

Forvaltning av oljefondet – investeringsforholdet mellom aksjer og obligasjoner på lang sikt

av

Lars Foss Tveiten



Masteroppgave i Økonomisk analyse
Studieretning Økonomi og administrasjon
30 studiepoeng

Handelshøgskolen i Tromsø
Universitetet i Tromsø
Mai 2010

Forord

Denne studien er gjort som en avsluttende del av masterstudiet i økonomi og administrasjon ved Handelshøgskolen i Tromsø, Universitetet i Tromsø, og utgjør 30 studiepoeng.

Valget av fagområde for denne masteroppgaven var aldri noe problem. Helt fra tiden før jeg valgte studium, har jeg vært fascinert av finansmarkedet, en interesse som bare har økt gjennom studiene. Denne oppgaven var en unik mulighet til å kunne fordype seg i et spennende finansielt tema. At jeg har vært så heldig å være økonomistudent under den største resesjonen siden 30-tallet, vekket min interesse for Statens pensjonsfond utland. Det var fascinerende å se hvordan fondet taklet krisen og tiden etter. Valget om å skrive om fondets investeringsstrategi var derfor enkelt.

Gjennomføringen av denne oppgaven har vært meget interessant, og læringskurven har vært bratt. Det har dukket opp problemer underveis, men disse har blitt løst i samarbeid med min veileder. Jeg vil derfor rette en stor takk til førsteamanuensis ved Handelshøgskolen i Tromsø, Espen Sirnes, som har bistått meg i utarbeidelsen av denne oppgaven, og vært den kritiske røsten. Hans hjelp har vært uvurderlig. Jeg vil også benytte anledningen til å takke Øystein Myrland og Iñaki Rodriguez Longarela for gode innspill underveis.

Sist, men ikke minst, vil jeg benytte anledningen til å takke Universitetet i Tromsø for 5 flotte år.

Tusen takk alle sammen!

Tromsø, 14. mai 2010

Lars Foss Tveiten

Innholdsfortegnelse

Forord.....	iii
Figurliste.....	vii
Tabelliste.....	viii
Sammendrag.....	1
1 Innledning.....	3
1.1 Aktualitet.....	3
1.2 Oppgavens problemstilling.....	4
1.3 Oppgavens struktur.....	5
2 Statens pensjonsfond utland.....	6
2.1 SPU's strategi.....	6
2.2 60/40 aksjer & obligasjoner.....	7
2.3 Referanseporteføljen.....	9
2.4 Aktiv forvaltning.....	10
2.5 Forvalter og markedslikviditet.....	10
2.6 Ansvarlige investeringer.....	10
2.7 Avkastningen i fondet.....	11
2.8 Fondets størrelse.....	16
2.9 Norges Banks prognoser for fondet.....	17
3 Teori.....	19
3.1 The Efficient Market Hypothesis / Markedseffisiens.....	19
3.2 Diversifisering.....	20
3.3 Risikopremie.....	21
3.4 Risiko.....	21
3.5 Risiko ved lang sikt.....	24
3.6 Risikoaversjon.....	25
3.6.1 Absolute Risk Aversion / Absolutt risikoaversjon (ARA).....	26

3.6.2	Relative risk aversion/ Relativ risikoaversjon (RRA).....	27
3.7	Ulike typer obligasjoner	28
3.7.1	Obligasjonslån med renteregulering.....	29
3.7.2	Obligasjonslån med særlig sikkerhet.....	29
3.7.3	Obligasjonslån med innløsningsrett	29
3.7.4	Konvertible obligasjoner	29
3.7.5	Indekserte obligasjoner	29
3.8	Optimal portefølje.....	30
3.9	Kritikk av optimeringsmodellen	34
3.9.1	Konkurrerende metoder for å finne beste investeringsforhold.....	35
3.10	Stasjonære og ikke-stasjonære variabler.....	36
3.11	Kvadratiske problemer og optimering	37
4	Metode.....	39
4.1	Optimal portefølje.....	39
4.1.1	Svakheter	46
4.2	Datamaterialet.....	47
4.2.1	Moody's Aaa-graderte industrielle obligasjoner	48
4.2.2	Amerikanske statsobligasjoner med løpetid på 10 år.....	48
4.2.3	THE WORLD INDEX Standard (Large+Mid Cap)	48
4.3	Stasjonære og ikke-stasjonære variabler	49
4.3.1	Dickey-Fuller test 1 (med konstant, ingen trend).....	49
4.4	Programmering	50
4.4.1	Maple 13.....	50
4.4.2	Shazam versjon 10	50
5	Analyse/Resultater	51
5.1	Analyse av stasjonærhet for dataserier	51
5.1.1	Moody's Aaa-graderte industrielle obligasjoner	51

5.1.2	Amerikanske statsobligasjoner med løpetid på 10 år.....	52
5.1.3	THE WORLD INDEX Standard (Large+Mid Cap)	52
5.2	Plot av dataserier	53
5.3	Konfidensintervall av forventet verdi.....	54
5.4	Risikoaversjonsparameteren.....	56
5.5	Statens pensjonsfond utland	59
5.6	De ulike aktiva.....	60
5.6.1	Moody's AAA graderte industrielle obligasjoner	61
5.6.2	Amerikanske statsobligasjoner med 10 år løpetid.....	61
5.6.3	MSCI THE WORLD INDEX Standard (Large+Mid Cap).....	62
6	Diskusjon.....	63
6.1	Den optimale porteføljen med gitt risikoaversjonsparameter.....	63
6.2	Industrielle obligasjoner eller statsobligasjoner?	64
6.3	Konfidensintervallene.....	65
6.4	Langsiktig investeringer	66
6.5	Statens pensjonsfond utlands risikoeksponering	67
6.6	Modellen.....	68
6.7	Konklusjon og anbefalinger.....	69
6.8	Forslag til videre forskning.....	69
7	Referanseliste	71
8	Websidereferanser.....	74
9	Vedlegg	75
9.1	Appendiks 1	75
9.2	Appendiks 2.....	76
9.3	Appendiks 3.....	76

Figurliste

Figur 1 Endring av samlet realavkastning ved 40 til 50 prosent og 40 til 60 prosent aksjeandel (Finansdepartementet, 2006, s. 124)	7
Figur 2 Fordeling på aktivaklasser. Prosent av fondet (NBIM, 2010, s. 19).	8
Figur 3 Årlig avkastning fra 1998-2010 (NBIM, 2010, s. 16)	13
Figur 4 Markedsverdi ved årsslutt 1998 – 2009. Milliarder kroner (NBIM, 2010, s. 14)	13
Figur 5 Risiko i referanseporteføljer Statens pensjonsfond utland (Finansdepartementet, 2009b, s. 146)	15
Figur 6 Absolutt volatilitet. Prosent og milliarder kroner (NBIM, 2010, s. 38)	16
Figur 7 Eiendeler i aksjemarkeder 1998-2010. Prosentandel av markedskapitaliseringen til FTSE All-World-indeksen (NBIM, 2010, s. 19)	16
Figur 8 Fondets eierandeler i rentemarkedene. Prosentandel av markedskapitaliseringen til Barclays-indeksen (NBIM, 2010, s. 20)	17
Figur 9 Prognose avkastning SPU (Mrd. kr.) (Finansdepartementet, 2008, s. 66)	17
Figur 10 Sammenhengen mellom antall aksjer i en likvid portefølje og porteføljens standardavvik (Ødegaard, 2006, s. 1)	22
Figur 11 Akkumulert avkastning SPU (Finansdepartementet, 2009b, s. 151)	24
Figur 12 Nyttfunksjonen til en risikoavers investor (Sirnes, u.å.-a, s. 3)	25
Figur 13 Sammenhengen mellom forventet avkastning og risiko (Bodie et al., 2009)	31
Figur 14 En investors minimum-variansfront (Bodie, Kane, & Marcus, 2009)	32
Figur 15 Optimal portefølje som en funksjon av standardavvik σ , korrelasjon og aksjeandel (Bodie et al., 2009, s. 202)	33
Figur 16 Optimal portefølje som en funksjon av standardavvik σ og forventet avkastning (Bodie et al., 2009, s. 203)	34
Figur 17 Kvadratisk optimering (Boyd & Vandenberghe, 2009)	37
Figur 18 Plott av dataserien AAANA	53
Figur 19 Plott av dataserien TCMNOMY10	53
Figur 20 Plott av dataserien MSCI World Cap	53
Figur 21 Box & Whisker plot AAANA	55
Figur 22 Box & Whisker plot TCNMOMY10	55
Figur 23 Box & Whisker plot MSCI World Index	55
Figur 24 Grafisk sammenheng mellom π og a	57

Figur 25 Sammenhengen mellom π og aktivaklasse	58
Figur 26 Optimal portefølje ved ulike π	59

Tabelliste

Tabell 1 Aktivaforordeling i prosent av investert kapital [8]	9
Tabell 2 Avkastningen i SPU. Alle tall i internasjonal valuta (NBIM, 2010, s. 17).....	12
Tabell 3 Årlig avkastning i aksjeporteføljen (NBIM, 2010, s. 27)	14
Tabell 4 Periodeavkastning i renteporteføljen (NBIM, 2010, s. 31).....	14
Tabell 5 Resultat fra Dickey-Fullertest i Shazam for AAANA	51
Tabell 6 Resultat fra Dickey-Fullertest i Shazam for TCMNOMY10.....	52
Tabell 7 Resultat fra Dickey-Fullertest i Shazam for MSCI World Cap	52
Tabell 8 90 % konfidensintervall av forventet realavkastning.....	54
Tabell 9 Sammenhengen mellom π og a	57
Tabell 10 Sammenhengen mellom π og aktivaklasse	58
Tabell 11 Varians/kovariansmatrise for 3 aktiva	60
Tabell 12 Korrelasjonsmatrise 3 aktiva.....	60
Tabell 13 Varians/kovariansmatrise for optimering med 2 aktiva.....	61
Tabell 14 Korrelasjonsmatrise 2-aktiva	61
Tabell 15 Forventet avkastning og varians for SPU (Finansdepartementet, 2009b, s. 59).....	63

Sammendrag

Statens pensjonsfond utland (SPU) er blitt et av verdens aller største fond av sitt slag, og har de siste årene vokst til svimlende 2700 milliarder norske kroner. Forvaltningen av fondet er derfor et viktig økonomisk og politisk tema. SPU investerer i dag 60 prosent av sin kapital i aksjer og resterende 40 prosent i obligasjoner av ulik type.

Som en følge av finanskrisen som inntok verden i 2008, har forvaltningen av fondet vært oppe til diskusjon. Enkelte mener at fondet er i for stor grad risikoeksponert, og mener at fondet bør investere mer penger i tryggere aktiva [2].

Denne oppgaven tar opp denne problemstillingen og analyserer hva som på lang sikt er en optimal fordeling mellom aksjer og obligasjoner. Oppgaven ser også på hva som er mest ideelt av industrielle obligasjoner og statsobligasjoner, og ikke minst hvordan disse påvirkes på lang sikt av inflasjon.

Oppgaven benytter optimal porteføljeteori med lange finansielle dataserier som er korrigert for inflasjon. Dette er gjort for å få klart frem hvor mye inflasjonen påvirker investeringer i både aksjer og obligasjoner på lang sikt. Porteføljeeoptimering er gjort i Maple 13, dataomregning gjort i Microsoft Excel og konfidensintervall og test for stasjonæritet er gjort i Shazam.

Resultatene fra analysen bekrefter at dagens strategi på mange måter er den ideelle. Forholdet mellom aksjer og obligasjoner gir en risikoeksponering som er i tråd med SPU's langsiktige forvaltningsplan. Analysen viser at det er en mulighet for at fondet ideelt sett burde redusert andelen i aksjer noe. Risikoen forbundet med langsiktige obligasjoner er tilsynelatende noe overvurdert. Imidlertid er usikkerheten knyttet opp til blant annet forventet avkastning for stor til at dette kan trekkes ut som en bastant konklusjon. Oppgaven viser også at det er en mulighet for at industrielle obligasjoner er mest egnet for langsiktige investeringer lik de SPU foretar.

Til slutt kan det nevnes at den optimale porteføljen ikke bør bestå av bare obligasjoner eller bare aksjer. Dette er et entydig resultat, og begrunnes med at den optimale porteføljen blir mer diversifisert når flere aktiva er representert.

Nøkkelord: Statens pensjonsfond, optimal portefølje, efficient market hypoteses, aksjer, obligasjoner.

1 Innledning

Statens petroleumsfond ble opprettet i 1998 som følge av de store inntektene fra oljeutvinningen på norsk sokkel (NBIM, 2010). Fondet skulle hindre store makroøkonomiske endringer (endringer i kronekurs, inflasjon osv) som følge av overskuddene fra petroleumssektoren [3]. Dette gjorde at fondet investerte all kapital i utenlandske aktiva. På den måten påvirket ikke de store oljeinntektene pengepolitikken, og heller ikke markedet for den norske kronen [3].

Den 1. januar 2006 ble Statens Pensjonsfond opprettet. Dette fondet består av Statens pensjonsfond utland og Statens pensjonsfond Norge [7]. Statens pensjonsfond utland forvaltes i dag av Norges Bank Investment Management (NBIM), mens Statens pensjonsfond Norge forvaltes av Folketrygden.

Statens pensjonsfond utland (SPU) har i likhet med det tidligere Statens petroleumsfond den funksjonen at det skjermer finans- og pengepolitikken fra svingninger i oljepris og produksjonsvolum [7].

Fondet bidrar også til at statens inntekter fra petroleumsutvinningen, holdes adskilt fra bruken, og på den måten hindrer skift i næringsstrukturen lik de man blant annet opplevde i Nederland [7]. Dette fører til at man kan opprettholde et bærekraftig næringsliv på lang sikt.

1.1 Aktualitet

SPU investerer i dag 40 % av sin kapital i statsobligasjoner med ulik varighet. Per 30. september 2009 utgjorde dette i overkant av 1019 milliarder kroner (NBIM, 2010). De resterende 60 % av oljefondets samlede kapital er investert i aksjer på ulike internasjonale markeder.

Den gjeldende investeringsstrategien ble vedtatt av Finansdepartementet i 2007 og har i ettertid blitt sett på som for spekulativt av enkelte (Bjørndal, 2009). Bakgrunnen for dette var at risikoen forbundet med aksjer er større enn hva tilfellet er for obligasjoner, som gjerne har en fast rentesats.

Imidlertid er det slik at på lang sikt øker risikoen forbundet med obligasjoner som følge av usikkerhet rundt fremtidig inflasjon. Det motsatte er tilfelle for aksjer, disse regnes som mindre risikofylte dersom investeringshorisonten er lang, noe som kommer tydelig frem i kovariansmatrisen presentert i kapittel 5.6. Dette kommer av at store midlertidige svingninger ikke nødvendigvis påvirker den fremtidige verdien på aksjene. Dette kan forklares ved at man kan unngå de tap som midlertidige kurssvingninger måtte medføre.

Diskusjonen rundt risikoeksponeringen til fondet fikk et oppsving som følge av store tap under finanskrisen i 2008 [2]. Dette medførte at det oppstod en debatt rundt forvaltningen av SPU, og ikke minst andelen kapital investert i aksjer. Debatten omfattet også den aktive forvaltningen til fondet, noe som ikke er inkludert i denne oppgaven.

Oppgaven er interessant, da det er i hele Norges befolknings interesse at forvaltningen av Statens pensjonsfond utland er mest mulig hensiktsmessig hva forventet avkastning og risikoeksponering angår.

1.2 Oppgavens problemstilling

Denne oppgaven ønsker å undersøke risikoen forbundet med aksjer og obligasjoner på lang sikt, og konstruere en optimal portefølje bestående av aktiva som er mest mulig lik de Statens pensjonsfond utland investerer i. Oppgaven benytter lange finansielle dataserier for fange opp den langsiktige risikoen. I motsetning til tilsvarende analyser skilles det mellom industrielle obligasjoner og statsobligasjoner, dette for å undersøke hvilken av disse obligasjonstypene som egner seg best som investeringsobjekt i fondet.

Oppgaven har følgende problemstilling:

Hvilken andel aksjer og obligasjoner er optimal for Statens pensjonsfond utland på sikt?

1.3 Oppgavens struktur

Oppgaven starter med en gjennomgang av Statens pensjonsfond utlands strategi, referanseportefølje og historiske resultater og utvikling i kapittel 2. Videre gjennomgås det teoretiske grunnlaget for oppgaven, med forklaring av alle parametere og aspekt som analysen bygger på, i kapittel 3. Der går også gjennom teorien bak selve optimeringsverktøyet. Den teoretiske delen leder videre til metodedelen som er kapittel 4. Denne delen tar for seg selve modellen som benyttes i porteføljeoptimeringen, og også en gjennomgang av hypotesetesten for stasjonærhet i dataseriene. Kritikk av modellen er også en del av dette kapitlet. Kapittel 5 er resultater fra analysen. Her presenteres beregnet optimal portefølje, de forventede verdienes konfidensintervall, og resultater fra hypotesetestene. Oppgaven avsluttes med diskusjon av resultatene i kapittel 6. Forslag til videre forskning og konklusjon inkluderes i dette kapitlet.

2 Statens pensjonsfond utland

2.1 SPU's strategi

NBIM skal forvalte fondet på en forsvarlig måte. Målet er høy avkastning innenfor moderat risiko, for på den måten å bidra til å sikre grunnlaget for framtidig velferd, herunder pensjoner (Finansdepartementet, 2004). For å oppnå dette mener NBIM at det er mest fornuftig å opptre i markedet som en finansiell investor.

Regjeringen stiller høye krav til NBIM, og forvaltningen av SPU. Målsettingen er at fondet skal danne beste praksis i internasjonal kapitalforvaltning (Finansdepartementet, 2009b).

Finansdepartementet (2009b) sier selv at på grunn av fondets kontinuerlige tilførsel av kapital via petroleumsektoren og forventninger om at dette vil vedvare over tid, er fondets investeringer langsiktige. Fondet er i tillegg hundre prosent egenkapitalfinansiert, og således ikke bundet av særskilte forpliktelser overfor banker og kreditorer. Den risikobærende evnen til fondet er høy, og består av en portefølje på flere tusen forskjellige aktiva fordelt på aksjer og ulike typer obligasjoner. For at avkastningen skal være solid over tid er man avhengig av positiv utvikling i verdens kapitalmarkeder (Finansdepartementet, 2009b).

”Investeringsvirksomhet handler om å ta en velkalkulert risiko for å oppnå en avkastning på investert kapital” (Finansdepartementet, 2009b, s. 43). Dette for å sikre en avkastning som er i tråd med den risikoen man som investor er villig til å bære.

I delkapitlene under defineres de grunnleggende oppfatningene om markedet som ligger til grunn for SPU's investeringsstrategi.

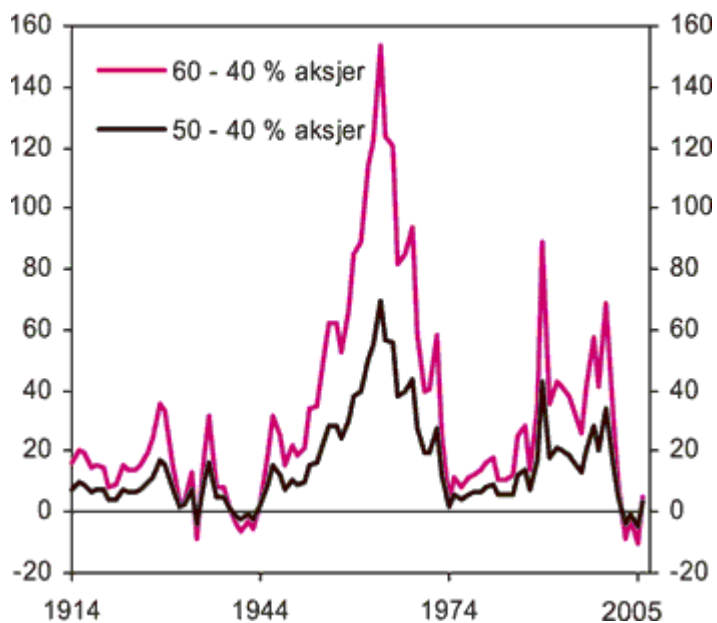
2.2 60/40 aksjer & obligasjoner

SPU, tidligere Statens petroleumsfond, har siden 1998 investert i aksjer (Finansdepartementet, 2007). Opprinnelig var investeringene fordelt mellom 40 prosent aksjer og 60 prosent obligasjoner (porteføljen av obligasjoner er også kalt "renteporteføljen"). Dette var en fordeling som man da mente ga den mest optimale risikoprofilen med tanke på fondets målsettinger og langsiktige perspektiver.

Finansdepartementet foretar en evaluering av gjeldende investeringsstrategi årlig. Dette gjøres gjerne på tilbakemeldinger fra Norges Bank (Finansdepartementet, 2007).

Finansdepartementet fant det fornuftig å opprettholde forholdet mellom aksjer og obligasjoner på det opprinnelige nivået frem til 2006, da Norges Bank tilrådet Finansdepartementet å øke andelen investert i aksjer til 60 prosent, og således redusere obligasjonsandelen fra 60 prosent til 40 (Finansdepartementet, 2006). Bakgrunnen for dette var at Norges Bank fant at den økte risikoen ville bli mer enn dekket av den økte potensielle avkastningen. Analyser viste også hva realavkastningen ville vært ved andre aksjeandeler, slik som grafen under viser.

Endring i samlet realavkastning ved ulike aksjeandeler

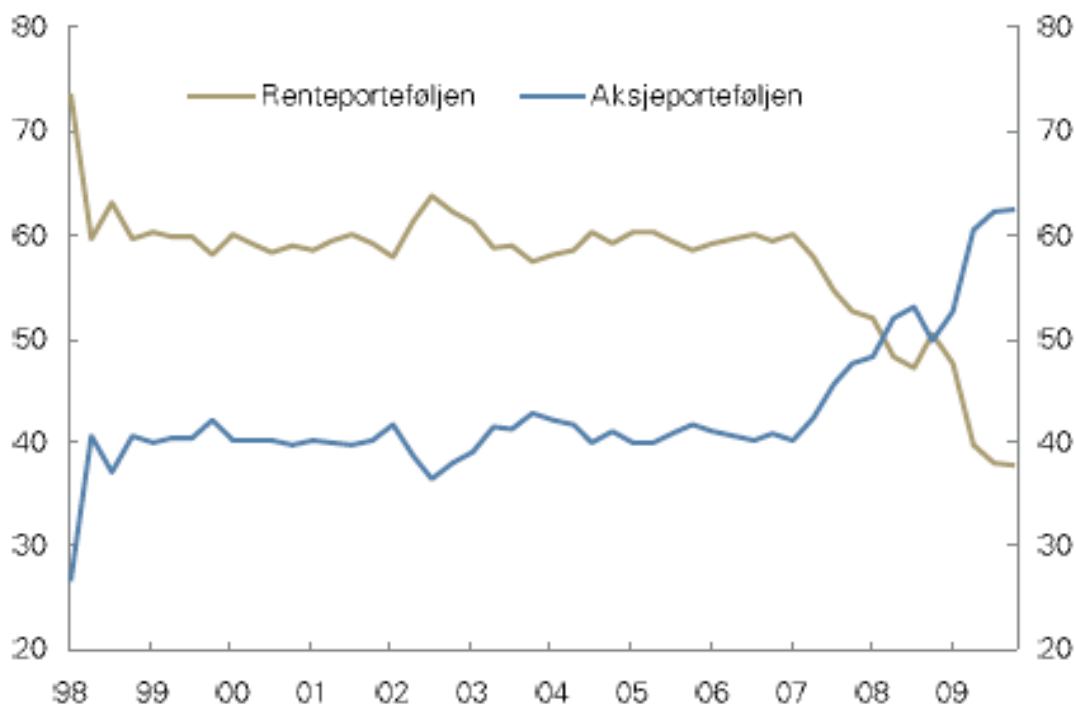


Figur 1 Endring av samlet realavkastning ved 40 til 50 prosent og 40 til 60 prosent aksjeandel (Finansdepartementet, 2006, s. 124)

Norges Banks anbefaling var basert på modellberegninger hvor de viste hva realavkastningen ville vært ved henholdsvis en aksjesammensetning på 50 og 60 prosent sammenliknet med 40 prosent for perioden 1900-2006 (se Figur 1). Måten dette ble gjort på var at man benyttet seg av 15-års overlappende perioder med startpunkt i år 1900. Hver periode besto av en portefølje med aksjer tilsvarende fondets referanseportefølje. Bakgrunnen for å benytte 15-årsperioder var å sikre at man på en korrekt måte tok hensyn til fondets langsiktige plan (Finansdepartementet, 2006).

I perioden etter vedtaket om å øke andelen investert i aksjer fra 40 til 60 prosent har forholdet endret seg over tid som grafen under viser.

Fordeling på aktivaklasser. Prosent av fondet



Figur 2 Fordeling på aktivaklasser. Prosent av fondet (NBIM, 2010, s. 19).

2.3 Referanseporteføljen

Avkastningen til de faktiske investeringene vil til en hver tid bli sammenliknet med referanseporteføljen.

I følge Finansdepartementet benyttes ”referanseporteføljen [...] som et risikostyringsverktøy, ved at det er definert en ramme for hva som aksepteres av avvik mellom de faktiske investeringer og referanseporteføljen. Avviket måles ved standardavviket til avkastningen av differanseporteføljen, som omtales som relativ volatilitet” (Finansdepartementet, 2006, s. 119). Dette avviket har Finansdepartementet bestemt at ikke skal overstige 1,5 prosentpoeng.

Referanseporteføljen skal i utgangspunktet bestå av 60 prosent aksjer og 40 prosent obligasjoner [8]. Videre er investeringene fordelt prosentvis på 3 regioner som dekker hele verden. Investeringsforholdet i de 3 regionene er vist i tabellen under.

Tabell 1 Aktivaforordeling i prosent av investert kapital [8]

	Andel	Europa	Amerika/Afrika	Asia/Oseania
Aksjer	60 %	50 %	35 %	15 %
Obligasjoner	40 %	60 %	35 %	5 %

Referanseporteføljen til NBIM består av indekser fra leverandørene FTSE og Barclays Capital for henholdsvis aksjer og obligasjoner (Finansdepartementet, 2009b). Indeksen som benyttes for aksjer, er en modifisert utgave av FTSE Equity Index Series All Cap og dekker 46 land. I tillegg består referanseporteføljen av obligasjoner som inngår i Barclays Capital Inflation Linked Index og Barclays Capital Global Aggregate Bond Index.

Referanseporteføljen for obligasjoner dekker 21 lands valutaer (Finansdepartementet, 2009b).

NBIMs referanseportefølje for obligasjoner består av ”statsobligasjoner (inkludert realrentelån), obligasjoner utstedt av andre offentlige myndigheter (for eksempel delstater, fylker og statselskaper), selskapsobligasjoner og pantsikrede obligasjoner” (Finansdepartementet, 2009b, s. 145). Fondet har også muligheten til å investere i fremvoksende valutamarkeder

dersom dette blir sett på som en lønnsom investering. Slike markeder kan for eksempel være Russland (NBIM, 2010).

Fondets investeringer er regnet for å være meget godt diversifisert, og ingen eierandel i et børsnotert selskap overstiger 10 %. Den gjennomsnittlige eierandel er så lav som 1 % (Finansdepartementet, 2009c).

2.4 Aktiv forvaltning

Siden markedene blir sett på som tilnærmet effisiente (se kapittel 3.1 for teori rundt den ”effisiente markedshypotesen”), er det vanskelig å oppnå en meravkastning via aktiv forvaltning. Det er i tillegg vanskelig å fastslå hvorvidt aktiv forvaltning faktisk oppnår en reell meravkastning etter at alle kostnader forbundet med den aktive forvaltningen er trukket fra (Ang, Goetzmann, & Schaefer, 2009). Aktiv forvaltning vil ikke omfattes av denne oppgaven.

2.5 Forvalter og markedslividitet

Finansdepartementet (2009b, s. 45) sier at etter deres erfaring, vil ”valg og styring av forvalter være av større betydning dersom deler av investeringene foretas i mindre likvide markeder, der det ikke er lett å omsette verdipapirer uten å påvirke prisene”. Dette begrunnes med at det i mindre likvide markeder er vanskeligere å oppnå markedets avkastning, og i stor grad avhenger av forvalteren. Dette er imidlertid ikke tilfelle i likvide markeder.

2.6 Ansvarlige investeringer

Ettersom fondet har vokst i størrelse har Stortinget gradvis pålagt NBIM strengere etiske retningslinjer for fondets investeringer. Fondet, som ved utgangen av 2009 satt på over 1

prosent av det internasjonale aksjemarkedet, har stor påvirkningskraft og må investere kapitalen på en etisk og forsvarlig måte (NBIM, 2010).

Fondet har også valgt å integrere miljømessige, sosiale og politiske hensyn i sine investeringer (Finansdepartementet, 2009b). Bakgrunnen for dette er at Finansdepartementet er av den oppfatningen at det er i fondets interesse å motvirke svikt i markedet på lang sikt.

2.7 Avkastningen i fondet

Som nevnt i kapittel 2.1, er formålet med fondet å oppnå høy avkastning med moderat risiko. Ser vi på perioden fra petroleumsfondet ble etablert i 1998 og frem til utgangen av 2009, så er den gjennomsnittlige netto realavkastningen (justert for inflasjon og fratrukket forvaltningskostnader) målt i internasjonal valuta på 2,7 prosent (se Tabell 2). Dette er lavere enn referanseporteføljens avkastning som er på 4,41 prosent. Det lave tallet på avkastning skyldes i all hovedsak det kraftige kursfallet som verden ble rammet av i forbindelse med finanskrisen i 2008. Ser vi bort fra 2008, er den gjennomsnittlige avkastningen på aksjer på hele 14,8 prosent i perioden fra 2003 og til utgangen av 2007 (Finansdepartementet, 2009b).

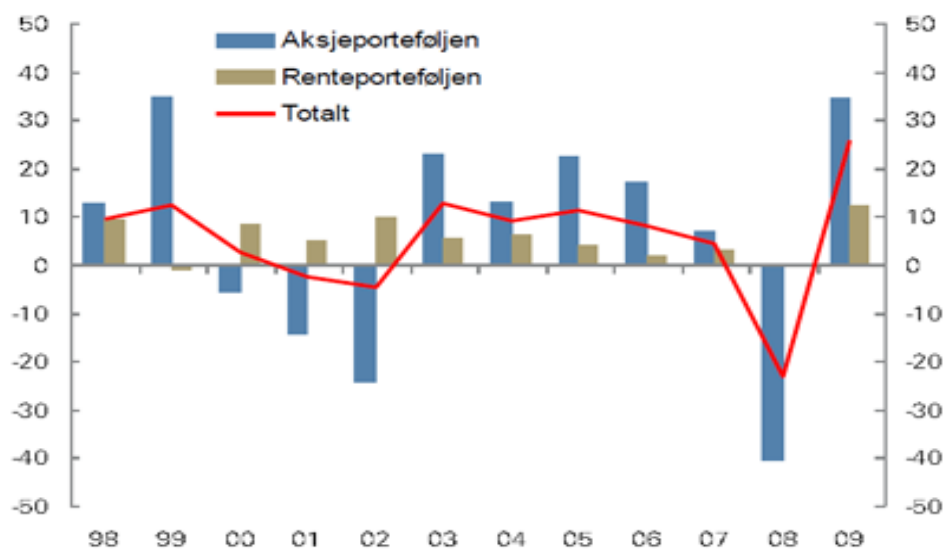
Som Tabell 2 viser, ble 2009 et godt år for SPU med en realavkastning på hele 23,45 prosent, noe som ga en meravkastning på hele 4,10 prosentpoeng når man sammenlikner brutto årlig avkastning med referanseporteføljens avkastning. Av denne meravkastningen bidro rentepapirene (obligasjonene) med en meravkastning på hele 3,25 prosentpoeng, mens aksjeporteføljen bidro med resterende 0,84 prosentpoeng (NBIM, 2010). Avkastningen tilsvarer i norske kroner en avkastning på 613 milliarder kroner (NBIM, 2010). Mye av forklaringen på det gode resultat skyldes optimisme i aksjemarkedet som medførte stigende aksjekurser, etter at de fleste aksjer var på et bunnivå i 2008. I tillegg medførte de synkende kursene under finanskrisen til at NBIM måtte kjøpe store mengder aksjer for å opprettholde forholdet mellom aksjer og rentebærende papirer. Da markedet steg i 2009, kunne fondet selge unna aksjer på en høyere kurs enn de hadde kjøpt disse for. Ved utgangen av 2009 lå aksjeandelen på 62,4 prosent, mens rentepapirandelen var på resterende 37,6 prosent (NBIM, 2010).

Tabell 2 viser at meravkastningen i hele fondets historie sett under ett er på 0,25 prosentpoeng, dette til tross for at finanskrisens kursfall førte til en negativ meravkastning for de siste 5 årene sett under ett. Det er ingen tvil om at 2009 bidro sterkt til den positive statistikken.

Tabell 2 Avkastningen i SPU. Alle tall i internasjonal valuta (NBIM, 2010, s. 17)

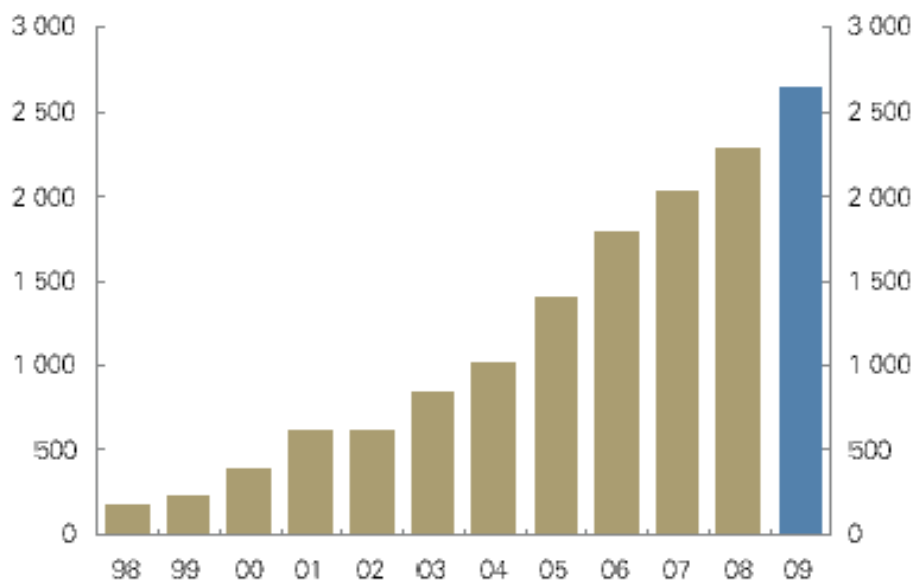
	2009	Siste 3 år	Siste 5 år	Siste 10 år	Siden oppstart (1.1.1998)
Fondets avkastning (prosent)	25,62	0,15	3,79	3,47	4,66
Referanseporteføljens avkastning (prosent)	21,52	0,56	3,82	3,31	4,41
Meravkastning (prosentpoeng)	4,10	-0,41	-0,03	0,17	0,25
Standardavvik (prosent)	12,57	12,27	9,77	7,90	7,63
Relativ volatilitet (prosentpoeng)	1,13	1,56	1,23	0,90	0,84
Informasjonsrate (IR*)	3,64	-0,26	-0,02	0,18	0,30
Brutto årlig avkastning (prosent)	25,62	0,15	3,79	3,47	4,66
Årlig prisvekst (prosent)	1,64	2,03	2,11	1,96	1,81
Årlige forvaltningskostnader (prosent)	0,14	0,11	0,11	0,10	0,10
Årlig netto realavkastning (prosent)	23,45	-1,95	1,54	1,38	2,70

Figur 3 viser avkastningene i aksje- og obligasjonsporteføljen tilbake til 1998. 2009 ble det beste året i fondets historie, med en avkastning på 34,3 prosent på aksjeporteføljen og 12,5 prosent på obligasjonsporteføljen målt i lokal valuta. Ved utgangen av 2009 var fondet på hele 2 640 milliarder norske kroner (se Figur 4).



Figur 3 Årlig avkastning fra 1998-2010 (NBIM, 2010, s. 16)

Markedsverdi ved årsslutt 1998 – 2009. Milliarder kroner



Figur 4 Markedsverdi ved årsslutt 1998 – 2009. Milliarder kroner (NBIM, 2010, s. 14)

Aksjeporteføljen har faktisk en meravkastning målt i prosentpoeng i 9 av 11 år tilbake til 1999, og 2009 er det året denne porteføljen har hatt høyest meravkastning sammenliknet med referanseporteføljen (se Tabell 3).

Tabell 3 Årlig avkastning i aksjeporteføljen (NBIM, 2010, s. 27)

	Årlig avkastning på aksjeporteføljen		
	Faktisk portefølje	Referanseporteføljen	Meravkastning
1999	34.81	31.32	3.49
2000	-5.82	-6.31	0.49
2001	-14.60	-14.66	0.06
2002	-24.39	-24.47	0.08
2003	22.84	22.33	0.51
2004	13.00	12.19	0.81
2005	22.49	20.31	2.18
2006	17.04	17.14	-0.10
2007	6.82	5.67	1.15
2008	-40.70	-39.54	-1.16
2009	34.27	32.46	1.81

I likhet med aksjeporteføljen har også renteporteføljen hatt en høyere avkastning enn referanseporteføljen i 9 av 11 år, også her var 2009 det året med høyest meravkastning (se Tabell 4). Det er imidlertid kun i 2009 at renteporteføljen presterer bedre enn aksjeporteføljen sammenliknet med referanseporteføljen.

Tabell 4 Periodeavkastning i renteporteføljen (NBIM, 2010, s. 31)

	Periodeavkastning på renteporteføljen		
	Faktisk portefølje	Referanseporteføljen	Meravkastning
1999	-0.99	-1.00	0.01
2000	8.41	8.34	0.07
2001	5.04	4.96	0.08
2002	9.90	9.41	0.49
2003	5.26	4.77	0.48
2004	6.10	5.73	0.37
2005	3.82	3.46	0.36
2006	1.93	1.68	0.25
2007	2.96	4.26	-1.30
2008	-0.52	6.08	-6.60
2009	12.49	5.13	7.36

Ser vi på risikobildet for perioden fra 1998 og frem til utgangen av 2008, har risikoen økt mot slutten av perioden både for aksjeporteføljen, renteporteføljen og referanseporteføljen. Grafen under viser at etter en lang periode (2004-2007) hvor volatiliteten var relativt lav, medfører finanskrisen en tilnærmet eksponentiell utvikling i risikobildet.



Figur 5 Risiko i referanseporteføljer Statens pensjonsfond utland (Finansdepartementet, 2009b, s. 146)

Også referanseporteføljen opplevde en betydelig økning i risiko, målt ved standardavviket til avkastningen. Dette kan forklares ved at risikoen økte som følge av usikkerheten skapt av finanskrisen, i tillegg til det faktum at aksjeandelen ble økt fra 40 til 60 prosent og således medførte at det ble flere risikofylte papirer i referanseporteføljen (Finansdepartementet, 2009b).

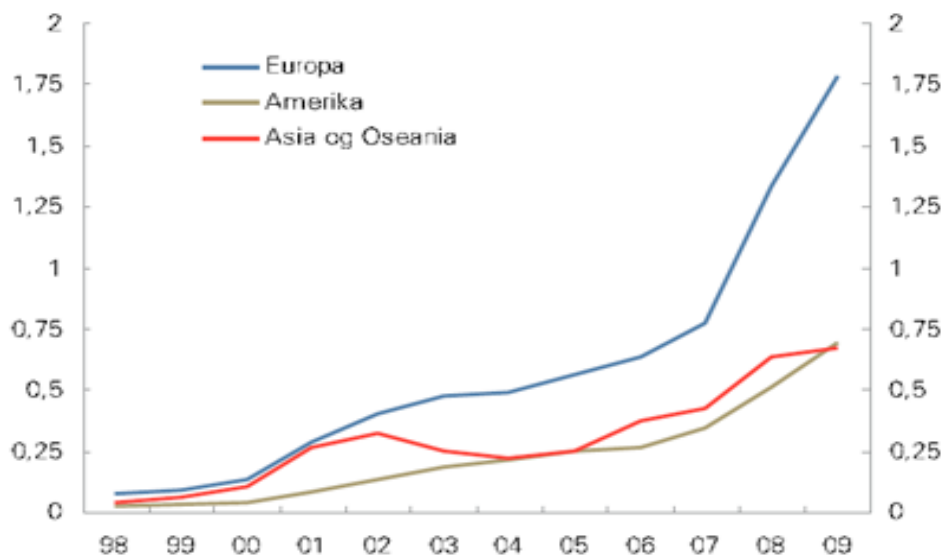
Denne utviklingen stoppet imidlertid opp i 2009, og risikoen i finansmarkedene falt. Dette ser vi av figuren under som viser forventet volatilitet, dvs. den svingningen man kan forvente at vil være i avkastningene i normale perioder, målt ved standardavvik.



Figur 6 Absolutt volatilitet. Prosent og milliarder kroner (NBIM, 2010, s. 38)

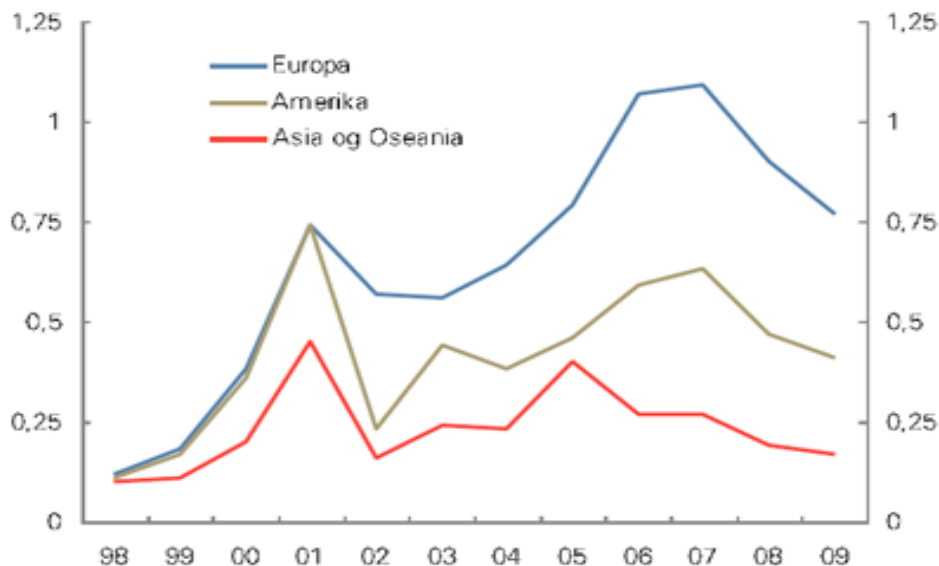
2.8 Fondets størrelse

SPU har de siste årene vokst til å bli en av verdens aller største aksje- og rentepapireiere. Grafen under viser aksjeandelen SPU eier i de tre store markedene som fondet opererer i. Spesielt i Europa har eierandelen økt dramatisk siden 1998, og da spesielt som følge av økningen av aksjeandel.



Figur 7 Eiendeler i aksjemarkeder 1998-2010. Prosentandel av markedskapitaliseringen til FTSE All-World-indeksen (NBIM, 2010, s. 19)

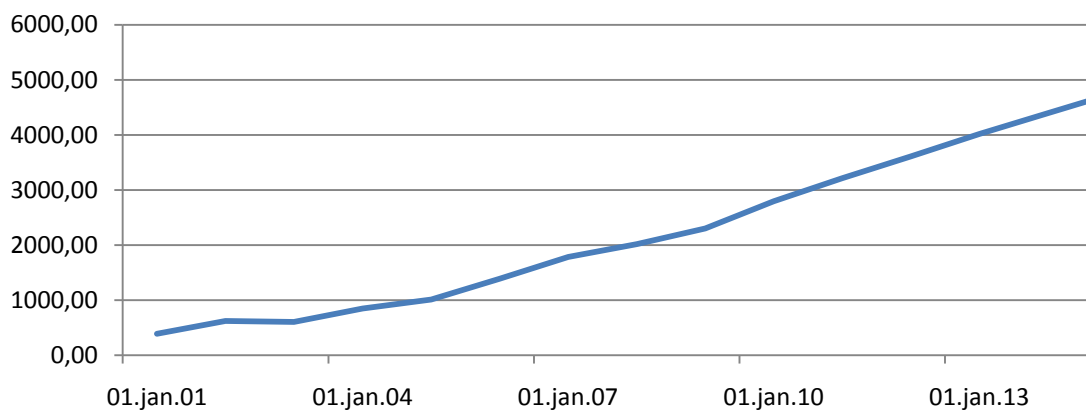
Også innen obligasjoner er fondet en kjempe, dette til tross for at økningen av aksjeandelen har medført at fondets eierandel av obligasjoner i verdensmarkedet er redusert noe. Ved utgangen av 2009 eide SPU 0,51 prosent av verdens obligasjoner. Grafen under viser utviklingen av eierandelen i de tre store markedene SPU opererer i. Man ser tydelig knekken som kommer etter vedtaket i 2006 om å redusere andelen i obligasjoner.



Figur 8 Fondets eierandeler i rentemarkedene. Prosentandel av markedskapitaliseringen til Barclays-indeksen (NBIM, 2010, s. 20)

2.9 Norges Banks prognoser for fondet

Prognose avkastning SPU (Mrd. kr)



Figur 9 Prognose avkastning SPU (Mrd. kr.) (Finansdepartementet, 2008, s. 66)

Prognosene for SPU viser at fondet forventes å ha en relativt jevn utvikling over tid (Figur 9). Allerede i løpet av 2010 er fondet forventet å oppnå en verdi på over 3000 milliarder norske kroner, mens det i utgangen av 2012 er forventet å øke til over 4000 milliarder kroner (Finansdepartementet, 2008).

3 Teori

Denne delen tar for seg alt det teoretiske grunnlaget som er benyttet i denne oppgaven. Teorien legger vekt på den ”effisiente markedshypotesen” og prinsippet med diversifisering. I tillegg gjennomgås teorien rundt risiko, risikoaversjon og optimal porteføljeteori nøye. Kritikk av valgt optimeringsmodell er også med, samt en teoretisk gjennomgang av obligasjoner.

3.1 The Efficient Market Hypothesis / Markedseffisiens

Finansdepartementet legger til grunn at de markedene de går inn i, er tilnærmet effisiente (Finansdepartementet, 2009b). Dette er i tråd med den effisiente markedshypotesen (EMH). Bakgrunnen for denne teorien er hvorvidt det er mulig å oppnå en meravkastning ut over den normale risikopremien i markedet. Det vil si hvorvidt markedet har priset ulike aktiva for lavt eller for høyt. Dersom dette er tilfelle, vil det være en mulighet for en meravkastning, også kalt alfa. Grunnhypotesen i teorien rundt EMH er at spekulering i aktiva skal være et ”fair game”, og at forventet avkastning skal være lik null. Det vil si at avkastning skal reflektere den normale risikopremien (Ang et al., 2009). Fama (1970) kunne i empiriske undersøkelser vise en svak og semistærk form for markedseffisiens på bakgrunn av data frem til 1970. Dette tyder på at markedet er effektivt. På bakgrunn av Fama og andre forsøk på å bevise EMH (se også: Malkiel (2003)) har det i de senere år blitt vektlagt å gjøre EMH mer realistisk.

EMH krever ikke nødvendigvis at alle deltagere i markedet har all informasjon om de ulike selskapene. Bakgrunnen for dette er at kostnaden med å tilegne seg den ekstra kunnskapen som kreves for å oppnå en alfa, langt på vei er lik eller større enn den ekstra avkastningen informasjonen fører til (Ang et al., 2009). På bakgrunn av dette ses markedet som mer eller mindre effisient, da det ikke er mulig å vise til en reell meravkastning som følge av ekstra tilegnet informasjon når alle kostnader er trukket fra.

Dersom man støtter opp om EMH som prinsipp, er det mindre viktig at beslutninger tas kjapt. Bakgrunnen for dette er at man har liten tro på at aktiv forvaltning gir bedre avkastning sett i

forhold til passiv forvaltning. Denne formen for indeksert porteføljestrategi krever i mindre grad raske beslutninger.

Noe av bakgrunnen for kritikken av EMH er erfaringer fra det virkelige liv. Blant annet er det ingen tvil om at ”innsidere” i mange tilfeller har profittert voldsomt på bakgrunn av informasjon de er alene om å ha (Ang et al., 2009). Dette problemet tar Grossmann og Stiglitz (1976) opp. De vektlegger at det krever til dels store ressurser for å tilegne seg informasjon om selskaper som ingen andre er innehavere av, og selv om denne informasjonen kan føre til en teoretisk meravkastning ut over normalavkastningen, påpeker de at denne meravkastningen langt på vei blir spist opp av kostnadene forbundet med den aktive forvaltningen. I en artikkel skrevet senere presenterer Grossmann og Stiglitz (1980) en modell for likevekt i markedet som tar hensyn til nettopp dette problemet. I modellen legger de vekt på at alle aktører i markedet i utgangspunktet har en viss informasjon om selskapet, men at det er forbundet med en kostnad å tilegne seg ekstra informasjon. De viser videre at prisene i markedet ikke kan speile all tilgjengelig informasjon. Begrunnelsen for dette er at det da ikke ville vært mulig å utnytte ekstra informasjon og således utnytte en alfa. Dette er med på å bygge opp om teorien rundt EMH, og forklarer hvorledes markedet kan være effektivt til tross for at ikke alle aktører er fullt ut informert om alle selskaper.

Flere artikler legger frem resultater som langt på vei motbeviser EMH. Loughran & Ritter (1995) fremlegger at investorer systematisk overvurderer nye selskapers verdi, og således evner ikke markedet å prise selskapene rett. Spiess og Affleck-Graves (2000) påpeker i en annen artikkel at feilprisingen av selskaper kan utnyttes for å oppnå økt avkastning. Imidlertid påpeker Fama (1998) at deres resultat ikke er nok til å motbevise EMH. Resultatet tyder heller på at det er meget vanskelig å måle risiko, og at man ikke kan benytte resultatet fra undersøkelsene til å fastslå at markedet ikke er effisient.

3.2 Diversifisering

Diversifisering er en metode for å spre risikoen mellom flere aktiva. Dette gjøres ved at man utnytter at de ulike aksjer ikke nødvendigvis svinger i takt. Ved å ha flere spredte aksjeposter kan en reduksjon av en aksjes verdi langt på vei bli veid opp av en annen aksje som øker i

verdi. En godt diversifisert portefølje skal gi maksimal avkastning til minimal risiko. Mer teori rundt dette temaet er tatt inn i delkapittelet om risiko (kapittel 3.4).

3.3 Risikopremie

Det er allment akseptert at aksjer medfører en større risiko enn rentebærende obligasjoner, og derfor forventes det at aksjer skal gi større avkastning enn obligasjoner. Størrelsen på denne meravkastningen er et diskusjonstema og er per i dag ikke godt nok dokumentert (Finansdepartementet, 2009b). Risikopremien er den meravkastningen man oppnår som følge av at man tar på seg mer risiko. En risikoavers investor (se kapittel 3.6 for definisjon) vil kreve høyere risikopremie dersom denne velger å investere i aksjer, enn hva tilfellet for eksempel er med indekserte obligasjoner.

Man kan også definere risikopremien som ”den sum en investor er villig til å betale for å slippe å delta i et veddemål med null forventet gevinst”(Sirnes, u.å.-a, s. 3).

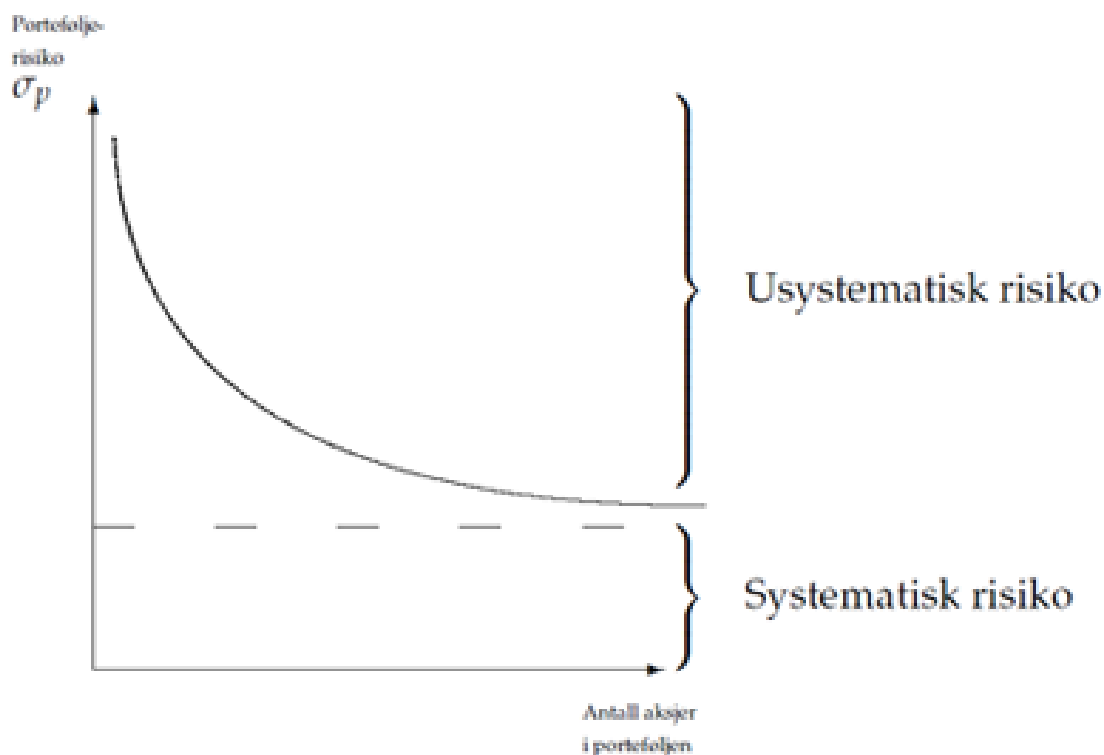
3.4 Risiko

For at det skal være interessant å kjøpe et aktivum, må det være en sammenheng mellom risikoen forbundet med prosjektet og prosjektets forventede avkastning. En investor vil alltid ved valget mellom to ulike investeringsalternativer velge den investeringen som gir høyest avkastning i forhold til risikoen. ”Avkastningen er en forventningsverdi som illustrerer at lønnsomheten ved prosjektet er en usikker størrelse, og at prosjektets risiko illustrerer usikkerheten knyttet til lønnsomhet” (Andersen & Skjeret, 2003, s. 3).

Risikoen forbundet med en investering kan i utgangspunktet deles i to. Den første risikofaktoren er den bedriftsspesifikke risikoen, også kalt den usystematiske risikoen. Dette er risikoen forbundet med interne hendelser innad i bedriften. En slik hendelse kan for eksempel være et dårligere resultat enn forventet. Denne formen for risiko kan være meget avgjørende for en aksjonærs fortjeneste dersom denne sitter på få aktiva. Imidlertid vil denne

risikoen mer eller mindre kunne elimineres ved at investoren opparbeider seg en godt diversifisert portefølje av aksjer.

En diversifisert portefølje kjennetegnes ved at svingningene i avkastning som følge av bedriftsspesifikke hendelser, mer eller mindre er eliminert. Det vil i praksis si at dersom en aksje synker i verdi som følge av eventualiteter innad i bedriften, så vil andre aksjer i porteføljen øke i verdi av samme årsak. På denne måten påvirkes ikke den totale avkastningen på porteføljen av at en aksje gjør det dårligere enn forventet. Hvor mange ulike aksjer som må til for å få en diversifisert portefølje er omdiskutert, men anslagene ligger på et minimum på mellom 10-30 aksjer (Se: (Evans & Archer, 1968), (Wagner & Lau, 1971)). I all hovedsak vil som regel et minimum på 10 aksjer gi en god nok diversifiseringsgevinst, da denne effekten er avtagende (se graf under) (Ødegaard, 2006, s. 3).



Figur 10 Sammenhengen mellom antall aksjer i en likvid portefølje og porteføljens standardavvik (Ødegaard, 2006, s. 1)

Den andre formen for risiko er den systematiske risikoen, også kalt markedsrisikoen. Dette er en form for risiko som styres av makroøkonomiske faktorer, og kan således ikke diversifiseres bort. I kapitalverdimodellen (CAPM) defineres gjerne den systematiske risikoen som β (beta).

Beta angir hvordan en aksje svinger i forhold til det totale markedet (gjerne definert som en børsindeks). En β lik én viser at en aksje følger børsindeksens svingninger.

Betaverdien baserer seg på kovariansen mellom forventet avkastning til et aktivum og den forventede avkastningen i markedet dividert med markedsrisikoen. Matematisk kan vi definere β -verdien som (Bodie et al., 2009):

$$\beta_i = \frac{Cov(r_i, r_M)}{\sigma_M^2}, \quad (1)$$

der r_i er avkastningen på ett aktivum, r_M er markedsavkastningen og σ_M^2 er variansen til markedet.

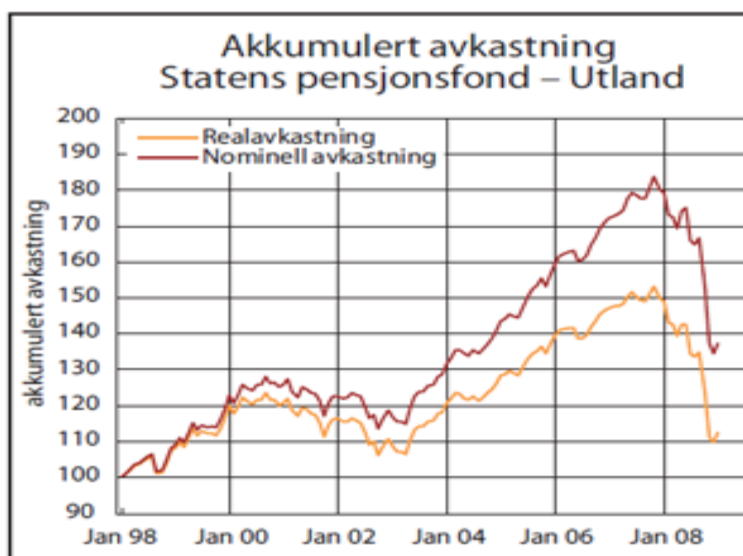
En perfekt diversifisert portefølje vil i prinsippet følge svingningene til markedet.

Når det gjelder obligasjoner er inflasjonssvingninger den avgjørende risikofaktoren (gjelder ikke indekserte obligasjoner, mer om dette under kapittel 3.7 om obligasjoner). Siden obligasjonene i utgangspunktet har fast eller tilnærmet fast avkastningsrate, vil en økning i inflasjonen redusere realavkastningen. Matematisk er denne sammenhengen definert som nominell avkastningsrate subtrahert for endringen i inflasjon (Finansdepartementet, 2009b):

$$r_{real} \approx r_{nom} - \Delta P \quad (2)$$

** Der r_{real} er realavkastningsraten, r_{nom} er den nominelle avkastningsraten og ΔP er endringen i inflasjon*

Avhengig av endringen i inflasjon kan gapet mellom nominell- og realavkastningen være relativt stor. Grafen under viser realavkastning og nominellavkastning for SPU i perioden 1998 til midten av 2008.



Figur 11 Akkumulert avkastning SPU (Finansdepartementet, 2009b, s. 151)

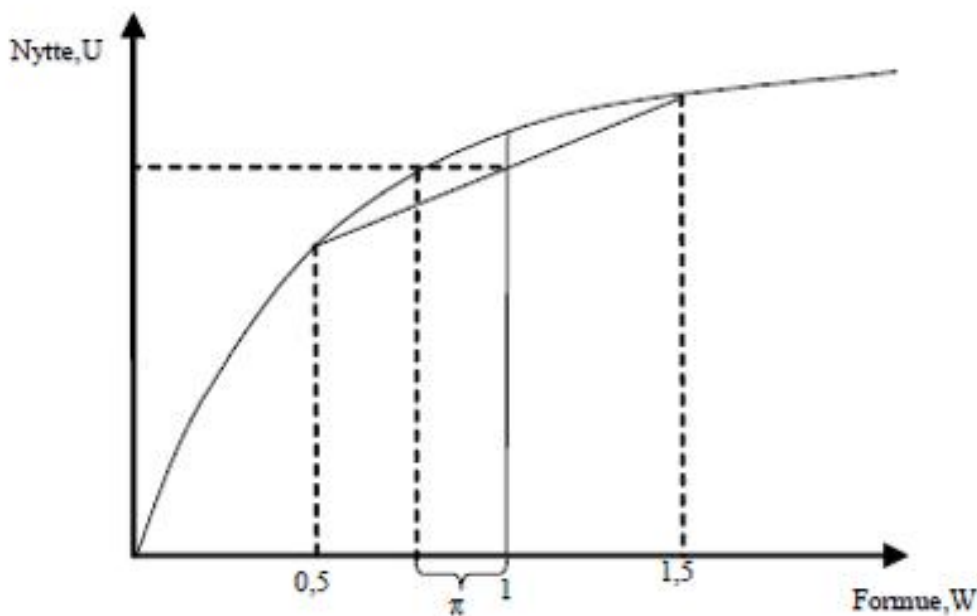
Desto større svingningene er i inflasjonen, desto mer risikofylt vil investering i obligasjoner være. Det vil også være slik at risikoen øker når løpetiden øker på obligasjonen, da usikkerheten rundt fremtidige svingninger i inflasjonen øker over tid.

3.5 Risiko ved lang sikt

Hvordan en investor vil investere når investeringsperspektivet er langsiktig, varierer. Brennan og Xia (2000) konkluderer med at i gitte situasjoner tenderer en investor til å utvide sin investeringshorisont jo mer risikoavers personen er. Formelt kan man si at dersom en investor har en tidshorisont på sin investering lik T , så vil vedkommende velge et investeringsobjekt med løpetid lik T (Wachter, 2003). I samme artikkel argumenterer Wachter for at en sterkt risikoavers investor vil velge en inflasjonsindeksert langsiktig obligasjon. For obligasjoner definerer man en én-perioders obligasjon for risikofri. Bakgrunnen for dette er at man tilnærmet helt sikkert vet hva avkastningen vil være etter periodens slutt. Problemet oppstår når man snakker om flere perioder. Faktorer som inflasjon kan påvirke avkastningen betraktelig dersom investeringshorisonten blir lang. Dette er en risikofaktor som en investor må ta hensyn til ved investering i langsiktige obligasjoner. Det er imidlertid i prinsippet slik at en én-perioders obligasjon vil ha samme avkastning per periode som en flerperioders obligasjon, dersom inflasjonen er konstant.

3.6 Risikoaversjon

Økonomiske modeller for risikoaversjon oppstår utelukkende fordi nyttefunksjonen til velferden er avtagende (Rabin, 2000). Dette innebærer at en person som i utgangspunktet har lav nytte vil få en relativt høyere nytteøkning dersom velferden øker med én kontra en person som har høyere nytte i utgangspunktet. Dette er naturlig, da en dollar som får oss ut av fattigdom vil være mer verd enn en dollar som bare gjør oss enda rikere. Dersom en ser på en kontinuerlig nyttefunksjon, er et individ risikoavers dersom denne har en konkav nyttefunksjon. Dette vil med andre ord si at den andrederiverte av nyttefunksjonen er negativ. Imidlertid er ikke den andrederiverte et godt mål på grad av risikoaversjon (Sirnes, u.å.-a).



Figur 12 Nyttefunksjonen til en risikoavers investor (Sirnes, u.å.-a, s. 3)

Bakgrunnen for dette er at nyttefunksjonen er avtagende ettersom formuen stiger. Dette resulterer i at investorer med ekstremt stor formue vil opptre risikonøytralt per definisjon. Dette skyldes at vi ikke kan tillate at den førstederiverte blir negativ. Som en konsekvens av dette er den andrederiverte et dårlig mål på risikoaversjon.

Generelt kan man si at en risikoavers person vil kreve høyere avkastning jo høyere risikoen er. Dette til tross for at det er et veldokumentert fenomen at dersom innsatsen eller

investeringsbeløpet er lavt nok, vil et individ opptre risikonøytralt. Det vil si at personen ikke krever en høyere avkastning selv om risikoen er høy (Arrow, 1971). Et risikoavers individ vil som hovedregel knytte et større avkastningskrav overfor aksjer enn hva tilfellet er med statsobligasjoner. Bakgrunnen for dette er at aksjer i større grad medfører en høyere risiko enn hva tilfellet er med statspapirer (Departementenes servicesenter, 2009). Denne oppgaven forutsetter at NBIM opptre som en risikoavers investor.

For å beregne risikoaversjonen for en investor basert på dens nyttefunksjon, benytter man gjerne en av to ulike metoder.

3.6.1 Absolute Risk Aversion / Absolutt risikoaversjon (ARA)

ARA er definert slik:

$$\pi_{ARA}(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}, \quad (3)$$

der u er nyttefunksjonen og x er forventet avkastning

Denne metoden for å beregne grad av risikoaversjon er også kalt Arrow-Prat-målet for risikoaversjon. Dette målet viser seg å være proporsjonalt med risikopremien (Sirnes, u.å.-a).

Dersom ARA-funksjonen er konstant, får vi CARA (Constant Absolute Risk Aversion).

$$\pi_{CARA}(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \quad (4)$$

Løser vi denne differensiallikningen, får vi nyttefunksjonen som oftest blir benyttet innen finans grunnet at den er enkel å ha med å gjøre matematisk (Sirnes, u.å.-a).

$$u(x) = -e^{-x\pi_{CARA}} \quad (5)$$

Til tross for at denne nyttefunksjonen er negativ, betyr ikke dette at individet alltid har negativ nytte. Bakgrunnen for at dette er slik, er at man ikke kan kvantifisere nytte på høyeste nivå.

Man kan kun rangere. Dette medfører at dersom $u(x) > u(y)$, så er individet med $u(x)$ rangert over individet med $u(y)$.

Det er også viktig å merke seg at ARA og CARA benyttes dersom det er snakk om et veddemål med en bestemt potensiell avkastning. Dersom det i stedet er snakk om en mulighet for en avkastning som er en prosent av investert formue, benytter man seg av følgende metode:

3.6.2 Relative risk aversion/ Relativ risikoaversjon (RRA)

RRA er definert som

$$\pi_{RRA}(x) = -x \frac{u''(x)}{u'(x)} \quad (6)$$

Dersom vi snakker om en konstant relativ risikoaversjon, så får vi følgende uttrykk:

$$\pi_{CRRA}(x) = -x \frac{u''(x)}{u'(x)} \quad (7)$$

Tilhørende nyttefunksjon til dette uttrykket for risikoaversjon blir en Cobb-Douglas nyttefunksjon:

$$u_{CRRA}(x) = -x^{1-\pi_{CRRA}} \quad (8)$$

Denne oppgaven vil ikke legge vekt på beregningen av CARA/CRRA-parameteren, men ulike parameterverdier diskuteres i kapittel 6.5.

Beregninger gjort av andre på grad av risikoaversjon viser at SPU hadde en risikoaversjonsparameter på omtrent 5 da aksjeandelen var 40 prosent av investert kapital (Døskeland, 2006). Etersom økning til 60 prosent aksjeandel har ført til en høyere grad av risikoeksponering, er det rimelig å anta at den nye verdien på grad av risikoaversjoner har blitt redusert. Professor Thore Johnsen påpeker i en artikkel i Dagens Næringsliv (2009) at det er

rimelig å anta at risikoaversjonsparameteren er minst lik 2. Denne oppgaven vil derfor benytte en parameterverdi på 3 i den videre analysen.

3.7 Ulike typer obligasjoner

Obligasjoner er langsiktige lån med løpetid vanligvis over 1 år, som uten samtykke fra låntaker kan deles på flere långivere i form av standardiserte partialobligasjoner (Statistisk Sentralbyrå, u.å). I likhet med en aksje er en obligasjon et fritt omsettelig verdipapir. ”Det finnes ulike typer rentebærende instrumenter avhengig av hvem som er utsteder, hvilken sikkerhet som stilles, løpetiden fram til forfallsdato og hvordan renten utbetales” (DNB Nor, u.å, s. 8). Renten, som også blir kalt kupongen, utbetales vanligvis som fast eller flytende rente. Fastrente blir gjerne satt én gang i året, mens ved flytende rente er det vanlig at denne settes hvert kvartal, og da basert på NIBOR-renten (Norwegian Inter Bank Offered Rate) (DNB Nor, u.å). Obligasjoner kan utstedes uten at det påløper rente, slike obligasjoner er imidlertid kjøpt til underpris, og avkastningen på disse verdipapirene vil tilsvare rentebærende obligasjoner.

Bakgrunnen for obligasjonsmarkedet er å gi stater, statlige institusjoner og bedrifter en mulighet til å låne penger hos andre enn bankene. Gjennom obligasjonslån spres risikoen forbundet med lånet på mange långivere, og er dermed mulig å få innvilget. ”I motsetning til banklån gir obligasjonslån som jevnlig omsettes, en løpende prising av risikoen knyttet til låntager. Obligasjonslån er derfor en viktig informasjonskilde omrisiko og avkastningskrav i markedet” (Norges Bank, 2004, s. 51). ”Dersom en obligasjonsutsteder får svekket kredittverdighet, vil [...] dette gjerne føre til at obligasjonsprisen reduseres slik at forventet avkastning (renten) på obligasjonen øker” (Finansdepartementet, 2007, s. 41). Markedet vil således ”straffe” låntakeren ved å kreve høyere risikopremie for å opprettholde lånet.

I hovedsak finnes det 5 ulike typer obligasjoner.

3.7.1 Obligasjonslån med renteregulering

Renten er ikke fast for perioden, men kan justeres. Hyppigheten på justeringen er spesifisert i henhold til avtalen som er inngått. Det er vanlig å fastsette renten på basis av pengerenten (Norges Bank, 2004).

3.7.2 Obligasjonslån med særlig sikkerhet

Obligasjoner som stiller særlig sikkerhet, er regnet som meget sikre investeringer. Sikkerheten kan for eksempel være offentlige garantier, pant i eiendeler, eller en garanti for at innehavere av en spesiell obligasjon vil bli prioritert ved en eventuell konkurs hos låntaker (Norges Bank, 2004).

3.7.3 Obligasjonslån med innløsningsrett

Denne typen obligasjonslån kjennetegnes ved at låntaker har muligheten til å betale tilbake lånet til en forhåndsbestemt kurs før løpetiden er over. På samme måte kan långiver selge tilbake obligasjonen til utsteder. Begge metodene fører til at lånet blir innfridd (Norges Bank, 2004).

3.7.4 Konvertible obligasjoner

Innehavere av slike obligasjoner kan bytte inn obligasjonene til fordel for aksjer i selskapet som har utstedt obligasjonen, til en fastsatt pris. Når dette eventuelt kan skje, er spesifisert i avtalen mellom utsteder og långiver (Norges Bank, 2004).

3.7.5 Indekserte obligasjoner

Dette er obligasjoner som knytter obligasjonens hovedstol opp mot en avtalt størrelse, som inflasjon eller spesielle indekser, for eksempel råvarepriser. Det er som regel ingen kupongrente knyttet opp mot denne typen obligasjoner. Ved forfall utbetales hovedstolen pluss eventuelle tillegg som følge av endringer i inflasjon eller avtalt indeks (Norges Bank, 2004).

Det er gjerne store institusjoner som investerer i obligasjoner. Eksempler på dette kan være pensjonsfond eller forsikringsselskaper. Imidlertid vil også andre investorer kunne benytte seg av obligasjonsinvesteringer, da disse gjerne kan redusere risikoen i en investors portefølje (Norges Bank, 2004). Bakgrunnen for dette er at annenhåndsverdien svinger mindre enn hva tilfellet gjerne er med aksjer, da verdien av en obligasjon vil være lik hovedstolen ved slutten av løpetiden. Ved konkurs vil også obligasjonseiere ha fortrinnsrett i boet fremfor andre aksjonærer. Dette gjør denne typen obligasjoner til en god investering for investorer som har langsiktige forpliktelser (Norges Bank, 2004).

3.8 Optimal portefølje

Teorien om optimal portefølje er et fenomen som stammer fra mikroøkonomien. Bakgrunnen for teorien er at man forutsetter at investoren er risikoavers og har avtakende grensenytte. Moderne porteføljeteori allokere investeringskapitalen ved å maksimere forventet avkastning per risikoenhet (Campbell, Huisman, & Koedijk, 2001). Siden risikoen for verdipapirer er definert som variansen til hvert enkelt aktivum, betyr dette at en investor vil vekte sannsynligheten for et negativt resultat likt med et positivt resultat (Campbell et al., 2001).

Selv om teorien i utgangspunktet stammer fra optimeringsproblemer innen mikroøkonomien, er det i all hovedsak tre ting som skiller de to. For det første er optimeringen for en investor, ikke en produsent eller en konsument. Det vil si at nytten investoren står overfor kun er avhengig av forventet avkastning og risikoen forbundet med en investering. For det andre er investorene i optimeringen underlagt høy grad av usikkerhet, og til slutt så er porteføljeteorien mulig å benytte i praksis, da som et verktøy en investor kan benytte seg av i sine investeringer (Markowitz, 1991).

Usikkerheten som oppstår som følge av at investorene ikke vet noe om avkastningen i fremtiden på sine investeringer, er det som skiller porteføljeteorien mest fra optimeringsproblemer innen samfunnsøkonomien. Dersom en investor hadde visst hva en aksje ville være verdt i fremtiden, ville det ikke vært noe behov for å optimalisere porteføljer. Investoren ville rett og slett velge den aksjen med høyest avkastning og investert alle sine penger i denne (Markowitz, 1991). Dette er imidlertid ikke tilfelle i virkeligheten, og således

vil det ikke være klokt for en investor å investere all sin kapital i kun ett aktivum. Valget faller da på en diversifisert portefølje som er konstruert med tanke på å redusere risikoen forbundet med usikkerheten til et minimum (Markowitz, 1991).

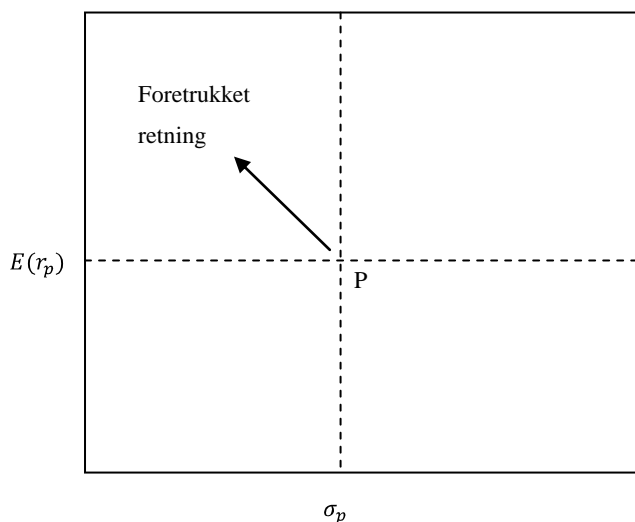
Den moderne porteføljeteorien baserer seg på ”mean-variance” (gjennomsnitt-varians) kriteriet. Matematisk kan dette kriteriet defineres som under.

$$E(r_A) \geq E(r_B) \quad (9)$$

og

$$\sigma_A \leq \sigma_B \quad (10)$$

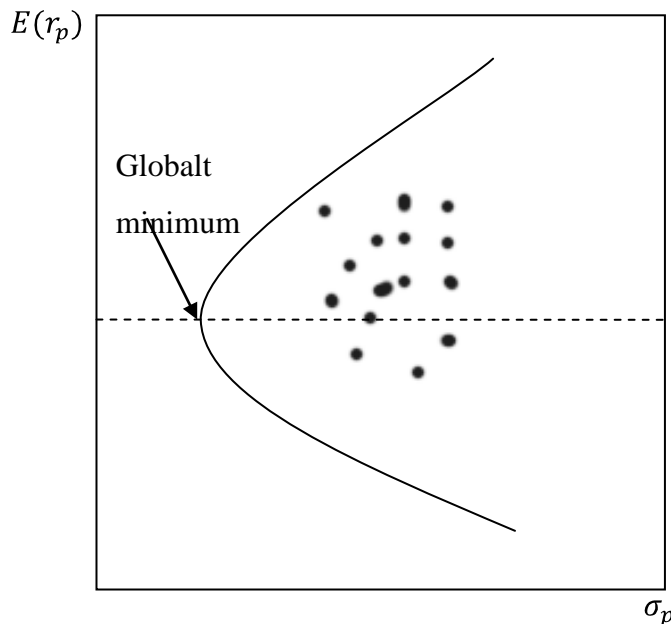
Kriteriet sier at man velger den investeringen som har høyest forventet avkastning og/eller den laveste variansen. Kriteriet krever at minst en av de to ulikhetene er strikt (Bodie et al., 2009). Det er også slik at om forventet avkastning er høy nok for det ene investeringsobjektet sammenliknet med det andre, så kan man også tillate at risikoen med å investere i dette objektet er høyere enn hva tilfellet er for alternativet.



Figur 13 Sammenhengen mellom forventet avkastning og risiko (Bodie et al., 2009)

Grafisk betyr dette at så lenge vi beveger oss i pilens retning (nord-vest), så får investoren det bedre, da forventet nytte øker samtidig som risikoen (variansen) minker (Figur 13). Den konvekse funksjonen (Figur 14) representerer investorens indifferenskurve. Langs denne linjen er investoren indifferent mellom de alternative porteføljene.

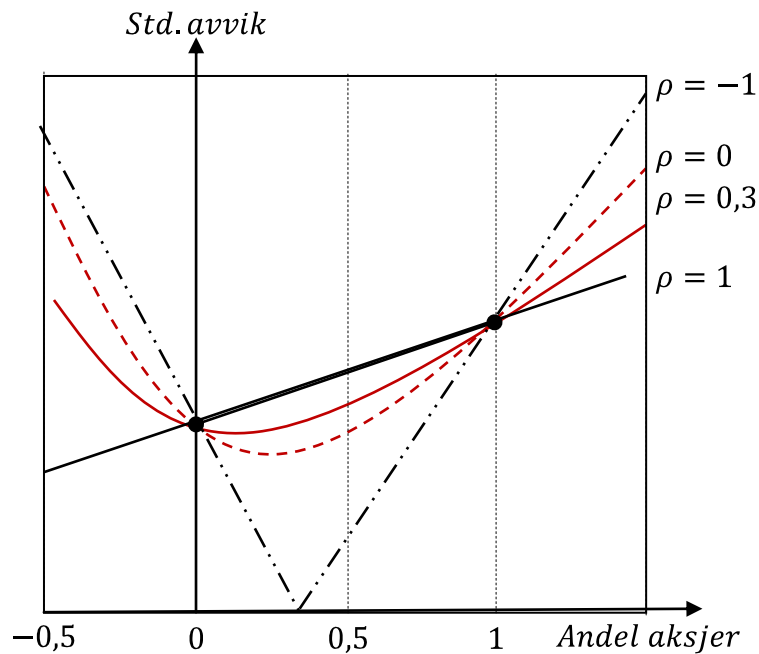
Ser vi på risiko-avkastningsmulighetene til investoren, får vi følgende graf:



Figur 14 En investors minimum-variensfront (Bodie, Kane, & Marcus, 2009)

Hvert punkt i figuren over utgjør ulike porteføljer med forskjellige forventet avkastning og risiko. Den konvekse kurven indikerer den porteføljen som gir lavest mulig risiko. Det er også verdt å merke seg at alle valg under den stiplede linjen har et bedre alternativ over med samme risiko, men høyere forventet avkastning. Kurven kalles gjerne minimum-variensfronten.

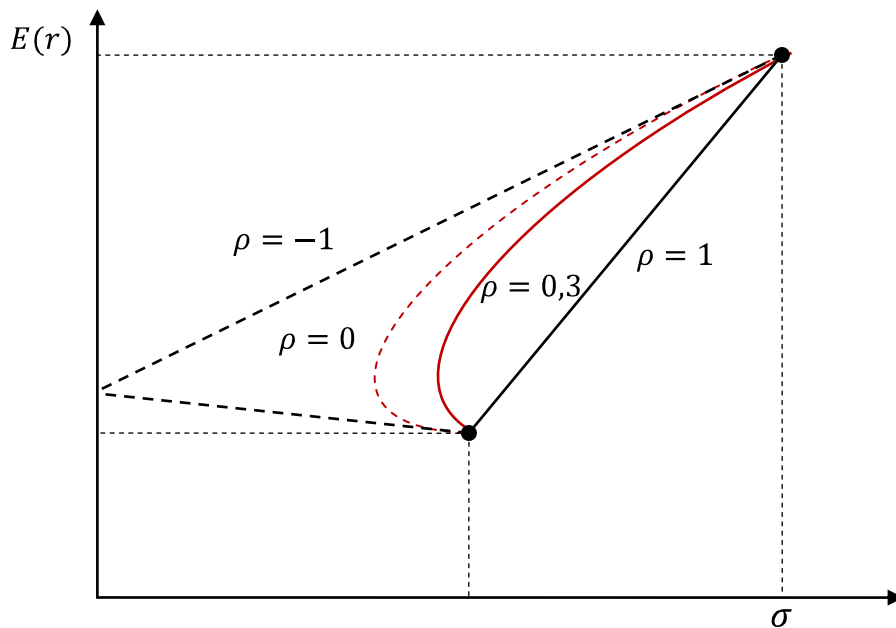
En risikoavers investor ønsker å investere i en portefølje med optimalt forhold mellom forventet avkastning og risiko. Grafen under viser hvordan investorens muligheter avhenger av kovariansen mellom de to risikofylte porteføljene.



Figur 15 Optimal portefølje som en funksjon av standardavvik σ , korrelasjon og aksjeandel (Bodie et al., 2009, s. 202)

Grafen viser sammenhengen mellom standardavviket til porteføljen, korrelasjonen mellom aktivaene og andelen aksjer. Hvis vi tar utgangspunkt i linjen merket $\rho = 0,3$, ser vi at når vi går fra en andel på 0 prosent aksjer mot en andel på 100 prosent aksjer, starter standardavviket til porteføljen først å reduseres. Så, etter et visst punkt, begynner standardavviket å stige igjen. Dette betyr at grafens bunnpunkt representerer den porteføljen med lavest risiko, og høyest forventet avkastning, altså den optimale porteføljen.

Ser vi på de samme dataene plottet med forventet avkastning på y-aksen og standardavvik på x-aksen, finner vi den samme sammenhengen.



Figur 16 Optimal portefølje som en funksjon av standardavvik σ og forventet avkastning (Bodie et al., 2009, s. 203)

Dersom vi igjen ser på linjen merket $\rho = 0,3$, så ser vi at den optimale porteføljen er det punktet lengst mot nord-vest. Dette punktet har høyest forventet avkastning per risikoenhet, og representerer således den optimale sammensetningen av aksjer og obligasjoner.

3.9 Kritikk av optimeringsmodellen

Campbell et. al. (2001) påpeker at det er en stor svakhet ved gjennomsnitt-variansmetoden. Den største ulempen som Campbell påpeker, er at denne metoden tar utgangspunkt i normalfordeling, mens det er et faktum at mange finansielle avkastningsserier ikke er normalfordelt. Dette underbygges av blant annet Boothe (1987). Det faktum at dataene i virkeligheten ikke er normalfordelt som gjennomsnitt-variansmetoden krever, fører til at de finansielle råd som denne metoden gir langt på vei kan være uriktige (Campbell et al., 2001). Bruk av denne metoden kan i verste fall da føre til dårlige investeringer.

Cohen og Zinbarg (1967) mener at også bruken av nyttefunksjoner kan skape problemer. Bakgrunnen for dette er at man gjerne tar utgangspunkt i at investoren ønsker å maksimere sin

avkastning per risikoenhet. Dette mener imidlertid Cohen og Zinberg at ikke nødvendigvis er tilfellet. De argumenterer med at de fleste investorer vil være mest opptatt av risikoaspektet med investering, og således vil den mulige avkastningen bli sekundær (Cohen & Zinbarg, 1967). Dette prinsippet blir gjerne kalt "Safety first-prinsippet" og stammer fra en artikkel av Roy (1952).

En annen viktig kritikk av gjennomsnitt-variansmodellen er hvorvidt varians er et godt nok mål for risiko (Li & Zhou, 2006). Flere andre modeller behandler risiko annerledes. Mer om dette i neste delkapittel.

Modellen kritiseres også for at den benytter seg av matematisk forventning fremfor sannsynlighet. Kritikken her går på at modellen fungerer fint for gjennomsnittsverdier basert på mange datasett, mens verdien av modellen for en investor som står overfor begrenset investeringshorisont og ett datasett er minimal (Li & Zhou, 2006). I samme artikkel viser imidlertid Li og Zhou at gjennomsnitt-variansmodellen vil føre til forventet resultat i 80 prosent av tilfellene.

3.9.1 Konkurrerende metoder for å finne beste investeringsforhold

I Dagens Næringsliv (2009) mente Hoddevik at man ved å benytte Kelly-regelen best kunne fastslå forholdet mellom aksjer og obligasjoner i NBIMs investeringer. Kelly-regelen stammer fra teori rundt optimal pengeinnsats i spill og veddemål. Det er en forutsetning at spillet har positiv forventet avkastning, så spill der man kan risikere å tape innsatsen er ikke underlagt denne regelen. Imidlertid så usannsynliggjør professor Johnsen (2009) denne påstanden i et svar på artikkelen til Hoddevik i samme avis. Hovedargumentet til Johnsen er at Kelly-regelen representerer en meget aggressiv risikoholdning hos investoren. Beregninger viser at skal man følge Kelly-regelen, så tilsvarer dette en risikoaversjonsparameter lik én. Dette er en mye mindre risikoaversparameter enn NBIM benytter i sin forvaltning av fondet. Johnsen sier at å følge denne regelen ville være galskap. Videre mener Johnsen at Hoddevik tilsynelatende tror at det kun handler om å maksimere profitten og ikke den risikojusterte profitten, som er NBIMs mål.

På bakgrunn av kritikken mot gjennomsnitt-variansmodellen er det kommet en rekke modifiserte utgaver av denne. Blant disse finner vi ”semi-variance” eller ”Shortfall” som den også kalles. Denne metoden benytter seg ikke av varians for å forklare risikoen investoren møter. I stedet krever modellen at en restriksjon definert som et minimum av avkastning, må oppnås for en hver gitt sannsynlighet (Leibowitz & Henriksson, 1989). Denne metoden gjør at man for eksempel kan sette sammen flere porteføljer med samme risikoprofil, for eksempel 95 prosent sjans for at et mål på 5 prosent avkastning oppnås.

En annen alternativ metode for å fastsette andelen aksjer og obligasjoner i porteføljen, er en metode kalt ”Downside risk”. Denne metoden bruker intuitive måleenheter for risiko som fokuserer på avkastningsspredning sett i forhold til en gitt benchmark (Harlow, 1991). Metodens mål er å redusere nedsiderisikoen til porteføljen. I stedet for å legge vekt på å minimalisere variansen til porteføljen, tar denne modellen utgangspunkt i for eksempel å minimere tap. Bakgrunnen for denne modellen er at den tar hensyn til hvordan en investor intuitivt vil oppleve risiko, og således forsøker å minimere denne.

3.10 Stasjonære og ikke-stasjonære variabler

Endringen av en variabel fra en periode til den neste kan defineres som $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$. Dette blir gjerne kalt ”its first difference”, et uttrykk som peker på initialendringen i variabelen (Bodie et al., 2009). Beregner vi alle endringene for alle perioder, vil vi få en graf som viser endringen i variabelen fra periode til periode. Avhengig av svingningene i datamaterialet kan endringene endres stort ettersom man beveger seg fremover i tidsserien.

For at en variabel skal bli definert som stasjonær, forutsettes det at variabelens gjennomsnitt og varians er konstant over tid, og kovariansen mellom disse avhenger kun av tidslengden mellom de to, og ikke hvor mange ganger gjennomsnittet og variansen er observert (Bodie et al., 2009). Dersom dette ikke er tilfelle, defineres tidsserien som ikke-stasjonær. Ikke-stasjonært gjennomsnitt vil medføre at eventuelle beregninger kan lide av til dels store feilkilder. Et ikke-stasjonært gjennomsnitt kan oppstå dersom tidsserien lider av usedvanlige utslag i dataene som ikke er representativt for den totale tidsserien som vi har et utvalg av. Slikt kan oppstå dersom man for eksempel har en tidsserie over aksjeavkastninger for en periode som starter rett før en finanskriser, og avsluttes rett etter. Det er lite trolig at

gjennomsnittet til denne dataserien er representativt for aksjeavkastningen de siste 100 år. Således vil bruk av dette ikke-stasjonære gjennomsnittet kunne påføre beregninger store feilavvik.

3.11 Kvadratiske problemer og optimering

Dersom man har et optimeringsproblem der objektfunksjonen er kvadratisk og alle eventuelle restriksjoner er lineære, har man et kvadratisk optimeringsproblem og kan benytte kvadratisk optimering for å løse problemet (Boyd & Vandenberghe, 2009). Generelt kan man definere et kvadratisk problem som følgende:

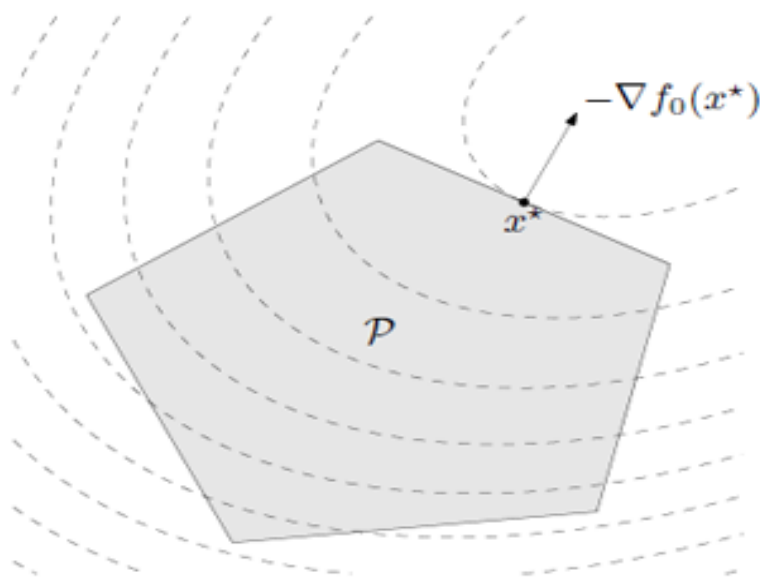
$$\text{Min } \left(\frac{1}{2}\right) x^T P_0 x + q^T x + r_0 \quad (11)$$

$$\text{s. t } Gx \leq h$$

$$Ax = b$$

$$\text{der } P \in S_+^n, G \in R^{m \cdot n} \text{ og } A \in R^{p \cdot n}$$

I løsningen av et kvadratisk optimeringsproblem med lineære bibetingelser minimeres den konkave kvadratiske funksjonen over et polyhedron ved hjelp av egnet programvare (se avsnitt om Maple 13, kapittel 4.4.1).



Figur 17 Kvadratisk optimering (Boyd & Vandenberghe, 2009)

Det fargede området i figuren over viser mulighetsområdet for minimeringsproblemet, og de ytre linjene definerer de ulike begrensningene/bibetingelsene. Det optimale punkt ligger på den linjen tilhørende objektfunksjonens konturlinjer (indifferenskurver) som akkurat berører utkanten av mulighetsområdet definert av bibetingelsene.

4 Metode

I dette avsnittet legges det vekt på fremgangsmåten benyttet for å komme frem til resultat i oppgaven. Utledningen av modellen går nøye igjennom, og bakgrunnen for eventuelle veivalg forklares. Selve kodingen og opplysninger rundt de statistiske/matematiske programmene Shazam og Maple er også inkludert. Koder benyttet er lagt med som appendiks i slutten av oppgaven.

4.1 Optimal portefølje

I og med at SPU ønsker å optimere den risikojusterte avkastningen på investert kapital, er det naturlig å benytte seg av en modell for porteføljeoptimering. Denne oppgaven ser på 3 aktiva. Disse er aksjer, industrielle obligasjoner og statsobligasjoner. Disse skal optimeres uten noe risikofritt alternativ. Dette medfører at alle aksjer og obligasjoner som SPU investerer i blir regnet som de tre nevnte aktivaklassene. Dette er gjort for og direkte svare på problemstillingen, om hvor stor andel som skal investeres i aksjer og hvor stor andel som skal investeres i obligasjoner. Det undersøkes også hvorvidt SPU bør investere i industrielle obligasjoner fremfor statsobligasjoner. Modellutregningen er basert på forelesningsnotater av Sirnes (u.å.-b, u.å.-c).

Vi ser for oss at vi som utgangspunkt har en portefølje K , bestående av ulike aksjer og obligasjoner. Alle disse aktivaene har en potensiell avkastning lik x . Dersom alle aktiva oppnår den maksimale avkastningen, vil investorens formue i neste periode bli følgende.

$$W_1 = \mathbf{a}'\mathbf{x} \quad (12)$$

der \mathbf{a} er porteføljevektene og \mathbf{x} er avkastningen til hver aksje og $\mathbf{x} \sim K(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ (normalfordelt).

Siden SPUs formue utelukkende er investert i papirer med forventede renteavkastninger, ville det vært mest korrekt å benytte seg av CRRA-nyttefunksjon i beregningen av den optimale porteføljen (se kapittel 3.6 for mer informasjon om nyttefunksjonene). Imidlertid vil

optimeringsfunksjonen være lik uavhengig av nyttefunksjon. CARA-nyttefunksjon benyttes derfor i utledningen av objektfunksjonen på grunn av dens matematiske egenskaper.

$$u(x) = -e^{-x\pi_{CARA}} \quad (13)$$

Nytten til denne investoren med CARA-nyttefunksjon blir da følgende.

$$u(W_1) = -e^{-W_1\pi} \quad (14)$$

** Der π er CARA – koefisienten (risikoaversjonsparameteren)*

Siden \mathbf{x} er forutsatt normalfordelt vil også W_1 være normalfordelt, da W_1 er en lineær funksjon av \mathbf{x} .

Vi ser også at siden logaritmen til $u(W_1)$ er normalfordelt, er nyttefunksjonen log-normalfordelt. Forventet verdi av nytten vil være

$$E(u(W_1)) = -E(e^{-W_1\pi}) \quad (15)$$

Siden den forventede verdien av nyttefunksjonen er definert som den sannsynlighetsvektede summen av potensielle verdier, kan vi skrive om uttrykket over. Uttrykket $\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}$ definerer alle sannsynlige utfall.

$$E(u(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} dx \quad (16)$$

Vi kan nå flytte ut $\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}$, da dette kun inneholder konstanter. Da får vi:

$$E(u(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (17)$$

Nå skriver vi om uttrykket til eksponenten.

$$x - \frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} = -\frac{1/2 x^2 - x\mu + 1/2 \mu^2}{\sigma^2} + x - \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (18)$$

$$= -\frac{1/2 x^2 - x\mu}{\sigma^2} + x - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{\mu 2\sigma^2}{2\sigma^2} - \frac{\sigma^2 \sigma^2}{2\sigma^2} + \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (19)$$

$$= -\frac{(x - (\mu + \sigma^2))^2}{2\sigma^2} + \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (20)$$

Vi setter så det omskrevne uttrykket inn i eksponentuttrykket:

$$E(u(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x - (\mu + \sigma^2))^2}{2\sigma^2} + \mu + \frac{1}{2}\sigma^2} dx \quad (21)$$

Dette kan igjen skrives litt om, og vi får:

$$E(u(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x - (\mu + \sigma^2))^2}{2\sigma^2}} e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} dx \quad (22)$$

Uttrykket helt til venstre er konstant og kan derfor flyttes ut av integralet. Vi flytter så inn igjen konstantuttrykket foran integraltegnet.

$$E(u(x)) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x - (\mu + \sigma^2))^2}{2\sigma^2}} dx \quad (23)$$

Vi ser at uttrykket som er igjen i integraltegnet, er uttrykket for normalfordelingen, det vil si sannsynligheten for alle mulige utfall. Summen av alle mulige utfall er selvfølgelig lik 1. Vi står derfor igjen med uttrykket foran integraltegnet.

$$E(u(x)) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \quad (24)$$

Vi har så at $\mu = -\pi E(W_1)$ og $\sigma^2 = \pi^2 \text{var}(W_1)$

Setter vi dette inn i uttrykket for forventet nytte, får vi:

$$E(u(x)) = -e^{-\pi E(W_1) + \frac{1}{2}\pi^2 \text{var}(W_1)} = -e^{-\pi(E(W_1) - \frac{1}{2}\pi \text{var}(W_1))} \quad (25)$$

Nå kan vi regne ut variansen til formuen og den forventede formuen.

$$E(W_1) = aE(x) = a\mu \quad (26)$$

$$\text{var}(W_1) = a^2 \text{var}(x) = a^2 \sigma^2 \quad (27)$$

Vi setter uttrykket for forventet formue og variansen til formuen inn i forventet nytteuttrykket.

$$E(u(x)) = -e^{-\pi(a\mu - \frac{1}{2}\pi a^2 \sigma^2)} \quad (28)$$

Siden uttrykket over kun styres av eksponenten inne i parentesen, holder det derfor å maksimere dette uttrykket for å maksimere forventet nytte. Vi får derfor følgende maksimeringsproblem:

$$\underset{a}{\text{Maks}} Z = a\mu - \frac{1}{2}\pi a^2 \sigma^2 \quad (29)$$

Vi deriverer dette uttrykket mhp. a .

$$\frac{\partial Z}{\partial a} = \mu - \pi a \sigma^2 = 0, \quad (30)$$

og løser så uttrykket mhp. a .

$$a = \frac{\mu}{\pi \sigma^2} \quad (31)$$

Dette uttrykket er grunnlaget for porteføljeoptimeringen. Vi skriver nå dette uttrykket om til vektorform for å kunne benytte det i videre analyser.

Som nevnt har vi en formue i neste periode på:

$$W_1 = \mathbf{a}'\mathbf{x} \quad (32)$$

Vi har også maksimeringsproblemet beregnet over:

$$\underset{a}{Maks} Z = E(W_1) - \pi \frac{1}{2} var(W_1) \quad (33)$$

Den forventede avkastningen til hver av aktivainvesteringene er definert som μ . Forventet formue i neste periode blir da:

$$E(W_1) = \mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}, \quad (34)$$

der \mathbf{a}' er den transponerte matrisen bestående av alle aktivaandeler.

Variansen blir da:

$$\begin{aligned} \text{var}(W_1) &= E(W_1)^2 - (E(W_1))^2 \\ &= E(\mathbf{a}'\mathbf{x}\mathbf{x}'\mathbf{a}) - E(\mathbf{a}'\mathbf{x})E(\mathbf{a}'\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (35)$$

Dette uttrykket for variansen kan skrives om til et enklere uttrykk.

$$\text{var}(W_1) = \mathbf{a}'(E(\mathbf{x}\mathbf{x}') - E(\mathbf{x})E(\mathbf{x}'))\mathbf{a} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \text{var}(W_1) &= \mathbf{a}' \begin{pmatrix} E(x_1)^2 - (E(x_1))^2 & \cdots & E(x_K x_1) - E(x_K)E(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(x_1 x_K) - E(x_1)E(x_K) & \cdots & E(x_K)^2 - (E(x_K))^2 \end{pmatrix} \mathbf{a} \end{aligned} \quad (37)$$

Uttrykket inne i parentesene er ikke noe annet enn kovariansmatrisen til \mathbf{x} . Vi kan derfor skrive om uttrykket til følgende.

$$\text{var}(W_1) = \mathbf{a}' \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_K \sigma_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1 \sigma_K & \cdots & \sigma_K^2 \end{pmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a}, \quad (38)$$

der $\mathbf{\Sigma}$ er kovariansmatrisen til \mathbf{x} .

Siden SPU ikke har noe risikofritt alternativ til investeringen, må all kapital investeres i risikoutsatte papirer. Dette medfører at maksimeringsproblemet blir noe annerledes enn hva tilfellet er for en vanlig investor. En vanlig investor vil alltid ha muligheten til å plassere alle pengene i risikofrie instrumenter og således ha en garantert avkastning.

For å ta hensyn til denne restriksjonen benyttes Lagrange med bibetingelsen $\mathbf{a}'\mathbf{1}=1$. Denne bibetingelsen garanterer at 100 prosent av investert kapital investeres i gitte aktiva. Vi setter nå inn de utregnede uttrykkene for varians og forventet avkastning, og får følgende optimeringsproblem:

$$\underset{\mathbf{a}'}{\text{Maks}} Z = \mathbf{a}'\mathbf{x} - \pi \frac{1}{2} \mathbf{a}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{a} \quad \text{s.t. } \mathbf{a}'\mathbf{1} = 1 \quad (39)$$

Vi skriver dette som Lagrange-funksjon.

$$\mathcal{L} = \mathbf{a}'\mathbf{x} - \pi \frac{1}{2} \mathbf{a}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{a} - \lambda \mathbf{a}'\mathbf{1}, \quad (40)$$

og deriverer funksjonen mhp. \mathbf{a}' .

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}'} = \mathbf{x} - \pi \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{a} - \lambda \mathbf{1} = 0 \quad (41)$$

Dette løses så mhp. \mathbf{a} , og vi får uttrykket for optimal portefølje.

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\pi} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{x} - \frac{1}{\pi} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\lambda \mathbf{1} = \frac{1}{\pi} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \lambda \mathbf{1}) \quad (42)$$

Vi kan nå benytte sammenhengen $\mathbf{a}'\mathbf{1} = 1$ og får følgende uttrykk.

$$\mathbf{1}'\mathbf{a} = 1 = \mathbf{1}' \frac{1}{\pi} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \lambda \mathbf{1}) \quad (43)$$

Uttrykket kan nå løses mhp. lambda.

$$\pi = \mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \lambda \mathbf{1}) \quad (44)$$

$$\pi = \mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\lambda \mathbf{1} \quad (45)$$

$$\lambda = \frac{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{x} - \pi}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} \quad (46)$$

Vi kan nå sette uttrykket for lambda inn i optimeringsuttrykket.

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\pi} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x} - \pi}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} \mathbf{1} \right), \text{ der } \mathbf{a} \in [0,1] \quad (47)$$

** Der π er grad av risikoaversjon, \mathbf{a} er andel investert i hvert aktiva, og \mathbf{x} er avkastningsraten til hvert enkelt aktiva.*

Dette uttrykket vil bli benyttet til å beregne den optimale porteføljen for SPU. Uttrykket viser også at både risikoaversjonsparameteren og kovariansmatrisen har stor påvirkning på fordelingen mellom aktiva.

4.1.1 Svakheter

En svakhet med å benytte optimeringen over er at man ikke tar hensyn til alle de ulike typer rentebærende instrumenter som NBIM investerer i. Ideelt sett skulle man delt opp obligasjoner i flere typer enn de to som benyttes her. Bakgrunnen for at dette ikke blir gjort i denne oppgaven, er at obligasjonenes variasjoner på sett og vis blir inkludert ved at man benytter en sammensatt portefølje i analysen. Dette medfører at de parametere som blir beregnet på bakgrunn av porteføljens datagrunnlag, vil være et snitt av alle de investeringer fondet gjør. Ved å gjøre det på denne måten får man også direkte ut det svaret problemstillingen etterspør, og således er denne forenklingen legitim.

En annen svakhet ved benyttelse av denne optimeringsmetoden er at ikke alle faktorer som spiller inn er tatt med. Det vil si at uttrykket er noe forenklet i forhold til den virkelige verden. Som Johnsen (2009) uttrykker det i Dagens Næringsliv: "Lærebokmodellen er selvfølgelig altfor enkel til å vurdere aksjeandelen i oljefondet. Vi må også ta hensyn til fondets langsiktige forpliktelser, for eksempel fremtidige generasjoners importbehov. Dette ville trekke mot en vesentlig høyere aksjeandel, for å unngå den betydelige inflasjonsrisikoen ved lange obligasjoner." Imidlertid vil lærebokmodellen gi en indikasjon på hva som er den rette veien å gå; så kan det heller drøftes i ettertid hvorvidt man skal moderere eller øke estimatene på bakgrunn av hensyn som ikke omfattes av modellen.

4.2 Datamaterialet

Datamaterialet som benyttes i denne oppgaven, skal i størst mulig grad være identisk med den porteføljen som NBIM har investert i. Dette for at det resultatet som oppstår via optimeringsproblem skal bli mest mulig realistisk med tanke på investeringsstrategien til SPU.

Imidlertid var det ikke mulig å oppdrive de indeksene NBIM benytter i sin referanseportefølje (se kapittel 2.3 for mer informasjon om referanseporteføljen). Denne oppgaven må dermed ta en antagelse om at det amerikanske markedet for obligasjoner er en god ”proxy” for det internasjonale obligasjonsmarkedet. Denne oppgaven benytter seg av to ulike obligasjonsdatasett levert av den amerikanske sentralbanken. Fra disse indeksene benyttes data fra perioden 31. desember 1969 til 31. mars 2010. Dette til tross for at begge dataseriene går lenger tilbake i tid. Bakgrunnen for at datamaterialet blir kuttet ned, er for å sikre samsvar med aksjeindeksen. Dersom det hadde vært benyttet lengre tidsserier for obligasjoner kontra aksjer, ville dette medført at risikoprofilene ikke ville samsvart.

Alle data ble formatert og klargjort for optimal porteføljeanalysen i Microsoft Excel 2007.

Obligasjonsdataene som ble benyttet var forventet årlig avkastning beregnet hver måned. For at disse skulle la seg sammenlikne med aksjeindeksen måtte disse regnes om til endring i årlig avkastning fra måned til måned. Dataene ble derfor skrevet om ved å benytte formelen under.

$$\text{Endring i verdi} = \left(\left(\frac{\left(1 + \frac{y_t}{100}\right)^n}{\left(1 + \frac{y_{t+1}}{100}\right)^n} \right) \left(1 + \left(1 + \left(\frac{y_{t+1}}{100}\right)\right)^{\left(\frac{1}{12}\right)} - 1 \right) \right) - 1, \quad (48)$$

*der y = forventet årlig avkastning, t = periode og n
= antall år løpetid på obligasjonene.*

Formelen gir verdiendringen fra måned til måned når man tar hensyn til nåverdi.

De to obligasjonsdatasettene som benyttes er følgende:

4.2.1 Moody's Aaa-graderte industrielle obligasjoner

Denne dataserien består av månedsdata over gjennomsnitt av renteavkastningen for amerikanske industrielle obligasjoner [10]. Dataene er omregnet i henhold til formelen gitt over, og korrigert for inflasjon (amerikansk sesongjustert konsumprisindeks).

4.2.2 Amerikanske statsobligasjoner med løpetid på 10 år

Dataserien består av månedsdata over rentesatsen for amerikanske statsobligasjoner med løpetid på 10 år [10]. Dataene er omregnet i henhold til formelen over og korrigert for inflasjon.

Det er i tillegg konstruert et datasett for obligasjoner som er snittet av de to datasettene over. Dette for å sikre at utregningene ikke påvirkes av korrelasjonen mellom de to seriene med finansielle data.

4.2.3 THE WORLD INDEX Standard (Large+Mid Cap)

For det internasjonale aksjemarkedet benyttes ” THE WORLD INDEX Standard (Large+Mid Cap)” for perioden 31. desember 1969 til 31. mars 2010 [5]. Denne indeksen består av store og mellomstore selskaper fra 23 industriland med godt utviklede markeder spredt over hele verden, og har som mål å vise prestasjonen til disse landene sett under ett [6]. Denne indeksen benytter 31. desember 1969 som basis. For å kunne sammenlikne disse dataene med obligasjonsdataene er dataene regnet ut med følgende formel, og korrigert for inflasjon.

$$\text{Endring i verdi} = \frac{y_t}{y_{t-1}} - 1, \quad (49)$$

der y = indeksverdi og t = periode

4.3 Stasjonære og ikke-stasjonære variabler

Det finnes i utgangspunktet mange metoder for å fastslå om en variabel er stasjonær (Bodie et al., 2009). Denne oppgaven legger imidlertid vekt på Dickey-Fuller-testen for stasjonæritet. Det er imidlertid verd å merke seg at de fleste finansielle dataserier er stasjonære, og denne testen er ment som en kontroll for å sikre at dette er tilfelle for dataseriene benyttet i beregningene.

4.3.1 Dickey-Fuller test 1 (med konstant, ingen trend)

Denne testen baserer seg på den førsteordens autoregressive modellen (AR(1))

$y_t = \rho y_{t-1} + v_t$ $|\rho| < 1$, der v_t er en uavhengig feil med gjennomsnitt lik null og konstant varians σ_v^2 . Disse uavhengige feilkildene kan være ytre sjokk av ulik karakter (Bodie et al., 2009, s. 329). En finanskriser vil være et eksempel på et ytre sjokk. ρ forteller i hvor stor grad inneværende periodes verdi (y_t) er gitt av forrige periodes verdi (y_{t-1}). Inneværende periodes verdi er dermed definert som en prosentvis andel av forrige periodes verdi pluss feilleddet v_t , som stammer fra et ytre sjokk. Navnet ”førsteordens autoregressiv modell” kommer av at vi opererer med kun ett ”lag”, altså t-1 (Bodie et al., 2009).

Dickey-Fuller-testen baserer seg på følgende omskrevne variant av den førsteordens autoregressive modellen (Bodie et al., 2009)

$$\Delta y_t = \alpha + \gamma y_{t-1} + v_t, \quad (50)$$

der $\gamma = \rho - 1$, $\alpha =$ en konstant og $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$

Testen har følgende null- og alternativ hypotese:

$$\begin{aligned} H_0: \rho = 1 &\Leftrightarrow H_0: \gamma = 0 \\ H_1: \rho < 1 &\Leftrightarrow H_1: \gamma < 0 \end{aligned} \quad (51)$$

Nullhypotesen forkastes dersom $\rho < 1$, og tidsserien er da stasjonær. Dersom $\rho = 1$, så beholdes nullhypotesen, og tidsserien er ikke stasjonær.

Vi får følgende forkastningsregel:

Forkast nullhypotesen dersom $\tau \leq \tau_c$. Dersom $\tau > \tau_c$ beholdes nullhypotesen, der τ er teststatistikken og τ_c er kritisk verdi.

Testen ble programmert i Shazam med et signifikansnivå på 10 % (se avsnittet ”Shazam versjon 10”, i kapittel 4.4.2, for mer informasjon om programmet).

4.4 Programmering

4.4.1 Maple 13

Denne oppgaven benytter det matematiske programmet Maple versjon 13 for å løse maksimeringsproblemet.

Maple er et teknisk kalkulasjonsprogram som egner seg til alt fra enkle kalkulasjoner til tunge modellberegninger. Programmet kan benyttes til alle typer matematiske beregninger [4].

Maple er benyttet i denne oppgaven på grunn av de gode mulighetene for optimalisering med lineære bibetingelser. Koden benyttet er vedlagt i appendiks 1.

4.4.2 Shazam versjon 10

Shazam er et omfattende statistisk program for økonomer, statistikere, biologer, sosiologer mfl. [9]. Hovedstyrken til programmet er regresjonsanalyser, og det fleksible programmeringsspråket gjør også programmet meget anvendelig [9].

Denne oppgaven benytter programmet for å gjennomføre Dickey-Fullertesten for stasjonæritet, og beregning av konfidensintervall. I tillegg ble programmet benyttet til å lage plot av dataserier. Koden benyttet i Shazam er vedlagt i appendiks 2 og 3.

5 Analyse/Resultater

Dette avsnittet viser resultatene på bakgrunn av den foretatte analysen. Viktige funn er også presentert.

5.1 Analyse av stasjonæritet for dataserier

Som nevnt under teoridelen må det sikres at hver dataserie er stasjonær. Test av stasjonæritet er gjort ved hjelp av Dickey-Fuller-test i det økonometriske programmet Shazam, og resultatene fra denne testen blir nå presentert.

5.1.1 Moody's Aaa-graderte industrielle obligasjoner

Tabell 5 Resultat fra Dickey-Fullertest i Shazam for AAANA

VARIABLE : AAANA			
DICKEY-FULLER TESTS - NO.LAGS = 21 NO.OBS = 460			
NULL	TEST	ASY. CRITICAL	
HYPOTHESIS	STATISTIC	VALUE 10%	

CONSTANT, NO TREND			
A (1)=0 T-TEST	-4.2979	-2.57	
A (0)=A (1)=0	9.2358	3.78	
		AIC =	-7.598
		SC =	-7.392

Som vi ser av tabellen over, forkaster vi nullhypotesen, og konkluderer med at dataserien er stasjonær, da teststatistikkverdien (-4,2979) er mindre enn den kritiske verdien (-2,57).

5.1.2 Amerikanske statsobligasjoner med løpetid på 10 år

Tabell 6 Resultat fra Dickey-Fullertest i Shazam for TCMNOMY10

VARIABLE : Y10			
DICKEY-FULLER TESTS - NO.LAGS = 21 NO.OBS = 460			
NULL HYPOTHESIS	TEST STATISTIC	ASY. CRITICAL VALUE 10%	

CONSTANT, NO TREND			
A(1)=0 T-TEST	-4.9228	-2.57	
A(0)=A(1)=0	12.125	3.78	
			AIC = -7.134
			SC = -6.928

Nullhypotesen forkastes, da teststatistikkverdien (-4,9228) er mindre enn den kritiske verdien (-2,57). Dataserien er stasjonær.

5.1.3 THE WORLD INDEX Standard (Large+Mid Cap)

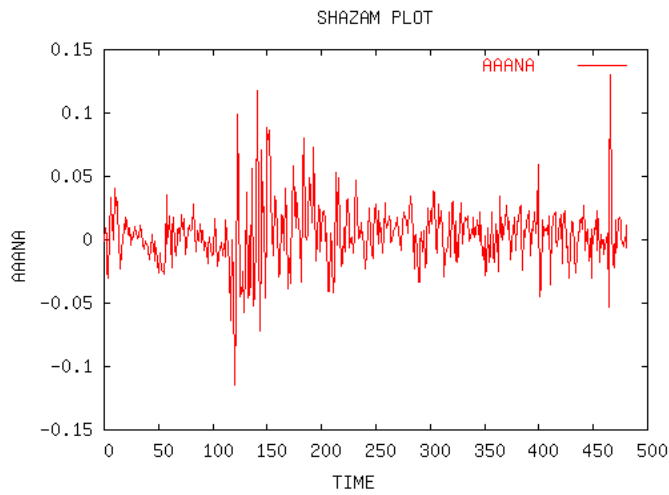
Tabell 7 Resultat fra Dickey-Fullertest i Shazam for MSCI World Cap

VARIABLE : WORLDCAP			
DICKEY-FULLER TESTS - NO.LAGS = 11 NO.OBS = 470			
NULL HYPOTHESIS	TEST STATISTIC	ASY. CRITICAL VALUE 10%	

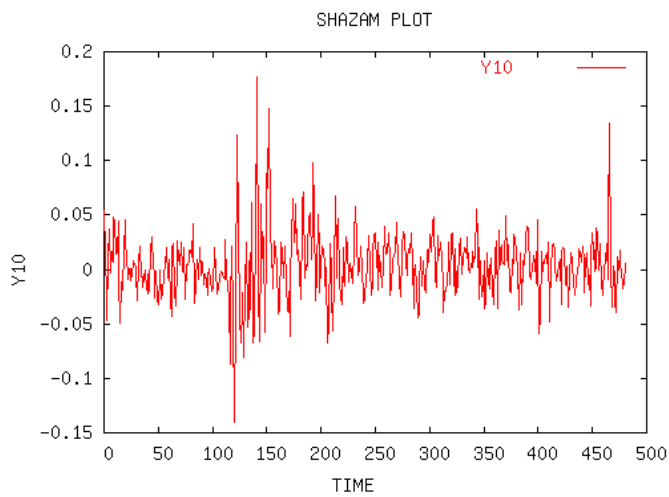
CONSTANT, NO TREND			
A(1)=0 T-TEST	-5.2148	-2.57	
A(0)=A(1)=0	13.603	3.78	
			AIC = -6.266
			SC = -6.151

Nullhypotesen forkastes, da teststatistikkverdien (-5,2148) er mindre enn den kritiske verdien (-2,57). Dataserien er stasjonær.

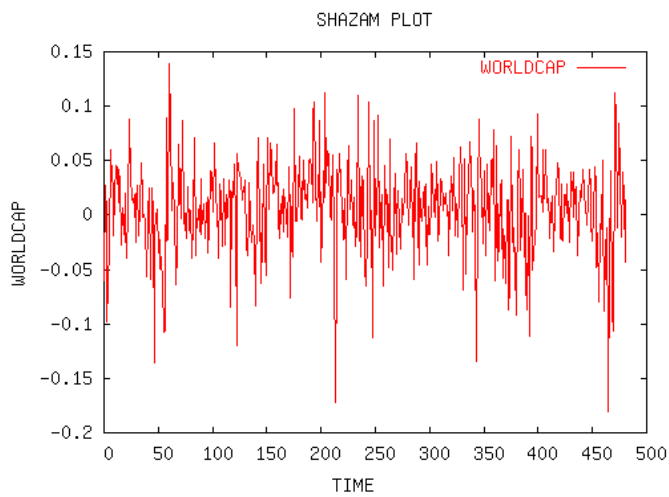
5.2 Plot av dataserier



Figur 18 Plott av dataserien AAANA



Figur 19 Plott av dataserien TCMNOMY10



Figur 20 Plott av dataserien MSCI World Cap

Vi ser tydelig av grafene over at dataene forbundet med aksjer har høyest varians (Figur 20). Det er også verd å merke seg at mye av variansen til obligasjonsdataene stammer fra observasjon 100 til om lag 150 (Figur 18 og Figur 19). Dette var en periode på slutten av 70-tallet og begynnelsen av 80-tallet som var preget av store inflasjonssvingninger [1], noe som forklarer de store svingningene i datamaterialet for obligasjoner.

5.3 Konfidensintervall av forventet verdi

Tabellen nedfor viser et 90 prosent konfidensintervall for de forventede avkastningene til de tre aktivaene. Det vil si at vi med 90 prosent sikkerhet kan si at den virkelige forventede avkastningen ligger innenfor dette intervallet. Det som er verdt å merke seg, er hvor stort spriket er mellom øvre og nedre del av intervallet for alle aktiva. Dette betyr at den optimale porteføljen kan være utsatt for relativt stor usikkerhet, da det er relativt stor usikkerhet rundt de forventede avkastningene.

Tabell 8 90 % konfidensintervall av forventet realavkastning

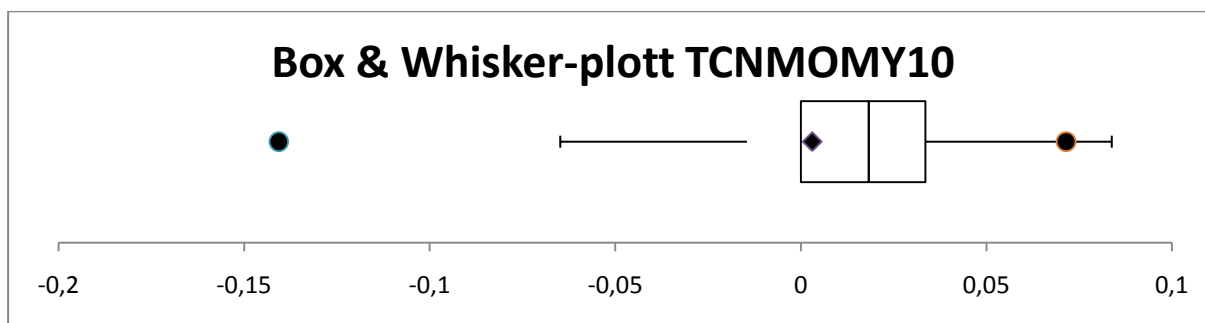
	Nedre 5 %	Gjennomsnitt	Øvre 5 %
AAANA	0,02 %	0,47 %	0,93 %
TCMNOMY10	-0,04 %	0,44 %	0,91 %
MSCI WC	0,14 %	0,47 %	0,79 %
50 % AAANA og 50 % TCMNOMY10	-0,01 %	0,45 %	0,92 %

Vi legger merke til at den forventede verdien for statsobligasjoner, samt dataene bestående av 50 prosent AAANA og 50 prosent TCMNOMY10, faktisk er negativ for nedre 5 prosent av konfidensintervallet.



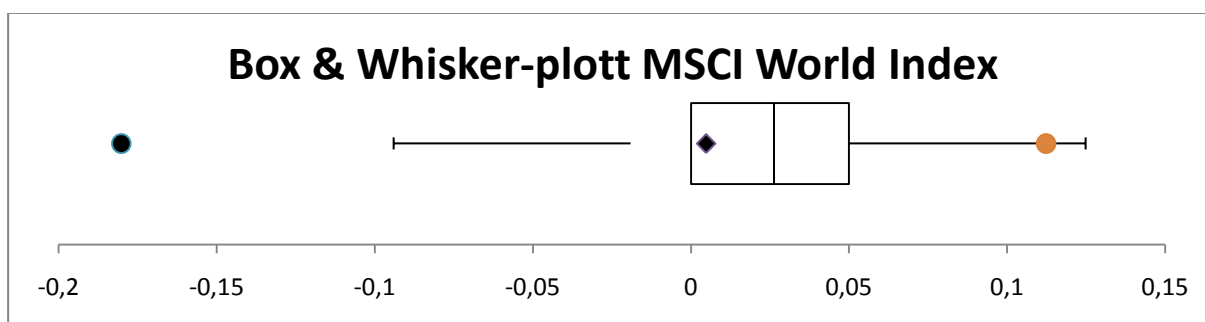
Figur 21 Box & Whisker plot AAANA

Som vi ser av box and whisker-plottet for de industrielle obligasjonene, er dataserien forskjøvet noe mot høyre. Den forventede avkastningsverdien ligger mellom 1. kvartil og medianen. Dette betyr at det er 50 prosent sikkert at den virkelige verdien for forventet verdi ligger i dette området. Det er også verdt å merke seg at det finnes verdier i datasettet som er å regne som "outliere", da disse er utenfor det området som betegnes som det valide. Disse vil påvirke beregningen av den forventede verdien.



Figur 22 Box & Whisker plot TCNMOMY10

Også dataserien til de 10 år lange amerikanske statsobligasjonene er høyreforskjøvet. Den forventede avkastningen ligger i likhet med de industrielle obligasjonenes forventede verdi mellom første kvartil og medianlinjen. Også denne serien har outliere, men disse er kun observert for de lave verdiene. Det vil si at vi kun har outliere i det nedre verdisjiktet.



Figur 23 Box & Whisker plot MSCI World Index

Også dataserien for verdens aksjer er forskjøvet mot høyre, det finnes imidlertid kun outliers i det nedre sjikt.

Det er imidlertid verdt å merke seg at hvorvidt dataseriene er skjeve fremfor normalfordelt, ikke påvirker resultatet i optimaliseringen, da en skjev serie, også kalt en serie med ”fete haler”, har varians og forventet verdi i likhet med en normalfordelt serie.

5.4 Risikoaversjonsparameteren

Den kvadratiske optimeringen i Maple ga følgende resultatvektor (\mathbf{a}) med en risikoaversjonsparameter (π) lik 3 og inflasjonsjusterte data.

$$\mathbf{a} = [a_1 = 0,6355 \ a_2 = 0 \ a_3 = 0,3645]$$

Den optimale porteføljen inneholder en andel i Moody’s AAA og MSCI World Cap på henholdsvis 63,55 prosent og 36,45 prosent. Porteføljen inneholder ikke statsobligasjoner (TCMNOMY10).

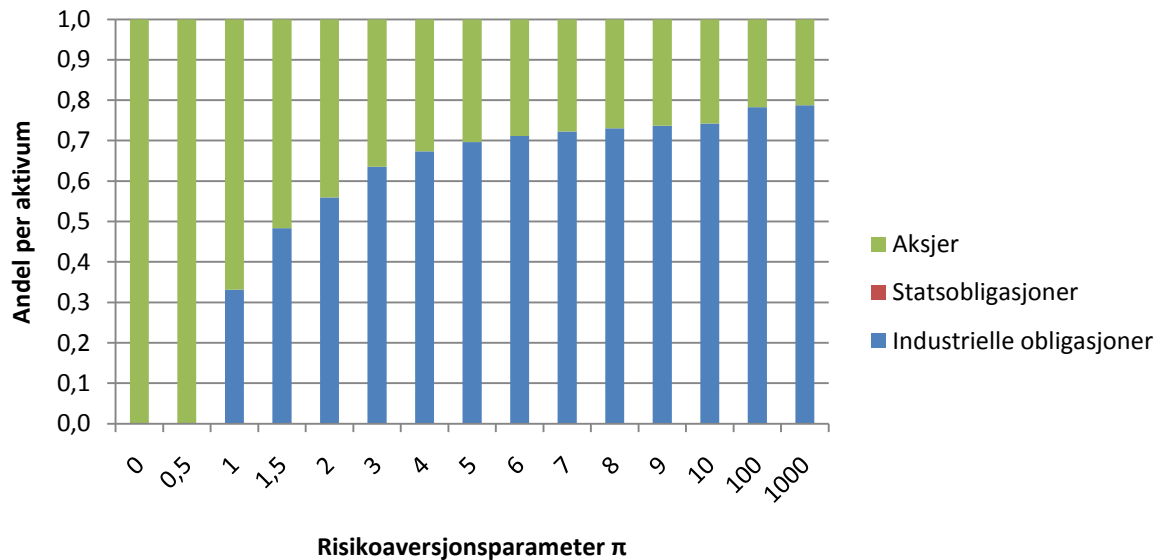
Ser vi på optimeringen med de to aktivaklassene ”obligasjoner” og ”aksjer”, der ”obligasjoner” består av 50 prosent AAANA og 50 prosent TCMNOMY10, ble den optimale porteføljen med risikoaversjonsparameter lik 3, følgende:

$$\mathbf{a} = [a_1 = 0,5732, a_2 = 0,4268]$$

Det vil si at den optimale porteføljen med to aktiva består av 57,32 prosent obligasjoner og 42,68 prosent aksjer.

Figuren under viser hvordan sammensetningen av de 3 aktivaene endrer seg når risikoaversjonsparameteren endrer seg. Det er verd å merke seg at så lenge risikoaversjonsparameteren er mindre eller lik 0,5, så sier modellen at det er ideelt å investere 100 prosent i aksjer. Etersom parameteren øker i verdi reduseres andelen aksjer i den optimale porteføljen, og andelen investert i industrielle obligasjoner klasse AAA øker.

Statsobligasjonene er ikke med i den optimale porteføljen for noen verdi av risikoaversjonsparameteren.

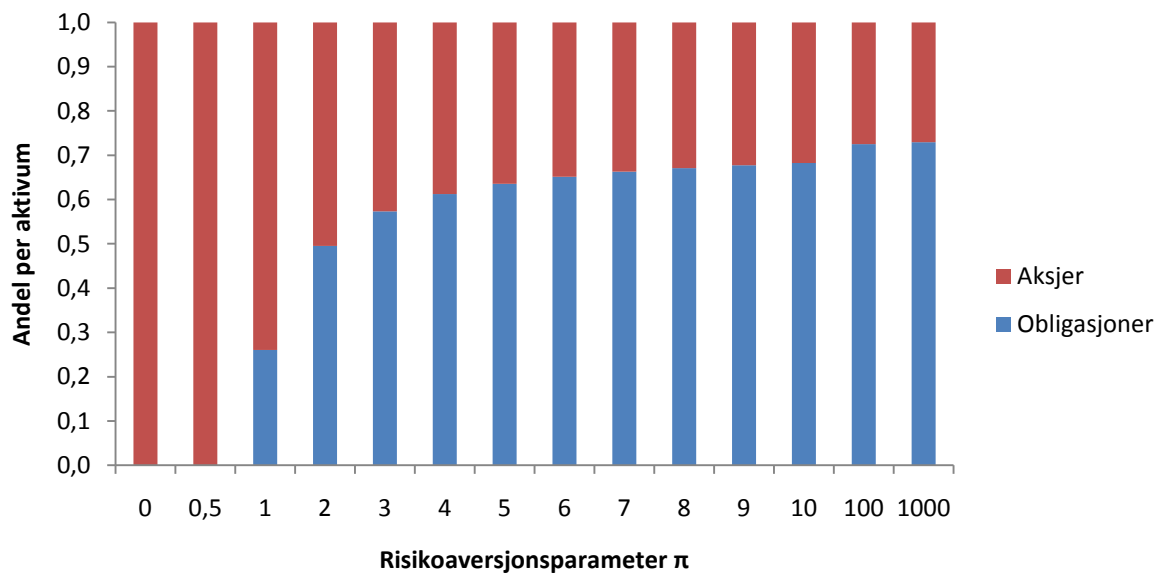


Figur 24 Grafisk sammenheng mellom π og a

Tabell 9 Sammenhengen mellom π og a

π	Industrielle obligasjoner	Statsobligasjoner	Aksjer
0	0,00 %	0,00 %	100,00 %
0,5	0,00 %	0,00 %	100,00 %
1	33,13 %	0,00 %	66,87 %
1,5	48,34 %	0,00 %	51,66 %
2	55,95 %	0,00 %	44,05 %
3	63,55 %	0,00 %	36,45 %
4	67,35 %	0,00 %	32,65 %
5	69,63 %	0,00 %	30,37 %
6	71,16 %	0,00 %	28,84 %
7	72,24 %	0,00 %	27,76 %
8	73,06 %	0,00 %	26,94 %
9	73,69 %	0,00 %	26,31 %
10	74,20 %	0,00 %	25,80 %
100	78,30 %	0,00 %	21,70 %
1000	78,71 %	0,00 %	21,29 %
10000	78,76 %	0,00 %	21,24 %

Det er tydelig at aksjer er dominerende ved lave verdier for risikoaversjon, mens for høye verdier er det industrielle obligasjoner som dominerer.



Figur 25 Sammenhengen mellom π og aktivaklasse

Tabell 10 Sammenhengen mellom π og aktivaklasse

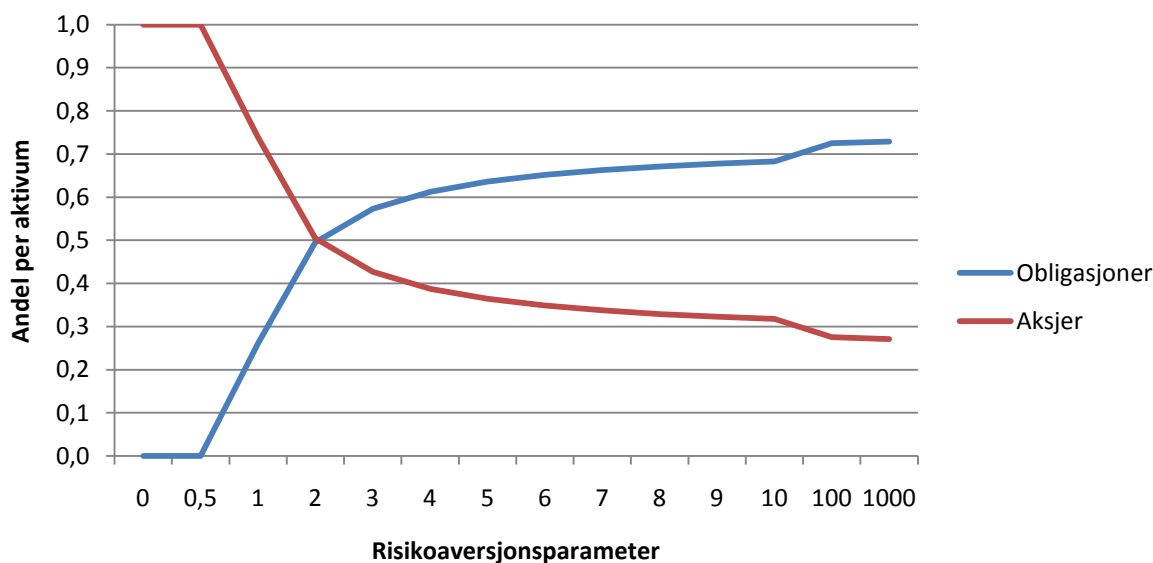
π	Obligasjoner	Aksjer
0	0,00 %	100,00 %
0,5	0,00 %	100,00 %
1	26,07 %	73,93 %
2	49,51 %	50,49 %
3	57,32 %	42,68 %
4	61,23 %	38,77 %
5	63,58 %	36,42 %
6	65,14 %	34,86 %
7	66,26 %	33,74 %
8	67,09 %	32,91 %
9	67,74 %	32,26 %
10	68,26 %	31,74 %
100	72,48 %	27,52 %
1000	72,91 %	27,09 %
10000	72,95 %	27,05 %

Som Figur 25 og Tabell 10 viser, er optimeringen kun i liten grad er påvirket som følge av høy grad av korrelasjon mellom industrielle obligasjoner og statsobligasjoner. Resultatet av optimeringen er tilnærmet identisk (forskjeller kan forklares med forskjell i forventet verdi og varians for obligasjonene).

5.5 Statens pensjonsfond utland

Ut fra Figur 24 ser vi at denne modellen tilsier at Statens pensjonsfond utland opererer med en risikoaversjonsparameter i overkant av 1 (dette gir omtrent SPU's fordeling mellom aksjer og obligasjoner). En risikoaversjonsparameter på omtrent 1,177 gir tilnærmet den fordelingen mellom aksjer og obligasjoner fondet har i dag.. Tabellen forteller oss også at SPU i perioden frem til aksjeandelen ble økt opererte med en risikoaversjonsparameter på om lag 2,44. Ut fra denne modellen ble altså denne parameteren redusert med over én enhet ved innføring av en aksjeandel på 60 prosent.

Dette resultatet bekreftes delvis av optimeringen med to aktiva (Figur 25). Her svarer en risikoaversjonsparameter på 1,42 dagens investeringsforhold for SPU, mens den tidligere strategien svarer til en parameterverdi på 3,62. Det vil si at SPU reduserte sin risikoaversjon med over 2 enheter.



Figur 26 Optimal portefølje ved ulike π

Grafen over viser et annet interessant resultat. Den optimale porteføljen konvergerer mot en gitt sammensetning når risikoaversjonsparameteren blir tilstrekkelig stor.

Dette medfører at uansett risikoaversjonsparameter så inneholder den optimale porteføljen for en hver investor en andel aksjer.

For optimeringen med to aktiva, konvergerer resultatet mot en fordeling bestående av om lag 73 prosent obligasjoner og 27 prosent aksjer. Ser vi på optimeringen med tre aktiva er fordelingen om lag 78,8 prosent industrielle obligasjoner og 21,2 prosent aksjer.

5.6 De ulike aktiva

Under vises varians/kovariansmatrisene som ble benyttet i beregningen av de optimale porteføljene. I tillegg er korrelasjonsmatrisene vist her.

Tabell 11 Varians/kovariansmatrise for 3 aktiva

	AAANA	TCMNOMY10	World Cap
AAANA	0,00059	0,00066	0,00011
TCMNOMY10	0,00066	0,00092	-0,00008
World Cap	0,00011	-0,00008	0,00189

Tabell 12 Korrelasjonsmatrise 3 aktiva

	AAANA	TCMNOMY10	World Cap
AAANA	1		
TCMNOMY10	0,89977742	1	
World Cap	0,10576637	-0,06188951	1

Korrelasjonsmatrisen over viser at korrelasjonen mellom industrielle obligasjoner og statsobligasjoner er høy. Dette kan som nevnt, påvirke resultatet av optimeringen og er bakgrunnen for at også optimering med 2 aktiva er med, da som en kontrollregning.

Tabell 13 Varians/kovariansmatrise for optimering med 2 aktiva

	<i>Obligasjoner</i>	<i>Aksjer</i>
<i>Obligasjoner</i>	0,00071	0,00001480
<i>Aksjer</i>	0,00001480	0,00189

Tabell 14 Korrelasjonsmatrise 2-aktiva

	<i>Obligasjoner</i>	<i>Aksjer</i>
Obligasjoner	1	
Aksjer	0,01278473	1

5.6.1 Moody's AAA graderte industrielle obligasjoner

Denne porteføljen bestående utelukkende av AAA graderte selskapsobligasjoner var den porteføljen med lavest risiko målt ved variansen. Som det kan leses av varians/kovariansmatrisen (Tabell 11), hadde denne en kalkulert risikoprosent på 8,4 prosent (målt som standardavvik og for et helt år, $(0,00059 * 12)^{0,5} \cdot 100$) på den diskonterte verdiendringen. Dette medfører at de industrielle obligasjonene er det aktiva med lavest risiko. Den forventede årlige realavkastningen er på 4,54 prosent.

Dataene for Moody's AAA graderte industrielle obligasjoner ble diskontert med $n = 10$, og justert for inflasjon.

5.6.2 Amerikanske statsobligasjoner med 10 år løpetid

Forventet realavkastning var 4,1 prosent, noe som er lavere enn hva tilfellet var for de industrielle obligasjonene. Risikoprosenten var på 10,5 prosent. Det vil si at statsobligasjonene har lavere avkastning per risikoenhet enn de industrielle obligasjonene.

Statsobligasjonene var ikke med i den optimale porteføljen for noen verdi av risikoaversjonsparameteren.

Dataene for statsobligasjoner ble diskontert med $n = 10$, og justert for inflasjon.

5.6.3 MSCI THE WORLD INDEX Standard (Large+Mid Cap)

Den forventede realavkastningen til aksjeporteføljen ble beregnet til å være på 5,8 prosent.

Risikoprosenten på 15,1 prosent viser at aksjene er den mest risikofylte investeringen, og har den høyeste forventede avkastningen.

Aksjedataene er inflasjonsjustert.

6 Diskusjon

6.1 Den optimale porteføljen med gitt risikoaversjonsparameter

Med den risikoaversjonsparameteren som ble drøftet tidligere i oppgaven, ble den optimale porteføljen noe mindre risikoeksponert enn hva som er tilfellet med dagens investeringsstrategi for Statens pensjonsfond utland. Som nevnt tidligere fordeler investeringene seg på 60 prosent aksjer, og de resterende 40 prosentene i obligasjoner. Denne oppgavens optimale portefølje med en risikoaversjonsparameter på 3, ga en investering i aksjer på 36,5 prosent, mens investeringen i obligasjoner da var den resterende 63,5 prosentene. Dette er mer likt den tidligere investeringsstrategien fondet benyttet frem til 2007. Optimeringen med to aktiva og en risikoaversjonsparameter lik 3 bekrefter dette, da med en fordeling bestående av 57,3 prosent obligasjoner og 42,7 prosent aksjer.

Årsaken til dette resultatet er å finne i de beregnede avkastningene og i kovariansmatrisene. Under vises de variansene og forventede avkastningene Johnsen (2009) nevner i sin artikkel i Dagens Næringsliv, og som stammer fra St.meld. 20 (2008-2009). Denne omhandler kun de to aktivaene obligasjoner og aksjer.

Tabell 15 Forventet avkastning og varians for SPU (Finansdepartementet, 2009b, s. 59)

	Obligasjoner	Aksjer
Forventet avkastning (Med langsiktig realrente = 2 %)	2,7	5
Varians (risiko)	0,0036	0,0225

Som vi ser av Tabell 15, er risikoen forbundet med aksjene omtrent den samme som beregnet i denne oppgaven. Det vil si en varians på om lag 0,00189 ($0,0225/12$), eller en risikoprosent på 15 prosent ($\sqrt{0,00189} \cdot 100$). Imidlertid er de forventede realavkastningene betydelig lavere enn hva tilfellet er for forventet realavkastning basert på datamaterialet i denne oppgaven. Når det gjelder obligasjonene, er risikoen forbundet med obligasjonene omtrent 50 prosent høyere sammenliknet med de estimer som er gjort i Stortingsmeldingen. Stortingsmeldingen viser til en risikoprosent på 6 prosent, mens risikoen beregnet i denne oppgaven er på 9,2 prosent (50 % AAANA og 50 % TCMNOMY10).

Imidlertid er også den forventede avkastningen om lag dobbel så høy. Dette forklarer hvorfor det blir en forskyvning mot obligasjoner sammenliknet med estimatene både Johnsen og Finansdepartementet har gjort. For obligasjonenes del er den forventede avkastningen økt mer enn risikoen, og således vil det være naturlig at det blir en forskyvning vekk fra aksjer. Det vil også være slik at den relativt høye avkastningen på aksjene sammenliknet med den beregnet i Stortingsmeldingen, vil gi en forskyvning mot aksjer. Imidlertid er kraften som trekker mot obligasjoner sterkest, og medfører at den optimale porteføljen inneholder mer obligasjoner enn hva tilfellet er for Finansdepartementets beregninger.

Som dataplottene (Figur 18, Figur 19 og Figur 20) viser, har obligasjonsdataene relativt liten varians i store deler av tidsserien. Imidlertid er det store utslag i verdiendringen på obligasjoner på slutten av 70-tallet og begynnelsen på 80-tallet. Dette har helt tydelig vært med på å gjøre obligasjonene mer risikofylt, og kan forklare hvorfor forventet avkastning og varians ikke stemmer overens med de parameterverdiene Stortingsmeldingen viser til. Dersom det er benyttet lengre tidsserier (for eksempel 100 år) vil store kortvarige inflasjonssvingninger påvirke dataseriens varians og forventet avkastning i mindre grad. Resultatet vil være mindre forventet avkastning og lavere risiko forbundet med aksjer.

6.2 Industrielle obligasjoner eller statsobligasjoner?

Som vist i resultatdelen, inneholder den optimale porteføljen ingen statsobligasjoner for noen verdier av risikoaversjonsparameteren. Datamaterialet viser at dette kommer av den store risikoen (høy varians) forbundet med disse, kombinert med lav forventet realavkastning. Dette er imidlertid et noe uventet resultat, da statsobligasjoner er regnet som en av de sikreste investeringene som er, utenom å sette pengene i banken (Finansdepartementet, 2009a).

Det er en mulighet for at bruken av amerikanske statsobligasjoner som ”proxy” for en portefølje bestående av internasjonale statsobligasjoner kan ha gitt denne en økt risiko. Dette i form av at porteføljen ikke er tilstrekkelig diversifisert. Man kan anta at amerikanske statsobligasjoner vil opptre likt, og vil være gjensidig avhengig av den amerikanske stats likviditet. Mangelen på andre internasjonale statsobligasjoner kan i så tilfelle hindre at porteføljen blir tilstrekkelig diversifisert. Det vil si at porteføljen blir utsatt både for

systematisk og usystematisk risiko. Dette vil i så fall føre til at risikoen forbundet med statsobligasjoner blir unormalt høy, og kan være en årsak til at de havner utenfor den optimale porteføljen.

Fenomenet med statsobligasjonene kan på mange måter også forklare hvorfor de industrielle obligasjonene blir en del av den optimale porteføljen. Disse vil i større grad være diversifiserte, da de vil opptre som en aksjeportefølje. Ulike ytre sjokk som reduserer en industriell obligasjons verdi, vil kunne bli oppveid av at en annen obligasjon øker i verdi. Dette vil da føre til at den totale risikoen forbundet med å sitte på en portefølje av industrielle obligasjoner vil bli redusert, noe man finner igjen i datamaterialet i form av lavere varians. Faktisk var forskjellen i variansen mellom industrielle obligasjoner og statsobligasjoner meget stor. Forklaringen på dette er at man på lang sikt jevner ut de effektene som i utgangspunktet gjør industrielle obligasjoner mer risikofylte enn statsobligasjoner. På lang sikt vil for eksempel ikke firma som opplever akutt likviditetskrise påvirke obligasjonsporteføljens risiko i like stor grad som om man hadde benyttet kortere investeringshorisont. Dette er interessant, og kan forklares med de samme forklaringsparameterne som gjør at man anser langsiktige aksjeinvesteringer som mindre risikofylt enn kortsiktige, og hvorfor de industrielle obligasjonene har fått en så enerådende posisjon i den optimale porteføljen.

6.3 Konfidensintervallene

Konfidensintervallene for statsobligasjoner og industrielle obligasjoner viser noe annet interessant. Alle de tre konfidensintervallene som er konstruert for de tre aktivaklassene, industrielle obligasjoner, amerikanske statsobligasjoner med 10 års løpetid, og MSCI World Cap, er relativt brede. Dette innebærer at den forventede avkastningen basert på tallmaterialet, til tross for bevist stasjonæritet, er noe usikker. Faktisk er det slik at den forventede avkastningen for de industrielle obligasjonene, selv innenfor det konstruerte 90 prosent konfidensintervallet, kan være mye lavere enn hva tilfellet er for statsobligasjoner. Dette ville i så tilfelle føre til en forskyvning mot en større andel av statsobligasjoner i den optimale porteføljen. Dersom avkastningen på aksjer i realiteten er enda større enn avkastningene tilhørende obligasjonene, vil dette forskyve den optimale porteføljen mot aksjer. De forventede avkastningene skaper med andre ord stor usikkerhet rundt den optimale porteføljen.

6.4 Langsiktig investeringer

Siden denne oppgaven ser på investeringsforholdet på lang sikt, er resultatet interessant. Man kunne forvente at resultatet ville gi en forskyvning mot aksjer, men analysen viser at dette ikke er tilfelle. Bakgrunnen for at man kunne forvente en forskyvning mot aksjer, er den kjensgjerning at obligasjoner blir mer risikofylt jo lengre tidshorison man ønsker å sitte på disse, da usikkerheten forbundet med fremtidig inflasjon øker. Selv om datamaterialet gir en optimal portefølje med en relativt stor andel obligasjoner, viser variansen til de ulike obligasjonstypene tydelig at det er stor risiko forbundet med langsiktige obligasjonsinvesteringer. Imidlertid er ikke risikoen forbundet med obligasjoner større enn hva tilfellet er for aksjer, noe som fører til at obligasjoner får en solid plass i den optimale porteføljen.

Sammenliknet med den risikoen Statens pensjonsfond utland opererer med på aksjer, viser denne analysen at en risikoprosent på 15 er representativt for verdens aksjemarked. Imidlertid er den risikjusterte forventede avkastningen mye høyere enn Finansdepartementets estimerer. Dette ville som nevnt gitt en kraftig forskyvning mot aksjer hadde ikke vært for den høye forventede avkastningen på industrielle obligasjoner.

På bakgrunn av dette faktumet kan det se ut som om Johnsen (2009) i sin artikkel overvurderer risikoen som inflasjon påfører obligasjoner. I og med at analysen er gjort med dataserier som går 40 år tilbake i tid, skulle man tro at dette var en lang nok dataserie til å få med risikoen forbundet med inflasjon på obligasjoner. Når dette ikke er tilfelle, kan dette støtte opp om muligheten for at inflasjonen ikke påfører obligasjoner så store risikotillegg når investeringshorisonten er langsiktig. Dette medfører at man ikke nødvendigvis bør investere all kapital i aksjer med lang investeringshorisont, som Johnsen (2009) antyder som en mulighet i sin artikkel.

Det må likevel nevnes at det er mulighet for at dette resultatet skyldes at de amerikanske obligasjonene er en dårlig ”proxy” for det internasjonale obligasjonsmarkedet. Likevel sier resultatet entydig at obligasjoner bør være en del av den optimale porteføljen, om enn noe overvurdert i benyttet datamateriale.

6.5 Statens pensjonsfond utlands risikoeksponering

Som nevnt i innledningen til dette kapittelet er den optimale porteføljen med en risikoaversjonsparameter lik 3, langt fra den porteføljen som fondet i dag sitter på. Den enkleste forklaringen på dette er at den risikoaversjonsparameteren som denne oppgaven benytter på bakgrunn av andre undersøkelser, er for høy. Dersom Statens pensjonsfond utland i virkeligheten operer med en risikoaversjonsparameter lik ca. 1,18 vil dette tyde på at modellen er korrekt. Imidlertid er dette en meget lav parameterverdi, og tyder på en meget risikovillig investor. Dette er ikke en representativ beskrivelse av SPU. De legger vekt på langsiktige og gode investeringer med moderat risiko. Vi kan derfor nærmest utelukke at SPU operer med en risikoaversjonsparameter ned mot denne verdien. De ville i så fall hatt en langt høyere risikoeksponering enn hva de utad gir inntrykk av å ha (Se: (NBIM, 2010) og (Finansdepartementet, 2009b)). Riktignok har NBIM fått kritikk for å ta for mye risiko [2].

Forklaringen blir at optimeringene er gjort med ulikt datamateriale, og/eller at de forventede verdiene benyttet i denne analysen ikke sammenfaller med NBIMs beregninger.

Imidlertid antyder teorien at en risikoavers investor gjerne opererer med en meget høy risikoaversjonsparameter. Kocherlakota (1996) antyder at denne verdien kan være over 10. Bakgrunnen for dette er det kjente økonomiske fenomenet "the equity premium puzzle". Dette puslespillet oppstår fordi man ikke kan forklare hvorfor meravkastningen til aksjer er så mye større enn statsobligasjoner med nåværende økonomisk teori. En høy risikoaversjonsparameter forklarer hvorfor den forventede meravkastningen på statsobligasjoner er så lav, mens den vil ikke forklare hvorfor den forventede meravkastningen på aksjer er så høy, og vis-a-versà (Mehra & Prescott, 1985). Dette forklarer hvorfor dette ses på som et puslespill. Dette innebærer at det er stor usikkerhet blant økonomer om hvor stor risikoaversjonsparameteren skal være for å gjenspeile en risikoavers investor. De fleste økonomer tviler på en risikoaversjonsparameter over 10, men teorien kan ikke bevise at dette er feil (Kocherlakota, 1996). Det er derfor meget vanskelig å beregne en risikoaversjonsparameter for SPU som sikrer moderat risikoeksponering. Dataene i denne oppgaven gir en mindre forskjell på statsobligasjoners avkastning sammenliknet med aksjeavkastningen. Mehra & Prescott (1985) beregnet at realavkastningen for perioden 1889-1978 var på 7 prosent for aksjer, men kun i underkant av 1 prosent for kortsiktig gjeld. Dette gir en meravkastning på over 6 prosent for aksjer sammenliknet med statsobligasjoner. Dette

er et veldig forskjellig resultat fra det denne oppgaven fikk. Det understreker at bruk av lengre dataserier kunne medført en forskyvning mot aksjer i den optimale porteføljen, og således i større grad støttet opp om SPU's investeringsstrategi.

Figur 8 viser også at fondets eierandel i amerikanske obligasjoner er lav. Dette kan påvirke optimeringsresultatet, men forutsetter at amerikanske obligasjoner er dårlige "proxyer" for verdensmarkedet.

6.6 Modellen

En av forutsetningene for den konstruerte optimeringsmodellen er at alle dataserier er normalfordelt. Box og whisker-plottene viser imidlertid at dette ikke er tilfelle i virkeligheten. De fleste finansielle dataseriene har fete haler, noe som også er tilfelle for dataseriene benyttet i denne oppgaven (Finansdepartementet, 2010). Imidlertid vil ikke dette påvirke resultatet, da optimeringen tar utgangspunkt i forventet verdi og varians. Noe som også en dataserie med "fet hale" har.

Som vist i resultatdelen så ser vi en annen interessant observasjon, nemlig at grafene for prosentvis andel av aktivaene konvergerer mot en gitt verdi. Dette medfører at selv for ekstremt risikoaverse personer vil den optimale porteføljen bestå av en andel aksjer. Faktisk er det sånn at den optimale porteføljen for risikoaversjonsverdier over 10 er nærmest identiske. Dette kan forklares ved at modellen går fra et maksimumspunkt (den optimale maksimerte modellen) til et minimumspunkt. Dette minimumspunktet representerer den porteføljen med minst risiko. Begrunnelsen for at den porteføljen som har lavest risiko inneholder litt av begge, er at denne porteføljen er mer diversifisert enn hva tilfellet er for en portefølje bestående kun av ett aktivum. Det er derfor logisk i følge teorien at modellen konvergerer mot en portefølje bestående av både aksjer og obligasjoner. Det er derfor aldri tilrådelig å investere alle fondets penger i aksjer, da dette ikke vil være en optimal løsning.

6.7 Konklusjon og anbefalinger

På bakgrunn av analyse og resultater er det ingenting som tyder på at dagens investeringsstrategi for SPU er feil. Imidlertid er det ting som tyder på at den optimale porteføljen investert med langsiktig perspektiv bør inneholde en litt mindre andel aksjer. Likevel er det knyttet for stor usikkerhet til de forventede avkastningene til at dette kan sies bastant. Analysen er derfor mer en bekreftelse på at investeringsstrategien til Statens pensjonsfond utland er korrekt, enn det motsatte.

Et annet viktig funn er at industrielle obligasjoner viser seg som den beste investeringen på lang sikt på bekostning av statsobligasjoner. Dette ser vi på bakgrunn av den estimerte risikoen. Imidlertid er også dette et usikkert resultat på grunn av nevnte problemer med å benytte amerikanske obligasjoner som ”proxy” for en portefølje bestående av internasjonale obligasjoner. Det kan også virke som inflasjonsrisikoen forbundet med obligasjoner er noe overdrevet, og ikke er så stor at langsiktige obligasjonsinvesteringer er å fraråde.

Som diskutert i delkapittelet over, er det også viktig å påpeke at det ikke er tilrådelig å investere alle SPUs kapital i et aktivum, da dette ikke for noen verdi av risikoaversjonsparameteren er en optimal fordeling.

6.8 Forslag til videre forskning

Den forventede avkastningen benyttet i denne oppgaven har et alt for stort konfidensintervall til at man kan være sikker på at man får rett optimal portefølje. Det ville derfor vært naturlig og forsøkt å gjennomføre en analyse der man i større grad kunne være sikker på den forventede verdien. Dette gjelder også risikoen. Denne oppgaven benyttet varians som mål på risiko, men som nevnt i teoridelen finnes det flere andre fremgangsmåter som kunne vært interessant å benytte i denne typen problemstilling.

Det er utvilsomt også interessant å gjøre denne optimeringen med flere aktivaklasser. Denne oppgaven tar bare for seg industrielle obligasjoner, statsobligasjoner og aksjer. Fast eiendom er en annen aktivaklasse som kunne vært interessant og analysere i samme rammeverk som denne oppgaven. Det finnes også andre aktivaklasser som man kunne tatt med i analysen, og det hadde også vært mulig å ta med flere obligasjonstyper. Imidlertid kan dette være

vanskelig, da det er vanskelig å finne gode ”proxyer” som går tilstrekkelig langt tilbake i tid. Det ville dermed gjøre det vanskeligere å opprettholde det langsiktige perspektivet.

I dag er det også slik at NBIM som forvalter SPU har til dels lånefinansiert enkelte investeringer. Ved ikke å sette begrensningen om at summen av alle aktivaandeler skal bli lik én kunne man sett nærmere på denne problematikken. NBIM har tidligere lånefinansiert enkelte investeringer, og det er ingen tvil om at dette er noe det ville vært interessant og sett nærmere på.

Som Johnsen (2009) også nevner i sin artikkel, kunne man også forsøkt og tatt hensyn til fondets fremtidige forpliktelser, og optimert porteføljen på bakgrunn av dette. Dette vil i så tilfelle kreve gode prediksjoner blant annet på fremtidige generasjoners importbehov, noe som unektelig vil komplisere optimeringen drastisk.

7 Referanseliste

- Andersen, C., & Skjeret, F. (2003). Valg av diskonteringsrente ved nettinvesteringer. *SNF-Rapport* (1). Hentet 28.04.2010, fra http://bora.nhh.no:8080/bitstream/2330/345/1/R01_03.pdf.
- Ang, A., Goetzmann, W. N., & Schaefer, S. M. (2009). *Evaluation of Active Management of the Norwegian Government Pension Fund – Global*. Lesedato 06.01.2010. Hentet fra <http://www.regjeringen.no/upload/FIN/Statens%20pensjonsfond/rapporter/AGS%20Report.pdf>.
- Arrow, K. J. (1971). *Essays in the theory of risk-bearing*. Chicago: Markham economics series.
- Bjørndal, B. (2009, 17.02.2009). - Rokker ved etablerte sannheter. *Dagens Næringsliv*, hentet fra <http://www.dn.no/forsiden/borsMarked/article1588727.ece>
- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. J. (2009). *Investments - International Edition* (8. utg.). New York: McGraw-Hill.
- Boothe, P., & Glassman, D. (1987). The statistical distribution of exchange rates: Empirical evidence and economic implications *Journal of International Economics*, 22(3-4), 297-319
- Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2009). *Convex Optimization*. Hentet 04.04.2010, fra http://www.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf.
- Brennan, M. J., & Xia, Y. (2000). Stochastic Interest Rates and the Bond-Stock Mix. *European Finance Review*, 4(2), 197-210.
- Campbell, R., Huisman, R., & Koedijk, K. (2001). Optimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework. *Journal of Banking and Finance*(25), 1789-1804.
- Cohen, J. B., & Zinbarg, E. D. (1967). *Investment analysis and portfolio management*. Richard D. Irwin: Homewood.
- Departementenes servicesenter. (2009). *NOU: 2009:16 - Globale miljøutfordringer – norsk politikk - Hvordan bærekraftig utvikling og klima bedre kan ivaretas i offentlige beslutningsprosesser*. Lesedato 23.02.2010. Hentet fra <http://www.regjeringen.no/pages/2207933/PDFS/NOU200920090016000DDDPDFS.pdf>.
- DNB Nor (u.å). Informasjon til kunder om egenskaper og risiko knyttet til finansielle instrumenter - (aksjer, aksjerelaterte instrumenter, obligasjoner og verdipapirfond. https://www.dnbnor.no/portalfont/nedlast/no/markets/angrefrist/risiko_aksjer_obligasjoner.pdf.
- Døskeland, T. M. (2006). Aktivaallokering for Norge. *Praktisk Økonomi og Finans*, (3), 81-89. Hentet 03.05.2010, fra http://www.nhh.no/Admin/Public/DWSDownload.aspx?File=%2fFiles%2fFiler%2fins titutter%2frrr%2fDskeland%2fpof_2_2006.pdf.
- Evans, J. L., & Archer, S. H. (1968). Diversification and the Reduction of Dispersion: An Empirical Analysis. *The Journal of Finance*, 23(5), 761-767.
- Fama, E. F. (1970). Efficient Capital Markets: A review of Theory and Empirical Work. *Journal of Finance*, 25(2), 383-417.
- Fama, E. F. (1998). Market efficiency, long-term returns, and behavioral finance. *Journal of Financial Economics*, 49(3), 283-306.

- Finansdepartementet. (2004). *St.meld. nr. 1 (2004-2005): Nasjonalbudsjettet 2005*. Lesedato 13.04.2010. Hentet fra <http://www.regjeringen.no/Rpub/STM/20042005/001/PDFS/STM200420050001000DDPDFS.pdf>.
- Finansdepartementet. (2006). *St.meld. nr.1 (2006-2007) - Nasjonalbudsjettet 2007*. Lesedato 28.01.2010. Hentet fra <http://www.regjeringen.no/Rpub/STM/20062007/001/PDFS/STM200620070001000DDPDFS.pdf>.
- Finansdepartementet. (2007). *St.Meld. nr. 24 (2006-2007) - Om forvaltningen av Statens pensjonsfond i 2006*. Lesedato. Hentet fra <http://www.regjeringen.no/pages/1965990/PDFS/STM200620070024000DDPDFS.pdf>.
- Finansdepartementet. (2008). *St.meld. nr.1 (2008-2009) - Nasjonalbudsjettet 2009*. Lesedato 18.03.2010. Hentet fra <http://www.regjeringen.no/pages/2112587/PDFS/STM200820090001000DDPDFS.pdf>.
- Finansdepartementet. (2009a). *NOU 2009: 16 - Globale miljøutfordringer – norsk politikk - Hvordan bærekraftig utvikling og klima bedre kan ivaretas i offentlige* Lesedato 07.05.2001. Hentet fra <http://www.regjeringen.no/pages/2207933/PDFS/NOU200920090016000DDPDFS.pdf>.
- Finansdepartementet. (2009b). *St.meld. nr. 20 (2008-2009) - Om forvaltningen av Statens Pensjonsfond i 2008*. Lesedato 16.01.2010. Hentet fra <http://www.regjeringen.no/pages/2172105/PDFS/STM200820090020000DDPDFS.pdf>.
- Finansdepartementet. (2009c). *Statens Pensjonsfond - Utland (SPU)*. Lesedato 17.02.2010. Hentet fra http://www.regjeringen.no/upload/FIN/Statens%20pensjonsfond/PFSammendrag_Dec09.pdf.
- Finansdepartementet. (2010). *Meld. St. 10 (2009-2010) - Forvaltningen av Statens pensjonsfond i 2009*. Lesedato 04.05.2010. Hentet fra <http://www.regjeringen.no/pages/2496341/PDFS/STM200920100010000DDPDFS.pdf>.
- Grossman, S. J., & Stiglitz, J. E. (1976). Information and Competitive Price Systems *The American Economic Review*, 66(2), 246-253.
- Grossman, S. J., & Stiglitz, J. E. (1980). On the Impossibility of Informationally Efficient Markets *The American Economic Review*, 70(3), 393-408
- Harlow, W. V. (1991). Asset Allocation in a Downside-Risk Framework. *Financial Analysts Journal*, 47(5), 28-40.
- Hoddevik, H. (2009, 17.08.2009). Spill, innsats og gevinst. *Dagens Næringsliv*
- Johnsen, T. (2009, 31. august). Spill, innsats og aksjehandel. *Dagens Næringsliv*, s. 31
- Kocherlakota, N. R. (1996). The Equity Premium: It's Still a Puzzle. *Journal of Economic Literature*, 34(1), 42-71.
- Leibowitz, M. L., & Henriksson, R. D. (1989). Portfolio Optimization with Shortfall Constraints: A Confidence-Limit Approach to Managing Downside Risk. *Financial Analysts Journal*, 45(2), 34-41.
- Li, X., & Zhou, X. Y. (2006). Continuous-Time Mean-Variance Efficiency: The 80 % Rule. *The Annals of Applied Probability*, 16(4), 1751-1763.
- Loughran, T., & Ritter, J. R. (1995). The New Issues Puzzle. *The Journal of Finance*, 50(1), 23-51.

- Malkiel, B. G. (2003). The Efficient Market Hypothesis and Its Critics. *The Journal of Economic Perspectives*, 17(1), 59-82.
- Markowitz, H. M. (1991). Foundations of Portfolio Theory. *The Journal of Finance*, 46(2), 469-477.
- Mehra, R., & Prescott, E. C. (1985). The equity premium: A puzzle. *Journal of Monetary Economics*, 15(2), 145-161.
- NBIM. (2010). *Statens Pensjonsfond Utland - Årsrapport 2009*. Lesedato 27.03.2010. Hentet fra http://www.norges-bank.no/upload/78306/nbim_arsrapport09.pdf.
- Norges Bank (2004). Norske finansmarkeder – pengepolitikk og finansiell stabilitet. *Norges Banks Skriftserie / Occasional Paper*, (34). Hentet 19.02.2010, fra http://www.norges-bank.no/upload/import/publikasjoner/skriftserie/34/hele_heftet_34.pdf.
- Rabin, M. (2000). Risk Aversion and Expected-Utility Theory: A Calibration Theorem. *Econometrica*, 68(5), 1281-1292.
- Roy, A. D. (1952). Safety First and the Holding of Assets *Econometrica*, 20(3), 431-449
- Sirnes, E. (u.å.-a). Notat 1 SOK-3060 - Videregående finans: Risikopremien. Universitet i Tromsø.
- Sirnes, E. (u.å.-b). Notat 2 SOK-3060 - Videregående finans: Optimal portefølje og Matriser. Universitet i Tromsø.
- Sirnes, E. (u.å.-c). Notat 3 SOK-3060 - Videregående finans: Optimale porteføljer med flere aksjer. Universitet i Tromsø.
- Spiess, D. K., & Affleck-Graves, J. (2000). Underperformance in long-run stock returns following seasoned equity offerings. *Journal of Financial Economics*, 38(3), 243-267.
- Statistisk Sentralbyrå (u.å). Definisjon av dei viktigste omgrepa og kjennemerka ved obligasjoner og sertifikater. http://www.ssb.no/skjema/finmark/rapport/verdipapir/vpforetak/definisjon_2007.
- Wachter, J. A. (2003). Risk aversion and allocation to long-term bonds *Journal of Economic Theory*, 112(2), 325-333.
- Wagner, W. H., & Lau, S. C. (1971). The Effect of Diversification on Risk. *Financial Analysts Journal*, 27(6), 48-53.
- Ødegaard, B. A. (2006). Hvor mange aksjer skal til for å ha en veldiversifisert portefølje på Oslo Børs? *Praktisk Økonomi og Finans*, (1/2006). Hentet 04.02.2010, fra http://finance.bi.no/~bernt/papers/hvor_mange_aksjer/hvormange.pdf.

8 Websidereferanser

- [1] CPI Database. Bureau of Labor Statistics., Webside: <http://www.bls.gov/cpi/data.htm>.
Publiseres daglig. Hentet 24.04 2010.
- [2] - De tar for stor risiko. DN.no. Webside:
<http://www.dn.no/forsiden/borsMarked/article1722607.ece>. Publisert 15.08.2009.
Hentet 26.04 2010
- [3] Den økonomiske politikken i 2000 - Norges Banks brev til Finansdepartementet 21. oktober 1999. Gjedrem, S., & Nicolaisen, J. Webside: http://www.norges-bank.no/templates/article_15116.aspx. Publisert 21.10.1999. Hentet 15.01 2010.
- [4] What is Maple? Maplesoft. Webside:
<http://www.maplesoft.com/products/Maple/features/index.aspx>. Hentet 20.04 2010.
- [5] MSCI Index Performance - MSCI World Index (Large + Mid cap). MSCI Barra.
Webside:
http://www.msibarra.com/products/indices/international_equity_indices/gimi/stdindex/performance.html. Publiseres daglig. Hentet 05.04 2010.
- [6] Index Definitions. MSCI Barra. Webside:
http://www.msibarra.com/products/indices/international_equity_indices/definitions.html. Publisering ukjent. Hentet 05.04 2010
- [7] Statens pensjonsfond utland. Norges Bank. Webside: http://www.norges-bank.no/templates/article_41441.aspx. Publisert: 14.04.2010 Hentet 21.04 2010
- [8] Referanseindeksene. Norges Bank. Webside: http://www.norges-bank.no/templates/article_13169.aspx. Publisert 16.04.2010 Hentet 21.04 2010
- [9] Features. Econometrics.com. Webside: <http://econometrics.com/features/>. Publisering ukjent. Hentet 23.03 2010
- [10] H:15 Selected Interest Rates. *Federal Reserve Statistical Release*. The Federal Reserve. Webside: <http://www.federalreserve.gov/releases/>. Publiseres daglig. Hentet 05.04 2010

9 Vedlegg

9.1 Appendiks 1

Følgende kode ble benyttet i Maple 13 for å beregne optimal portefølje

> *with(Optimization) :*

with(LinearAlgebra) :

$$A := \begin{bmatrix} a[1] \\ a[2] \\ a[3] \end{bmatrix} :$$

$$Z := \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix} :$$

$$x := \begin{bmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \\ m_{3,1} \end{bmatrix} :$$

t := 3 :

$$F := \text{simplify} \left(-\frac{t}{2} \cdot \text{VectorMatrixMultiply} (\text{Transpose} (A), Z) A \right. \\ \left. + \text{Transpose} (A) x \right) :$$

> *QPSolve(-F, {a[1] + a[2] + a[3] = 1}, assume = nonnegative) :*

9.2 Appendiks 2

Kode benyttet i Shazam for å hypoteseteste for stasjonæritet.

```
read(C:\...txt) aaana y10 worldcap
Coint aaana y10 worldCap
graph aaana / lineonly
graph y10 / lineonly
graph worldcap /lineonly
Stop
```

9.3 Appendiks 3

Kode benyttet i Shazam for å beregne konfidensintervall.

```
read(C:\...txt) aaana y10 worldcap
stat aaana
Confid aaana
stat y10
confid y10
stat worldcap
confid worldcap
Stop
```