4	3	3
5	3	3
6		
7	3	3
8	3	3
9	3	
10	3	3
11	3	
12	3	3
13		
14	3	3
15	3	3
16	3	

Klasse M

Oppgave 1 – hvilke figurer er krysset av?

Elev	Førkartlegging	Etterkartlegging
1	1, 2, 4	1, 2, 4
2	1, 2, 4	3
3	4	1
4	2	3
5	1, 2, 4	3
6	1, 2, 4	3
7	1, 2, 4	3
8	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4
9	1, 2, 4	3
10	3	3
11	1, 2, 4	2, tenkte de delene var like store, selv om de hadde ulik form
12	1, 2, 4	1, 2, 4
13	1, 2, 4	1, 2, 4
14	1, 2, 4	1, 2, 4
15	3	3
16	1, 2, 3, 4	1

Klasse M

Oppgave 9 – antall sirkler ringet rundt?

Elev	Førkartlegging	Etterkartlegging
1	4	4
2	3 ringet, deretter 1 ringet inni	4
3	3 ringet, deretter 1 ringet inni	4
4	4	4
5	3 ringet, deretter 1 ringet inni	3
6	4	4
7	4	4
8	4	4
9	Ingen, umulig	4
10	4	4
11	3	4
12	Blank	4
13	4	4
14	3	4
15	1	4
16	3	2

Klasse M

Oppgave 17 – antall ruter som er fargelagt?

Elev	Førkartlegging	Etterkartlegging
1	3 ruter, en tredel	9
2	3 ruter, en tredel	9
3	3 ruter, en tredel	3 ruter, en tredel
4	3 ruter, en tredel	9
5	3 ruter, en tredel	3 ruter, en tredel
6	9	9
7	9	9
8	9	9
9	9	9
10	3 ruter, en tredel	9
11	3 ruter, en tredel	3 ruter, en tredel
12	3 ruter, en tredel	9
13	9	9
14	3 ruter, en tredel	9
15	9	9
16	3 ruter, en tredel	3 ruter, en tredel

Vedlegg 10 Informasjonsskriv lærer

Vil du delta i forskningsprosjektet

"Forståelse for brøk"?

Formål
Formålet med vårt forskningsprosjekt er å se på hvilken betydning oppstart/innfallsvinkel har å si for elevenes læring i emnet brøk.
Vi vil kun benytte besvarelser hvor foresatte har samtykket til at eleven kan være med i studien.

Hva innebærer deltakelse i studien?
Deltakelse i studiet innebærer at eleven vil delta på en før- og etter-kartlegging i emnet brøk, i papirform, samt delta på et to-ukers opplegg (6-8 t) med brøkundervisning. Det kan, i tillegg, bli aktuelt å gjennomføre intervju/spørreundersøkelse uten lyd- eller videoopptak i etterkant av gjennomføringen. Vi vil også ha behov for observasjon av undervisningen, ved notasjon.

Hvem er ansvarlig for forskingsprosjektet?
Vi, Brita Walle Nikolaisen og Vigdis Marie Larsen, har i årene 2019 – 2021 tatt videreutdanning som lærerspesialister i matematikk ved UiT, Norges Arktiske Universitet. I løpet av 2021/2022 skal vi gjennomføre et forskningsprosjekt i matematikkdidaktikk som skal avsluttes med en mastergradsoppgave våren 2022.

Ditt personvern
Vi vil kun bruke opplysningene til formålet vi har fortalt om i dette skrivet. Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Det er kun forskere som vil ha tilgang til informasjon om prosjektet. I forskningsrapporten blir informasjon anonymisert. All data lagres på lokal datamaskin og slettes etter endt prosjekt. Deltakere vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen.
Prosjektet skal etter planen avsluttes 15.mai 2022.

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn.

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med Brita Walle Nikolaisen (95 26 90 55) eller Vigdis Marie Larsen (97 56 29 99). Veileder i prosjektet er Monica Nymoen Hansen ved UiT, Norges Arktiske Universitet, og kan nåes på monica.n.hansen@uit.no / 98 76 88 98.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk senter for forskningsdata AS, og returnert som ikke meldepliktig.

Med vennlig hilsen

Brita W. Nikolaisen & Vigdis M. Larsen

Vedlegg 11 Samtykkeskjema

Samtykke til deltakelse i forskningsprosjektet

"Forståelse for brøk".

Bakgrunn og formål
I årene 2019 – 2021 har vi tatt videreutdanning som lærerspesialister i matematikk ved UiT, Norges Arktiske Universitet. I løpet av 2021/2022 skal vi gjennomføre et forskningsprosjekt i matematikkdidaktikk som skal avsluttes med en mastergradsoppgave våren 2022.
Formålet med vårt forskningsprosjekt er å se på hvilken betydning oppstart/innfallsvinkel har å si for elevenes læring i emnet brøk.
Vi vil kun benytte besvarelser hvor foresatte har samtykket til at eleven kan være med i studien.

Hva innebærer deltakelse i studien?
Deltakelse i studiet innebærer at eleven vil delta på en før- og etter-kartlegging i emnet brøk, i papirform, samt delta på et to-ukers opplegg (6-8 t) med brøkundervisning. Det kan, i tillegg, bli aktuelt å gjennomføre intervju/spørreundersøkelse uten lyd- eller videoopptak i etterkant av gjennomføringen. Vi vil også ha behov for observasjon av undervisningen, ved notasjon.

Hva skjer med informasjonen om deg?
Informasjonen vi bruker vil ikke inneholde personopplysninger utover alder, klassetrinn og kjønn.
Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Det er kun forskere som vil ha tilgang til informasjon om deltakere. I forskningsrapporten blir informasjon anonymisert. All data lagres på lokal datamaskin og slettes etter endt prosjekt. Deltakere vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 15.mai 2022.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil du likevel få opplæring på lik linje med de andre elevene.

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med Brita Walle Nikolaisen (95 26 90 55) eller Vigdis Marie Larsen (97 56 29 99). Veileder i prosjektet er Monica Nymoen Hansen ved UiT, Norges Arktiske Universitet, og kan nåes på monica.n.hansen@uit.no / 98 76 88 98.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk senter for forskningsdata AS, og returnert som ikke meldepliktig.

Samtykke til deltakelse i forskningsprosjekt

Foreldres/ foresattes samtykkeskjema

Jeg bekrefter med dette at jeg har lest informasjonsskrivet og samtykker i at mitt barn deltar i aktiviteter knyttet til forskningsprosjektet.

Barnets navn/klasse: ____

Jeg samtykker til: (Kryss av)

- ☐ å delta på matematikkundervisning med fokus på brøk
- ☐ å delta på før- og etterkartlegging
- ☐ å delta i intervju av lærer om brøkforståelse

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, 15.mai 2022.

Sted/dato: ____________________________________

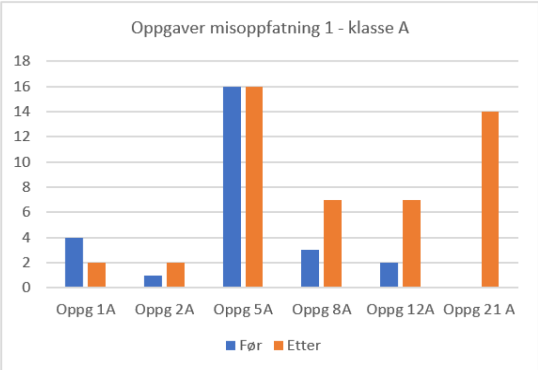
____

(Foresattes underskrift)

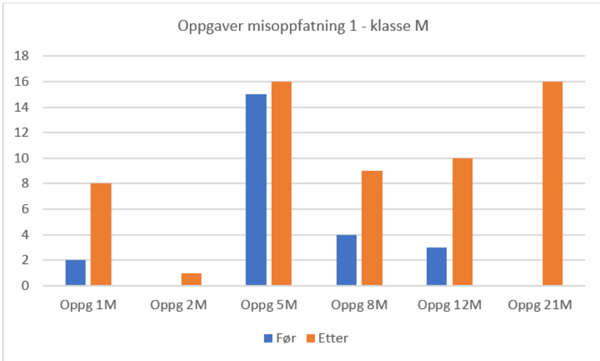
Vennligst lever skjemaet snarest til forskerne via kontaktlærer.

Vedlegg 12 Areal- og mengdeelevene oppsummert etter misoppfatning

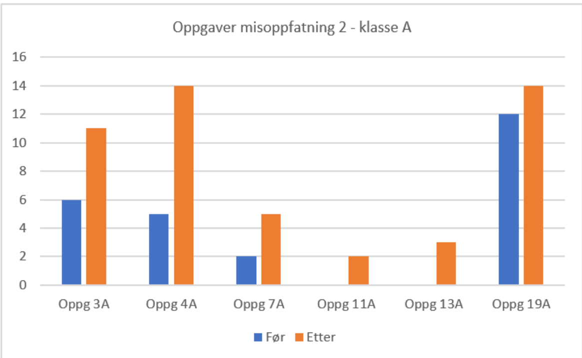
Blå søyle = førtest og oransje søyle = ettertest



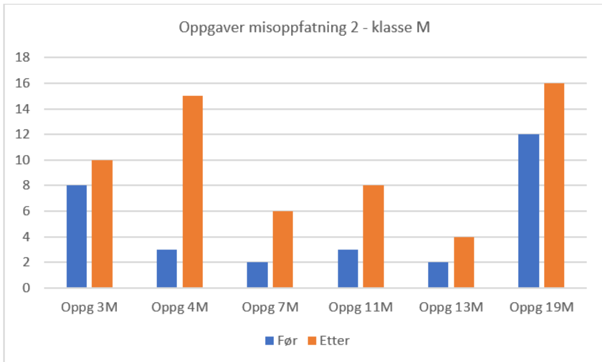
Misoppfatning 1 - før og etter - arealelever



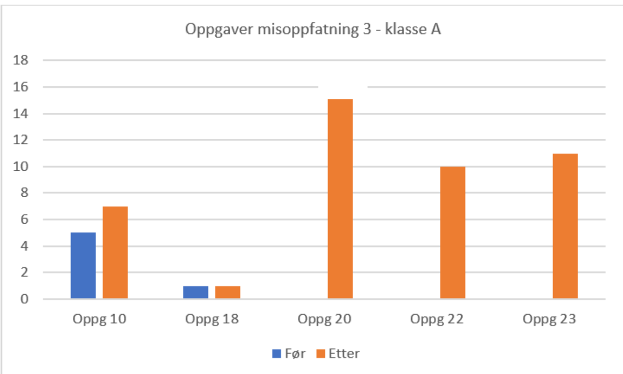
Misoppfatning 1 - før og etter - mengdeelever



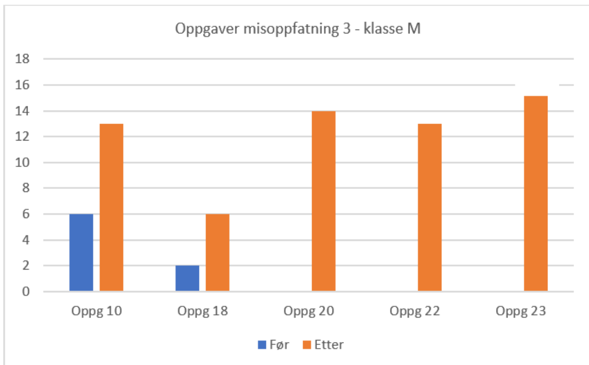
Misoppfatning 2 - før og etter - arealelever



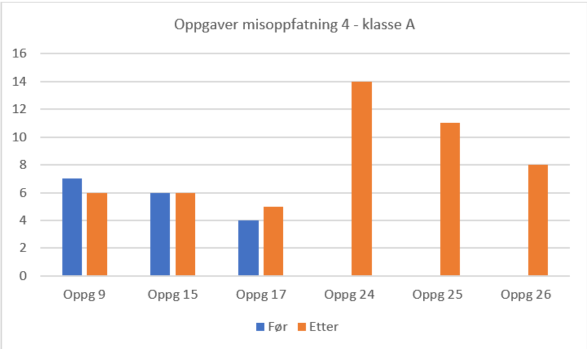
Misoppfatning 2 – før og etter – mengdeelever

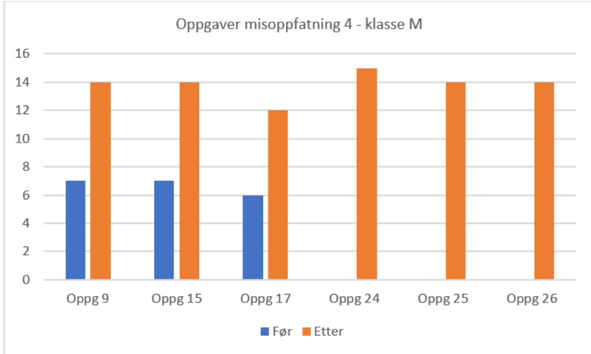


Misoppfatning 3 - før og etter - arealelever



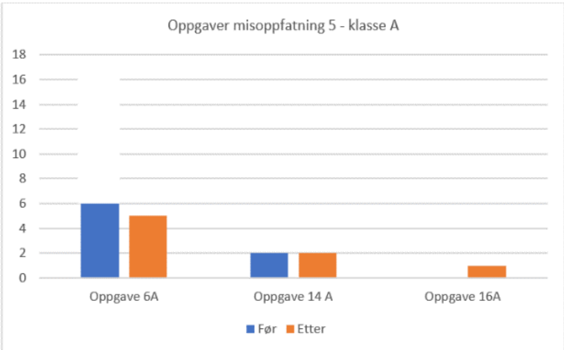
Misoppfatning 3 – før og etter - mengdeelever

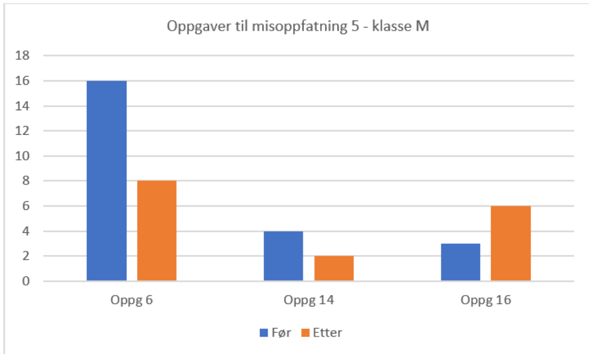




Misoppfatning 4 - før og etter - arealelever

Misoppfatning 4 – før og etter - mengdeelever





Misoppfatning 5 - før og etter - arealelever

Misoppfatninger5 – før og etter - mengdeelever

Vedlegg 13 Gjennomsnittlig endringsskår i prosent

	A - før	A - etter	Endring i %	B - før	B - etter	Endring i %
Oppgave 1	25 %	12 %	-12,5 %	12 %	50 %	+38 %
Oppgave 2	6 %	12 %	+ 6 %	0 %	6 %	+6 %
Oppgave 3	38 %	69 %	+31 %	50 %	63 %	+13 %
Oppgave 4	31 %	88 %	+56 %	19 %	94 %	+75 %
Oppgave 5	100 %	100 %	0	94 %	100 %	+6 %
Oppgave 6	38 %	31 %	-7%	31 %	50 %	+19 %
Oppgave 7	12 %	31 %	+19 %	12 %	38 %	+26 %
Oppgave 8	19 %	44%	+25 %	25 %	56 %	+31 %
Oppgave 9	44 %	38 %	-6 %	44 %	88 %	+44 %
Oppgave 10	31 %	44 %	+11 %	38 %	81 %	+44 %
Oppgave 11	0 %	12 %	+12%	19 %	50 %	+31 %
Oppgave 12	12 %	44 %	+32 %	19 %	63 %	+44 %
Oppgave 13	0 %	19 %	+19 %	12 %	25 %	+13 %
Oppgave 14	12 %	12 %	0	25 %	12 %	-13 %
Oppgave 15	38 %	38 %	0	44 %	88 %	+44 %
Oppgave 16	0 %	6 %	+6 %	19 %	38 %	+19 %
Oppgave 17	25 %	31 %	+6 %	38 %	75 %	+37 %
Oppgave 18	6 %	6 %	0	12 %	38 %	+26 %
Oppgave 19	75 %	88 %	+13 %	75 %	100 %	+25 %
Oppgave 20		94 %			88 %	
Oppgave 21		88 %			100 %	
Oppgave 22		63 %			81 %	
Oppgave 23		69 %			94 %	
Oppgave 24		88 %			94 %	
Oppgave 25		69 %			88 %	
Oppgave 26		50 %			88%	

Oppgaver til misoppfatning 1

Oppgaver til misoppfatning 2

Oppgaver til misoppfatning 3

Oppgaver til misoppfatning 4

Oppgaver til misoppfatning 5