MAT-3906

MASTERGRADSOPPGÅVE I MATEMATIKK – LÆRARUTDANNING

Likningar i vidaregåande skule

EIT KVALITATIVT STUDIUM AV KVA ELEVAR VEIT OG IKKJE VEIT OM LIKNINGAR

Ingeborg Katrin Berget

Juni, 2010

FAKTULTET FOR NATURVITENSKAP OG TEKNOLOGI
Institutt for matematikk og statistikk

Universitetet i Tromsø

MAT-3906

MASTERGRADSOPPGÅVE I MATEMATIKK – LÆRARUTDANNING

Likningar i vidaregåande skule

EIT KVALITATIVT STUDIUM AV KVA ELEVAR VEIT OG IKKJE VEIT OM LIKNINGAR

Ingeborg Katrin Berget

Juni, 2010

Forord

Denne studien er eit resultat av mitt siste semester av integrert masterfagsprogram, 5-årig lektorutdanning i realfag. Oppgåva er matematikkdidaktisk.

Til vegleiarane mine Anne Birgitte Fyhn, Institutt for lærerutdanning og pedagogikk, og Ragnar Soleng, Institutt for matematikk og statistikk: Tusen takk for alle konstruktive innspel i arbeidet med denne oppgåva.

Takk også til mamma for innspel og korrekturlesing. Og ikkje minst til Aleksander, min altmulegmann.

Og utan villige elevar og lærarar hadde det vore umuleg å gjennomføre denne studien. Tusen takk for at eg fekk vere med i matematikktimar og verte kjent med både dykk og problem kring likningar.

Tromsø, mai 2010

Ingeborg Katrin Berget

Innhaldsliste

Forord ... v
Innhaldsliste ... vii
1 Innleiing ... 1
2 Teori ... 5
2.1 Kva er ei likning? ... 5
2.2 Historikk om likningar ... 6
2.2.1 Starten ... 6
2.2.2 Algebra i skulen ... 8
2.2.3 Likningar i læreplanen ... 8
2.3 Læring av matematikk ... 10
2.3.1 Kva vil det seie å kunne matematikk? ... 10
2.3.2 Figurativ og operativ kunnskap ... 12
2.3.3 Symbolsk og praktisk matematikk ... 12
2.3.4 Symbolsk matematikk ... 13
2.3.5 Å abstrahere i matematikken ... 13
2.3.6 Forståing ... 15
2.3.7 Forståing versus ferdigheiter ... 16
2.3.8 Kreativitet ... 18
3 Metode ... 21
3.1 Kvalitative versus kvantitative metodar ... 21
3.2 Forskingsetikk i metodeval ... 22
3.3 Ulike kvalitative metodar og drøfting av desse ... 23
3.3.1 Observasjon ... 23
3.3.2 Intervju ... 24
3.3.3 Samtale ... 25
3.3.4 Kvalitativt spørjeskjema ... 26
3.4 Endeleg metodeval ... 26
3.5 Skildring av utval og grunn for val av informantar ... 27
3.6 Observasjon og samtale med elevar og lærarar ... 27
3.7 Spørjeundersøking ... 28
3.7.1 Prosessen for utforming av skjema ... 28
3.7.2 Skildring av endeleg skjema (sjå vedlegg 1) ... 29
3.8 Utvikling av analyseverkty ... 29
3.8.1 Å få oversikt over datamaterialet ... 29
3.8.2 Å dele inn i analysekategoriar ... 30
3.8.3 Inndeling av elevar ... 31
3.9 Metode for analyse ... 32
3.10 Reliabilitet og validitet ... 32
3.10.1 Reliabilitet ... 32
3.10.2 Validitet ... 33
4 Analyse og drøfting ... 35
4.1 Forståing ... 35
4.1.1 Skildring av kategorien forståing ... 35
4.1.2 *Dei andre* og forståing ... 36
4.1.3 *Dei som forstår* og forståing ... 39
4.2 Fakta ... 40
4.2.1 Skildring av kategorien fakta ... 40
4.2.2 *Dei andre* og faktakunnskap ... 41
4.2.3 *Dei som forstår* og faktakunnskap ... 43

4.3 Ferdigheit ... 43
4.3.1 Skildring av kategorien ferdigheit ... 43
4.3.2 *Dei andre* og ferdigheit ... 43
4.3.3 *Dei som forstår* og ferdigheit ... 46
4.4 Kreativitet ... 47
4.4.1 Skildring av kategorien kreativitet ... 47
4.4.2 *Dei andre* og kreativitet ... 48
4.4.3 *Dei som forstår* og kreativitet ... 48
4.5 Hovudskilnadane på dei som forstår og dei andre ... 49
5 Diskusjon ... 53
5.1 Kommunikasjon og språk ... 53
5.2 Praktisk problem ... 56
6 Avslutning og konklusjon ... 59
6.1 Oppsummering ... 59
6.2 Dette kunne eg ha gjort annleis ... 60
6.3 Vegen vidare ... 61
6.3.1 Spørsmål som hadde vore interessant å funne svar på ... 61
6.3.2 Refleksjonar om å undervise i likningar ... 62
6.4 Konklusjon ... 62
7 Litteratur ... 63
Appendix:
1. Undersøking til elevane
2. Elevsvar på undersøking

1 Innleiing

Gjennom eigen skulegong og ulike praksiserfaringar har eg sett at likningar kan vere noko mange har vanskar med. Likningar vert brukt innanfor mange emne i matematikkfaget, faktisk er det vanskeleg å finne døme på emne i pensum på vidaregåande der likningar ikkje vert brukt. Ein brukar likningar i ei eller anna form både i funksjonar, geometri, økonomi og sannsynsrekning. Frå praksis i utdanninga mi har eg erfart at når det vert undervist i likningar på ungdomsskulen er det eit lausreve tema. Elevane får ikkje sjå korleis dei kan relatere likningar til andre emne.

I observasjon i ei VG1-klasse har eg opplevd at nokre elevar synest at alt vert so innvikla når ein skriv x-ar og blandar dette saman med tal, brøkstrekar og parentesar. Men kva er det som er vanskeleg? I datamaterialet mitt har eg døme på at elevar opplever det mykje vanskelegare om ein uttrykker arealet til eit rektangel som $x \cdot y$ i staden for $l \cdot b$. Kva er grunnen til dette? Og kvifor opplever nokre at likningar er nyttig, medan andre ikkje kan førestille seg at dei kan få bruk for det? Eg vil gjerne finne ut meir om dette i løpet av arbeidet med denne oppgåva.

I observasjon og gjennom teori eg las, oppdaga eg at forståing av omgrepet likningar har mykje å seie for kva ein tenker om likningar. Og om ein har forståing veit ein ikkje berre korleis ein skal løyse likningar, men ein veit kvifor ein gjer som ein gjer.

Eg gjennomførte ei spørjeundersøking i den same klassa som eg observerte. Der hadde eg med spørsmålet ”kva er vanskeleg med å løyse likningar?”. Det eg kunne trekke fram frå svara var at dei som slit, hugsar berre at det er mykje reglar. Og desse reglane hugsar dei ikkje. Medan ein av elevane som ikkje synest at matematikk var vanskeleg såg ikkje på det å løyse likningar som å fylgje ei oppskrift, men meir som ei hinderløype der ein må møte utfordringar på rette måten. Då dei skulle forklare kva ei likning var, fekk eg mellom anna svaret: ”Det er et regnestykke med x, y eller andre bokstaver. Og med paranteser. Det er vanskelig” Andre syntest at det var lett, og at løysingsmetodane verka logiske.

Eg vil i denne studien prøve å få ei betre forståing av elevar si forståing av likningar. Forskingsspørsmålet mitt er som fylgjer:

- Kva veit elevar som forstår, om likningar?

Eg har valt å bruke verbet *veit* fordi det omfattar meir enn til dømes *kan*. *Kan* vert gjerne brukt om ferdigheiter eller fakta, medan *veit* omfamnar både forstår og kan.

Det kan sjå ut som at det er dei flinke som er i fokus i dette spørsmålet. Euklid skildrar kva ei overflate, ei linje og eit punkt er, ved å seie kva eigenskapar dei ikkje har (Lakoff & Núñez, 2000). På same måten vil eg prøve å seie noko om "dei andre", ved å diskutere kva "dei som forstår" veit. Alle har forstått noko, så eg brukar ikkje namnet "dei som ikkje forstår". Eg vel heller å kalle denne gruppa for *dei andre.* Gjennom oppgåva drøftar eg altså to elevgrupper: *Dei som forstår* og *dei andre.* Gruppene utfyller kvarandre. Ved å seie noko om den eine gruppa, seier eg noko om den andre.

Det overordna målet med oppgåva er for meg å kunne undervise likningar på best muleg måte. Viss ein finn ut kva elevar har problem med, er det eit glimrande utgangspunkt for å legge til rette for god undervising.

Analysekapitlet har eg delt inn i fire kategoriar, som eg har til overskrifter: Forståing, fakta, ferdigheiter og kreativitet. Eg vil i denne studien prøve å finne ut meir om kva som skil *dei som forstår* frå *dei andre*. Difor startar eg analysekapitlet med å drøfte kva forståing er. For å drøfte kva elevane kan om likningar, har eg valt å dele inn i fakta og ferdigheiter. Der eg ser nærare på problem med å løyse likningar. Deretter drøftar eg kreativitet i forhold til likningar. Dette for å sjå nærare på kva elevar som forstår likningar veit om muligheitene til å vere kreative i løysingsmetodane. Eg tek også opp abstrahering under drøfting og analysar, under overskriftene forståing og kreativitet. Noko som eg kunne ha fokusert på i denne studien, er haldningar til matematikk. Men for å avgrense oppgåva har eg valt å ikkje gå inn på dette i særleg grad.

Under kvar kategori diskuterer eg fyrst *dei andre,* og deretter dei som har forståing. I slutten av analysekapitlet oppsummerar eg kva elevar som forstår likningar veit i forhold til *dei andre,* når det gjeld likningar. Vidare tek eg opp emnet kommunikasjon og språk i diskusjonen etter analyser og drøftingar. Dette gjer eg fordi det viser seg at språket ein brukar i matematikk i samband med likningsløysing seier noko om fokuset på forståing. Klassa eg gjorde undersøkingar i, var ei matematikklasse som hadde valt praktisk matematikk. Under kapitlet diskusjon vil eg også diskutere praktiske oppgåver i matematikk, som det står om i læreplanen. Grunnen til at eg tek opp dette er det overordna målet mitt med oppgåva, at eg vil undervise om likningar på best muleg måte. Under analyser og drøfting trekker eg også fram tidlegare forsking om nokre av funna eg gjer, som seier noko om korleis ein kan gjere noko med problema med likningar.

Når eg siterer elevar nyttar eg ”han”, både om jenter og gutar. Dette for å bevare anonymitet i størst muleg grad.

2 Teori

2.1 Kva er ei likning?

Dette spørsmålet har ikkje eit enkelt svar. Det finst fleire ulike definisjonar av likningar. Attorps & Tossavainen (2009) viser til to ulike (Borowski & Borwein sitert i Attorps & Tossavainen, 2009:3):

> An equation is a mathematical statement of the following form: equation, a formula that asserts that two expressions have the same value; it is either an identical equation (usally called an identity), which is true for any values of the variables, or conditional equation, which is only true for certain values of the variables.

I fylgje denne definisjonen er $0 = 1$ ikkje ei likning, medan Wolfram Mathworld slår fast at "an equation is a mathematical expression stating that two or more quantities are the same as one another." (Attorps & Tossavainen, 2009, s. 145) Altså er $0 = 1$ ei likning i fylgje denne definisjonen. I ei undersøking (Attorps & Tossavainen, 2009) viser det seg at lærarstudentar har problem med å seie kva som er ei likning eller ikkje.

Det som i alle fall må vere med for at noko skal kallast ei likning, er eit likskapsteikn. Då får ein to uttrykk med likskapsteikn mellom. Dersom det er likskap mellom dei to uttrykka er likninga sann. Viss eg ut i frå dette skal prøve å seie kva som ikkje er ei likning, må det vere eit uttrykk som ikkje er oppført til å vere lik noko. So om ein har eit algebraisk uttrykk som inneheld bokstavar og tal er det ikkje ei likning dersom det ikkje inneheld eit likskapsteikn.

Vanlege forståingar og utsegner er at ei likning er "a sentence about numbers", "pattern of different statements - some true, some false - which you obtain by replacing each variable by the names for the different values of the variable" eller "any statement of equality" (Dolciani & Wooton, 1973, sitert i Chazan & Yerushalmy, 2003, s. 125). Desse tilnærmingane er sanne, men ikkje so presise. Ein kan gjere ei oppdeling i fem ulike typar likningar (Usiskin, 1999:7):

1. $A = LW$ (eller $A = l \cdot b$ på norsk)
2. $40 = 5x$
3. $\sin x = \cos x \cdot \tan x$
4. $1 = n \cdot \frac{1}{n}$
5. $y = kx$

Og me kallar vanlegvis 1) ein formel, 2) ei likning å løyse, 3) ein identitet, 4) ein eigenskap og 5) ein funksjon med ein variabel (som me ikkje skal løyse). Usiskin (1999) meiner at i kvar av desse likningstypane ser ein på variabelen på ulike måtar (Usiskin, 1999:7):

> In 1), A, L and W stand for the quantities area, length, and width and have the feel of knowns. In 2), we tend to think of *x* as unknown. In 3), *x* is an argument of a function. Equation 4), unlike the others, generalizes an arithmetic pattern, and *n* identifies an instance of the pattern. In 5), *x* is again an argument of a function, *y* the value and *k* a constant (or parameter, depending on how it is used). Only 5) is there the feel of "variability," from which the term variable arose.

Ein kan vere ueinig i denne inndelinga og forståinga, men poenget til Usiskin (1999) er at det er ulik forståing av kva ei likning og ein variabel er. "The meaning of variable is variable". (Shcoenfeld & Arcavi, 1988, sitert i Chazan & Yerushalmy, 2003, s.125)

Sidan det er lita semje om kva ei likning og ein ukjent/variabel er, er det ikkje rart at lærarstudentar og elevar vert forvirra. Eg vil i neste kapittel presentere historisk korleis likningar vart til, og sjå på utviklinga i den norske skulen.

2.2 Historikk om likningar

2.2.1 Starten

Algebraens historie vert gjerne delt inn i tre stadium: 1. Retorisk algebra, 2. Synkopert algebra og 3. Symbolsk algebra (Thorvaldsen, 2002).

I det fyrste stadiet vart matematikken skildra med språk og fullstendige setningar. Denne fasen går fram til Diofantos (250 e.Kr), og i dei fleste kultarar i 1000 år til. Den retoriske algebra har opphav i Egypt og Mesopotamia for 4000 år sidan. Det er funne to papyrusar med matematisk innhald frå denne tida. Den eine vert kalla Moskvapapyrusen, fordi han vert oppbevart på ein museum i Moskva. Den andre er kjent som Rhindpapyrusen etter arkeologen som fann han, eller Ahmes' reknebok etter skrivaren. Begge er oppgåvesamlingar med løysingar, til saman 110 oppgåver. Mange av dei praktiske problemstillingane fører til enkle lineære likningar. Det er funne delar av mange leirtavler med matematiske tekstar og tabellar i Babylonia. Mellom anna er det funne ei som inneheld ein tabell av pytagoreiske taltriplar, tal a, b, c slik at $a^2 + b^2 = c^2$, og ei med oversikt over dei 30 fyrste kvadrattala. Egyptarane kunne løyse lineære likningar og andregradslikningar. Dei brukte metoden som vert kalla regula falsi. Denne metoden er slik at viss dei skulle finne lengda og breidda til eit rektangel der summen av desse var 32, og arealet var 252 gjorde dei slik: ”Ta halvparten av 32, det er 16. $16 \cdot 16 = 256$, $256 - 252 = 4$, kvadratrota av 4 er 2. $16 + 2 = 18$ er lengden, $16 - 2 = 14$ er bredden” (Thorvaldsen, 2002, s.39). Det meste som er funne om likningsløysing i det gamle Kina er frå perioden 200 f. Kr til 200 e. Kr. Også her vart det brukt ord, og dei brukte same framgangsmåten som i Egypt. Likningane vart brukt for å løyse praktiske problem som til dømes i handel av landområde. Grekarane var dei fyrste som lurte på kvifor, og ikkje berre korleis. Dei brukte geometri for å bevise løysingsmetodar, geometrisk algebra. Arabarane omsette og vidareførte etterkvart mykje av den greske, indiske, kinesiske og babylonske matematikken.

Den andre fasen i historia strekkjer seg frå 250 e.Kr til slutten av 1500-talet. I den skriftlege likningsløysinga vart orda meir og meir forkorta. Diofantes innførte symbol for ein ukjent storleik, men ikkje symbol slik me brukar dei. Det var meir som ei forkorting. Sidan han nytta slike symbol i elles retorisk algebra vert algebraen til Diofantes kalla synkopert. Diofantiske likningar er i dag kjent som likningar der ein vil finne heiltalsløysingar, sjølv om Diofantes godtok rasjonale løysingar av sine likningar. Diofantes løyste likningar ved å subtrahere og addere same uttrykk på begge sider av likskapsteiknet. Ofte kjem han berre fram til ei løysing i boka si Aritmetika, men metoden han nytta kan generaliserast til å finne fleire løysingar. I dei neste 1300åra fortsette matematikarar å utvikle ei avgrensa form for symbolbruk. Boktrykkerkunsten som kom rundt år 1440 sette fart på denne utviklinga. Dei to parallelle linjene, =, som teikn for likskap, vart innført i 1557.

I den symbolske fasen vart forkortingane erstatta med abstrakte symbol og formelspråk. Det matematiske tyngdepunktet flytta seg også lenger nord i Europa mot slutten av 1500-talet. Franskmannen Viète var den fyrste til å innføre bokstavar som koeffisientar i ei likning, altså til å innføre system med parameter. Han brukte konsonantar for kjende storleikar, og vokalar for ukjende. Måten å løyse likningar på var også utvikla. I staden for å setje inn tal og prøve seg fram, løyste han likninga som eit uttrykk av bokstavar, for so å erstatte bokstavane med tal. Han kunne då altså vise formlar i staden for oppskrifter. Denne forenklinga i skrivemåte gjorde algebra meir oversiktlig og lettare å behandle for dei komande matematikarane. Descartes innførte rundt 1630 dei fyrste bokstavane i alfabetet (a, b, c) som kjente storleikar, og dei siste (x, y, z) som ukjente, slik me framleis gjer det (Thorvaldsen, 2002).

2.2.2 Algebra i skulen

Gjennom heile matematikkhistoria til den norske skulen har det vore diskusjon om kva som er viktigast i matematikkfaget. Praktisk rekning eller dannande matematikk. Ved inngangen av 2. verdskrig hadde Noreg to skular med ulike matematikktradisjonar. Folkeskulen hadde praktisk rekning, og realskulen/gymnas hadde matematikk med danning som hovudtyngd, men det var også litt praktisk rekning i matematikkfaget. I 1936 kom det ny normalplan, der faget vart kalla matematikk heilt frå 1.klasse. Allereie ved utgangen av 6.trinn, skulle elevane kunne løyse rekneoppgåver ved hjelp av likning. Matematikken vart altså meir teoretisk også i folkeskulen. Nytteaspektet vart tona ned (Gjone, 1994).

I samband med oppskytinga av Sputnik i 1957 utvikla reformrørsla som vert kalla moderne matematikk seg (Gjone, 1994). Ein prøvde å introdusere mengdelære og logikk i skulane ved hjelp av formelle symbolske teoriar (Thorvaldsen, 2002). Motstandarane av denne rørsla peika på dårlege resultat, og i 70-åra var ikkje moderne matematikk aktuell lenger. I mønsterplanen som kom i 74 var det lagt vekt på nytte, framfor danning. Nokre meinte likevel at faget framleis var for teoretisk. I mønsterplanen som kom i 87, M87, vart danningsaspektet vektlagt, men den praktiske nyttige matematikken dominerte (Gjone, 1994).

Når det gjeld elevar og utviklinga i algebra, er det gjort undersøkingar som viser at elevane helst vel retoriske metodar dersom dei ikkje er nøydde til å bruke symbolsk algebra (Harper, 1987 i Thorvaldsen, 2002). Undersøkinga viste at både unge og eldre elevar føretrekk verbale forklaringar. Dette kunne ikkje ha med undervisinga å gjere, sidan elevane ikkje vart trena i å finne verbale forklaringar på tekstoppgåver. ”Elevene løser ofte problemer bedre ved å bruke tall og dagligspråk, enn ved å bruke algebra.” (Harper sitert i Thorvaldsen, 2002, s. 53). Ein finn igjen dei tre stadia i utviklinga av algebra hjå løysingsstrategiane til elevane. Det som tok 1300 år i historia vert forventa av elevar i løpet av nokre år. Men so slepp dei å finne opp krutet på nytt. Algebraen må karakteriserast som ein krevjande, men vellykka pedagogisk teori for ein stor del av elevgruppa i skuleverket (Thorvaldsen, 2002). Sidan den moderne matematikken feila, ser logikken ut til å vere nærare knytt til det naturlege språket enn det likningar er (Thorvaldsen, 2002).

2.2.3 Likningar i læreplanen

Ein ser ei tydleg endring i emnet likningar i dei siste tre læreplanane. No er det mest fokus på det praktiske, og symbolske likningar vert ikkje innført før på ungdomsskulen. Tidlegare var det ei teoretisk innføring av likningar allereie tidleg på barneskulen. Ei av årsakene til endringar er truleg innføringa og fjerninga av den moderne matematikken. Det var framleis eit teoretisk preg på algebraundervisinga i 1987. I M87 heiter emnet algebra og funksjonslære. Etter 1. -3. klasse skulle elevar løyse enkle likningar ved utprøving, medan dei allereie i 4. -6. klasse skulle ha ”enkle øvelser med bokstaver som symbol for tall og innsetting av tall for bokstaver” (KU, 1987, s. 203). I 7. -9. klasse skulle elevane lære ulike løysingsmetodar for likningar med både éin og to ukjente i lineære likningar, og for éin ukjent i kvadratiske likningar. Parentesreglar skulle også lærast.

I læreplanen som kom i 1997, L97, heiter hovudområdet som inneheld likningar ”tall og algebra”. I 1. -7. klasse heiter hovudområdet berre ”tall”, og ein finn ingenting om symbolbruk før under mål for ungdomstrinnet. ”De skal tolke og bruke bokstaver som symboler for ukjente og variable størrelser og til å generalisere og bevise” (KUF, 1996, s. 166). I eit hovudmoment frå 8. klasse under ”tall og algebra” står det at elevane skal ”arbeide med å bygge opp forståelse for bruk av bokstaver og parenteser i enkle rekneuttrykk og formler” (KUF, 1996, s. 167). Etter 9. klasse skal elevane ”finne fram til metoder for å løse likninger og ulikheter av første grad med én ukjent”, og ”erfare hvordan bokstaver som uttrykk for variable størrelser kan brukes til å formulere og bevise generelle sammenhenger” (KUF, 1996, s. 168). Etter 10. klasse skal elevane kunne formulere og løyse likningar og ulikskapar av fyrste grad med ein ukjent. Dei skal også arbeide med likningar med to ukjente.

På same måten som i L97 heiter hovudområdet ”tal og algebra” i kunnskapsløftet frå 2006, K06. Det vert skildra på denne måten: ”Algebra i skolen generaliserer talrekning ved at bokstavar eller andre symbol representerer tal. Det gjev høve til å beskrive og analysere mønster og samanhengar. Algebra blir òg nytta i samband med hovudområda geometri og funksjonar” (KD, 2006, s. 4). Hovudområdet heiter berre ”tal” frå 1. til 4. årssteget, og ein kan ikkje finne noko om formlar og symbol. I kompetansemåla etter 7. årssteget er det heller ikkje lagt vekt på å rekne med symbol, men heller på å kunne forklare utrekningar ein gjer. Under kompetansemål etter 10. årssteget er fyrste gong likningar er nemnt spesielt i K06: ”Mål for opplæringa er at eleven skal kunne løyse likningar og ulikskapar av første grad og enkle likningssystem med to ukjende” (KD, 2006, s. 10). Det har altså vorte mindre og mindre symbolsk algebra i grunnskulen, og det har vorte utsett til ungdomsskulen.

Dei som vel den teoretiske retninga på vidaregåande har fleire kompetansemål der likningar er inkludert, og i eit par av dei er det nemnt spesielt (KD, 2006:12):

> Mål for opplæringa er at eleven skal kunne:
>
> - rekne med potensar med rasjonal eksponent og tal på standardform, bokstavuttrykk, formlar, parentesuttrykk og rasjonale og kvadratiske uttrykk med tal og bokstavar, og bruke kvadratsetningane til å faktorisere algebrauttrykk
> - løyse likningar, ulikskapar og likningssystem av første og andre grad og enkle likningar med eksponential- og logaritmefunksjonar, både med rekning og med digitale hjelpemiddel
> - omforme ei praktisk problemstilling til ei likning, ein ulikskap eller eit likningssystem, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er.

Medan dei som vel den praktiske retninga på VG1 har ikkje noko kompetansemål som går direkte på likningar. Likevel er det rimeleg å tolke læreplanen for VG1 P slik at dei skal lære om likningar. Dei skal mellom anna løyse praktiske problem som gjeld lengd, vinkel, areal og volum, og bruke formlar som gjeld daglegliv, yrkesliv og programområde. Her er det nyttig å kunne å løyse likingar. Det gjeld også under emnet funksjonar. Også lærebokforfattarane tolkar læreplanen slik. Dei fire bøkene eg har undersøkt, har med eit delkapittel eller fleire om likningar (Andersen, Aven, Natvig, Jasper & Berg, 2006, Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Hanisch & Hals, 2009, Heir, Erstad, Borgan, Engeseth & Moe, 2009 og Sandvold, Øgrim, Flakstad, Bakken, Pettersen, Skrindo, Thorstensen & Thorstensen, 2009).

Det har altså vore ei tydleg endring frå å innføre symbolske likningar allereie før elevane går ut av 3.klasse, til å utsette alt om likningar til ungdomsskulen, og då med ei meir praktisk vinkling.

2.3 Læring av matematikk

2.3.1 Kva vil det seie å kunne matematikk?

Brekke (2002) peikar på fem komponentar som utgjer matematisk kompetanse.

1. Faktakunnskap – delar av fakta som *kan* vere usamanhengande og tilfeldig. Dette er konvensjonar, definisjonar og notasjonar.

2. Ferdigheiter – veletablerte prosedyrar i fleire steg. Desse er viktig å automatisere for å gjere bruken enklare. Men prosedyrane er lite fleksible, og ein kan lage mange ulike reglar. Dette gjer at det er lett å blande saman.
3. Omgrepsstrukturar – matematiske omgrep eksisterar i eit nettverk av enkelte idear. Desse vert utvikla ved at elevane får jobbe med emne i ulike samanhengar.
4. Generelle strategiar – evna til å velje passande ferdigheiter for å løyse eit problem. På engelsk, Higher Order Thinking Skills. Dette omfattar mellom anna å kunne representere, abstrahere og generalisere, teste hypotesar og bevise, kontrollere, stille spørsmål, bruke matematisk språk (formelt og uformelt) som er passande for å løyse eit problem og tolke matematiske resultat i den konteksten der problemet har sitt utspring.
5. Haldningar – vårt syn på kva matematikk er. Ved å sjå på kva som vert lagt vekt på i undervisinga ser ein kva som er haldninga til læraren. Og ein ser eleven si haldning på korleis dette vert motteke.

I tillegg til å ha gode ferdigheiter og faktakunnskapar, som nokre av *dei andre* også har, har *dei som forstår* godt utvikla omgrepsstrukturar. Dei klarer å sjå dei ulike emna i forhold til kvarandre, og har eit vidare oversyn. Fokuset når dei lærer er ikkje å pugge ein formel til prøva, man dei får forståing av kva det handlar om. I analysane mine vil eg bruke dei to fyrste kategoriane til Brekke (2002), fakta og ferdigheiter. Dei tre siste kompetansane vil til ei viss grad gå inn under dei andre kategoriane mine, forståing eller kreativitet. Eg kjem tilbake til dette i kapitlet 3.8.2, å dele inn i analysekategoriar.

Niss & Højgaard Jensen (2002) deler opp det å kunne matematikk i 8 kompetansar i to ulike kategoriar:
Å kunne spørje og svare i og med matematikk:
Tankegangskompetanse – Å kjenne typiske spørsmål og svar i matematikk, og avgrensingane og rekkevidda til matematiske omgrep.
Problembehandlingskompetanse – Å formulere og løyse, avgrense og presisere problem.
Modelleringskompetanse – Å analysere og bygge modellar, og å sjå mulegheiter og avgrensingar for desse.
Resonnementskompetanse – Å fylgje og bedømme eit matematisk bevis og utføre bevis sjølv.

Å kunne handtere matematisk språk og reiskap:
Representasjonskompetanse – Å bruke objekt, fenomen, problem og situasjonar i matematikk.
Symbol- og formalismekompetanse – Å kunne matematiske spelereglar. Og avkode, oversette og behandle symbolhaldige utsegn.
Kommunikasjonskompetanse – Å kunne uttrykke seg munnleg og skriftleg, og å kunne setje seg inn i og tolke matematiske utsegner.
Hjelpemiddelkompetanse – Å ha kjennskap til og å kunne bruke hjelpemiddel. Kjenne mulegheiter og avgrensingar.

Når det gjeld denne inndelinga er det ikkje so lett å peike på kva for nokre kompetansar som er spesielle for *dei som forstår*. Niss & Højgaard Jensen (2002) skriv at ein kompetanse som ikkje er ført opp som ein eigen, men som likevel er viktig er kreativitet. Denne kompetansen inngår i alle dei andre kompetansane, meiner Niss & Højgaard Jensen (2002). *Dei som forstår* er kreative innanfor alle desse åtte kompetansane. Det kan vere noko av det som gjer at dei skil seg frå *dei andre* elevane. I analysane har eg kreativitet som ein eigen kategori.

2.3.2 Figurativ og operativ kunnskap

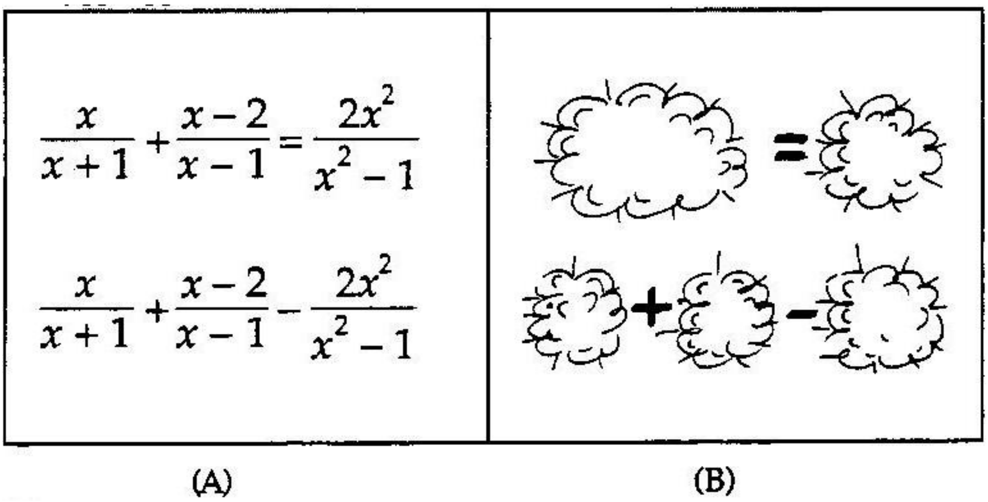
Piaget skilde mellom operativ og figurativ kunnskap (Hundeide, 1985). Operativ kunnskap er når ein klarer å abstrahere ei handling og trekke generelle slutningar. Figurativ kunnskap seier berre noko om den konkrete handlinga. Ein kan gjengi det ein annan har sagt utan å ha forstått meininga med det. Det er utan operativt innhald med unntak av artikuleringa av lydane. Ein treng altså ikkje å ha aktivert tilsvarande operative prosessar sjølv om ein nyttar språk og symbol. Piaget (i Hundeide, 1985) meinte at symbola er underordna dei operative skjemaa, for dei vert både konstruerte og får meining frå operative skjema. Han meinte at språket ikkje er avgjerande for at eit barn skal aktivisere den operative tenkinga. Handling er det som må til. So sjølv om elevar ikkje har forstått det symbolske språket i ei likning kan dei likevel ha god forståing av det konkrete problemet som likninga representerer. Og sjølv om dei klarer å løyse ei likning er det likevel ikkje sikkert at dei klarer å sjå svaret i samanheng med det konkrete problemet som ligg bak. Elevar med figurativ kunnskap om likningar klarer kanskje å løyse ein bestemt type oppgåver, men når forma på likninga avvik litt, veit dei ikkje korleis dei skal løyse henne.

2.3.3 Symbolsk og praktisk matematikk

Det er gjort ein studie av street mathematics i forhold til school mathematics (Nunes, Schliemann & Carraher, 1993). Den ser på brasilianske ungar som jobbar på marknaden, og matematikken dei brukar der. Ungane utfører munnleg rekneoperasjonar med små og store tal. Når dei vert testa skriftleg, viser det seg at dei har problem med dei same utrekningane. Det same viser seg motsett veg. Elevar som lærer teoretisk korleis dei skal rekne, har problem med å omsetje og bruke dette i praktiske situasjonar som ungane på marknaden møter. I studien min opplevde eg at elevar meinte at likningar var heilt fjernt frå det daglege liv. Ein elev uttalte at han aldri nokon gong kom til å setje opp ei likning for å finne ut av eit daglegdags problem.

2.3.4 Symbolsk matematikk

Å skjøne notasjonar er ein del av det å ha faktakunnskapar om likningar (Brekke, 2002). Dette er noko som mange elevar har problem med. Nokre elevar opplever til og med symbola som noko ein introduserer for å gjere matematikken vanskelegare (Dunkels, 1994). Det beste er å introdusere symbola når det er eit behov for det, slik at ein ser nytta av dei. Når symbola er innført må ein øve seg i å sjå selektivt (Dunkels, 1994). Dette vil seie at ein må lære seg å trekke ut det viktigaste til ei kvar tid når ein ser på matematiske utsegner. Dei to linjene på venstre side i figur 1, (A), er heilt like, bortsett frå ein liten strek. Men dei formidlar to ulike bodskapar til den erfarne formellesaren, slik som figuren til høgre, (B), viser (Dunkels, 1994).



Figur 1: Selektivt seende (Dunkels, 1994, s. 110).

2.3.5 Å abstrahere i matematikken

Ein av grunnane til dei dårlege resultata norske elevar har i PISA-undersøkingane, og ulik forsking, viser at det er vanskeleg for elevane å tyde tekstoppgåver og omsette dei til symbolske likningar (Grevholm, 2005), altså å abstrahere. Abstrakt representasjon kan forenkle læringa, men det kan også vere ineffektivt viss ein ikkje formidlar den viktige meininga og viktigheita av symbolske uttrykk i klasserommet (Greeno, 1997 i Sfard, 2008).

Problemet med å omsetje frå konkrete problem til symbolsk matematikk kan ha sin grunn i fokuset lærarane har når dei underviser. Sidan likningar er abstrakt kan det vere vanskeleg å finne ein enkel og praktisk måte å forstå likningar på. Då er det lett for lærarar å berre fokusere på ferdigheitene ein må ha for å løyse likningar (French, 2002). Dette har to ulemper (French, 2002: 99-100):

> The first is that students fail to develop an ability to carry out this vital stage in solving problems and the second is that motivation is weakened because the reason for learning to solve equations is lost.

I undervising av likningar må ein altså ha med fleire moment og få heilskap. Om ein ikkje ser vitsen er det vanskeleg å verte motivert til å gjere noko. Og om ein går rett på det symbolske har ein ikkje forståing av problemet.

Det å abstrahere er slik likningar vart til, historisk sett. Ein hadde praktiske problem som ein ville løyse, og fann gode måtar å gjere det på (Katz & Barton 2006:189):

> Historically, the motivation for algebra came from the need to solve particular problems, both real-world problems, and those arising from mathematical investigations. Algebra did not arise from an abstract need to generalize arithmetic. The form of algebra today owes more to the nature of its generating problems, and the tools that were used to solve them, than it does to the rules of arithmetic.

I undervisinga av algebra fokuserar ein oftast ikkje på sjølve grunnen til at ein skal lære algebra. Ein startar ikkje med konkrete problem, og løftar dei til eit abstrakt plan. I staden hoppar ein nesten direkte til det abstrakte (Katz & Barton, 2006). Elevane i studien min hadde ein rask overgong til det abstrakte plan etter ein konkret introduksjon av likningar. Dette er ein vanleg måte å gå fram på i skulen (Katz & Barton, 2006). Elevane startar med oppstilte reknestykke med ein tom boks på eine sida, og dei skal fylle inn talet som manglar for at reknestykke skal gå opp. Vidare i skulen bruker elevane ”gjett og prøv”-metoden, og lærer etterkvart algebraisk løysing. Til slutt ser dei korleis dei kan gå frå eit konkret problem til ei likning (Pind, 2009). Altså lærer elevar fyrst den algebraiske løysingsmetoden før dei ser likningar frå det praktiske perspektivet. I motsett rekkjefylgje av slik algebraen utvikla seg.

Den historiske inndelinga av utviklinga av algebra kan delast i fire ulike omgrep (Katz & Barton, 2006). 1) The geometric stage, der dei fleste algebraiske omgrepa i algebra er geometriske, 2) The static equation-solving stage, der målet er å finne tal som oppfyller visse samanhengar, 3) The dynamic function stage, der rørsle er grunnleggande og 4) The abstract stage, der målet er struktur. Denne inndelinga kan brukast i undervising av algebra. Ein kan bruke ei geometrisk tilnærming til likningar der ein nyttar kvadrat og rektangel før ein lærer den typiske likningsløysingsmetoden. Funksjonar er so abstrakt at ein bør vente med dette. Og det siste steget, abstrakt algebra bør ein ikkje lære noko om før ein kan so mykje algebra at ein forstår kvifor det er nyttig å abstrahere (Katz & Barton, 2006). Det å setje opp ei likning er ikkje noko som fell naturleg om ein ikkje har lært seg reiskapen. For å få forståing bør ein undervise om likningar i same rekkefylgje som det vart utvikla (Katz & Barton, 2006).

2.3.6 Forståing

Når det gjeld forståing av matematikk so er dette eit komplekst problem. Kven kan avgjere om ein elev verkeleg har forstått det han driv på med? Sfard (2008) skriv om ein diskusjon ho hadde med ein elev, der ho var sikker på at han hadde forstått temaet dei hadde hatt prøve om, for han hadde løyst alle oppgåvene på måten ho hadde undervist. Eleven, derimot, hevda at han berre hadde pugga kva han måtte gjere for å løyse den type oppgåver, og at han ikkje hadde forstått kvifor han gjorde som han gjorde. Sfard (2008) bad han om å løyse fleire oppgåver, og han gjorde det på ein tilfredsstillande måte, sjølv om ho laga litt ulike oppgåver. Han hevda framleis at han ikkje forstod. ”True understanding must involve something that goes beyond the operative ability to solving problems and of proving theorems” (Sfard, 2008, s. 29). Det er vanskeleg å avdekke om nokon verkeleg har forstått, og det er vanskeleg å setje fingeren på kva som gjer at ein sjølv har forstått noko. Ein veit berre at ein har forstått, ein veit i all fall om ein ikkje har forstått.

Guten som løyste oppgåver utan å forstå er ikkje den einaste som har ferdigheiter, men manglar forståing (Brekke, 2002:8):

> en kan slutte fra forskning at 15-åringer generelt sett ikke fullt ut forstår hva et desimaltall betyr, selv om de får riktig svar når de adderer eller multipliserer slike tall. Like ens er mange 15-åringer ikke i stand til å tolke en grafisk framstilling, selv om de er i stand til å plotte punktmengder i et koordinatsystem.

Ein har altså ikkje forstått eit omgrep, sjølv om ein har ferdigheiter og kan fakta. Slik opplevde eg at mange elevar hadde det når det gjaldt likningar. Dei forstod ikkje kvifor dei gjorde som dei gjorde, sjølv om dei klarte å løyse likningar.

Det viser seg at mange elevar ikkje har forstått viktigheita av likskapsteiknet når det gjeld likningar (Nogueira de Lima & Tall, 2006). Frå tidlegare erfaring ser dei på det som eit teikn på at ein skal utføre ein operasjon (Pind, 2009), i staden for eit teikn for likskap. Det er altså ikkje forståing for fundamentet i likningar, det heile omgrepet er bygd på.

Å endre innfallsvinkel på undervisinga av likningar, kan verke positivt. I eit studium vart den lokale læreplanen endra frå å sjå på likningar som problemet med ein ukjent, til å samanlikne to funksjonar (Chazan, Yerushalmy & Leikin, 2008). Studien viste at lærarane si omgrepsforståing av likningar vart endra. Det er viktig at lærarar har godt utvikla omgrepsstrukturar og har oversikt over emna, for at dei skal kunne undervise på ein måte som gjer at elevar greier å sjå samanhengar mellom ulike emne. For å utvide omgrepsstrukturen ytterlegare kan ein sjå på dei fem ulike oppfattingane av likningar som Usiskin (1999) har, som eg har skrive om i kapittel 2.1 ”kva er ei likning?”.

I fleire lærebøker for 1P er geometriske framstillingar under kapitlet ”funksjonar”, medan likningar er plassert lenger framme (Andersen et al., 2006, Heir et al., 2009 og Sandvold et al., 2009). Det er ikkje nokon openberr samanheng mellom likningar og grafar. I læreplanane i Noreg har det vore ei utvikling i forhold til kor tidleg ein introduserer det abstrakte steget, som eg har skrive om i 2.2.3 “likningar i læreplanen”. No vert det introdusert på eit mykje seinare stadium enn tidlegare. Men sjølv om algebraisk likningsløysing vert seinare introdusert, er det likevel undervist i same rekkjefylgja som tidlegare. I ungdomsskulebøker startar ein med å løyse oppstilte likningar, og mot slutten av kapitlet er nokre tekstoppgåver der ein må abstrahere problemet og prøve setje opp likningar for å finne løysinga (Hjardar & Pedersen, 2006 og Hagen, Carlsson, Hake & Öberg, 2006).

2.3.7 Forståing versus ferdigheiter

Ferdigheiter i matematikk har tydlege avgrensingar (Brekke, 2002). Dei er ofte lite fleksible, fordi dei er utvikla innanfor ein viss type oppgåve, og vert hugsa som reglar for denne spesielle typen oppgåve. Til dømes er det innanfor talrekning i nokre tilfelle snakk om å flytte komma, og i andre tilfelle å henge på nullar bak talet. Det er velkjent at denne regelfokuseringa ofte fører til ei samanblanding av reglar fordi ein ikkje hugsar den oppgåvetypen regelen vart utvikla innanfor (Brekke, 2002). Ein brukar regelen i samanhengar der den ikkje gjeld, eller ein blandar reglar. Å gjere mange oppgåver av same type for å betre ferdigheitene, fører ikkje til betre forståing (Brekke, 2002).

Undervisinga i algebra er oppdelt (Bolea, Bosch & Gascón, 2003). Det å løyse likningar er ikkje ein naturleg del av resten av likningsomgrepet. Desse fire områda vert ikkje undervist i samanheng (Bolea, Bosch & Gascón, 2003:126):

1. Writing numerical-verbal expressions using symbols that describe and/or generalize arithmetical calculation techniques.
2. Manipulating algebraic expressions in a formal way to simplify or transform them into a pre-established form (developing, simplifying, rationalizing, etc.).
3. Establishing and manipulating algebraic expressions where the letters represent unknown numbers. In particular, solving equations interpreted as equalities between algebraic expressions that are true for certain concrete values of the unknowns.
4. Solving word problems with equations through a translation of the verbal formulation of the problem, assigning a name to the unknown quantities and numerical values to the data.

Ein må få ei meir heilskapleg undervising av likningar (Bolea, Bosch & Gascón, 2003). Elevane må få bruke likningar i ulike samanhengar slik at dei får utvikla forståinga. Dei tekniske ferdigheitene må verte utvikla i samanheng med å sjå på abstrahering frå tekstoppgåver. På den måten fokuserer ein både på ferdigheiter og forståing.

Haldninga læraren har til matematikk vert gjenspegla i måten han underviser på (Brekke, 2002). Det viktigaste når ein underviser likningar er at elevane (Pind, 2009:159):

1. lærer at målet er at finde det (eller de) tal, som indsat på den variables plads, får højre side af lighedstegnet til at være lig med venstre side
2. lærer en, og helst flere, metoder til at arbejde sig hen mod løsningen til en ligning.
3. lærer, at ligninger kan bruges til at udtrykke og løse matematiske problemer fra virkeligheden uden for skolen.

Men kva som vert vektlagt i undervisinga av desse tre måla er viktig. Det viser seg at ein ofte fokuserar på ferdigheiter, og dermed reglar som må puggast, i staden for på forståing (Brekke, 2002). Til dømes har ei lærebok for 1P sett opp to grunnleggande reglar når ein skal løyse likningar (Oldervoll et al., 2009:75):

1. Vi kan flytte eit ledd over på andre sida av likskapsteiknet dersom vi samtidig skiftar forteikn på leddet.
2. Vi kan multiplisere eller dividere med det same talet på begge sidene av likskapsteiknet dersom talet ikkje er null.

Dei vel altså å kalle det å "flytte over" når det gjeld addisjon og subtraksjon. Medan når ein multipliserar eller dividerar skal ein utføre same operasjon på begge sider. Dei har laga ulike reglar for å utføre ein operasjon på begge sider av likskapsteiknet. Læreboka har også eit avsnitt om kryssmultiplisering og regelen for dette. Ein kan ikkje lese noko om likskapsteiknet og kva som gjer at ein kan "flytte over" ledd og endre forteikn. Dette er annleis i dei fleste matematikkbøker for ungdomstrinnet. Her vert det forklart kva regelen med å flytte over kjem av (Højgaard Jensen, Larsen, Pedersen & Sonne, 2006, Hagen et al., 2006 og Hjardar & Pedersen, 2006). Likevel ser ein at "flytte-bytte-regelen vert brukt, også av matematikklærarar for matematikklærarstudentar (Kleve & Tellefsen, 2009). Då er det ikkje overraskande om dette namnet lever vidare.

Dersom elevar forstår det dei gjer, vert dei tryggare i ferdigheitene. "Elevens arbete och aktivitet måste bygga på tankar och inte på mekaniskt flyttande av symboler och tecken. Endast då finns det föresettningar för trygghet med matematiken" (Dunkels, 1994).

2.3.8 Kreativitet

Det er ikkje semje om kva matematisk kreativitet er (Sriraman, 2004). Forskarar knyt kreativitet til det å kunne abstrahere og generalisere eller til kompleks problemløysing. Ei formulering er "ability to produce unexpected original work, wich is usefull and adaptive" (Steinberg & Lunbart, 2002 i Sriraman, 2004). Denne formuleringa vert diskutert, for det er ikkje alltid eit krav om at arbeidet skal vere nyttig for at det skal vere kreativt (Sriraman, 2004). Når ein skal løyse likningar er det faste prosedyrar. Det vil ikkje seie at kreativiteten er unyttig (Sfard, 2008). Men det er viktig å poengtere at ein også må ha fakta og ferdigheiter på plass før ein kan bruke kreativiteten. Ei jente på 5 år vart spurt kva tal av 2, 3, 4 og 10 som ikkje passa inn med dei andre (Sfard, 2008, s. 217). Ho hadde fleire forslag. Fyrst peika ho på 10, og sa at ti ikkje var saman med dei andre i rekka, og at det hadde to siffer. Det neste forslaget var 3, for det var eit oddetal. Ho føreslo også 4, for det var det einaste talet som ikkje starta på t. Sfard (2008) skriv at grunnen til at ho kunne kome med det siste forslaget var at ho ikkje hadde innarbeidd talforståing. Talorda var ikkje objektnamn. Det siste forslaget kan ein le av. Jenta visste ikkje betre. Det er derimot ei historie om fysikaren Niels Bohr der han visste betre, men likevel gav artige svar. Han hadde eksamen og vart spurt korleis han kunne finne høgda til eit tårn ved hjelp av eit barometer. Svara var mange og rare, og ikkje det eksaminator var ute etter. Til slutt gav han likevel det forventa svaret, og la til at han var lei av å verte fortalt korleis han skulle tenke. Han visste altså godt kva svar som var forventa, i motsetnad til den vesle jenta. På same måten som i matematikk meinte kunstnaren Picasso at det var nødvendig å vere ein talentfull realist før ein kunne vere ein abstrakt målar (Sfard, 2008). Ein må vite kva ein vel vekk når ein vel den framgangsmåten ein gjer.

3 Metode

I denne delen av oppgåva vil eg fyrst nemne skilnaden på kvalitative og kvantitative forskingsmetodar og grunngje val av dette. Deretter vil eg skrive om forskingsetikk, før eg drøftar ulike kvalitative metodar og kjem fram til endeleg metodeval. Vidare vil eg skildre utvalet av informantar, skrive om metodane eg har nytta, og skildre gjennomføring og analyse av data.

3.1 Kvalitative versus kvantitative metodar

Kvalitativ og kvantitativ metode skil seg frå kvarandre i kva datamateriale som vert handsama og analysert. Kvalitativ innhaldsanalyse er kjeldekritikk og systematisering av sitat, medan kvantitativ innhaldsanalyse er kategorisering og teljing av teksteiningar (Grønmo, 1996). Eller svært enkelt uttrykt, som Eliasson (2006) gjer det: ”Kvantitativa metoder sysslar med sådant som går att beskriva med siffror, medan kvalitativa metoder sysslar med sådant som går at beskriva med ord.” Kvantitative metodar passar bra til å gjere generaliseringar utifrå ei mindre gruppe, medan kvalitative metodar trenger djupare. Kunnskapssynet innanfor teoriane som fungerar best saman med kvantitative metodar går ut på at ein best oppnår kunnskap gjennom å måle breitt, og deretter kunne generalisere frå ei lita gruppe til ei større. Når det gjeld kunnskapssynet i teoriar som passar best saman med kvalitative metodar seier det at ein best oppnår kunnskap gjennom å gå i djupna, der nyansering og samanhengar er viktige (Eliasson, 2006).

Nokre forskarar meiner at det er umogleg å kombinere kvantitativ og kvalitativ metode. Ein type forskning krev anten kvalitativ eller kvalitativ metode. Andre igjen meiner at ein vel eine eller andre metoden fordi det fell seg meir naturleg:”qualitative methods are stressed within the naturalistic paradigm not because the paradigm is antiquatitative but because qualitative methods come more easily to the human-as-instrument” (Lincoln & Guba, 1985, sitert i Guba & Lincoln, 2005, s. 200-201). Men det er likevel ikkje utelukka at ein kan nytte kvantitativ metode i slik forsking (Guba & Lincoln, 2005).

Målet med kvalitativ metode er å få ein ”helhetlig forståelse og analytisk beskrivelse av spesifikke forhold” (Grønmo, 1996, s. 121). Uformelt intervju er ein typisk kvalitativ metode. Kvantitativ metode vert brukt når ein skal gjere ei statistisk generalisering og få ei representativ oversikt. Strukturert intervjuing/spørjeundersøking til ein stor populasjon er ein kvantitativ metode.

Kvalitative undersøkingar egnar seg godt for utvikling av hypotesar og teoriar, medan kvantitative undersøkingar vert oftast brukt for å teste hypotesar og teoriar. Då ser ein at dei to metodane ikkje er konkurrerande, men derimot komplementære (Grønmo, 1996).

Eg ville i denne studien få ei betre forståing av elevar si forståing av likningar, og gå i djupna på problema til elevane. Kvalitativ metode var då den metoden som utpeika seg. Eg hadde ikkje ein klar hypotese som skulle testast, men ville heller prøve å få ei betre forståing av eit problem. Eg var ikkje ute etter å kunne generalisere til grupper i ulike samanhengar, eg ville sjå på elevar i den vidaregåande skulen.

3.2 Forskingsetikk i metodeval

Spesielt når ein skal fokusere på marginale grupper i ein studie må ein tenke seg om ein ekstra gong. Forskarar har eit spesielt ansvar for svakstilte grupper i samfunnet, i fylgje NESH (1994) og dei forskingsetiske retningslinjer. Dei problemstillingane som fangar opp det problematiske, må balanserast mot problemstillingar som fokuserar på kompetanse og meistring (Alver & Øyen, 1997).

Om ein skal handsame data som inneheld personopplysingar og sensitiv informasjon må ein sende inn eit meldeskjema til Norsk Samfunnsvitenskaplig Datatjeneste (NSD) og få godkjent studien. Sensitiv informasjon vil seie (NSD, 2009):

> Opplysninger om rasemessig eller etnisk bakgrunn, politisk, filosofisk eller religiøs oppfatning, at en person har vært mistenkt, siktet, tiltalt eller dømt for en straffbar handling, helseforhold, seksuelle forhold, og medlemskap i fagforeninger

I denne studien ville eg finne ut meir om kva elevar som presterar dårlig har problem med. Korleis kan eg då vinkle likningsproblemet til noko positivt? Eg må sjå på kva som gjer at desse elevane meistrar å løyse likningar. Men viss dei ikkje gjer det då? No er det skilnad på kva data ein skal produsere ut i frå kva fagområde ein skal undersøke. Matematikkunnskap vert i fylgje NSD ikkje sett på som sensitiv informasjon. Om eg hadde spurt ein elev som uttalte seg om kor dum han følte seg fordi han ikkje forstår matematikk, hadde kanskje svaret sagt noko anna.

Svakarestilte grupper er oftast oppfatta som spesielle grupper som til dømes innvandrarar, arbeidslause, einslege, eldre og kriminelle (Alver&Øyen, 1997). Men ei gruppe elevar som er svake i matematikk kan vel også oppfattast som svakarestilte innanfor emnet som eg ville undersøke nærare.

3.3 Ulike kvalitative metodar og drøfting av desse

I ein periode på om lag 3 månadar deltok eg i matematikktimane ein dag i veka til ei VG1-klasse for å verte meir kjent med kva problem dei hadde med likningar. På bakgrunn av desse besøka i klassa, og ved å lese litteratur om kvalitative metodar, vil eg no drøfte kva metode som høver best i denne studien. Under dei fylgjande delkapitla startar eg med å skrive litt om kvar av dei ulike kvalitative metodane før eg diskuterer dei.

3.3.1 Observasjon

Observasjon er metoden som er mest brukt saman med andre former for innsamling av data (Postholm, 2005). Teoriar ein har, gjer at ein observerer med "briller". Ein er farga av det ein veit frå før. Om ein har ulike teoriar vil ein gjere ulike observasjonar. Teoriane gjer at ein forstår prosessane ein observerar. Induksjon i observasjonen vil seie å ikkje ha ei meining på førehand, men at ein får forståing som fylgje av observasjonen. Ein observerar også det som ein ikkje har grunnlag for i teorien. Deduktiv observasjon er om ein har ei føreforståing, men ein er også open for forhold som ikkje er tenkt på. Det er interaksjon mellom induktiv og deduktiv måte å observere på (Postholm, 2005).

Når ein startar å observere har ein eit breitt fokus, men snevrar seg inn gjennom å sjå på nye forhold, og kome med nye antakingar (Postholm, 2005). Ein bør skrive utfyllande logg og lese gjennom denne etter kvar observasjon for å få med seg mest muleg. Når ein er observatør, påverkar ein situasjonen der ein er. Ein kan ha ulike roller. Gold (1958 i Postholm, 2005) deler inn i fire roller: Fullstendig deltakar, deltakar som observatør, observatør som deltakar og fullstendig observatør. Som fullstendig observatør deltek ein ikkje aktivt i handlingane ein observerer, men ein påverkar likevel til ei viss grad ved å vere tilstades. Forskaren må vite kva rolle han har. Dei involverte personane bør verte informert om rolla til forskaren.

Dersom ein er aktiv i situasjonen vert det vanskeleg å notere samtidig. Då bør ein skrive ned logg umiddelbart etter kvar observasjon.
Observasjon var ein god metode å starte med i denne studien, for å få betre forståing og finne meir ut av kva som kunne takast tak i. Eg kunne opptre som fullstendig observatør, men

tenkte at eg truleg fekk meir data å jobbe med dersom eg var deltakar som observatør. Dersom eg fungerte som ein lærar ville eg få fleire samtalar med elevar, og kunne observere korleis dei løyste ulike oppgåver. Men viss ein vil få djupare kjennskap til elevar si forståing vert observasjon for tilfeldig.

3.3.2 Intervju

Intervju er eit handverk som ein må kunne for å få gode data (Kvale, 2009). Kunnskap vert produsert sosialt, gjennom interaksjon mellom intervjuar og dei som vert intervjua. Ein må ha mykje trening for å verte ein god intervjuar, og vite kva oppfylgingsspørsmål ein skal stille. Intervjuaren må også ha kunnskap og ferdigheit i emnet som er tema for intervjuet. Det same gjeld personen som vert intervjua.

Å velje ut svake grupper til intervju kjennest ikkje noko godt. Med svake grupper meiner eg elevar som ikkje meistrar matematikk. Det kjennest ikkje godt å velje desse, for det kan verte sett på som uthenging av dei dårlege. Og eg sjølv liker best å bli spurt om noko eg kan, ikkje om det eg føler at eg ikkje meistrar. Sidan elevane på VG1 ikkje er myndige, må ein også få løyve frå foreldra/føresette til å intervjue ungdommane deira. Det er kanskje ikkje alle foreldre som godtek dette. Kva får ungdommen deira igjen for det? Og fører det til uthenging av barnet deira?

Dersom eg ser vekk frå det etiske ved intervjuing av elevar, er der også andre utfordringar. Intervju eit handverk som er krevjande å lære (Kvale, 2009). Sidan eg er ein fersk forskar, so hadde det ikkje vore so lett å gjennomføre gode intervju. Det hadde teke mykje tid å lære seg reiskapen.

Elevane som presterer dårleg i matematikk er naturleg nok ikkje dei som er mest glade i faget. Dei ville kanskje følt seg trengt opp i eit hjørne viss eg som hadde opptredt som lærar skulle spørje dei ut. Eg ser for meg at samtalen hadde gått tregt. Nokre av desse elevane hadde gitt opp, og brydde seg ikkje om tema. Ein god intervjuperson er samarbeidsvillig, motivert, veltalande og kunnskapsrik. Han gir samanhengane framstillingar og motseier ikkje seg sjølv (Kvale, 2009). Denne personen fanst ikkje i mitt utval, i alle fall ikkje mellom dei som hadde problem med likningar. Ein som har problem med å løyse likningar er ikkje motivert og kunnskapsrik om dette emnet. Men om intervjuaren gjer ein god jobb, kan intervjua verte kunnskapsrike same kven som vert intervjua (Kvale, 2009). So då er det opp til meg som intervjuar om intervjuet vert produktivt eller ikkje. Matematikk er eit vanskeleg emne å intervjue om dersom ein søker å få fram eigne meiningar. Det er ofte éin måte som vert sett på som den korrekte måten å tenke på i matematikken, i motsetnad til for eksempel i faget religion.

Erfarne lærarar sit på mykje kunnskap om elevar sine matematikkunnskapar. Dei har gjennom mange år sett kva som er vanskeleg for elevane, og kva som er lett. Ein lærar kan difor lære meg mykje om emnet elevar og likningar. Å intervjue lærarar var difor ein måte nærme seg temaet på. Ein lærar vil vere det Kvale (2009) kallar ein god intervjuperson. Han har innsikt i emnet og er forhåpentlegvis engasjert og motivert. Det er også interessant å få fram ulike synspunkt til lærarar. Men om ein søker data om forståinga til den einskilde elev, har læraren ikkje den same oversikta, og eg ser difor ikkje at metoden lærarintervju er optimal for denne studien.

3.3.3 Samtale

Spradley (1979, i Postholm, 2005) hevda at forskaren som bruker samtale eller ustrukturerte intervju har til hensikt å forstå heller enn å forklare det som vert forska på. I denne studien ville eg forstå kva som er vanskeleg med å lære om likningar og å løyse desse, so samtale eller ustrukturert intervju var passande for å finne ut meir.

Det å samtale om likningar med elevar kjem mykje meir naturleg når ein får samtale medan dei skal løyse ei oppgåve, i forhold til om ein vert plassert i ein intervjusituasjon. I tillegg er det mindre tidkrevjande med desse naturlege samtalane i forhold til å utføre oppstilte intervju. Ei ulempe er at eg ikkje har dei skriftleg, og validiteten vert svekka då. Hugsa eg korrekt då eg skreiv ned logg etter timen? Ein får heller ikkje analysert del for del av utsegna på same måten som i intervju der ein nyttar lydopptakar og transkriberer. Eg kunne ha teke opp samtalane rundt om i klasserommet og transkribert dei etterpå, men dette hadde vore eit for omfattande arbeid.

I ein undervisingssituasjon kan ein samtale rundt det å løyse den oppgåva som eleven spør om. Men kan ein også stille overordna reflekterande spørsmål innanfor matematikkemnet? I diverse praksiserfaringar har eg opplevd at elevane er fokuserte på arbeidsplanen som er sett opp. Dei vil helst bruke timane på skulen til å jobbe med oppgåver som står på planen. Å ha andre aktivitetar vert sett på som å kaste vekk tida. Difor trur eg at det hadde vore vanskeleg å stille slike refleksjonsspørsmål i ein undervisingssituasjon. Når ein elev spør om hjelp til ei oppgåve, er målet å løyse oppgåva slik at han kan starte på neste. Det er ikkje so viktig for dei at dei verkeleg har forstått det dei gjer, berre metoden fungerar og svaret dei får samsvarar med fasit. Dette har også erfarne matematikklærarar kommentert.

3.3.4 Kvalitativt spørjeskjema

Spørjeskjema er ein metode, medan kvalitativt forskingsintervju er ein reiskap (Kvale, 2009). Det å utføre undersøking med spørjeskjema er ingen kunst, men som forskingsmetode er det ein krevjande prosess. Ein får høgare vitskapleg status på data ein får her, i forhold til frå intervju. For i intervju vert data i større grad farga av intervjuaren.

Informasjon ein får av eit spørjeskjema vert kalla for ”low-level-knowledge”, i alle fall der svara på dei ulike spørsmåla ikkje krev refleksjon, og ein har ei bestemt mengd med ulike svar ein kan forvente (Phillips, 1987 sitert i Postholm, 2005). Ein kan også ha med spørsmål der deltakarane må reflektere, der ein får fram den subjektive haldinga dei har. Desse spørsmåla kunne ha vorte fylgt opp med nye spørsmål. Dette har ein ikkje mulegheit til når ein berre leverer ut eit skjema. Fordelen med eit slikt skjema er at det er mykje mindre tidkrevjande enn å gjennomføre intervju med kvar enkelt deltakar.

Dersom ein vil sjå på korleis elevar løyser likningar, er det kanskje mest naturleg for dei å skrive på papiret, slik dei er vane med frå matematikkfaget. Det er informativt dersom dei løyser oppgåver og viser tydleg framgangsmåte. Men for å få vite litt meir om korleis dei tenker må ein ha refleksjonsspørsmål i tillegg. Til dømes ”Kva vil det seie å flytte over når du løyser likningar?” eller ”Kva er vanskeleg med å løyse likningar?”. Akkurat desse spørsmåla hadde det kanskje vore lettare å ta munnleg. Men om ein vel eit anonymt spørjeskjema som elevane i heile klassa skal svare på, vert det lettare med tanke på det etiske. Ein slepp å fokusere spesielt på elevane som presterer dårlig, og å spørje ut dei.

3.4 Endeleg metodeval

I innleiande rundar av studien var det observasjon og samtalar med elevar og lærarar som peika seg ut som høvelege metodar. Desse ga meir innsikt og forståing av emnet. Ved å vere nær på ei klasse som jobba med nettopp likningar fekk eg ei klarare forståing av kva som kunne vere problematisk, og det vart klarare kva spørsmål som kunne stillast for å få djupare innsikt.

Vidare peika det å levere ut eit skriftleg kvalitativt spørjeskjema til elevane seg ut. Her kunne eg både ha med typiske matematikkoppgåver dei skulle løyse, og oppfylgjande spørsmål som oppmuntra til refleksjon kring ulike omgrep innanfor temaet likningar i matematikkfaget. Slik fekk eg kartlegge kva fagleg nivå kvar elev låg på innanfor emnet likningar, og eg kunne sjå på forståinga og refleksjonane dei gjorde seg i lys av dette.

3.5 Skildring av utval og grunn for val av informantar

Sidan eg skulle gjere ein kvalitativ studie, måtte ikkje utvalet mitt vere for stort. Ei lita skuleklasse som informantar var høveleg. Sidan eg har planar om å jobbe i den vidaregåande skulen passa det bra å velje utvalet mitt her. I ei VG1-klasse er det vanlegvis stor variasjon i matematikkunnskapane til elevane, sidan dei kjem frå ulike ungdomsskular og har hatt ulik undervising der. På VG1 er matematikkfaget delt i teoretisk og praktisk matematikk. Eg ville gjerne ha eit samansett utval når det gjaldt matematikkferdigheiter. Dei fleste som vel teoretisk matematikk er spesielt interessert i faget og har tenkt å studere vidare. I ei klasse elevar som har praktisk matematikk er interessa for matematikk meir varierande. Gjennom vegleiaren på oppgåva mi fekk eg kontakt med ein vidaregåande skule og ein lærar for VG1 P som var villig til å hjelpe meg med undersøkingane. Det var 23 elevar på klasselista, men eg opplevde aldri at alle var tilstades den dagen i veka eg var der, i løpet av dei tre månadane eg var innom. Då eg gjennomførte spørjeundersøkinga fekk eg inn svar frå alle som var tilstades, 16 elevar.

3.6 Observasjon og samtale med elevar og lærarar

Observasjonen eg gjennomførte var svært ustrukturert. Rolla mi var den Postholm (2005) kallar ein observerande deltakar. Eg fungerte som ekstralærar samtidig som eg konsentrerte meg om å få med meg mest muleg om elevane si forståing av likningar. Etter kvar time skreiv eg ned det elevane hadde gjort den timen, i tillegg til sitat frå elevar som hadde noko med tema å gjere. Målet med observasjonane var å få større innblikk rundt emnet elevar og likningar. I starten var eg open og prøvde å få med meg alt, induksjon i observasjonen. Utover i perioden, etter kvart som eg vart meir kjent med tema og fekk ulike teoriar og idear, utførte eg meir deduktiv observasjon (Postholm 2005).

Sidan eg fungerte som ein slags ekstralærar i klasserommet, var det naturleg å samtale med elevane då eg skulle hjelpe dei med oppgåver. Det å diskutere hendingar og observasjonar med dei to hine lærarane etter kvar time, kom også av seg sjølv. Dei lurte på om det var noko eg hadde tenkt på under undervisinga, og om eg hadde spørsmål. Desse samtalane med lærarane kan ikkje kallast intervju, sidan me var samtalepartnarar på lik linje over lunsjbordet. Eg hadde ikkje lydopptakar, og noterte heller ikkje. Likevel fekk desse uformelle samtalane innverknad på observasjonane eg gjorde i klasserommet, og førte til at eg reflekterte over fleire hendingar. Dei gjorde at eg tenkte over nye ting neste gong eg skulle vere med i matematikktimane. Då fekk eg erfare at data kan konstruerast når ein ikkje tenker over det også. I tillegg til å skrive ned det eg observerte, skreiv eg også ned tankar og idear frå samtalane. Eg såg at slike samtalar mellom kollegar har stor verdi.

3.7 Spørjeundersøking

3.7.1 Prosessen for utforming av skjema

Sidan eg valde skriftleg spørjeskjema, var det veldig viktig å tenke gjennom val av spørsmål og spørsmålsformulering. I arbeidet med dette fekk eg innspel frå dei to lærarane til klassa eg var på besøk i, medstudentar og dei to vegleiarane mine, i tillegg til læreboka som elevane brukte. Eg såg på oppgåver som er brukte i undersøkinga til Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), som er et internasjonalt forskingsprosjekt på matematikk og naturfag i skulen (Brekke, 1998). I tillegg fekk eg også innsyn i spørjeundersøkinga til norsk matematikkråd, som vert gjennomført mellom fyrsteårs matematikkstudentar ved universitetet i Tromsø.

Eg ville lære meir om forståinga elevane hadde av likningar, og sjå skilnadar på elevar. For å kunne skilje elevane matematikkfagleg, ville eg ha med oppgåver som gjekk på fakta og ferdigheiter. Samtidig måtte eg ha med opne spørsmål som gjekk på ei vidare forståing, og dekte dei kompetansane som Brekke (2002) kalla omgrepsstrukturar, generelle strategiar og haldningar.

Når det gjeld refleksjonsspørsmåla er kvar av spørsmåla utforma etter samtalar med dei nemnde som gav innspel. Vegleiar og dei to lærarane til klassa fekk utkast til spørjeskjema, og kom med tilbakemelding om det var noko som burde ha vore annleis. Eit tips eg fekk var å gå gjennom kvart spørsmål og grunde på kva eg ville med dette spørsmålet, og kva eg kunne få ut av det. Eg fekk også tips om konkrete spørsmål.

Under kvart spørsmål/oppgåve skreiv eg ned kva eg forventa skulle verte dekt av dei fem komponentane til Brekke(2002) i dette spørsmålet. Desse komponentane, som eg skildra i 2.3.1, er fakta, ferdigheiter, omgrepsstrukturar, generelle strategiar og haldningar.

3.7.2 Skildring av endeleg skjema (sjå vedlegg 1)

Eg starta skjemaet med eit kjent sitat som skal vere frå Albert Einstein: ”You do not really understand something unless you can explain it to your grandmother.”, og fyrste spørsmål var som fylgjer: Korleis vil du forklare kva ei likning er? Grunnen til at eg starta slik var at elevane skulle innstille seg på at dette ikkje var ei vanleg prøve, men eit skjema der dei skulle svare noko anna enn det dei trudde læraren ville ha til svar. Eg la føringar for den didaktiske kontrakten som Brousseau (1997) presenterar. Vidare hadde eg ei oppgåve der dei hadde tre svaralternativ og skulle fylle ut kvifor dei valde det alternativet dei gjorde. Deretter fylgde tre matematikkoppgåver. Alle oppgåvene var oppstilte likningar som eleven skulle løyse. Sjølve likningsoppgåvene likna på oppgåver frå læreboka deira. Likningane var for kompliserte til at dei kunne sjå direkte kva løysinga var. Den fyrste oppgåva inneheldt verken brøk eller parentesar. Den andre inneheldt brøk, og den siste inneheldt parentesar. Dette var fordi eg ville skilje dei som hadde ferdigheiter i å løyse likningar, men hadde problem med brøk eller parentesar frå dei som ikkje meistra noko av delane.

Vidare inneheldt skjemaet tre spørsmål som omhandla forståinga av likningar og å løyse dei. Det siste av desse var like vidt som det aller fyrste spørsmålet i undersøkinga. Elevane skulle sjølv utdjupe kva dei syntest var vanskeleg med å løyse likningar.

3.8 Utvikling av analyseverkty

3.8.1 Å få oversikt over datamaterialet

Då elevane hadde svara på spørjeskjemaa såg eg fyrst på dei tre oppgåvene som gjekk på å løyse likningar. Eg noterte på sjølve arket frå undersøkinga om framgangsmåten var korrekt. Der eleven hadde gjort feil prøvde eg å forstå kva som var tanken bak operasjonane, og noterte dette. Deretter nummererte eg dei ulike skjemaa slik at dei som ikkje hadde klart å løyse matematikkoppgåvene fekk lågast nummer, og dei som hadde klart å løyse alle tre oppgåvene fekk høgst nummer. Deretter oppretta eg eit dokument der eg skreiv inn eit og eit spørsmål med etterfylgjande tilhøyrande svar, nummerert etter kva skjema det kom i frå (vedlegg 2). No prøvde eg å samle og få oversikt over utsegnene. Dei svara som uttrykte noko av det same fekk same farge. Eg såg samtidig på måten eleven hadde løyst matematikkoppgåvene på for å betre forstå utsegnene under dei andre spørsmåla.

3.8.2 Å dele inn i analysekategoriar

Vidare prøvde eg å dele inn svara i ulike kategoriar. Fyrst laga eg ein analysetabell etter Brekke (2002) sine 5 kompetansar i matematikk. Der skildra eg kva det vil seie å kunne likningar under kvar kompetanse:

Faktakunnskap: Å ha faktakunnskap om likningar vil seie at ein må vite kva dei ulike symbola tyder og kva som gjeld for dei ulike notasjonane. Til dømes må ein vite kva x er i ei matematisk likning, reglane som gjeld for parentes, kva ein brøkstrek vil seie og alt det inneber og at ax tyder $a \cdot x$.

Ferdigheiter: Kunne å løyse likningar. Ein må kunne framgangsmåten å nytte motsett operasjon for å få "fjerna" ledd, og få eit svar på forma $x = a$. Ein som har gode ferdigheiter i å løyse likningar har automatisert prosessen, og ser umiddelbart kva som må leggast til, trekkast frå, gongast med og delast på.

Omgrepsstrukturar: Likningar kan sjåast på i samanheng med andre matematiske emne, til dømes som to funksjonar som er like kvarandre. Løysinga på likninga er kryssingspunktet til dei to grafane desse funksjonane gir. Ein må også kunne at addisjon og subtraksjon er motsette operasjonar på same måte som divisjon og multiplikasjon er det. Ein må også vite skilnadar på ukjent og variabel.

Generelle strategiar: Ein må sjå korleis ein skal gripe eit problem. I kva rekkefylgje skal ein utføre operasjonane når likninga inneheld parentesar, brøkstrekar og fleire ledd? Kan ein løyse likninga på ulike måtar? Kvifor velje den måten ein gjer? Vurdering av svaret ein får høyrer til under denne kompetansen, i tillegg til å ha eit godt matematisk språk. Ein må også sjå samanhengen mellom likningsløysing, ein reiskap, og bruken av denne reiskapen.

Haldningar: Kvifor skal ein lære om likningar, kan det brukast til noko? Kva er læraren sine haldingar? Er det å få gode ferdigheiter i å løyse likningar som er målet, eller å forstå bruken av dei?

I denne oppgåva var eg interessert i å sjå på forståinga til elevane, og ikkje berre måle kompetansen i matematikk som Brekke (2002) var oppteken av då han delte inn i dei 5 kompetansane. Det var difor ikkje passande å berre fokusere på desse kompetansane, og eg måtte finne nokre andre kategoriar som datamaterialet mitt sa noko om. Eg brukte Sfard(2008), og det utpeika seg tre kategoriar eg synest var særleg interessante, nemleg forståing, kommunikasjon og kreativitet. Ved å vurdere desse kategoriane i samband med Brekke (2002) sine kompetansar og datamaterialet mitt, fann eg at dei fire kategoriane forståing, fakta, ferdigheit og kreativitet var ei høveleg inndeling. Kommunikasjon viste seg å vere litt på sidelinja av oppgåva. Likevel valde eg å ta det med, men plasserte dette i diskusjonen etter analysane.

På same måten som Brekke (2002) har ikkje Niss & Højgaard Jensen (2002) med kreativitet som ein av dei åtte kompetansane som matematisk kompetanse er delt inn i, men kommenterar at kreativitet er eit viktig punkt, og at det inngår i alle dei åtte kompetansane dei har delt inn i. Grunnen til at eg valde vekk dei tre siste komponentane til Brekke (2002) er at dei til ei viss grad er inkludert i forståing og kreativitet. For at eleven skal ha god forståing må han ha velutvikla omgrepsstrukturar. For at ein elev skal ha kreativitet i måten å løyse matematiske problem på, må han ha dei generelle strategiane på plass (Sfard 2008). Kreativitet seier også noko om haldninga til matematikken. Eg har altså eit anna hovudfokus, men får likevel til ei viss grad diskutert omgrepsstrukturar, generelle strategiar og haldningar. For å avgrense oppgåva har eg i liten grad valt å fokusere på halding. Eg kunne også ha valt å ha ein eigen kategori om abstrahering. Eg har heller trekt dette inn i diskusjonen under kategorien forståing og nemnt det under kategorien kreativitet.

3.8.3 Inndeling av elevar

Eg laga ein tabell med Brekke (2002) sine fem kompetansar, og karakterar 1-3 for å skildre kor mykje eleven må ha på plass under kvart punkt for å få den karakteren. No sette eg opp ein tabell der kompetansane var overskrifter i kolonnane, og dei nummererte skjemaa vart då ført inn med karakter under kvar kompetanse. Ved hjelp av denne sorteringa og ytterlegare gjennomgong av skjemaa peika det seg ut fire ulike grupper: Luringen, Fakta- og ferdigheitsfantomet, Arbeidsjarnet og Mattehataren. Eg sette opp desse gruppene og plasserte skildrande sitat frå skjemaa under kvar gruppe.

Det er viktig å peike på at denne inndelinga av elevar ikkje var kategorisk. Ein elev kunne vere delvis innanfor fleire grupper. Eg gjorde ikkje ei inndeling av elevane, men eg laga grupper og delte sitata inn i desse gruppene. Ein elev kunne ha eit svar som peika mot ei gruppe, og eit anna sitat som høyrde til i ei anna. Det var få utsegner frå datamaterialet mitt som passa i gruppa for Luringen. Det er muleg at det hadde det vore fleire dersom utvalet mitt hadde vore ei klasse som hadde teoretisk matematikk, der fleire av elevane har større interesse for matematikk. Det kan også hende at det hadde vore fleire elevar i denne gruppa, dersom lærarar i større grad hadde retta undervisinga mot desse.

Etter vidare arbeid fann eg ut at eg ville slå saman fleire av gruppene eg hadde laga. Det vart for fin inndeling når eg skulle starte å analysere og drøfte viss eg skulle ta for meg *dei som forstår* i forhold til kvar av dei andre gruppene. Det enda med at eg berre delte i to grupper. *Dei som forstår*, og *dei andre*. *Dei som forstår* er dei som eg fyrst kalla Luringen. Det viste seg at det var det som verkeleg kjenneteikna han. *Dei andre* er ei svært samansett gruppe, sidan den inneheld tre ulike grupper.

3.9 Metode for analyse

Loggen eg skreiv etter kvar time eg deltok i, brukte eg til å få lære meir om elevane og korleis dei tenkte. Eg føretok ikkje ei grundig analyse av dei ulike observasjonane og samtalane. Ved å vere i timane fekk eg innblikk i korleis elevane tenkte om likningar, basert på uttalingar dei kom med. Ved å skrive ned desse, tok eg dei med vidare i arbeidet med å utvikle spørjeskjemaet og i å forstå svara eg fekk på dette.

I analysen av data frå spørjeskjemaa brukte eg dei fire kategoriane eg utvikla: Forståing, fakta, ferdigheit og kreativitet. Eg tok for meg ein og ein kategori og gjekk gjennom datamaterialet. No plasserte eg svar frå undersøkinga under kvar kategori, delt inn etter om det viste forståing eller ikkje. I tillegg gjekk eg gjennom datamaterialet i samband med tilleggskategorien kommunikasjon. Eg vurderte også no kvar utsegn i forhold til dei andre utsegnene til eleven, og såg på korleis eleven hadde løyst likningane, for å få betre forståing av svara.

3.10 Reliabilitet og validitet

3.10.1 Reliabilitet

Reliabilitet seier noko om konsistensen og truverdet til forskingsresultata, og vert oftast handsama i samanheng med spørsmålet om resultatet kan reproduserast på andre tidspunkt med andre forskarar (Kvale 2009). Det er tre spørsmål som er relevante med omsyn på reliabiliteten: 1) I kva grad er resultatet avhengig av tilfeldige dag-til-dag-svingingar hjå personane i utvalet? 2) I kva grad er resultatet avhengig av konkrete spørsmål som vert stilt? 3) I kva grad er resultatet avhengig av kven som tolkar dei svara eleven gir? (Kleven, 2002). Eg vil drøfte desse oppimot studien min.

1) *I kva grad er resultatet avhengig av tilfeldige dag-til-dag-svingingar hjå personane i utvalet?*

I undersøkingar med elevar kan ein ikkje vite om elevane har gjort sitt beste, eller om dei berre rabla ned eit svar. Spesielt dersom elevane får ta friminutt etter at dei har svara på undersøkinga er det stor fare for at dei ikkje gjer sitt beste. Dei får ikkje karakter på arbeidet uansett, so det er ikkje so farleg for dei. For å hindre at dette skulle skje hadde eg undersøkinga i starten av ein time. Eg starta med å fortelje kor viktig det var for meg at dei svara som best dei kunne. Nokre elevar har ein tendens til å berre hoppe over spørsmål som ser vanskelege ut ved fyrste augekast. Eg presiserte at dersom dei fyrst syntest at det såg umuleg ut, so hadde det stor verdi for meg om dei berre starta å prøve løyse oppgåva og skreiv korleis dei tenkte. Sidan eg hadde vore i klassa ei stund hadde eg rukke å vorte litt kjent med elevane, og opplevde at dei ville gjere det dei kunne for å hjelpe meg med undersøkinga.

2) *I kva grad er resultatet avhengig av kva konkrete spørsmål som vert stilt?*

På spørsmål 7 i undersøkinga oppdaga eg at eg skulle ha formulert meg annleis. I staden for ”kva vil det seie å ”flytte over” når du løyser ei likning?” burde eg ha skrive ”kva gjer du eigentleg når du ”flyttar over” når du løyser likningar?”. Eg ville ha fram om dei hadde forstått kva ein gjer når ein løyser likningar, ikkje om dei kunne reglar. Men sidan eg var bevisst på dette, trur eg ikkje at det har nokon innverknad på informasjonen eg trekte frå data. Dei andre spørsmåla eg har kan vanskeleg misforståast, for formuleringane er tydlege. Spørsmåla er også opne. Når det gjeld likningane elevane skulle løyse, er elevane kjent med denne typen oppgåver.

3) *I kva grad er resultatet avhengig av kven som tolkar dei svara eleven gjev?*

Nokre gongar ville eg gjerne trekke meiningar ut av svara til elevane som kanskje ikkje var der. Sidan eg ikkje gjennomførte munnleg intervju, og skjemaa var anonyme, hadde eg ikkje høve til å spørje om eg forstod eleven på rette måten. Men eg prøvde å tolke svar ut i frå svar og løysingar dei gav på andre spørsmål og oppgåver. Sidan eg var bevisst på dette i arbeidet med analyse, og tenkte meg om fleire gongar før eg underbygde mine eigne teoriar med elevsvar trur eg ikkje at tolkingane hadde vore særleg annleis dersom ein annan person med same matematikkbakgrunn hadde gjort det.

3.10.2 Validitet

Er metoden egna til å undersøke det eg skal undersøke? Måler eg det eg trur eg måler? Dette er spørsmål som angår validiteten til oppgåva (Kvale, 2009). Drøftinga av val av metode peikar på fleire punkt som viser at metoden er passande for studien min. Eg valde kvalitativ undersøking fordi eg ville sjå nærare på kva problem elevane har med likningar og kva forståing dei har. Elevane fekk gjennom undersøkinga fyrst vise om dei kunne å løyse likningar, og deretter fekk dei forklare si forståing av dette. Gjennom at elevane i opne spørsmål fekk setje ord på korleis dei forstod ulike omgrep og samanhengar fekk eg innblikk i forståinga deira.

”I hvilken grad konklusjonen kan overføres til andre sammenhenger og situasjoner, er et spørsmål om ytre validitet” (Kleven, 2002, s.141). Gjeld resultata eg har funne berre for mitt utval, eller kan det generaliserast til å gjelde meir generelt? Skuleklassa som utgjer utvalet mitt er ei samansett klasse, slik som landet elles er. Eg trur difor at eg hadde fått same resultata i andre klasser på same trinn, og at ein difor kan generalisere resultata mine til å gjelde fleire enn berre denne klassa. Eg kan ikkje trekkje konklusjonen til å gjelde heile det norske folk i alle aldrar, men innanfor elevar i den vidaregåande skulen er det rimeleg å tru at resultatet av studien gjeld.

4 Analyse og drøfting

I dette kapitlet har eg dei fire overskriftene forståing, fakta, ferdigheit og kreativitet. Eg vil analysere og drøfte data under kvar av desse, i forhold til *dei som forstår* og *dei andre* elevane. Nokre av dei fire kategoriane overlappar litt, noko eg skriv om under skildringane av kategoriane før eg startar på drøftingane. Eg har delt drøftinga i to under kvar kategori. Fyrst drøftar eg *dei andre* og so *dei som forstår*. Nokre gongar har eg med sitat som ikkje viser forståing under overskrifta om *dei som forstår*, og omvendt, for å peike på kontrasten, og betre få fram kva som skil dei to. Til slutt vil eg oppsummere skilnadane eg har funne.

I arbeidet med inndelinga av elevgrupper delte eg som nemnt i 3.8 inn i fire. *Dei som forstår* er ei lita gruppe. *Dei andre* hadde eg fyrst delt i tre grupper. Den fyrste gruppa var dei som ikkje likar matematikk, og har trekt ned rullegardina. Den andre var dei som jobba hardt og prøvde, men berre fekk til av og til. Den siste gruppa innanfor *dei andre* er dei som er flinke på faktakunnskap og ferdigheiter, men som ikkje har forståing. Når eg då siterar elevar innanfor *dei andre* vil ikkje det seie at eg meinar at alle *dei andre* har denne oppfattinga som desse eg trekk fram. Eg vil heller ikkje avgjere om ein elev har forstått eller ikkje, men eg trekker fram sitat som eg meiner viser forståing, eller som ikkje gjer det.

4.1 Forståing

4.1.1 Skildring av kategorien forståing

Å forstå likningar vil mellom anna seie å forstå kva ei symbolsk likning vil seie, å klare å tolke innhaldet, i tillegg til å kunne forstå korleis ein løyser ei likning. Men "..."true" understanding must involve something that goes beyond the operative ability to solving problems and of proving theorems." (Sfard, 2008, s. 29) Som nemnt i 2.3.5 meinte Brekke (2002) at ein kan ha fakta og ferdigheiter sjølv om ein ikkje har forstått. Og kva er det å verkeleg forstå når det gjeld likningsløysing? Då læraren underviste om likningar i klasserommet eg besøkte, introduserte han ei skålvekt der det låg eit ulikt tal av x-ar og 1-arar på kvar side. Det var balanse på vekta. Han fjerna eller la til det same på kvar side, og stod til slutt igjen med x på eine sida, og eit visst tal med 1-arar på den andre. Då måtte verdien av x vere det som låg på andre sida av skålvekta. Ein elev braut ut at no vart likningar plutseleg forståelig. Til no hadde han ikkje forstått det, og synest at det var vanskeleg. No såg det lett ut.

Denne eleven fekk plutseleg forståing av kva ein gjer når ein løyser ei likning, etter å ha jobba med det gjennom ungdomsskulen. For andre kan det vere meir som ein soloppgang, der dei modnast og får stadig meir forståing. Dei kan ikkje peike på kva dag dei plutseleg forstod. Sidan forståing gjerne er ein modningsprosess er det difor vanskeleg å kunne dele inn elevane etter dei som har forstått og dei som ikkje har forstått. Ein kan ikkje vite om ein elev har kryssa grensa, om der er noka, og gått over til å forstå. Likevel vil eg drøfte *dei som forstår* i forhold til *dei andre*. Det er då viktig å peike på at eg ikkje har delt inn elevane. Eg har trekt ut sitat som seier noko om forståing, eller ikkje gjer det.

4.1.2 *Dei andre* og forståing

Då elevane skulle svare på kva det vil seie å flytte over i ei likning fekk eg mange svar som ikkje gjekk på forståing. Dei aller fleste skildra prosedyren og reglane. Dei svarte ikkje på kva dei eigentleg gjer når dei flyttar over, men på korleis dei gjer det. Eg fekk svar som ” Et ledd hopper over likhetstegnet og skifter fortegn på veien”, eller liknande. Eit par utsegner merka seg likevel ut, for dei hadde ein språkbruk som for meg verka sjølvmotseiande. Det eine er ”Du tar vekk like mye som du gir den andre siden av erlikhetstegnet på en måte”. Og slik kan det på mange måtar sjå ut når ein løyser likningar også. Om det står *-2x* på eine sida, fjernar ein heile leddet og skriv *+2x* på andre sida av likskapsteiknet. Denne eleven kallar = eit”erlikhetstegn”, men eleven kunne ikkje ha tenkt på dette då han formulerte at ein tek vekk like mykje på eine sida som ein gir den andre. Då er det ikkje likskap lenger! Det andre svaret som merka seg ut var berre”+ blir – og – blir +”. Det kan også sjå slik ut når ein løyser likningar, og ein bruker uttrykket ”å endre forteikn”. Dette er ein uttrykksmåte som ikkje fremjar forståing. Det seier ikkje noko om matematikken bak operasjonen. Når elevar uttalar seg slik som desse to, verkar det ikkje som om dei har forstått kva ei likning er. Det kan også hende at dei berre ordlegg seg slik fordi det er språkbruk dei er vande med, eller at det er slik dei trur det er forventa at dei skal svare. Det vert snakka om å flytte over og endre forteikn, og å fjerne tal. Og om det er fullt akseptert å kunne endre forteikn, so er det vel ikkje so rart om + blir – og – blir +.

Mange elevar har ikkje forståing av likskapsteiknet i samband med likningar(Nogueira de Lima & Tall, 2006 og Pind, 2009). Ein skulle tru at ein elev som kallar = for eit ”erliktegn”, veit at det er likskap mellom dei to sidene i ei likning. Likevel har han ”flytta over” ledd utan å endre forteikn når han prøver å løyse likningar. Det ser ikkje ut til at han har forstått likskapsteiknet si viktigheit i likningar. Det er ein stor del av heile konseptet (Pind, 2009).

Elevane ser ikkje på likskapsteiknet som ein integrert del av likninga, men som eit "teikn for å gjere noko". Det er ikkje forståing av kva som ligg i omgrepet likning (Nogueira de Lima & Tall, 2006).

Nokre elevar kan fakta og har ferdigheiter, men forstår likevel ikkje kvifor dei gjer som dei gjer (Brekke, 2002). Eleven som meinte at å "flytte over" i ei likning vil seie at "du tar vekk like mye som du gir den andre siden av erlikhetstegnet på en måte" har greidd å løyse alle likningane. Men sitatet viser ikkje at eleven har forståing av kva han gjer når han løyser likningar. Det kan likevel hende at han har dette, berre at han ikkje har uttrykt seg korrekt i dette svaret. Men eleven hadde også andre svar som gjorde at eg vart usikker på om han verkeleg hadde forstått omgrepet likningar. Han skreiv til dømes at $10 + a = 10 + b$ aldri er sant, "fordi a og b ikke er same tall". Dette går meir på forståinga av variablar, men det kan også sjåast på som ein del av likningsomgrepet.

Dersom ein hadde undervist i same rekkefylgja som utviklinga i algebra var, at ein i utgangspunktet hadde praktiske problem som ein ville løyse, for so å finne gode måtar å gjere det på, hadde elevane fått større forståing av kva dei eigentleg gjer når dei løyser likningar (Katz & Barton, 2006). Ein kan gå ut i frå eit praktisk problem. Vidare må ein abstrahere dette og bruke likningar som verkty for å løyse problemet. Men det er nettopp dette elevane slit med (Grevholm, 2005). I undervisinga er det i stor grad lagt vekt på ferdigheiter (Brekke, 2002). Men for å kunne bruke verktyet likningar må ein også lære korleis ein brukar det.

For å gjere likningar meir forståeleg kan ein ha ei meir heilheitleg undervising (French, 2002). Medan ein lærer ferdigheitene med å løyse likningar, må ein også ha med nytteaspektet med likningar, og sjå samanhengen med praktiske problem. Ei endring på fokuset i undervisinga kan endre på at abstrahering er noko norske elevar slit med (Grevholm, 2005). Dersom målet er forståing, og ein jobbar med å utvikle omgrepsstruktur og generelle strategiar (Brekke, 2002), kan elevane også meistre å gå frå eit konkret problem til ei likning.

Om ein ser på svara på spørsmålet "korleis vil du forklare kva ei likning er", har dei fleste elevane omtala framgangsmåten for å løyse likningar, eller korleis ei likning ser ut. Til dømes fekk eg svara "Å regne ut ei likning er å regne med ukjente tall for å løse den må mann finne det ukjente som for eksempel *x* og *y*, det er egentlig tall som gjemmer seg bak de", " en likning er ofte med bokstaver og tall", "Ei ligning er et regnestykke der en eller flere av leddene er ukjente. De erstattes gjerne med en bokstav". Det er ikkje fokus på forståing av likningar i desse svara, eller kva dei kan brukast til. Ein elev skreiv " Vet ikke hvordan jeg skal forklare det med ord". Det er ikkje umuleg at også fleire elevar syntes at dette var vanskeleg. Elevane var ikkje vande med å uttrykke seg om matematikk med ord, og svara eg har sitert ovanfor kan difor vere litt tilfeldige. Likevel skreiv dei ned det dei kom på der og då, og dei fleste skildra framgangsmåten for å løyse, eller utsjånaden til ei likning. Og ikkje nytta av likningar.

I ein studie gjort i Brasil mellom like gamle elevar som i utvalet mitt (Nogueira de Lima & Tall, 2006) er det funne mykje av det same som eg nett har trekt fram. Det verka som om det var lite fokus på forståinga av omgrepet likningar. I denne undersøkinga hadde dei spørsmålet "What is an equation", (medan eg formulerte meg slik: Korleis vil du forklare kva ei likning er?) Det mest vanlege svaret i Brasil var på forma "*It is a mathematical calculation"* eller *"It is a calculation you do to find the solution, to find x"*. (Nogueira de Lima & Tall, 2006, s. 235) Dette vart tolka som at elevane såg ut til å sjå på likningar som aritmetiske kalkulasjonar, eller som ei utrekning som var nødvendig for å finne x, den ukjente. Liknande resultat vart funne av Dreyfus and Hoch (2004 i Nogueira de Lima & Tall, 2006). I studien i Brasil viste det seg også, på same måten som i studien min, at elevane såg på likningar som ein måte å finne ein ukjent, framfor å nytte likningar i praktiske problem frå dagleglivet. På spørsmålet "What is an equation for?" fekk dei mellom anna svaret "Not much in daily life, but may be useful to people who like maths" (Nogueira de Lima & Tall, 2006, s. 236).

At elevane ikkje ser på likningar som nyttig kan ha samanheng med korleis dei vert undervist. Ein bør vente med å abstrahere til ein kan so mykje algebra at ein forstår kvifor det er nyttig å abstrahere (Katz & Barton, 2006).

På spørsmålet om $10 + a = 10 + b$ kunne vere sant, var det nesten halvparten som kryssa av på at det aldri var sant. Grunnane dei gav var til dømes " *A* og *B* er variabler, vi vet ikke hva de er, men vi vet at det ikke er det samme", " a blir ikke til *b*" og "a og *b* er ikke samme tallet". Det siste sitatet viser at det er ei forståing av at a og b er ukjente som står for to ulike tal. Det fyrste sitatet viser også at eleven har ei forståing av at a og b er noko anna enn berre bokstavar. Sidan desse elevane meiner at $10 + a = 10 + b$ aldri kan vere sant, må her vere ei forståing av at a og b må vere to *ulike* tal, sidan dei har ulike namn. Sjølv om eleven bak det fyrste sitatet kallar dei to ukjente for variablar seier han at dei ikkje er det same. Dei kan altså variere, men aldri vere lik kvarandre.

Elevane hadde faktisk hatt undervising om grafar og funksjonar då dei svarte på spørjeundersøkinga, men likevel verkar det ikkje som at desse elevane såg på *a* og *b* som variablar i den forstand at dei kan variere uavhengig av kvarandre (og difor også at dei kan vere lik kvarandre). Utsegna "*a* blir ikke *b*" klarer eg ikkje å tolke. Det verkar som eleven veit at *a* og *b* kan variere, sidan han bruker verbet *blir.* Variablane kan verte noko anna enn dei er, men likevel meiner eleven at *a* ikkje kan verte *b*. Men kva *a* kan verte, seiast det ikkje noko om. Det kan tenkast at elevane hadde svara annleis dersom dette spørsmålet hadde vore i ei spørjeundersøking om grafar og funksjonar. Kanskje er det samanhengen mellom likningar og funksjonar som er fråverande. I læreboka er det ikkje ein openbar samanheng mellom desse (Sandvold et al., 2009). Når ein ser bokstavar i ei likning veit ein at det står for eit bestemt tal som er ukjent. " En ligning er en måte å finne et ukjent tall på". Då tenker ein ikkje på den ukjende som ein variabel. Dersom elevane hadde hatt grafisk undervising om likningar hadde dei kanskje lettare sett for seg dei ukjende som variablar, og fått betre utvikla omgrepsstruktur (Chazan, Yerushalmy & Leikin, 2008). Dersom dei hadde fått sjå ulike typar likningar, til dømes dei fem ulike (Usiskin, 1999) som vert skildra i 2.1 under "kva er ei likning?", hadde dei kanskje fått større forståing av likningar, og sett skilnad og likskapar på ukjente og variablar.

For å oppsummere er det mange som har fokus på fakta og ferdigheiter når det gjeld likningar. Mange forstår ikkje matematikken bak å "flytte over". Dei har heller ikkje forståing av viktigheita og eigenskapane til likskapsteiknet i ei likning. Mange elevar ser også ut til å ha problem med å stille opp ei likning ut i frå ei tekstoppgåve, dei greier ikkje å abstrahere eit praktisk problem (Grevholm, 2005). At omgrepsstrukturen om likningar er dårleg utvikla fører til dømes til at ein ikkje har oversikt over kva ein variabel er, i forhold til ein ukjent.

4.1.3 *Dei som forstår* og forståing

Eg har, på same måte som Sfard (2008), problem med å setje fingeren på kva som er kriteria for å avgjere om andre har forstått noko eller ikkje. Det er også vanskeleg å setje fingeren på kva som gjer at ein sjølv har forstått noko. Ein berre veit at ein har forstått det.

Ein elev skreiv at ”likninger er vanskelige til man plutselig skjønner sammenhengen”. Kva å forstå samanhengen vil seie, skreiv han ikkje noko om. Halmos (1985, i Sfard, 2008) hadde lese bevis der det var brukt epsilon. Han kunne også reprodusere dette. Likevel forstod han det ikkje. Men so ein dag gjekk det opp for han, han forstod det han tidlegare berre hadde reprodusert. ”All that stuff that previously had not made any sense became obvious” (Halmos, 1985, i Sfard, 2008, s. 29). Plutseleg forstod han samanhengen, slik som eleven skildra det. I Piaget sine termar (Hundeide, 1985) hadde han no ikkje berre figurativ kunnskap, men også operativ.

I datamaterialet mitt er svar som viser til nytta av likningar. ”En ligning er en måte å sette opp en utregning på hvor en eller flere faktorer er ukjent”. Om ein har eit problem der ein har ei ukjent mengd, kan ein setje opp ei likning for å rekne ut svaret. Ein kontrast til dette er ”Det er et regnestykke med x,y eller andre bokstaver”. Dette sitatet seier ikkje noko om kva ein brukar likningar til. Det er fyrst og fremst eit reknestykke som ein møter i matematikkboka. Det kan verke som at dei som forstår likningar, også forstår bruken av dei.

Ein elev skreiv at ”likning heter det fordi det er like mye verdier på begge sider av er lik”. Dette viser at eleven har tenkt over likskapsteiknet, og kva det seier oss i ei likning.

Eit sitat som viser forståing, skildra det å ”flytte over” som at ein ” plusser på, på begge sider eller trekker fra på begge sider.” Han skildrar altså det ein eigentleg gjer, og ikkje prosedyren som vert pugga. Ein elev hevdar at det er enkelt å løyse likningar ”hvis man skjønner flyttingen og at x-ene skal være på den ene siden...”. Dersom ein skjønar denne flyttinga treng ein ikkje å vere ”usikker på bruken av + og –”, som ein elev meinte at han var (Dunkels, 1994).

4.2 Fakta

4.2.1 Skildring av kategorien fakta

I matematikk er det mykje faktakunnskap. Dette er ”deler av informasjon som kan være usammenhengende eller tilfeldig” (Brekke, 2002, s. 11), altså kan ein ikkje resonnere seg fram til det, men det må berre puggast. Det kan vere definisjonar, konvensjonar eller notasjonar. Døme på notasjonar ein må kunne når det gjeld likningar, er at $2x$ vil seie $2 \cdot x$, og ikkje $20 + x$ (sjølv om 23 vil seie $20 + 3$). Kategorien fakta heng tett saman med kategorien ferdigheit. Ofte er det vanskeleg å skilje om noko er fakta eller ferdigheit, og ein vil sjå nokre overlappingar i drøftinga. Ulike personar kan oppleve noko som fakta, medan andre ser på det som ferdigheit. Til dømes kan gongetabellen vere fakta for dei som har pugga han, medan andre må bruke ferdigheiter og rekne seg fram til svaret.

4.2.2 *Dei andre* og faktakunnskap

Ein elev som svarte på spørjeundersøkinga skulle forklare kva ei likning var, og svarte: ”Det er et regnestykke med *x, y* eller andre bokstaver. Og med paranteser. Det er vanskelig...” Eleven skildra berre det han ser framfor seg når han ser på ei likning: *x, y* eller andre bokstavar, og parentesar. Han skreiv ikkje noko om kva som er målet med ei likning, eller kva likninga vil seie. Av dei ulike spørsmåla i undersøkinga har eleven svara på lite, og der han har prøvd å løyse oppgåver har han lagt til ”tror jeg”. Det verkar som at eleven er usikker. På resten av spørreskjemaet seier eleven det som det er: ”jeg kan dessverre ikke LITT av dette engang”, ”vet ikke”, ”jeg har ikke lært meg det” og ”jeg skjønner ikke”. Det verkar som om rullegardina er nede. For at eleven skal få ei meir positiv haldning til likningar er det naudsynt at eleven klarer å sjå bak *x, y* eller andre bokstavar, og parentesar. Det verkar som han ikkje forstår notasjonane, og får difor ikkje ut noko meining av uttrykket. For å kunne gjere det må han vite kva dei ulike notasjonane tyder. Det matematiske symbolspråket utgjer ei kjelde til mykje redsle (Dunkels, 1994). For å hindre dette må eit øve seg i å sjå selektivt (Dunkels, 1994), som eg har skrive om i 2.3.4. Det vil seie å late noko av uttrykket vere framtredande medan ein let noko anna vere i bakgrunnen, og ein må veksle på kva som er framtredande etter kva som er interessant. Ein må lære seg kva ein skal sjå etter for å kunne forstå notasjonane. Om ein ser heile reknestykket med *x, y* og parentesar, blir det vanskeleg. Ein veit ikkje kvar ein skal starte.

Under observasjon i klasserommet opplevde eg at ikkje alle visste kva *2x* tyder. Ein elev skulle undersøke om han hadde fått rett svar på oppgåva med å løyse ei likning. Eg føreslo å setje inn talet for *x* i likninga og sjå om det gav same verdi på begge sider av likskapsteiknet. Eleven trudde då at $2x$ var nettopp $20 + x$, og fekk det ikkje til å stemme. Eg prøvde å rettleie, og spurte kva *2x* betydde. Eleven kom fram til at det var *2* gongar *x*, og fann til slutt ut kva han hadde gjort gale.

Problem med notasjonane kan seie oss at nokre elevar har problem med likningar fordi dei ikkje kan fakta som trengs for å tolke likningar. Eller kanskje veit dei eigentleg kva notasjonane vil seie, men når dei vert brukt i andre samanhengar enn dei er vande med, gløymer dei kva det tyder. Denne eleven, som ikkje visste kva *2x* ville seie, hadde klart å løyse likninga som han skulle setje prøve på, so i den samanhengen hadde eleven faktakunnskapen om notasjonen *2x*. Omgrepsstrukturen er dårleg utvikla (Brekke, 2002). Det kan tyde på at eleven har figurativ kunnskap om notasjonen. Han har sett liknande notasjon før, og klarer å tolke meininga i den gitte situasjonen som han har sett han tidlegare. Men den operative kunnskapen har ikkje eleven, og han greier ikkje å forstå meininga av notasjonen i ein annan situasjon.

Det finst mange døme på at fakta vert oppfatta på måtar som passar i ein samanheng, men ikkje ein annan. Eit eksempel er forståinga av 0 som ”ingenting”. Dersom elevar finn ut at $x = 0$ trur dei at dei må ha gjort noko feil, for svaret kan ikkje vere ingenting (Pind, 2009). I samband med notasjonen for likningar byr også 0 som ”ingenting” på problem. Nokre trur at dersom dei skal addere $x + 3x$, er det *3x*, for koeffisienten i det fyrste leddet er ingenting, og $0 + 3 = 3$ (Pind, 2009)

Ofte vert likskapsteiknet oppfatta som at ein operasjon skal verte utført (Nogueira de Lima & Tall, 2006 og Pind, 2009). Det er fleire grunnar til dette. Ein av dei er at ein på tidlege trinn i skulen i staden for å seie $3 + 4\ er\ 7$, brukar ordet $3 + 4\ blir\ 7$. Ein annan grunn til denne forståinga kan vere at ein trykker på ”=” på kalkulatoren for å få svaret. I likningar er det ei anna forståing av likskapsteiknet, sjølv om det tyder likskap i tidlege trinn i skulen også. Ei fylgje av denne misoppfattinga er at elevane gjer feil, og fører oppgåvene feil når dei løyser likningar (Pind, 2009).

Sjølv om elevar kanskje veit kva likskapsteiknet tyder, er det ikkje sikkert at dei nyttar denne faktakunnskapen når dei prøver å løyse likningar. Som eg skreiv i 4.1.2 meinte ein elev at ”å flytte over” var å flytte tal frå eine sida av likskapsteiknet til hi. Då eg såg på korleis han hadde prøvd å løyse likningane viste det seg at han ikkje hadde forstått kva dette innebar. Han skreiv berre opp alle *x*-ane på eine sida av likskapsteiknet, og tala på den andre. Han gjorde ikkje noko med + eller - som stod framføre tala, dei berre fylgde talet som stod etter i den oppstilte likninga. For meg verka det som om han såg på likskapsteiknet som eit skilje som ikkje hadde noko større tyding. For det var i alle fall ikkje likskap mellom dei to sidene av likninga etter at han hadde ”flytta over”, dersom *x* skulle ha same verdi som før. Men han kalla teiknet som han flytta dei ulike tala og *x*-ane over, for eit ”erliktegn”. Han var ikkje bevisst på tydinga av likskapsteiknet i løysinga av likningar.

Ein del av *dei andre* har klart å løyse ei av oppgåvene, men ikkje dei andre to, dei som inneheldt brøk eller parentesar. Dette kan tyde på at dei ikkje kan fakta om brøk og parentesar. Eller kanskje kan dei fakta, men har problem med ferdigheitene for å løyse desse typar likningar. Eg kjem tilbake til brøk og ferdigheiter i 4.3.2.

4.2.3 *Dei som forstår* og faktakunnskap

Elevar som forstår likningar må forstå kva likningar tyder. Dei må altså vite kva notasjonane vil seie. Ein som hadde forstått, gav dette svaret på om likningar er vanskeleg: ”Nei, egentlig ikke. Likninger er det som er artig å gjøre innenfor matte i min mening.” Eleven hadde klart å løyse alle likningane. For å løyse likningar må ein kunne dei nødvendige fakta som trengs for å kunne gjere dette. Sidan eleven i tillegg syntest at det er artig å løyse likningar, trur eg ikkje at faktakunnskap om likningar er eit problem.

4.3 Ferdigheit

4.3.1 Skildring av kategorien ferdigheit

Ferdigheit er ”veletablerte prosedyrer i flere steg” (Brekke, 2002, s. 4), altså er det å løyse likningar ei ferdigheit. Fleire prosedyrar er involverte i å løyse likningar. Utanom akkurat det som ofte vert kalla å ”flytte over” må ein også i fleire høve beherske å løyse opp parentesar og å behandle brøkar.

4.3.2 *Dei andre* og ferdigheit

Då elevane som ikkje klarte å løyse nokre av likningane i undersøkinga skulle skrive kva som var vanskeleg med likningar, viste det seg at alle meinte at det var å hugse reglar eller måtar å løyse dei på som var problemet. Ein elev skreiv til dømes at ”å huske formlene fra gang til gang e umuli…” Ein annan formulerte seg slik:” man glemmer eller mikser måtene å løse dem på”. Det viste seg i denne undersøkinga at dei som har problem med å løyse likningar altså fokuserer på reglane når dei skal uttale seg om kva som er vanskeleg. Dei seier at dei ikkje hugsar, eller at dei blandar reglar. ”Det er velkjent at [...] regelfokuseringen ofte fører til en sammenblanding av regler fordi en ikke husker den klassen regelen ble utviklet innenfor. En bruker regelen i sammenhenger der den ikke gjelder, dvs at en blander regler” (Brekke, 2002, s. 5). Kva er grunnen til at det er vanskeleg å hugse reglar når ein fokuserer på nettopp desse? Ein elev fekk problem då han skulle løyse likninga $2x + 7 = 19 - 4x$. Han skreiv *-2x* over *2x* på venstre sida, men i staden for å skrive *-2x* på høgre sida også, skreiv han *+2x* der. Altså endra eleven forteikn på høgre sida då han skulle legge til *-2x* på kvar side av likskapsteiknet. Då læraren underviste om likningar skreiv han opp alle mellomrekningar på tavla (til dømes hadde han skrive *-2x* over kvar side av likskapsteiknet dersom han hadde løyst likninga over, i staden for å berre ”flytte over”) for å vise matematikken bak å ”flytte over”. Fleire elevar braut ut at han gjorde dei forvirra, for det var ikkje slik dei hadde lært å gjere det på ungdomsskulen. Læraren argumenterte med at det var same framgangsmåte som dei hadde lært på ungdomsskulen, berre at då hoppa dei over mellomrekningane.

Det er ikkje rart at elevane trudde det var ein ny metode, for desse metodane vert nokre stadar framstilt som to ulike framgangsmåtar. Den eine vert kalla å flytte over, eller flytt-bytt-regelen, og den andre vert kalla balansevekt (Pind, 2009). At dette vert kalla ulike metodar, og at dei faktisk har fått ulike namn, overraskar meg. Det vert også undervist om flytt-bytt-regelen på ungdomsskular (Kleve & Tellefsen, 2009), og då er det ikkje rart at elevar er regelfokusert når det gjeld likningar.

Det verkar som eleven som skreiv *-2x* på eine sida av likskapsteiknet og *+2x* på andre sida har blanda desse to metodane. Han har tatt med mellomrekninga, men bytta forteikn i tillegg.

Ein tredje elev skreiv at ”jeg er usikker på reglene for omtrent alt i ligninger. Spesiellt ved bruk av +, - osv.” Eg tolkar ”bruk av + og –” som at eleven ikkje veit om eller når han skal endre forteikn når han flyttar over. Det viser også resten av spørjeskjemaet til denne eleven. Det ser ut som om han ikkje tenker på kva ein eigentleg gjer når ein flyttar over. Han skriv at det er å ”flytte fra den ene siden av likhetstegnet til det andre ”, men hugsar berre delvis noko om ein regel der + vert til – og – til +. I oppgåveløysinga har eleven endra forteikn på ledda med ukjende, men ikkje på ledda med kjende tal. Sidan eleven berre har prøvd å løyse ei av likningane har eg ikkje grunnlag for å seie om dette er tilfeldig eller ikkje. Men det er grunn til å seie at eleven har problem med å ”flytte over og endre forteikn”. Dersom eleven hadde kjent regelen om å endre forteikn, nemleg at ein gjer den same operasjonen på begge sider av likskapsteiknet og forkortar på eine sida, trur eg ikkje at han hadde lurt på om og når han skulle endre forteikn. Men sidan denne eleven nemner reglar som grunn til at likningar er vankeleg, verkar det som om han har fokus på ferdigheiter framfor forståing. Dette er vanleg, også frå lærarane si side i undervisinga (French, 2002). Når ein ikkje forstår kvifor, kan det verke tilfeldig når ein skal endre forteikn og ikkje. Då vert det også vanskeleg å hugse når og kva. Elevane sitt arbeid må bygge på tankar, og ikkje mekanisk flytting av symbol og teikn. På den måten kan elevane verte tryggare på det dei gjer (Dunkels, 1994). Då er det ikkje lenger tilfeldig om ein gjer rett eller ikkje, og elevar kan ikkje seie: ”Noen ganger får jeg til, og andre ganger ikke”.

Fleire elevar synest at det er lettare å løyse likningar om ein har ei ”oppskrift” som dei kan gå gjennom punkt for punkt. ”Er ikke så flink i matte men når man følger en oppskrift er det lettere å huske hva man skal gjøre med alle x-ene og y-ene” og ”Det er lettest å følge oppskriften” er eit par av utsegnene som seier dette. Dersom ein ser desse utsegnene opp mot at ”metoden kommer naturleg når jeg regner ligninger”, kan det forståast som at elevane som tenker på å løyse likningar som ei oppskrift, ikkje har automatisert prosedyrane. Dei synest at det er lettare å hugse kva dei skal gjere om dei tenker gjennom punkta dei skal fylgje. Då er det kanskje fort gjort å gløyme kva dei skal gjere viss dei ikkje ”fylgjer ei oppskrift”. Læreboka deira inneheld ei slik ”oppskrift” (Sandvold et al., 2009:19):

Løysing av likningar:

- Gong inn i og opne parentesane.
- Gong alle ledda med samnemnaren.
- Bytt forteikn når du flyttar over ledd.
- Dra saman *x*-ane og tala kvar for seg.
- Del med talet framfor *x* på begge sider. Kort eventuelt svaret.

Ei slik oppskrift fører kanskje til at dei raskare automatiserar prosedyrar. Men det er truleg også fare for at ho underbygger regelfokusering.

Nokre elevar greidde å løyse den fyrste likninga i spørjeundersøkinga, men ikkje den neste som inneheldt brøk. Fire elevar nemnde spesielt at dei hadde problem med brøk, og at det er det som gjer likningar vanskeleg: ”deling og store ligninger”, ” noen kan være vanskelig, Brøk”. ”Synes det er noe av det letteste vi har! Men ikke når det er brøk i det. Da blir det mye vanskeligere.” og ”Glemmer fort regelen for likninger med brøk, men skal nok huske det en dag”

Dei elevane som har skrive at brøk er vanskeleg har ikkje problem med å løyse oppstilte likningar som ikkje inneheld brøk. Det kan difor verke som om det ikkje er likningar som er eit problem i seg sjølv, men brøk som er inneheldt i enkelte likningar. Sjølv om dei ikkje klarer å løyse likningar som inneheld brøk, og meiner at dette er vanskeleg, brukar dei likevel brøk i utrekningane sine av andre likningar. I den fyrste likninga fekk dei $6x = 12$, og skreiv i neste linje at $\frac{6x}{6} = \frac{12}{6}$ og fekk $x = 2$ til svar. Grunnen til at dei beherskar brøk i desse tilfella er kanskje at det er innlærte ferdigheiter, då treng dei ikkje å tenke over kva dei gjer eller kva det betyr. Det same gjeld eleven som eg viste til i 4.2.2. Han hadde greidd å løyse ei likning som inneheldt notasjonen *2x*, og må ha delt på 2 for å finne kva *x* var. Altså var ferdigheita på plass, han greidde å fylgje oppskrifta for å løyse likninga. Likevel visste ikkje eleven kva *2x* ville seie då han skulle setje inn talet for *x*. At ein beherskar noko i berre visse samanhengar viser at omgrepsstrukturen er dårleg utvikla (Brekke, 2002). Det verkar som om desse elevane berre tenker på oppstilte likningar som inneheld brøk, når dei skriv at brøk er vanskeleg. Dei har ikkje ferdigheita til å løyse slike likningar, sjølv om dei kanskje veit kva ein brøk vil seie. Når ein reknar med brøk i likningar er det også andre reglar enn når ein reknar med brøk i andre uttrykk. Det er til dømes lov å berre stryke nemnarane viss dei er like i alle ledd, og ein gjer det på begge sider av likskapsteiknet. Men eigentleg utfører ein same operasjon på begge sider av likskapsteiknet ved å gonge med same talet som i nemnaren. Og dette liknar veldig på noko dei gjer elles i likningsløysing.

4.3.3 *Dei som forstår* og ferdigheit

”Metoden kommer naturlig når jeg regner ligninger og de føles logiske når man ser på dem ”. ”Jeg ”husker ikke oppskriften”, jeg ser hva jeg må gjøre når jeg ser på likningen”. *Dei som forstår* ”ser” kva dei må gjere når dei skal løyse likningar. Dei har gode ferdigheiter og har automatiserte prosedyrar. Brekke (2002:5) seier at:

> Det er viktig å ha gode ferdigheter på en rekke områder i faget dersom en skal få nytte av matematikken. Det er også viktig å automatisere prosedyrer, for å kunne rette oppmerksomheten mot andre sider i en praktisk situasjon der et problem skal løses. Løsning av oppstilte regnestykker hviler i første rekke på gode ferdigheter.

Dei som forstår, har også måtte lært seg ferdigheiter og faktakunnskap som *dei andre*. Men dersom prosedyrane er automatisert kan ein ha fokus på noko anna enn ”oppskrifta”, på korleis ein skal løyse likninga. Eleven som skreiv at han ikkje ”hugsar oppskrifta”, men såg kva han måtte gjere ved å sjå på likninga, svarte på kva ei likning er: ”En likning er en måte å finne ut hva det ukjente er [...]det er mindre forvirrende, for man trenger ikke stokke om på ting i hodet.” Det er fokus på det ein skal finne ut, og at å setje opp og løyse ei likning er eit hjelpemiddel som gjer løysinga på eit problem lettare. Ein motsetnad til dette er: ” Likning har alltid = i seg og man må flytte *x*-ene over til den ene siden og de ”rene” tallene over til den andre siden. Eller for eksempel b istedenfor x. man må skille x,b,a, hele tiden for seg selv ”. Her er ferdigheita å løyse likninga fokuset, og ikkje kva ein brukar likningar til. For å vri på sitatet av Brekke (2002) : Dersom ein ikkje har automatisert prosedyrane, har ein nok med å tenke på desse. Det vert vanskelegare å rette merksemda mot andre sider av problemet. Men dersom ein har forstått likningar er det også lettare å lære ferdigheitene, for dei ”verkar logiske”, som ein elev skreiv.

4.4 Kreativitet

4.4.1 Skildring av kategorien kreativitet

Verken Brekke (2002) eller Niss & Højgaard Jensen (2002) har oppført kreativitet som ein av komponentane av det å kunne matematikk, men Niss & Højgaard Jensen (2002:64) skriv at dette er ein viktig del:

> ”Kreativitet” kan vel nærmest betragtes som indbegrebet af alle de produktive sider af kompetencerne, altså det at kunne stille gode interne eller eksterne matematiske spørgsmål og formulere deraf udspringede problemer; dernæst ved hjælp av intuition, abstraktion, generalitation valg af hensigtsmæssige repræsentationer, symbol- og formalismehåndtering, samt eventuelt brug af hjælpemidler, at løse disse problemer; derefter at levere korrekte og fullstændige argumenter (beviser) for at de foreslåede løsninger virkelig virker, for sluttelig at kommunikere både proces og produkt på en klar og overbevisende måde til en målgruppe.

Dei meiner at kreativitet inngår i alle åtte kompetansane dei har delt det å kunne matematikk i. Matematisk kreativitet er eit diskutert omgrep, og det er ikkje semje om kva det vil seie å ha matematisk kreativitet (Sriraman, 2004).

Denne kategorien skil seg frå kategorien om fakta eller ferdigheit i forhold til direkte data eg har om emnet. Dersom ein vil undersøke om elevar har fakta eller ferdigheiter om likningar kan ein gje oppgåver der dei må bruke ferdigheitene og fakta for å kunne løyse oppgåva. Kreativitet er det verre å undersøke direkte. I tillegg var eg ikkje bevisst på matematisk kreativitet då eg laga spørjeundersøkingane. Det har eg vorte undervegs i arbeidet med studien. Difor hadde eg ikkje med spørsmål som til dømes: ”Meiner du at ein kan vere kreativ når ein jobbar med likningar? Korleis?” Likevel hevdar eg at eg kan finne utsegner om kreativitet i datamaterialet mitt.

Med kategorien kreativitet meiner eg å sjå om oppfatninga elevar har, gjev rom for at dei kan velje framgangsmåtar sjølve, eller om dei må fylgje faste reglar eller prosedyrar. Dersom dei har matematisk kreativitet kan dei lausrive seg frå læreboka når dei skal gjere oppgåver, og våge å prøve på eiga hand. Dei har operativ kunnskap om likningar, og ikkje berre figurativ (Hundeide, 1985) Då kan dei bruke kunnskap om likningar i ulike samanhengar, i samanhengar dei kanskje ikkje har sett det brukt før.

4.4.2 *Dei andre* og kreativitet

Dei som ikkje har automatiserte prosedyrar, konsentrerar seg om desse når dei løyser likningar (Brekke, 2002). Mange har difor heller ikkje det overblikket som vert kravd for å kunne sjå at det er fleire måtar å løyse eit problem på. Ein elev meinar at ”Alt i matte har egne regler og måter å bli løst på”. Den same eleven seier at ”Jeg synes det er vanskelig fordi alle reglene ikke vil sette seg i hodet”. Matematikk er reglar som må puggast, og ikkje måtar å løyse problem på. Sitatet om at alt har eigne reglar og måtar å verte løyst på, viser ikkje mulegheit for å vere kreativ. Dette er vanskeleg når ein må konsentrere seg om å fylgje reglar. Ein kan vere kreativ i vegval i trafikken, men ein må likevel halde trafikkreglane. Dersom ein berre fokuserer på reglane greier ein ikkje å sjå og vurdere alternative vegval. Slik verkar det som det er i matematikk og likningsløysing også.

4.4.3 *Dei som forstår* og kreativitet

Når *dei som forstår* skal forklare kva ei likning er, fokuserar dei ikkje på kva som er vanskeleg, eller korleis dei skal løyse likningar: ”En ligning er en måte å sette opp en utregning på hvor en eller flere faktorer er ukjent”. Ei likning er altså ein måte å setje opp ei utrekning. Det er ikkje ei oppstilt oppgåve som må løysast. Her er ein tydeleg skilnad på fokus i forhold til utsegna om at likningar er eit reknestykke der ”man må flytte *x*-ene over til den ene siden og de ”rene” tallene over til den andre siden”. Denne eleven har berre nemnt framgangsmåten for korleis ein løyser likningar, men det vert ikkje sagt noko om kva likningar vert brukt til. Men sjølvsagt må ein fylgje reglar for korleis ein løyser likningar dersom ein skal vere kreativ også, men dette fører ikkje til at ein kan vere mindre kreativ. Å lære alle reglar og framgangsmåtar krev også kreativitet (Sfard, 2008).

Nokre elevar tenker ikkje på at det er mange reglar som må fylgjast når dei løyser likningar. Dei” husker ikke oppskriften”, ”å løse likninger er mer som en hinderløype”. Når denne eleven nemner hinderløype i motsetnad til ”å følge visse punkt”, kan det verke som at det er eit friare syn på korleis ein løyser likningar. Eleven heldt fram forklaring slik: ”Man må tenke logisk, det er jo sånn man løser ting”. Denne eleven har greitt å løyse alle likningane, so fakta og ferdigheiter var på plass. Men som han skriv, so fokuserar han ikkje på reglar når han skal løyse likningar, han tenker ikkje på at det er ei oppskrift han må fylgje. Det er berre å tenke logisk. Men det er ikkje alle elevar som berre kan tenke logisk når dei skal løyse ei likning. Eleven som skreiv at ”alt i matte har egne regler og måter å bli løst på”, viser ikkje til kreativiteten når det gjeld likningsløysing. Det er reglar som må puggast og fylgjast. For at ein skal greie å tenke logisk og velje måtar å løyse likningar på, må ein fyrst kunne fakta og ferdigheiter for likningar, og ein må ha forståing for det ein gjer (Sfard, 2008). For at ein skal kunne vere kreativ er det altså ein føresetnad at ein må vite noko om det ein held på med. Dersom ein skal vere kreativ i vegval når ein køyrer bil må ein kunne å køyre bil, og ein må også kunne trafikkreglane.

I matematikk kan ein løyse problem på ulike måtar. Då er det viktig å ha godt utvikla omgrepsstrukturar (Brekke, 2002), slik at ein kan nytte andre delar av eit omgrep. Ein må ha generelle strategiar (Brekke, 2002) på plass. Til dømes kan ein løyse ei likning grafisk i staden for algebraisk. Elevane fekk ikkje undervising i dette då eg var på besøk. Det var heller ikkje nemnt spesielt i læreboka i samband med likningane (Sandvold et al., 2009). I studien eg nemnde i 2.3.5, der lærarane gjekk over til å undervise likningar som to funksjonar (Chazan, Yerushalmy & Leikin, 2008), viste det seg at omgrepsstrukturen til lærarane vart endra. Dei såg ikkje so snevert på likningar lenger. Dersom lærarane har godt utvikla omgrepsstrukturar, vil dette kanskje føre til at elevane vert meir kreative og kan bruke ulike løysingsmetodar.

Ein elev som skulle løyse likninga med brøk i spørjeundersøkinga, hadde ikkje ferdigheitene for å kunne lage ein samnemnar på enklast muleg måte. Men denne eleven leverte ikkje blankt likevel. Han utvida brøkane og laga eit stort og komplisert uttrykk. Dette kunne ha ført fram dersom eleven ikkje hadde gjort reknefeil. Dersom han hadde utvikla ferdigheitene i større grad kunne kanskje kreativiteten ha vorte brukt til noko meir konstruktivt enn å gjere reknestykke meir kompliserte enn det dei treng å vere.

4.5 Hovudskilnadane på dei som forstår og dei andre

I dette avsnittet vil eg oppsummere det eg har diskutert i dei førre avsnitta, og prøve å i større grad setje *dei som forstår* opp mot *dei andre,* for å finne skilnadar på det *dei som forstår* veit om likningar i forhold til *dei andre*. Eg vil påpeike at *dei andre* er ei samansett gruppe. Det er store variasjonar på det matematikkfaglege nivået til elevane som vert sitert som *dei andre*. Likevel synest eg at det er ryddigast å omtale *dei andre* som ei gruppe når eg viser til, eller siterar ein elev som har eit sitat som høyrer til i denne gruppa.

Dei som forstår likningar kan faktakunnskap slik at dei forstår kva ei likning vil seie. Notasjonane som vert brukt i likningar er altså ikkje noko problem. Nokre av *dei andre* har problem med å trekke ut meiningsinnhaldet i ei likning, å tolke symbola. Andre forstår nokre notasjonar, men dei klarer ikkje å trekke ut meininga i ukjende samanhengar. Døme på dette er eleven som visste korleis han skulle handsame *2x* då han løyste ei likning, men då han skulle setje inn svaret for *x* i likninga, visste han ikkje kva *2x* ville seie.

Mange av dei som fokuserar på reglar, har problem med å hugse framgangsmåtar. Dei blandar prosedyrar, og synest at det er lettare når dei har visse punkt dei kan fylgje. Brøk er ein del av likningar som gjer at det vert vanskelegare. Då er det fleire prosedyrar å blande inn, og brøk har nye reglar for likningar enn elles. For dei som har automatisert ferdigheitene, verkar framgangsmåtane ”logiske”. Dei ”ser” kva dei skal gjere når dei ser ei likning. Sidan metodane ”kjem naturleg” når dei løyser likningar kan dei konsentrere seg om andre områder av problemet. Om ein har forståing for det ein gjer treng ein ikkje å hugse dei ulike reglane. Ein kan tenke logisk og bruke matematikk til å løyse problem.

I uttalingar om kva likningar er, har mange fokus på prosedyrar og reglar. Ofte verkar det som at matematikken ikkje vert teke med når prosedyrar vert skildra. Det er fokus på reglar, men ikkje på kva reglane kjem av. Fleire av *dei andre* er usikre på det dei gjer når dei løyser likningar, og prøvar seg fram eller ”tippar”. Som ein elev skreiv: ″Noen ganger får jeg til og andre ganger ikke. Jeg vet ikke [hva som er vanskelig]”. Det verkar som eleven synest at det er litt tilfeldig om svaret vert rett eller ikkje. Det er annleis for dei som har forstått matematikken bak framgangsmåtane. Dei veit kva det vil seie å "flytte over", at ein eigentleg utnyttar eigenskapen likskap, og kan gjere dei same operasjonane på begge sider og framleis ha likskap. Ein som forstår har sett viktigheita av likskapsteiknet. Om ein forstår omgrepet likningar kan ein også sjølv avgjere om ein har klart å løyse likningar.

Mange ser ikkje likningar i samanheng med andre område av matematikken, til dømes grafar og funksjonar. Dei ser ikkje forholdet mellom "ukjent" eller "variabel", og kva dei vil seie i ulike samanhengar. *Dei som forstår,* har truleg betre utvikla omgrepsstrukturar og ser desse samanhengane.

Mange av *dei andre* tenker at likningar fyrst og fremst er oppstilte reknestykke som skal løysast på ein viss måte. *Dei som forstår* ser gjerne på likningar som ein løysingsmåte for eit problem. Dei greier å abstrahere eit problem, og stille opp ei likning som reiskap for å løyse problemet.

Når det gjeld kreativitet er dette noko som truleg fell lettare for *dei som forstår*. Dei som fokuserar på reglar har vanskeleg for å sjå forbi desse. Ein elev skriv at ”alt i matte har egne regler og måter i bli løst på”. Det kan verke som denne eleven har vanskeleg for å gje rom for matematisk kreativitet. Men om ein ikkje fokuserar på reglane, er det større rom for kreativitet. Dei som har fokus på å finne måtar å løyse ting på, tenker ikkje i so stor grad på å fylgje reglane. Om ein veit rekkevidda av omgrep, og også avgrensingane av desse, kan ein i større grad utfolde seg og vere kreativ.

Det eg har funne i denne studien om problem med likningar, er ikkje ulikt tidlegare forsking. Mange elevar har problem med likningar. Når det gjeld undervising er det fokus på ferdigheiter, og elevane fokuserar også på dette (Sfard, 2008, French, 2002 og Brekke, 2002). Fokusering på ferdigheiter fører ofte til at ein blandar reglar (Brekke, 2002). Ein kan ha gode ferdigheiter, men mangle forståing (Brekke, 2002 og Sfard, 2008). Mange forstår ikkje viktigheita av likskapsteiknet i samband med likningar (Nogueira de Lima & Tall, 2006 og Pind, 2009). Når elevar omtalar kva likningar er, fokuserar dei på ferdigheita å løyse likningar framfor bruken av dei (Nogueira de Lima & Tall, 2006). Det er også vanskeleg å seie kva ei likning er, og å setje fingeren på kva som er skilnadar på variable og ukjende (Usiskin, 1999 og Attorps & Tossavainen, 2009).

Om ein spegelvender det eg nettopp har vist til, kan ein seie at forståing kan føre til at ein ikkje blandar reglar. Om ein har forståing kan ein fokusere mindre på reglar og kan sjå nytten av likskapsteiknet. Dersom ein fokuserar mindre på reglar kan ein få auge på kva ein kan nytte matematikken til (Brekke, 2002). Å ha forståing, å kunne fakta og ha ferdigheiter er føresetnader for å vere kreativ i matematikk (Sfard, 2008).

5 Diskusjon

5.1 Kommunikasjon og språk

I undersøkninga mi konsentrerte eg meg berre om elevane, og ikkje om korleis lærarane kommuniserte matematikk. Likevel viste det seg at måten læraren kommuniserer matematikk på er ein vesentleg del av elevane sine førestillingar om kva ei likning er. Språket som vert brukt i samband med likningar er også med på å forme forståinga elevane får. Både gjennom teori eg las, og ved å observere og snakke med elevane og lærarane oppdaga eg dette. Eg vil difor bruke litt plass på å diskutere kommunikasjon og språk når det gjeld likningar.

Kommunikasjon når det gjeld matematikkfaget er viktig. To av dei 5 grunnleggande ferdigheitene i læreplanen er å kunne uttrykkje seg skriftleg og munnleg (KD, 2006). Ser me på Niss & Højgaard Jensen (2002) sine 8 kompetansar er det fleire som går på kommunikasjon. Dei fire fyrste har overskrifta å kunne spørje og svare i og med matematikk, men dei fire neste har overskrifta å kunne handtere matematisk språk og reiskap. Her er tre ord som ofte vert assosierte med kommunikasjon: Spørje, svare og språk. Måten me kommuniserer matematikk på, kan vere årsaka til at elevar ikkje skjønar (Sfard, 2008). Korleis kommuniserer me kva likningar er, og kva som er viktig med likningar? Dette viser haldninga vår til matematikk. Spesielt i ei klasse som har valt praktisk matematikk er det viktig å sjå på nytteaspektet. Det står også i læreplanen at elevane skal løyse praktiske problem. Å pusle med oppgåver der målet berre er likninga i seg sjølv, er kanskje ikkje det som fangar interessa til ein elev som likar å jobbe med noko praktisk. Ein elev i utvalet mitt meinte at han aldri i heile sitt liv kom til å setje opp ei likning i dagleglivet for å løyse eit problem. Og kanskje har han rett? Men er grunnen til det at han ikkje møter problem i kvardagen der han *kan* bruke likningar, eller er det at han ikkje kan å *bruke* likningar til å løyse problem? I løpet av timen hadde han i alle fall klart å løyse to likningar, men han hadde ikkje lært kva han kunne bruke dette til.

Vil me kommunisere matematikk som nyttefag, eller som eit dannande fag? Dette har det vore diskusjon om i Noreg i mange tiår, som eg har skrive om i kapittel 2.2.2. I fylgje læreplanen som gjeld no, K-06, skal dei som vel praktisk matematikk løyse praktiske problem. Då er det nytteaspektet som bør vere framheva i arbeidet med likningar. Likevel er det fleire oppgåver i læreboka som er oppstilte likningar (Oldervoll et al., 2009, Heir et al., 2009, Andersen et al., 2009, Sandvold et al., 2009). Desse oppstilte likningane kjem også fyrst i lærebøkene, før ein ser kva dei kan brukast til. Men for at dei skal kunne bruke likningar, må ein også lære seg å løyse dei.

Det viser seg at det ofte er for mykje fokus på ferdigheit når ein underviser likningar (Brekke, 2002). Utsegner som: "Jeg skjønner ikke likninger *fordi det er vanskelig å løse de*", understrekar dette. Eleven meiner at han må lære korleis han løyser likningar for å kunne forstå. Han har eit poeng. Men dersom ein ikkje ser at ein har nytte av likningar, har ein ikkje motivasjon til å lære det. Og om ein ikkje ser djupna i omgrepet, vert det berre symbolsk rekning utan vidare innhald (French, 2002).

Når eg tenker på kva eg fokuserte mest på då eg underviste for ei gruppe elevar i utvalet mitt, var det nettopp ferdigheiter i symbolsk rekning me jobba med, i staden for å oppmuntre og legge til rette for å utvikle forståing. Men som Brekke (2002:5) skriv:

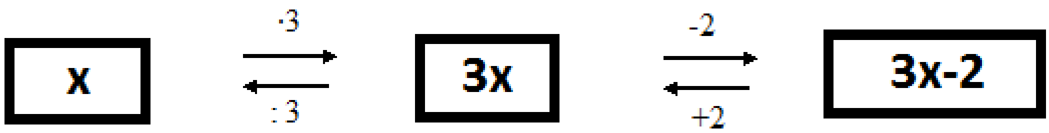
> Det er viktig for lærere å tenke gjennom hvordan arbeidet med matematikk i klasserommet påvirker elevenes tanker om hva matematikk er. Hva er det for eksempel som gjør at mange elever først og fremst ser på matematikken som en samling av regler, oppskrifter og formler?

Haldinga til elevane og lærarane til kva matematikk er, vil bestemme korleis læraren underviser faget, og korleis eleven møter lærestoffet. Lærarar som formidlar fakta og ferdigheiter har ofte ei forklarande undervising med vekt på ein eksempel-regel-metode (Brekke, 2002). Kva er det viktigaste målet med at eleven skal lære om likningar? Dersom han skal sjå nytta av likningar og korleis han kan bruke dei i praktiske problem, må han også kunne å løyse dei. Elles er det ikkje so veldig nyttig. Men i utvalet mitt verka det som om det fyrst og fremst var den abstrakte løysingsmetoden som vert forbunde med likningar.

Når ein underviser er det viktig å tenke på språkbruken, på korleis ein ordlegg seg. Er det å "flytte over" ei god formulering? Er det det ein gjer når ein løyser likningar? Og å samle *x*-ane på ei side? Tre av fire lærebøker eg undersøkte brukte desse uttrykka utan å forklare kvifor ein kan flytte over og endre forteikn (Sandvold et al., 2009, Heir et al., 2009, Andersen et al., 2006). Dei omtalte dette som reglar. Den siste boka forklarte fyrst at ein gjer same operasjon på begge sider av likskapsteiknet, og at ein kan bruke reknereglane med å flytte over ledd på grunn av dette (Oldervoll et al., 2006). Elevane eg var saman med hadde ei lærebok som ikkje forklarte dette. Ikkje alle hadde forstått kva det betyr å flytte over, eller korleis dei skulle gjere det. Som eg skreiv i kapittel 4.3.2 har elevar lært nokre frasar, men klarer ikkje å hugse kva det ville seie. Ein elev skreiv om å løyse likningar at ein skal ”flytte tall over på den andre side av erliktegnet”. Den same eleven har prøvd å løyse likningar, og då ved å samle tala på den eine sida og *x*-ane på den andre, utan å endre forteikn. Han har ikkje forstått kva han gjer. Han har rett og slett berre ”samla” *x*-ane på ei side, og tala på den andre.

Ei lærebok har endra på språkbruken frå utgåva som kom i 2006 til den nye utgåva av boka i 2009 (Sandvold et al., 2006 og Sandvold et al., 2009). I ”oppskrifta” for å løyse likningar som eg har sitert tidlegare, i 4.2.2, var det i 2006-utgåva også eit punkt som sa: ”Saml *x*-leddene på venstre side, og tallene på høyre side” (Sandvold, et al., 2006, s. 22). Dette var plassert før ”Byt forteikn når du flyttar over ledd” i oppskrifta eg har skrive i 4.2.2 (Sandvold et al., 2009, s.18). Grunnen til at det vart fjerna veit eg ikkje, men eg kan tenke meg at elevar kan verte forvirra av 2006-utgåva. Fyrst står det at ein skal samle ledda, og deretter at ein skal bytte forteikn når ein flyttar over ledd. I 2009-utgåva er ikkje uttrykket å samle ledd brukt i boka i det heile.

Å ”fjerne tal” eller ”verte kvitt” tal er også ein vanleg, men upresis uttrykksmåte som kan føre til forvirring (French, 2002). Når ein ser på ferdigheita å løyse likningar er det nettopp å verte kvitt tal ein er ute etter, og å få eit svar på forma $x = a$. Men uttrykk som det seier ikkje noko om kvifor nemnarar forsvinn når ein gongar med talet i nemnaren. Dersom ein elev skal løyse likninga$3x - 2 = 7$ er det ein vanleg feil å trekke frå 2 på begge sider, for ein skal verte kvitt 2-talet. Ein måte ein kan hindre dette på er å bruke flow diagram for å få betre forståing av det ein gjer (French, 2002).



Figur 2: Flow diagram (French, 2002, s.101)

Eit liknande døme på feil som vert gjort i samband med ”å flytte over og endre forteikn” er om ein har likningar der ein har negativ koeffisient av *x*. Til dømes vert $-2x = 8$, oppfatta som $-2 + x = 8$ og vert løyst slik: $x = 8 + 2$ (Pind, 2009) Ein flyttar over tala til ei side, og *x*-ane til den andre.

På same måten kan forståinga av ”=” verte misforstått grunna språket me brukar. Ofte vert det oppfatta som ein operasjon (Nogueira de Lima & Tall, 2006 og Pind, 2009). I staden for at ein seier$3 + 4\ er\ 7$ seier ein ofte $3 + 4\ blir\ 7$. Ein trykker på”=” på kalkulatoren for at svaret skal kome fram. Viss elevane har denne forståinga for ”=”, er det vanskeleg å skjøne kva ein gjer når ein løyser likningar. Det fører også ofte til at elevane fører oppgåvene feil når dei løyser likningar (Pind, 2009). Dette såg eg også då eg var på praksis i ungdomsskulen. Når dei reknar i fleire operasjonar fungerar likskapsteiknet som overgong til neste steg. Til dømes $3x + 15 = 27 = 27 - 15 = 12 = \frac{12}{3} = 4$. Språklege skildringar av likevekt er ein del av fundamentet for arbeidet med likningar (Pind, 2009). Lærarar må tenke over og gjere noko med språkbruk som kan føre til forvirring.

Ei anna førestilling som kan forvirre er at den ukjente alltid vert kalla *x*. Nokre elevar synest at det vert meir forvirrande viss dei skal løyse likninga for *h* eller *r* (Pind, 2009). Medan andre, som ein elev i klassa eg besøkte, syntest at det var mykje vanskelegare når ein skriv *x* og *y* i formlar der dei er vande med å bruke andre bokstavar. Dette svarer til det Usiskin (1999) skriv om ulike oppfatningar av kva ein variabel og ei likning er, som eg har skrive om i 2.1. Elevane har ulik forståing av dei ukjente i ulike typar likningar.

5.2 Praktisk problem

Kva er eit praktisk problem? Er det ei oppgåve uttrykt i tekst, eller eit problem frå kvardagslivet? Ungane i Brazil som jobba med å selje frukt og grønsaker møtte mange matematiske problem i kvardagen (Nunes, Schliemann & Carraher, 1993). Er kvardagen til norske ungdommar blotta for praktiske problem som kan matematiserast?

I læreplanen for matematikk 1P inneheld kompetansemåla under tal og algebra at elevane skal kunne ”rekne praktiske oppgåver” og ”bruke formlar som gjeld daglegliv”. Kva legg lærebokforfattarane i dette? I ei lærebok er det oppgåver der ein skal rekne på formlar for mobiltelefonabonnement og bensin til mopeden (Oldervoll et al., 2006), og dette kan nok vere røyndomsnært for fleire. Andre lærebøker har typiske ”påskenøtter”, slike som ein kanskje løyser på hytta. Døme på ei slik oppgåve er: ”Per er dobbelt så gamal som Ola. Kari er ti år eldre enn Ola. Til saman er dei 78 år. Sett opp ei likning og finn ut kor gamle dei er” (Sandvold et al., 2009, s. 19). Denne typen problem vert nok ikkje oppfatta like nært knytt til kvardagslivet som mobilabonnement og bensinprisar.

I teorikapitlet har eg skrive om utviklinga av algebra. Det starta med at personar hadde problem som skulle finnast ut av. Det gjaldt deling av jordstykke, eller arveoppgjer av pengar. I dag har ein folk til slikt, og ein gjennomsnittleg elev ved vidaregåande skule møter ikkje desse problemstillingane. Ein kan matematisere kvardagslege problem, og løyse dei nøyaktig. Men som oftast er eit overslag nøyaktig nok. Det er kanskje, som ein elev sa, berre nerdete matematikklærarspirar som set opp likningar når kakeforma har større omkrins enn den som er brukt i oppskrifta. Dunkels (1994) meiner at ein må vere bevisst på skilnaden på eit praktisk og konkret problem. Dei fleste ville nok berre ha dobla kakeoppskrifta og satsa på at det ikkje rann over, framfor å setje opp ei likning i det nemnte praktiske problemet. Det hadde vore løysinga på det praktiske problemet, ikkje å rekne ut volum av sylinder og setje opp likning. Men oppgåva med å setje opp ei liking av kakeproblematikken treng ikkje å vere dårleg av den grunn. Oppgåva er då konkret, men ikkje praktisk. Og ved å løyse konkrete problem i undervisinga kan ein lettare sjå for seg korleis ein kan løyse praktiske problem i kvardagen ved hjelp av matematikk (Dunkels, 1994).

Lærebokforfattarane har stilt opp problem. Nokre oppgåver er betre enn andre. ”I ein gymtime vel halvparten av elevane ballspel, tredelen vel styrketrening, mens resten, fire elevar, er sjuke eller har gløymt gymtøyet. Set opp ei likning og finn kor mange elevar som er med i gruppa” (Sandvold et al., 2009, s. 19). Om ein kallar dette eit praktisk problem gjer ein ikkje matematikk røydomsnært, for slike utfordingar møter ein ikkje i det vanlege livet. Vanlegvis veit ein kor mange elevar som går i klassa. Viss ikkje, er det berre å telje dei, eller finne klasselista.

Me kan lese i læreplanen at elevane skal kunne rekne praktiske oppgåver. For at dei skal kunne gjere det må dei få trening i å løyse konkrete problem i undervisinga. Elevane som har valt praktisk matematikk må kunne sjå nytta av matematikken, og må difor få gode oppgåver i undervisinga som viser dette.

6 Avslutning og konklusjon

6.1 Oppsummering

Eg vil no oppsummere det eg har funne at *dei som forstår* veit om likningar, i forsøk på å seie noko om *dei andre.*

I analysane kom det fram at *dei som forstår,* ofte har gode faktakunnskapar om, og ferdigheiter i å løyse likningar. Prosedyrane kjem naturleg, og dei ”ser” kva dei må gjere når dei skal løyse ei likning. Dei har forståing for omgrepet likningar, og treng difor ikkje å fokusere i so stor grad på reglane for å løyse desse (Brekke, 2002). Dersom dei har forstått likningar har dei også sett viktigheita av likskapsteiknet. Då kan ein avgjere om ein gjer rett når ein løyser likningar. Reglane kan også vere lettare å lære om dei har forståing for det dei gjer.

Nokre av *dei andre* i datamaterialet mitt har også gode faktakunnskapar om likningar, og har utvikla gode ferdigheiter i å løyse likningar. Men forståinga manglar. Dei veit korleis dei skal løyse ei likning, men ikkje kva dei gjer og kvifor. Dersom ein ikkje forstår det ein gjer, har ein ikkje mulegheit til å vere kreativ og finne alternative måtar å løyse problem på. Om ein ikkje har godt utvikla omgrepsstruktur kjenner ein ikkje rekkevidda til eit omgrep, og heller ikkje avgrensinga til omgrepet. Då gjer ein oftast feil om ein går utanfor ferdigheitene ein har pugga. Om elevar fokuserar på ferdigheiter framfor forståing, kan dette verte konsekvensen. Dei kjenner ikkje til andre sider av omgrepet, og evnar difor ikkje å vere kreative.

Lærarar sitt fokus på ferdigheiter og reglar fører til at språkbruken kan føre til misforståingar (French, 2002). Ein formidlar ikkje matematikken i likningar om ein til dømes brukar namn som ”flytte-bytte-regelen”. Dersom ein har fokus på ferdigheiter kan dette altså føre til at færre elevar får ferdigheiter i å løyse likningar.

Nokre elevar har vanskar med å trekke ut innhaldet av ei symbolsk likning. Dei har ikkje faktakunnskap om notasjonane. Då er det også vanskeleg å løyse ei likning. Fleire av elevane som har problem med å hugse faktakunnskap og reglar, har heller ikkje motivasjon til å lære matematikk. Om dei hadde sett nytta av å kunne å løyse likningar hadde dette truleg vore annleis (French, 2002). Elevar som har valt praktisk matematikk trivst kanskje betre med å jobbe med praktiske oppgåver, og lærer meir ved å ha noko å relatere det teoretiske til.

6.2 Dette kunne eg ha gjort annleis

I undervisinga framstilte læraren likningar som ei vekt der det heile tida var det same på kvar side av likskapsteiknet. Han gjorde dei same operasjonane på begge sidene, og viste at der framleis var likskap. I undersøkinga hadde eg eit spørsmål som eg formulerte slik: ”Kva vil det seie å flytte over når du løyser ei likning?” Eg ville gjerne vite om elevane hadde forstått kva dei eigentleg gjer når dei ”flyttar over”, at ein gjer same operasjon på begge sider av likskapsteiknet. Det var berre ein einaste elev som skreiv at det vil seie at ein ”plusser på, på begge sider eller trekker fra på begge sider” då han svarte på spørjeskjemaet. Dei andre elevane tolka heller spørsmålet som at eg ville ha skildring av framgangsmåten, at dei flytta tal frå eine sida av likskapsteiknet til andre, og endra forteikn. Det er ei mulegheit at det berre var denne eleven som hadde forstått kva ein eigentleg gjer, men det kan tenkjast at fleire elevar kunne ha svart på det eg var ute etter dersom eg hadde formulert spørsmålet annleis. Eg skulle heller ha formulert spørsmålet slik at eg spurte om kva ein *eigentleg* gjer når ein ”flytter over” når ein løyser ei likning.

Før eg laga undersøkinga skulle eg ha tenkt betre gjennom korleis eg skulle kategorisere svara. Dette hadde ført til at eg hadde tenkt igjennom spørsmåla på ein anna måte. Eg ville mellom anna ha hatt med ei oppgåve der elevane måtte bruke kreativiteten for å finne løysing, og oppmuntra til at dei skulle prøve å løyse oppgåva på ulike måtar. Dette var vanskeleg å sjå på førehand, fordi eg hadde annan føresetnad og forståing enn eg har i ettertid. Då eg laga spørjeskjemaet tenkte eg mest på kva forståing gjer med ferdigheita å løyse likningar, og ikkje på kva det gjer med kreativitet og synet på bruk av likningar. Sjølv om eg hadde tenkt gjennom kva eg ville med kvart spørsmål, viste det seg at det var vanskeleg å kategorisere data etterpå. Det var etter at eg hadde utført undersøkinga at eg fann ut at kreativitet var noko som måtte seiast noko om. Likningane i spørjeundersøkinga var oppstilte og eg hadde lagt til at elevane måtte vise utrekning. Dette førte kanskje til at oppgåva vart endå meir lukka med tanke på framgangsmåte. Dersom eg hadde hatt med eit meir ope problem kunne elevane ha valt framgangsmåte sjølv og kanskje fått utfolda kreativiteten sin. Eg hadde også fått sett om elevane kunne abstrahere konkrete problem. Kanskje hadde eg også fått fleire svar frå dei som ikkje hadde fakta om og ferdigheiter i å løyse likningar. Dei kunne ha fått vist at dei kunne ha løyst problem, berre dei hadde forstått spørsmålet. I tillegg ville eg ha hatt med eit direkte spørsmål om kreativitet for å få elevane sine uttalingar om dette. Eg ville også ha hatt med fleire spørsmål som avdekka omgrepsstruktur kring likningar. Då kunne eg i større grad ha sett om eleven såg samanhengar til andre omgrep.

Eg kunne ha gjennomført spørjeundersøkinga tidlegare. Det var ei stund sidan elevane hadde hatt undervising om likningar, og kanskje hadde fleire løyst likningane dersom dei hadde dei friskt i minnet. Det var i nokre av elevane som berre nesten hugsa korleis dei skulle gjere det. På ei anna side hadde dei lært meir om funksjonar i løpet av denne tida. Dette gav kanskje ei vidare forståing av omgrepa ukjent og variabel, og elevane visste kanskje meir om likningar no.

6.3 Vegen vidare

6.3.1 Spørsmål som hadde vore interessant å funne svar på

I denne studien har eg prøvd å finne ut kva nokre veit om likningar og dermed kva andre ikkje veit når det gjeld likningar. Målet med dette er å kunne hjelpe dei som har problem med å lære meir. Det hadde vore interessant å studere nettopp dette. Korleis kan ein på best muleg måte hjelpe dei som har problem med likningar? Er forståinga av symbolsk matematikk avgjerande? Korleis kan ein hjelpe elevar til å lære seg å tolke symbolske utsegner?

Kreativitet

Gjennom denne studien har matematisk kreativitet vorte noko eg har tenkt mykje på. Det hadde vore interessant å sett meir på dette i forhold til matematikk. Er det slik at dei som elles er kreative også er kreative innanfor matematikk? Synest elevane sjølve at dei kan vere kreative innanfor matematikkfaget? Er det eit mål at dei skal vere det, eller bør dei halde seg til reglar og prosedyrar? Korleis kan ein oppmuntre til kreativitet, og legge til rette for at elevar utviklar denne innanfor matematikkfaget?

Motivasjon gjennom praktiske oppgåver

I observasjon i klasserommet opplevde eg at mange elevar var lite motiverte for å gjere ein innsats i matematikkfaget. Det hadde vore interessant å gjort ein studie på korleis ein kan motivere elevar til å prøve å forstå likningar. Er det meir interessant om ein får til å lage gode praktiske oppgåver eller konkrete problem? Ser dei nytta av å kunne å løyse likningar då? Og lærer dei å løyse likningar viss dei jobbar med slike oppgåver?

Fører forståing til ferdigheiter?
I den samanheng hadde også vore interessant å prøvt ut ulike undervisingsopplegg om likningar der forståing var i fokus, og funne ut om dette fører til at elevane også får betre ferdigheiter i å løyse likningar.

6.3.2 Refleksjonar om å undervise i likningar

Eg har fått mange tankar i løpet av arbeidet med denne oppgåva. Desse kan eg kan ta med meg inn i undervisingskvardagen når eg startar som matematikklærar. Gjennom det eg har funne i undersøkinga ser eg behovet for å legge opp undervisinga på varierte måtar og håper det vil føre til at elevane veit og forstår meir om likningar. Dette gjeld både for likningar og andre emne i matematikk.

6.4 Konklusjon

Dei som forstår likningar skjønar matematikken bak prosedyrane, og det vert difor enklare for dei å vite kva dei skal gjere når dei skal løyse ei likning. Dersom ein ikkje forstår viktigheita av likskapsteiknet, og kvifor det er lov å ”flytte over og skifte forteikn”, må prosedyrane puggast. Då er det vanskelegare å hugse kva ein skal gjere.

Om ein kan fakta, og har ferdigheiter og forståing, er det høve til å vere matematisk kreativ. Dersom ein kjenner mulegheiter og avgrensingar til omgrep kan ein vere meir sjølvstendig i problemløysing. Ein kan sjå nytta av å kunne å løyse likningar, og bruke dette i kvardagslivet.

7 Litteratur

Alver, B.G. & Øyen, Ø (1997). *Forskningsetikk i forskerhverdag. Vurderinger og praksis.* Oslo: Tano Aschehoug

Andersen, T., Aven, A. G., Natvig, B., Jasper, P. & Berg, J. (2006). *Giga matematikk vg1P.* Oslo: N. W. Damm & Søn AS

Attorps, I. & Tossavainen, T. (2009). Is there always truth in equation? I: Winsløw, C. (red) *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings from NORMA08 in Copenhagen, April 21-April 25, 2008,* s. 143-149. Rotterdam: Sense Publishers

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2003). Why is modeling not included in the teaching of algebra at secondary school? 3d Conference of the European Research in Mathematics *Education – Bellaria 2003*

Brekke, G. (1998). *Hva i all verden kan elevene i matematikk? Oppgaver med resultater og kommentarer utgår fra prosjektet Third International Mathematics an Science Study (TIMSS)* Oslo: Universitetsforlaget.

Brekke, G. (2002). *Kartlegging av matematikkforståelse. Introduksjon til diagnostisk undervisning.* Oslo: Læringssenteret

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathâematiques, 1970-1990* Dordrecht Boston : Kluwer Academic Publishers

Chazan, D. & Yerushalmy, M. (2003). On Appreciating the Cognitive Complexity of School Algebra: Reasearch om Algebra Learning and Directions of Curricular Change. I J. Kilpatrick, D. Schifter, & G. Martin, *A Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics*(s.123-135). Reston: NCTM.

Chazan, D., Yerushalmy, M.& Leikin, R. (2008). An analytic conception of equation and teachers' views of school algebra. *Journal of Mathematical Behavior,* vol.27, issue 2 (s. 87–100).

Dunkels, A. (1994). Varför er pojkar lika rädda för matematikk som flickor? I A. Dunkels, G.

Brandell, A. Liinanki & A. Wallin (red.) *Kvinnor och Matematik. Konferens vid Högskolan i Luleå 13.-16. Juni 1993.* Högskolan i Luleå, s. 40-55

Eliasson, A. (2002). *Kvantitativ metod från början.* Lund: Studentlitteratur

French, D. (2002). *Teaching and learning algebra.* London: Continuum

Gjone, G. (1994, august). *Matematikkundervisingen i etterkrigstidens enhetsskole –belysning av de kulturelle og demokratiske perspektiver.* Upublisert manuskrift fra foredrag holdt på Norsk forskersymposium, Island. Revidert september 1994.

Grevholm, B. (2005). Kognitiva verktyg för lärande i matematikk – tankekartor och begreppskartor. *Tangenten,* 1/2005, s 22-29

Grønmo, S (1996). Forholdet mellom kvalitative og kvantitative tilnærminger i samfunnsforskningen I: Holter, H & Kalleberg, R (red.). *Kvalitative metoder i samfunnsforskning*. Oslo: Universitetsforlaget.

Guba, E.G. & Lincoln, Y. S (2005). Controversies, Contradictions, Confluences. I N. K. Denzin & Y.S. Lincoln (Red.), *The sage handbook of qualitative reaserch, third edition*.California: Sage Publications.

Hagen, M.B., Carlsson, S., Hake, K. B. & Öberg, B. (2006). *Tetra 9, matematikk for ungdomstrinnet.* Oslo: Det norske samlaget

Heir, O., Erstad, G., Borgan, Ø., Engeseth, J. & Moe, H. (2009). *Matematikk 1P.* Oslo: H. Aschehoug & Co

Hjardar, E. & Pedersen, J.E. (2006). *Faktor 1 Grunnbok, matematikk for ungdomstrinnet* Oslo: J.W. Cappelens forlag AS

Hundeide, K. (1985). *Piaget i skolen,* Oslo: J.W. Cappelens forlag AS

Katz, V. J. & Barton, B. (2006). Stages in the history of algebra with implications for teaching *i Educational studies in mathematics Vol. 66, no. 2.* Dordrecht: Springer Netherlands

KD, Kunnskapsdepartementet, (2006). Kunnskapsløftet. Læreplan i matematikk fellesfag.

Lasta ned 28.01.10 frå http://www.udir.no/grep/Lareplan/?laereplanid=994153

Kleve, B. & Tellefsen, H.K. (2009). Stegmodellen i matematikk, Vurdering for læring. *Tangenten,* 1/2009, s 11-17

Kleven, T. A. (2002). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode. En hjelp til tolking og vurdering.* Oslo: Unipub forlag

KU, Kirke- og utdanningsdepartementet, (1987). *Mønsterplan for grunnskolen M87,* Oslo: Aschehoug

KUF, Kirke-, undervisnings- og forskningsdepartementet, (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen. Matematikk.* Oslo: Aschehoug

Kvale, S & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju.* Oslo: Gyldendal Akademisk

Lakoff, G. & Núñez, R.E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic books

NESH, Den nasjonale forkningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora. (1994). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, jus og humaniora: Vedtatt 6.desember 1993.* Oslo: Den nasjonale komiteen for samfunnsvitenskap og humaniora

Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (2002). Kompetencer og matematikklæring. Ideer og inspirasjon til udvikling av matematikundervisning i Danmark. I *Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie* nr. 18 (Del II s. 37-72). København: Undervisningsministeriet.

Nogueira de Lima, R. & Tall, D.(2006). The concept of equations: What have students met before? I *PME30 vol. 4 no.31 s.233-240* Prague: Charles University, Faculty of Education

NSD, Norsk samfunnsvitenskaplig datatjeneste. (2009). Lasta ned 20.10.09 frå http://www.nsd.uib.no/personvern/forsk_stud/begreper.html

Nunes, T, Schliemann, A. D. & Carraher, D. W. (1994). *Street mathematics and school mathematics,* Cambridge: Cambridge University Press

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A. & Hanisch, F. (2006). *Sinus 1P, grunnbok i matematikk for Vg1*. Oslo: J. W. Cappelens Forlag A.S

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Hanisch, F. & Hals, S. (2009). *Sinus 1P, grunnbok i matematikk for Vg1*. Oslo: Cappelens Damm A.S.

Pind, P. (2009). *Matematik for alle. Håndbog i matematikundervisning*. Skødstrup: Forlaget Pind og Bjerre

Postholm, M.B. (2005). *Kvalitativ metode. En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier.* Oslo: Universitetsforlaget

Sandvold, K. E., Øgrim, S., Flakstad, H., Bakken, T., Pettersen, B. & Skrindo, K. (2006). *Sigma matematikk, 1P studieforberedende.* Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS

Sandvold, K. E., Øgrim, S., Flakstad, H., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Thorstensen, A. & Thorstensen, R. (2009). *Sigma matematikk, 1P studieforberedende.* Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating, Human Development, the Growth of Discourses and Mathematizing,* Cambridge: Cambridge University Press

Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity i *The Mathematics Educator Vol. 14, No. 1,* Dordrecht: Springer Netherlands

Thorvaldsen, S. (2002). *Matematisk kulturhistorie,* Tromsø: Eureka forlag

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. I B. Moses (Red.), *Algebraic Thinking, Grades K–12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications* (s. 7–13). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Appendix

1. Undersøking til elevane
2. Elevsvar på undersøking

Spørjeundersøking om likningar Anonym

1. *"You do not really understand something unless you can explain it to your grandmother."* –Albert Einstein.

   Korleis vil du forklare kva ei likning er?

2. 10+a = 10+b
   - ☐ Dette kan vere sant fordi:
   - ☐ Dette er aldri sant fordi:
   - ☐ Dette er alltid sant fordi:

3. Løys likninga og VIS UTREKNING:

   $2x+7=19-4x$

4. Løys likninga OG VIS UTREKNING:

   $\frac{2x}{8}+\frac{3x}{4}=\frac{x}{2}+2$

5. Løys likninga OG VIS UTREKNING:
   $3(x-2)=4-(x-2)$

6. Meiner du at å løyse likningar er å følgje ei oppskrift? Kvifor?

7. Kva vil det seie å ”flytte over” når du løyser ei likning?

8. Synest du at likningar er eit vanskeleg tema i matematikkfaget? Kva er vanskeleg?

Nr 1-6 har ikkje klart å løyse nokre av dei tre likningane
Nr 7-10 har klart den fyrste, men ikkje dei to neste
Nr 11 har klart fyrste og å rekne med brøk
Nr 12-14 har klart fyrste og parentesoppgåve
Nr 15-16 har klart alle tre oppgåvene.

Spørsmål 1: Korleis vil du forklare kva ei likning er?

Svar:

1. ei likning er måten tall er satt opp for å finne svaret
2. –
3. Det er et regnestykke med x,y eller andre bokstaver. Og med paranteser. Det er vanskelig...
4. Det vet ikke jeg ass
5. En ligning er en måte å sette opp en utregning på hvor en eller flere faktorer er ukjent
6. Å regne ut ei likning er å regne med ukjente tall for å løse den må mann finne det ukjente som for eksempel x og y, det er egentlig tall som gjemmer seg bak de
7. ane ikke
8. en likning er ofte med bokstaver og tall
9. Ei likning er et regnestykke der målet er å finne en ukjent. Ordet likning heter det fordi det er like mye verdier på begge sider av er lik.
10. En ligning er en måte å finne et ukjent tall på. Ved at vi bruker bokstaver der vi ikke vet hva svaret er kan vi løse reinestykket.
11. Vet ikke hvordan jeg skal forklare det med ord.
12. en ligning forteller oss at to uttrykk er like
13. Ei ligning er et regnestykke der en eller flere av leddene er ukjente. De erstattes gjerne med en bokstav.
14. En likning er et problem med en ukjent som man vil definere.
15. Likning har alltid = i seg og man må flytte x-ene over til den ene siden og de ”rene” tallene over til den andre siden. Eller for eksempel b istedenfor x. man må skille x,b,a, hele tiden for seg selv.
16. En likning er en måte å finne ut hva det ukjente er, uten å forandre på regnestykket. Altså er det mindre forvirrende, for man trenger ikke stokke om på ting i hodet.

Spørsmål 2: 10+a = 10+b
Tre svaralternativ: Dette kan vere/er aldri/er alltid sant fordi:

Svar:

1. Aldri sant fordi A og B er variabler, vi vet ikkje hva de er, men vi vet at det ikke er det samme
2. –
3. Kan vere sant fordi a og b kan være det samme
4. Kan vere sant fordi både a og b kan bety det samme
5. Kan vere sant fordi selv om a og b i utgangspunktet er forskjellige så kan a=10 og b=10
6. –
7. Kan vere sant fordi
8. Aldri sant fordi a blir ikke til b
9. –
10. Aldri sant fordi a og b er ikke samme tallet
11. Kan vere sant fordi a og b har samme verdi
12. Kan vere sant fordi det kan vere en "oppskrift"
13. Allid sant fordi a og b ikke er det samme med mindre b er a^2 eller lignende, men det er bare unødvendig
14. Aldri sant fordi a og b ikke er same tall
15. Alltd sant fordi det er tall på hver side av =tegnet
16. Kan vere sant fordi vi vet ikke verdiene av a og b. De kan ha samme, men det er litt teit å skrive det.

Spørsmål 6: Meiner du at å løyse likningar er å følgje ei oppskrift? Kvifor?

Svar:

1. Fordi man må gjøre det på riktig måte
2. Du kan jo ikke løse en likning uten oppskrift!
3. Vet ikke for jeg har ikke lært meg det enda
4. det kan så dåg væra men itje tru så meget meira en som så
5. Ja, på sett og vis. Det ville i alle fall forklart hvorfor jeg er like dårlig på kjøkkenet som i matematikk.
6. Ja, er ikke så flink i matte men når man følger en oppskrift er det lettere å huske hva man skal gjøre med alle x'ene og y'ene
7. nei
8. Æ vet ikke
9. Fordi du må følge rette "punkt" får å kunne løse ei likning. F.eks: om du tar + før paranteser, blir svaret feil.
10. Ja, fordi alt i matte har egne regler og måter å bli løst på…
11. Ja først regner du paranteser, deretter flytter du dem over til min side
12. Ja, fordi det er alltid en regel du må huske på
13. Det er ei oppskrift fordi det er visse måter du skal regne det ut på. Først setter du det leddet over dit, så trekker du den fra…osv. Det er lettest å følge oppskriften, men skal du lage en oppskrift selv må du prøve selv og det er ikke alltid maten smaker like godt når du ordner det selv:)
14. På en måte kan man vel si det, men jeg tenker ikke på det mens jeg løser ligninger. Jeg flytt og bytt metoden kommer naturlig når jeg regner ligninger og de føles logiske når jeg ser på dem. (Mens konstruksjon kan bli hva som helst på en måte)
15. Ja, man må alltid fordele de "rene" tallene på ene siden og de "bokstav"tallene på den andre siden.
16. Jeg går ut i fra at det er litt som en oppskrift, i og med at man må gjøre ting i en spesiell rekkefølge, men samtidig er det ikke sånn, for det er ikke alltid man må gjøre alt i oppskriften. Jeg synes det er mer som en hinderløype der man må finne den riktige veien med de riktige utfordringene.

Spørsmål 7: Kva vil det seie å ”flytte over” når du løyser ei likning? (Dårleg stilt spørsmål. Burde heller ha spurt kva ein egentlig gjer når ein gjer det ein kallar å ”flytte over”).

Svar:

1. flytte tall over på den andre side av ”er lik”tegnet
2. + blir – og – blir +
3. å flytte x’en over til ei sie tror jeg…
4. –
5. Å flytte fra den ene siden av likhetstegnet til det andre
6. At man flytter et tall (x) over på den andre siden, for å få korrekt svar
7. ?
8. å flytte over et tall til andre siden av erliktegnet.
9. Å flytte et tall, eller den kjente over på andre siden av erlik
10. Å flytte over er en måte å sammle enkeltall og x (osv) for seg. Du må alltid skifte fortegn på den som skifter side.
11. Det vil si at man flytter x-verdier til en side og normal verdier til den andre
12. At plusser på, på begge sider eller trekker fra på begge sider.
13. Du flytter den over for å få samlet alle ukjente på en side, og alle kjente på den andre.
14. Du tar vekk like mye som du gir den andre siden av erlikhetstegnet på en måte
15. Det vil si at du flytter over ett tall og skifter fortegn + = -, - = +
16. Et ledd hopper over (u)likhetstegnet og skifter fortegn på veien. Skifter liksom klær.

Spørsmål 8: Synest du at likningar er eit vanskeleg tema i matematikkfaget? Kva er vanskeleg?

Svar:

1. Litt. Gjør det ikke alltid riktig og man glemmer eller mikser måtene å løse dem på
2. å huske formlene fra gang til gang e umuli…
3. Jeg skjønner ikke likninger fordi det er vanskelig å løse de.
4. Kan du virkelig sette deg i dispossisjon til å forvente at jeg skal være erlig og seriøs til dette?
5. Ja. Dette fordi jeg er usikker på reglene for omtrent alt i ligninger. Spesiellt ved bruk av +,- osv. samt oppheving av parantesen.
6. Ja, det er litt vanskelig å huske alle reglene men man får lett dreisen på det.
7. –
8. Nei, egentlig ikke, men når det begynner med deling og store likninger ja.
9. Det spørs. Noen ganger får jeg til og andre ganger ikke. Jeg vet ikke.
10. Jeg synes det er vanskelig fordi alle reglene ikke vil sette seg i hodet.
11. De e ikke vanskelig
12. Synes ikke det er så vanskelig noen kan være vanskelig, Brøk
13. Synes det er noe av det letteste vi har! Men ikke når det er brøk i det. Da blir det mye vanskeligere.
14. Nei, egentlig ikke. Likninger er det som er artig å gjøre innenfor matte i min mening. Mange syns det er rart, men jeg syns at konstruksjon er vanskligere enn likninger. Glemmer fort regelen for likninger med brøk, men skal nok huske det en dag.
15. Synes noe er lett. Hvis man skjønner flyttingen og at x-ene skal være på den ene siden og ”rene” på den andre er den enkelt.
16. Likninger er vanskelige til man plutselig skjønner sammenhengen. Jeg ”husker ikke oppskriften”, jeg ser hva jeg må gjøre når jeg ser på likningen. Man må tenke logisk, det er jo sånn man løser ting.