UiT Norges arktiske universitet

Institutt for matematikk og statistikk

Studenters oppfatning av overgangen fra videregående til universitetsmatematikk

En Mixed Methods undersøkelse som tar for seg hvordan studenter opplever overgangen til bevis og resonnering i universitetsmatematikk.

Kristian Magne Johansen

Thomas Langstrand

Masteroppgave i Lektor i realfag trinn 8-13, MAT-3907, mai 2023

Forord

Etter fem flotte år sammen på lektorutdanningen ved Universitetet i Tromsø (UiT), ønsker vi med denne oppgaven å takke for oss. Disse årene har bydd på nye utfordringer, opp og nedturer og mye latter. Vi gleder oss nå til å starte en ny epoke av livet som lærere.

Vi sender med dette en stor takk til hverandre for et godt gjennomført samarbeid. Gjennom 280 dager har vi samarbeidet med hverandre, og er stolte av å kunne si at vi har levert produkt vi er fornøyde med, samt at vi fortsatt er gode venner.

Vi ønsker også å rette en stor takk til vår veileder, Ida Friestad Pedersen, for gode og konstruktive tilbakemeldinger gjennom hele året. Vi er veldig takknemlig for innsatsen du har lagt ned for at vi skal gjøre det best mulig. Vi ønsker også å rette en takk til bi-veileder, Ole Kristian Fossum, for gode innspill og konstruktive kommentarer. Til slutt vil vi takke Amalie for korrekturlesing, samt respondenter og informanter for deltakelse i prosjektet.

Tromsø, mai 2023

Kristian Magne Johansen og Thomas Langstrand

Innholdsfortegnelse

Figuroversikt:

Tabelloversikt:

1 Introduksjon

De siste fem årene har vi sammen studert på lektor 8-13 utdanningen med matematikk som hovedfag og fysikk/kjemi ved siden av. Vi ble tidlig kjent med hverandre på studiet, og har følgelig sammen diskutert, kranglet, blitt enige, og også uenige, gjennom en rekke ulike matematikkemner ved Universitetet i Tromsø. Tidlig i vår universitetskarriere oppdaget vi, som nokså ivrige studenter innenfor realfag, at matematikken raskt, og kanskje raskere enn de andre realfagene, endret takt fra det vi var kjent med fra videregående. Vi, i likhet med mange andre medstudenter, opplevde at forventningene rundt forkunnskaper og kompetanse var tett mot grensen for det vi selv tenkte var rimelig på det punktet.

Matematikken ble tyngre å lese på, vanskeligere å arbeide med, og måten faget ble undervist på, medførte at vi som nye studenter raskt måtte gjøre en endring i vår tilnærming for å henge med i det som ble presentert. Der vi tidligere hadde tatt matematikken vi ble lært for «god fisk», opplevde vi nå at de var det nå et økt fokus på *hva*, *hvordan* og spesielt *hvorfor* ting var som de var. I tillegg opplevde vi at det ble flere bevis i forelesningene, noe vi var usikre på hvordan vi skulle håndtere, da dette var noe vi hadde svært lite forkunnskaper på, og det fremsto som noe litt ullent og vanskelig. Da tiden kom for å skrive masteroppgave, tenkte vi tilbake til problematikken rundt overgangen til universitetsmatematikken, og ønsket å utforske dette videre.

Vi begynte dermed å utforske funn som omhandlet overgangen til universitetsmatematikk, og fant raskt frem til en undersøkelse fra Rønning (2014), hvor vi fikk bekreftet at vår opplevelse av at overgangen opplevdes som svært krevende var nokså ordinær.

Basert på våre egne erfaringer med presentasjonen av bevis og det økte fokuset på resonnering i universitetsmatematikken, samt funnene fra Rønnings (2014) undersøkelse, ønsket vi å utforske en mulig faktor som bidrar til at overgangen til universitetet oppleves som krevende. Med dette som utgangspunkt valgte vi problemstillingen «Studenters oppfatning av overgangen fra videregående til universitetsmatematikk». Vi formulerte også to forskningsspørsmål for å begrense fokuset på temaet:

1. Hvordan oppfatter studenter betydningen av bevis i matematikk, og hvilken type matematisk forståelse ønsker de å oppnå?
2. Hvilke synspunkter har studentene på viktigheten av å kunne resonnering i matematikk?

Gjennom disse forskningsspørsmålene ønsket vi å få innsikt i studentenes perspektiver på betydningen av bevis i overgangen til universitetsmatematikk, samt deres ønsker om hva slags forståelse de ønsker å utvikle. Videre ønsket vi å utforske studentenes oppfatning av viktigheten av resonnering i matematikk.

I det første forskningsspørsmålet ønsket vi å belyse hva studentene tenkte om viktigheten av matematiske bevis gjennom overgangen fra videregående opplæring til universitetet, samt hva slags type forståelse de føler undervisningen legger opp til. Her vil vi anvende to begreper om forståelse definert av Skemp (1976), nemlig relasjonell og instrumentell. Vi vil også diskutere hvilken forståelse de selv ønsker å oppnå med matematikkundervisningen på universitetet.

Med det andre forskningsspørsmålet ønsker vi å kunne si noe om hvor viktig studenter oppfatter at det å kunne i matematikken resonnere er. Vi vil også forsøke å kategorisere hvilken type resonnering studenter føler de selv anvender når de arbeider med matematikk, der vi tar utgangspunkt i to begreper Lithner (2008) presenterer som kreativ og imitativ resonnering.

Vi har i denne oppgaven brukt metoden Mixed Methods Research med en kvantitativ spørreundersøkelse og tre kvalitative intervjuer. Fra spørreundersøkelsen vil det bli presentert ulike påstander som videre blir brukt for å svare på spørreundersøkelsen. Det ble også gjennomført tre intervjuer med mål om å kunne gi oss et innblikk i studentenes oppfatning av bevis og resonnering i denne overgangen.

Vi vil videre i denne oppgaven først presentere relevant teori i kapittel 2. Her starter vi med å se på andre studier og teori rundt overgangen fra videregående opplæring til universitetet. Vi fortsetter deretter med å definere begrepene instrumentell og relasjonell forståelse, samt imitativ og kreativ resonnering. Vi fortsetter videre fra dette til bevisets plass i matematikk og avslutter med det affektive aspektet med matematikk for lærere.

I kapittel 3 vil vi presentere metoden brukt for å samle inn og behandle dataene våre. Her starter vi først med en presentasjon av Mixed Method Research, for så å redegjøre for valg tatt rundt spørreskjema og intervju. Her vil det avslutningsvis også bli gjort rede for forskningens kvalitet.

I kapittel 4 og 5 vil resultatene bli presentert, og henholdsvis diskutert. Her har vi valgt å holde resultatene fra spørreundersøkelsen og intervjuene separat fram til kapittel 5, der vi diskuterer funnene. I diskusjonsdelen vil funnene fra resultatene bli diskutert opp mot de teoretiske aspektene vi har lagt vekt på gjennom oppgaven. Vi har laget tre hovedpunkter som diskusjonen tar utgangspunkt i studenters bakgrunnskunnskaper i matematikk og utvalg, samt diskusjonen rundt de to forskningsspørsmålene våre.

Avslutningsvis ønsker vi i kapittel 6 å forsøke å oppsummere oppgaven. Her vil det fremkomme våre tanker rundt oppgaven, samt aspekter for videre forskning og studiens begrensninger.

2 Teori

I dette kapittelet vil vi redegjøre for relevant teori og tidligere forskning som vil kunne belyse vår problemstilling, samt være med på å påvirke utarbeidingen av spørsmål til spørreskjema og intervju. Videre vil denne teorien også være med å danne et bakteppe når vi i resultat- og diskusjonskapitlet drøfter våre funn i lys av tidligere forskning. Vi har valgt å dele teorikapittelet inn i fire hoveddeler som belyser aspekter vi anser som viktige og relevante til vår oppgave. Disse kapitlene er følgende: overgangen fra videregående opplæring til universitetet, studenters tilnærming til matematikk, bevis i matematikken, og affektive variabler.

2.1 Overgangen fra videregående opplæring til universitetet

Overgangen fra videregående til universitetsmatematikk er et mye diskuter tema som går igjen både i nasjonal og internasjonal sammenheng i litteraturen. Rønning (2014) gjennomførte som nevnt innledningsvis en spørreundersøkelse for matRIC (Centre for Reasearch, Innovation and Coordination og mathematics teaching) hvor det fremstilles funn som tilser at et flertall av studenter på førsteårsemner i matematikk opplever overgangen fra videregående til universitet som stor. Også i den internasjonale forskningslitteraturen er det veldokumentert at mange nye studenter opplever en faglig diskontinuitet mellom den matematikken de har lært på videregående skole, og matematikken de møter på universitetet (se Gueudet og Thomas (2020, s. 205) for en nyere litteraturgjennomgang). Kort oppsummert har tidligere forskning foreslått en rekke ulike forklaringer på studentenes utfordringer i overgangen til universitet; eksempelvis manglende ferdigheter i enkelte nøkkelområder som trigonometri eller algebra, at matematikken er av en mere abstrakt karakter enn den de er kjent med fra videregående, og i forlengelsen av dette er det et sterkere fokus på deduktive bevis og formelle resonnementer i universitetsmatematikken (Gueudet & Thomas, 2020). I vår oppgave vil vi fokusere på matematiske bevis i overgangen fra videregående skole til universitet, og vil derfor presentere noen tidligere studier som tar for seg dette.

2.1.1 Tidligere studier om overgangen til universitetsmatematikk

Vanskeligheter i overgangen til universitetsmatematikk med fokus på bevisaspektet belyses i en studie fra USA fra 1989 (Moore, 1994). Forfatteren kategoriserer studenters vanskeligheter ut fra hva tidligere litteratur viser til som særlig krevende i arbeid med bevis. Det vises til følgende fem punkter som en oppsummering fra tidligere empiriske studier som forklaringer for hvorfor studenter opplever møte med bevis som krevende:

a) Oppfatning av bevisets natur (hva som ligger i et bevis)

Med dette menes vanskeligheter med å forstå hva som kreves for å lage et gyldig bevis, og hva det faktisk betyr og medfører at noe er bevist.

b) Logikk og metoder av bevis

Studenter sliter med å forstå logiske strukturer og teknikker som anvendes i bevisføringsprosessen.

c) Problemløsningsevner

Studenter har vanskeligheter med å anvende matematiske konsepter og teknikker til å løse bevisproblemer selv.

d) Matematiske språket

Med dette menes studenters utfordringer med å tolke og bruke matematiske uttrykk og symboler på en nøyaktig og presis måte.

e) Konseptuell forståelse

Her vises det til studenters problemer med å forstå og anvende matematiske konsepter og sammenhenger på en dyptgående måte

Videre oppsummerer Moore at evnen til å kunne lese abstrakt matematikk og gjennomføre bevis, avhenger av en kompleks sammensetning av holdning, kunnskap og kognitive ferdigheter. Dette underbygger det faktum at holdninger i matematikkfaget er et relevant aspekt å belyse, og følgelig også viktig for studenters syn på bevis i matematikken (Moore, 1994).

Stylianou et al. (2015) undersøker hvordan studenters holdninger i og til matematikk påvirker deres syn på bevis. Studien viser til en sammenheng mellom studenters syn og holdninger til bevis, og deres evne til å forstå og lære bevis. Dette tydeliggjør viktigheten av å utvikle gode holdninger til bevis, og trekker i retningen at det burde jobbes for at studenter utvikler en god forståelse for hva bevis er tidlig, da dette direkte påvirke utbytte av selve bevisene også.

Ved å utvikle en god forståelse for hva bevis er, og hvordan de gjennomføres og leses, vil det kunne gjøre resonnering og argumentasjon til en mer forståelig og naturlig del av matematikken for studenter. Evnen til å resonering og å argumentere i matematikk er noe Engelbrecht (2010) trekker frem som en viktig egenskap for studenter, da dette kreves i arbeid med formelle definisjoner og teoremer. I likhet med Moore (1994), belyser Engelbrecht (2010) en rekke utfordringer studenter har i møte med universitetsmatematikken. Her vises det blant annet til en overgang fra å forklare til å definere, og fra å overtale til å bevise, som to aspekter som oppleves som for mange oppleves som særlig krevende. Abstrahering og generalisering av utrykk er også noe Tall (1991, s. 11-13) trekker frem som et kjent problem for studenter i overgangen til universitetsmatematikk. Dette fremstår som nokså naturlig, da undersøkelser som eksempelvis Rønning (2014) påpeker at flere studenter opplever manglende samsvar fra videregående skole og forventninger i høyere utdanning, særlig da abstrahering og generalisering øker i viktighet og fokus i universitetsmatematikk.

Engelbrecht (2010) drøfter problematikk i overgangen til avansert matematikk, og viser til litteratur som belyser temaet, heriblant en studie fra Alcock og Simpson (1999, i Engelbrecht, 2010). Her fremkommer det at matematisk tenkning, og det å tenke på en matematisk måte, ikke er en ferdighet som kommer naturlig, men heller må etterstrebes og tilrettelegges for å oppnå (Alcock og Simpson 1999; i Engelbrecht, 2010). Engelbrecht (2010) trekker frem skille mellom matematikk og andre disipliner ved å vise til kontrasten mellom matematikk og resten av verden. Matematikk er bygget på aksiomer som fungerer som grunnleggende byggesteiner, og nye kunnskaper utvikles gjennom deduktiv resonering ut fra disse. Begreper defineres og teoremer bevises gjennom regler som har blitt utarbeidet gjennom historien. Dette gjør at bevis i matematikk skiller seg fra andre måter å tenke på da de medfører en absolutt garanti som gjelder for matematiske påstander. Forfatteren trekker frem denne garantien som et avvik fra det normale søken etter ytterligere bekreftelse som man vil foreta i andre fag/disipliner. Her vises det videre til Fischbein som mener at det kreves en fundamental endring i studentens forståelse for at studenten skal kunne forstå hva et bevis faktisk betyr og medfører (Fischbein 1982; i Engelbrecht 2010).

Følgelig kan det derfor tenkes å være viktig med en gjennomgående forståelse for hva bevis er, samt hvilken rolle bevis spiller i matematikken for å kunne forvente et positivt læringsutbytte i arbeid med bevis.

2.2 Studenters tilnærming til matematikk

Schoenfeld (2016) viser til en generell enighet i fagmiljøet for at problemløsning er viktig i matematikkfaget og burde vektlegges. I lys av dette fremkommer en usikkerhet for hva som skal falle under «problemløsning», og med dette til kompleksiteten for hva målet med matematikkundervisningen skal være. Videre pekes det på at målet med matematikkundervisningen avhenger av hvilken fortolkning som innehas over hva matematikk er, samt hva det betyr å forstå matematikk. Enkelte elever og studenter vil kunne oppleve matematikk som noe som krever pugging og memorering for å kunne løse oppgaver. Denne tankemåten om matematikk omtales av Schoenfeld (2016) som motsetningen til det han kaller «å tenke matematisk». På samme måte som at en person som vet hvordan de ulike snekker-redskapene fungerer, ikke nødvendigvis er snekkere, argumenterer forfatteren for at det kreves en evne til å tenke matematisk, heller enn å utelukkende kunne anvende formler gjennom pugging for å kunne forstå matematikk som fag. Å tenke matematisk krever en gradvis utvikling av et matematisk synspunkt, hvor prosessen av mattematisering og abstrahering vektlegges og verdsettes (Schoenfeld, 2016). I tillegg viser forfatteren til at det skal det ilegges vekt på å opparbeide en forståelse for når de ulike matematiske verktøyene kan anvendes for å forstå strukturen i matematikken.

Med dette viser Schoenfeld (2016) at matematisk tenking omhandler å forstå hva som ligger bak matematikken som anvendes gjennom abstrahering og generalisering. I tillegg kreves det en forståelse for hvordan disse ideene skal kunne anvendes gjennom en utvikling av kompetanse med verktøyene innenfor feltet. For studenter vil dermed en forståelse og annerkjennelse av ideene bak matematikken de utøver, være sentralt for å kunne tenke matematisk, i tillegg til å kunne anvende og tilpasse kunnskapene til nye problemer. Dette underbygges også av National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), (National Research Council, 1989; i Schoenfeld, 2016) som påpeker at matematikk er et fag som handler om å forstå og kjenne igjen mønster. Selv om faget ofte baserer seg på regler som må læres, trekkes det frem som særlig viktig at studenter beveger seg forbi formler og regler for å gjennomgå en overgang til en dypere matematisk forståelse av konsepter. Dette innebærer et skifte i hvordan mange studenter jobber med matematikk, i tillegg til hvordan undervisningen legges opp. NCTM (National Research Council, 1989; i Schoenfeld, 2016) foreslår derfor en endring med vektlegging på følgende punkter:

1. Finne løsninger fremfor å memorere fremgangsmåter
2. Utforske mønstre fremfor å memorere formler
3. Formulere påstander, ikke bare løse oppgaver

Dette vil ifølge NCTM medføre en endring i studentenes tilnærming til matematikk som vil føre til at de kan oppleve matematikk som utforskende og dynamisk, heller en et formelbasert og lukket sett med regler som må pugges. En slik forståelse vil kunne medføre at studenter i større grad blir innforstått med at matematikk omhandler forståelse av mønster fremfor tall og regler.

Også den norske læreplanen legger opp til en forståelse av matematikkfaget som dynamisk og utforskende gjennom en innføring av begreper som dybdelæring. Etter innføring av ny læreplan i 2020 skal det i større grad enn tidligere jobbes grundig og systematisk med matematiske begreper og sammenhenger for å utvikle en forståelse og ferdighet på et dypere nivå (Kunnskapsdepartementet, 2017). Dybdelæring innebærer at elevene skal jobbe med matematikk på en utforskende måte med autentiske problemer, og det skal med dette legges opp til at elevene skal arbeide på samme måte som en matematiker. Videre fremkommer det at dybdelæringen innebærer å anvende kunnskaper og ferdigheter på ulike måter, slik at eleven skal kunne oppleve å mestre forskjellige typer utfordringer, både alene og sammen med andre (Kunnskapsdepartementet, 2017). Et annet aspekt i den nye læreplanen som viser til at en slik forståelse av matematikk er ønskelig, kommer frem i fagets kjerneelementer. Her rettes det et særlig fokus på blant annet resonnering, argumentasjon, representasjon og kommunikasjon: «Resonnering i matematikk handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser» (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Viktigheten av å kunne resonnere i matematikken nevnes også av Engelbrecht (2010), som et relevant aspekt i utviklingen av matematisk forståelse, og i overgangen til avansert matematisk tenking. Ifølge Engelbrecht (2010) har studentene i tiden før universitetsmatematikk i liten grad blitt utsatt for det å tenke matematisk. Matematikken studentene har blitt utsatt for tidligere, har i stor grad vært preget av ett generelt tankesett basert på empiri gjennom tidligere erfaringer- eksempelvis gjennom å lære seg en matematisk formel eller løsningsalgoritme som de anvender på en rekke problemer. Igjen omtales en slik tilnærming av forfatteren som en motsetning til det som ligger i det å tenke matematisk, og det vises til at matematisk tenking omhandler en forståelse for at matematikken er bygget opp av et aksiomatisk system hvor kunnskap utvikles gjennom deduktiv resonnering. Engelbrecht (2010) viser med dette til at for å gjennomgå en overgang til avansert matematisk tenking og utvikle sin matematiske forståelse, må studentene lære seg å arbeide formelt med definisjoner, teoremer, og ikke minst bevis.

Det er ulike syn for hva det vil si å forstå matematikk, og hva matematisk forståelse er. vi ønsker derfor å introdusere fire begreper som vil kunne bidra til å karakterisere hva som kjennetegner studenters opplevelse av sin matematiske forståelse, og resonnering i arbeid med matematikk. En elev som klarer å løse en oppgave ved å følge et eksempel vil kunne føle at han forstår hvordan han skal løse lignende oppgaver, uten noen forståelse for hvorfor det gir mening å følge eksemplet han gjorde. På samme måte vil en elev som har en geometrisk forståelse for hvorfor kvadratsetningen;

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

gir mening, kunne oppleve en manglende forståelse dersom svaret ikke stemmer overens med fasit fra en regnefeil. Grunnet slike usikkerheter rundt begrepet forståelse, innfører Skemp (1976) to ulike former for forståelse som nå vil gjøres rede for.

2.2.1 Instrumentell og relasjonell forståelse

To sentrale begreper som stadig dukker opp i matematikkdidaktikken er *relasjonell*, og *instrumentell* forståelse. Disse defineres av Skemp (1976) for å kategorisere og skille mellom ulike typer forståelse i matematikk. *Relasjonell forståelse* trekkes frem av forfatteren som en forståelse hvor man vet hva som gjøres, og hvorfor det er riktig å gjøre det. Et eksempel på dette vil kunne være en forståelse av hvorfor kvadratsetningen;

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

gir mening på bakgrunn av en forståelse for geometrien i utskrivingen av kvadratet. *Instrumentell forståelse* vil derimot være benyttelse av regler uten forståelse for hvorfor det gir mening å benytte dem. Her vil et eksempel kunne være at mange elever og studenter vet hvordan man kan løse et annengradsutrykk $ax^2 + bx + c = 0$ ved hjelp av abc-formelen;

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

uten å forstå bakgrunnen for hvorfor formelen gir mening, og følelig rett svar. Videre vil vi presisere at selv om vi her definerer og beskriver begrepene instrumentell og relasjonell forståelse, foretar vi ikke en karlegging av studentenes forståelse i vår studie. Vi vil heller diskutere deres forståelse og hva de selv opplever i det å forstå matematikk, basert på deres svar og uttalelser fra intervju og spørreskjema.

Skemp (1976) legger ikke skjul på at en relasjonell forståelse av matematikk er den åpenbart foretrukne av de to (relasjonell og instrumentell). Likevel trekker forfatteren frem enkelte aspekter med instrumentell matematikk som forklarer hvorfor undervisere i matematikk ofte ender opp med å legge til rette for en instrumentell forståelse. Her vises det blant annet til at instrumentell matematikk er enklere å forstå, mindre tidkrevende, og kan gi mestring da riktig svar oppnås. Skemp (1976) peker videre på at fordelene med relasjonell matematikk er at den kan tilpasses en rekke ulike problemer, enklere å huske, være et mål i seg selv, i tillegg til å være med å utvikle den helhetlige matematiske forståelse til utøveren. Med dette menes at en relasjonell forståelse ikke utelukkende gir forståelsen til å besvare en enkel oppgave, men heller en forståelse for hvordan matematikken som kan besvare oppgaven henger sammen med andre konsepter innenfor matematikken.

I likhet med Skemp (1976), undersøker Lithner (2000a) styrken av studenters evne til å selv kunne resonnere i matematikk. Lithner (2000a) viser til at evnen til å løse problemer, samt finne alternative løsninger, kan begrenses av at studenter læres konkrete løsningsprosedyrer og algoritmer, og tydeliggjør dermed viktigheten av en god forståelse for matematikken som benyttes. Her pekes det på at gjennom å oppfordre studentene til å resonnere seg gjennom problemer, kan fleksibiliteten i problemløsning og matematiske resonneringsevner utvikles videre, heller en at en konkret prosedyre memoreres. Dette medfører at studentene vil kunne bli mere tilpasningsdyktige, og dermed kunne handtere ulike problemer gjennom å resonnere og argumentere for valgt tilnærming i problemløsningsprosessen (Lithner, 2000a). En forståelse for bevis vil dermed kunne tenkes å være sentral, og nødvendig, dersom målet er å utvikle en evne til å resonnere og argumentere.

Bevis vil følgelig ha en viktig rolle i undervisningen, da det er viktig at studenter kan resonnere og begrunne valg de tar i universitetsmatematikken. Et naturlig spørsmål i arbeid med bevis, og i diskusjonen om bevisets plass i matematikkundervisningen vil være hvilken type forståelse bevisimplementering skal medføre og gi til studenten. Dersom denne forståelsen er tenkt å bidra til, og legge til rette for at studenten skal kunne styrke den relasjonelle forståelsen i matematikken, må også undervisningen gjenspeile dette. Skemp (1976) viser til to misforhold som ofte kan oppstå i matematikkundervisningen, og som vil diskuteres senere basert på resultater: Enten ønsker studenter å forstå instrumentelt, men lærer ønsker at de skal forstå relasjonelt, eller motsatt – at studenter ønsker å forstå relasjonelt, men lærer ønsker at de skal forstå eller arbeide instrumentelt. Hvorvidt læreren utelukkende går inn for å utvikle en instrumentell forståelse i arbeid med bevis er tvilsomt, men utarbeidingen av en relasjonell forståelse forutsetter likevel at undervingen legger opp til dette.

2.2.2 Imitativ og kreativ resonnering

Hanna (2020, s. 561-566) diskuterer viktigheten av, og samspillet mellom bevis og resonnering i matematikkundervisningen. Resonnering beskrives som evnen til å gjøre rede for, trekke slutninger, og ta avgjørelser basert på disse. For studenter vil det å kunne resonnere, følgelig være en ønskelig egenskap, dersom de vil gjøre egne vurderinger over arbeid og metode i arbeid med matematikk. I motsetning til resonnering i hverdagslig kontekst, krever matematisk resonnering definerte regler for å nå frem til gyldige konklusjoner, gjerne gjennom å konstruere bevis. Hvordan disse reglene og metodene tilnærmes av studenter varierer ut fra hvilken intensjon og forståelse de ønsker å oppnå.

Et skille for å forklare ulike varianter av matematisk forståelse fremkommer av Lithner (2008), som skiller mellom *imitativ* og *kreativ* resonnering for å kunne kategorisere hva som kjennetegner resonneringsevnen til studenter. Disse begrepene vil videre redegjøres for, da de vil kunne være relevante for å belyse hva som kjennetegner studenters oppfatning av sin evne til å resonnere i bevisføringsprosessen. Imitativ resonering kjennetegnes ved at det involverer en anvendelse av tidligere lærte metoder, formler eller algoritmer for å løse problemer, uten å nødvendigvis forstå de underliggende konseptene bak metodene som anvendes. Kreativ resonnering omhandler derimot en evne til å skape nye koblinger og svar gjennom å tenke utenfor boksen og vurdere alternative tilnærminger for å løse problemer. Løsningsstrategien skal likevel ikke være ren gjetting og det kreves en argumentasjon for å støtte strategivalget som foretas. Å kunne benytte både en imitativ og kreativ resonnering trekkes frem av forfatteren som en gunstig egenskap som ofte skiller studenter og matematikere, da studenter ikke evner å skifte mellom de ulike resonneringstypene, og ofte benytter en imitativ resonnering for å besvare oppgaver.

En imitativ resonnering i matematikk vil følgelig kunne legge opp til det Skemp (1976) kaller instrumentell forståelse da det i liten grad legges vekt på forståelse for metoder, formler og resonnering som anvendes, men heller på å imitere tidligere løsningsstrategier. På samme måte vil studenter med utelukkende instrumentell forståelse gjerne benytte seg av en imitativ resonnering i møte med nye problemer, da det ikke er noe ønske for å utvikle en dypere forståelse for matematikken som anvendes. På den andre siden vil det også være tenkelig at kreativ resonnering vil kunne bidra til å utvikle en relasjonell forståelse i matematikk, da nye koblinger for matematisk forståelse skapes, samtidig som en forståelse for bakgrunnen i matematikken som anvendes utvikles gjennom at valgene som tas er argumenteres for.

2.3 Bevis i matematikken

I følgende delkapittel vil vi diskutere bevisets ulike roller innenfor matematikk, skole, historie og læreplan. Vi ønsker at leseren skal få en best mulig forståelse av hvordan bevis kan ta ulike roller, samt de ulike oppgavene et bevis kan ha. Det å bevise er ofte beskrevet som en essensiell del av matematikk og en måte for matematikere å kommunisere matematiske ideer og dokumentere matematisk arbeid (Schoenfeld, 1994, s. 76). Hanna (1990) mener, i likhet med Kahle (2015), Schoenfeld (1994) og De Villiers (1990), at bevis for studenter burde omhandle mere enn bare å vise at noe er sant. Her oppfordres det derfor til at måten bevis presenteres og jobbes med i skolen og universitetet har et annet fokus enn å utelukkende oppsøke sannhet.

2.3.1 Hva er et bevis, og hvilken betydning har det i matematikken

Ofte vil bevis forklares ut fra rollene det har, men «hva» et bevis er kan være vanskelig å definere. Avigad (2006, s. 129) forsøker å forklare hva et bevis er med følgende utsagn: «A proof is some kind of communicable text (which may involve diagrams) that, in particular, provides sufficient information to establish that the purported theorem is true».

Kahle (2015) belyser det han mener er den første skildringen vi må gjøre av bevis. Han påpeker at bevis enten har som hensikt å avdekkende ny informasjon eller å styrke informasjon om ting som allerede er kjent. Et avdekkende bevis vil dermed være en presentasjon av ny informasjon, mens et styrkende bevis viser en ny matematisk egenskap på en annen måte. Kahle (2015) påpeker at avdekkende bevis ofte vil inneholde informasjon som ikke oppleves som nødvendig og tilgjengelig for studenter. Dette er informasjon som er viktig og sentral for matematikere, og for selve beviset, men grunnet sine faglige begrensninger trekker forfatteren frem at studenter vil kunne ha problemer, og heller burde fokuseres inn på styrkende bevis.

Det historiske aspektet av bevis, og hvorfor bevis er viktig i matematikken, belyses av Grabiner (2012) som redegjør for betydningen av bevis, samt hvordan synet på bevis har endret seg gjennom tidene. Grabiner (2012) argumenterer her for at bevis har spilt en sentral rolle i utviklingen av matematikk, helt siden greske matematikere som Thales og Anaximenes begynte å formalisere bevis innenfor geometri 5-600 år før vår tidsregning. Disse bevisene startet som et svar på en matematisk påstand gjennom en visualisering, og utviklet seg senere til å bevege seg også utenfor det rent visuelle. En utvikling til bevis basert på logikk også for å forklare fenomener innenfor geometri, viser til at grekerne på et tidspunkt anså rent visuelle bevis som utilstrekkelig. Også påstander som de allerede anså som sanne ble bevist for å bygge et system som fulgte den samme logiske strukturen, med så få ubeviste påstander som mulig, senere kalt aksiomer (Grabiner, 2012).

I moderne matematikk fortsetter rollen til bevis å være et grunnleggende og viktig aspekt, og benyttes som en måte å verifisere matematiske påstander, samt utvikle et nettverk av matematisk kunnskap som kan bygges videre på av fremtidige matematikere (Grabiner, 2012).

Den presise naturen av et bevis som muliggjør et skille på sannhet innenfor matematikk, samt det faktum at et bevis kan ulike roller (vi kommer tilbake til rollene senere), gjøre det vanskelig å lage en fast definisjon for hva et bevis kan være. Kahle (2015, s. 90) mener på den ene siden at «Proof is what satisfies you» der individet selv skal kunne avgjøre om et bevis kan sees på som sant. Denne definisjonen av Kahle (2015) kan oppfattes som problematisk da det vil være opp til studenter som ikke nødvendigvis har tilstrekkelig med kunnskaper eller ferdigheter til å kunne evaluere sannheten eller resonnementet gjort gjennom et bevis. På den andre siden har vi forfattere slik som Cellucci (2008, s. 2) som mener bevis kan deles i to kategorier:

> The notion of axiomatic proof. Proofs are deductive derivations of propositions from primitive premisses that are true in some sense of ‘true’. They start from given primitive premisses and go down to the proposition to be proved. Their aim is to give a foundation and justification of the proposition. (Cellucci, 2008, s. 2).

I den første definisjonen legger forfatteren vekt på å det som heter aksiomatiske bevis, altså en kontekst der man starter på det grunnleggende (eller primitive) og bygger videre derfra fram til det som slutt er det man skulle bevise. På den andre siden har man det Cellucci (2008, s. 5) kaller analytiske bevis der ulike sannsynlige løsninger blir undersøkt og overveid for å finne det som er mest «plausibelt»:

> The notion of analytic proof. Proofs are non-deductive derivations of plausible hypotheses from problems, in some sense of ‘plausible’. They start from a given problem and go up to plausible hypotheses. Their aim is to discover plausible hypotheses capable of giving a solution to the problem. (Cellucci, 2008, s. 5).

Cellucci (2008, s. 5) nevner videre at et analytisk bevis har som hensikt å oppdage en sannsynlig løsning på et problem. Lithner (2000b) nevner to begreper som kan tilknyttes begrepene om aksiomatisk og analytisk bevis. Forfatteren skriver om resonnering basert på etablert kunnskap som det å kunne resonnere ut fra tidligere matematiske erfaringer. Essensen i en slik tankemåte er, i likhet med aksiomatiske bevis, at komponenter fra lignende problemer er til stede og anvendes i utarbeiding av det aktuelle svaret. På den andre siden beskrives plausibelt resonnement som resonnering hvor tilnærming og svar baseres på valg som tas ut fra kunnskapen som innehas (Lithner, 2000b). Plausibel resonnering vil derfor kunne legge opp til utarbeiding av analytiske bevis, da fellesfaktoren mellom dem er en oppdagelse av sannsynlige løsninger, basert på matematisk kunnskap.

Heller enn å definere hva et bevis er, velger mange forfattere (se De Villiers (1990) og Hanna (1995)) å beskrive bevis ut fra rollene de oppfyller. De Villiers (1990) viser til at målet med all matematikkundervisning bør være å øke kompetansen innenfor feltet, og undervisning av bevis gir da mening på bakgrunn av rollen den sentrale og viktige rollen det spiller innenfor matematikk. De Villiers (1990) trekker også frem seks roller han mener bevis kan ha; verifisering, forklaring, kommunisering, utforskning, systematisering og den intellektuelle utfordring. Vi skal ikke gå inn på alle rollene, men vil særlig trekke fram noen av rollene som forfatteren omtaler. Stylianou et al. (2015, s. 91) viser til at for «undergraduate students» (i dette tilfelle studenter tidlig i et bachelorløp, delvis lik vårt utvalg) er det særlig de tre første rollene nevnt over som burde inkluderes i bevisarbeid i skole- og universitetsmatematikk, da de tre siste rollene krever at studenter kan sette bevis inn i en større deduktiv sammenheng.

Den verifiserende rollen til bevis har som hensikt å demonstrere sannheten av en matematisk formodning eller påstand (De Villiers, 1990). Det er dette som betegnes som den mest utbredte forståelsen av hva hensikten til bevis er, ifølge Hanna (1990). Rollen som verifiserer, sikter til en forståelse av bevis der man forventer at en logisk begrunnelse er underliggende for enhver matematisk påstand som garanterer påstandens sannhet. Hanna peker videre på at en av rolle som bør ilegges vekt i matematikkundervisningen i skolen er den forklarende rollen bevis kan tilføre matematikken. Bevis burde gi studenter og elever i skolen mulighet til forståelse fremfor verifikasjon og demonstrasjon av sannhet, og innholdet burde være begrunnende samt gi mening for studentene heller enn å fokusere på sannhet (Hanna, 1990). Dette betyr ikke at bevis som er utelukkende verifiserende ikke skal gjennomgås, men heller at hovedhensikten til beviset bør være å forklare og gi innsikt i matematikken. Eksempelvis viser De Villiers (1990) til Gale (1990, s. 4) som skriver:

> Lanford and other mathematicians where not trying to **validate** Feigenbaums´s results any more than, say, Newton was trying to validate the discoveries of Kepler on the planetary orbits. In both cases the validity of the results was never in question. What was missing was the **explanation.** Why werw the orbits ellipses? Why did they satisfy these particular relations?... there´s a world of difference between validating and explaining (bold added))

Her vises det til at et bevis kan være mer enn bare å si at noe er sant, det kan også være en søken etter en forklaring til noe som allerede er sant. Det at bevis kan ha en forklarende rolle underbygger også påstandene fra Schoenfeld (2016) om at det er viktig å lære bevis da det kan hjelpe de til å tenke logisk og systematisk for nettopp å bevise en påstand eller teorem. De Villiers (1990) viser også til den utforskende rollen til bevis og nevner at gjennom tidene er det flere store funn som har blitt til gjennom ren deduktiv tenkning (går fra det generelle til det spesifikke). Ved å introdusere de kommuniserende funksjonene til bevis kan man gi studenter innsikt i hva som er en akseptabel begrunnelse for arbeidet man har gjennomført. Her fremstiller De Villiers (1990) den kommuniserende rollen som et forum med kritiske debatter. Selv matematikere har argument for hvordan standardene for et bevis skal være og noen har uttrykt meninger som sier at «the rigor» (oversatt betydning som nøye eller forsiktig) av bevisene deres nesten er viktigere enn resultatene de bringer fram (Hersh, 1993). Rollene til bevis i denne oppgaven bør best diskuteres i relasjon til skolen og det er derfor det vi skal skrive om videre.

2.3.2 Hvorfor bevis bør ha en rolle i skolematematikken

I kapittel 2.3.1 diskuterte vi de ulike rollene bevis kan ha i matematikken. Et sentralt spørsmål videre er hvorvidt bevis bør være en del av skolematematikken. På dette spørsmålet svarer Schoenfeld (1994, s. 74) enkelt og greit «Absolutely. Need I say more? Absolutely». Schoenfeld (1994) viser videre til at han oppfatter bevis i skolematematikken som noe av det mest misforståtte aspektet med pensum og læreplaner i matematikk. Schoenfeld (1994, s. 74-76) legger her frem tre aspekter som han mener gir økt kunnskap om - og kan sørge for et forbedret syn på - bevisets plass i skolematematikken: 1) Matematikk er sikkert. Med dette menes det at dersom man har et bevis for noe i matematikk vet man at det er sant. 2) Studenter setter ikke pris på bevis. Elever og studenters opplevelse med bevis er at de skal bevise noe som de allerede vet har blitt bevist mange ganger før og derfor vil de ofte ikke se helt poenget. Forfatteren viser her til at skolen for ofte fokuserer på form over innhold når det er snakk om bevis. 3) Til slutt nevner han at bevis har to viktige betydninger for matematikk: det ferdige produktet og veien dit. Videre argumenterer forfatteren for at metakognisjon i utviklingen av elevers og studenters ferdigheter i å lage og vurdere bevis er viktig og burde bli tatt på alvor. Til slutt fremhever Schoenfeld (1994) viktigheten av kontekst og matematisk modellering der han mener at virkelighetsnære problemer vil kunne være viktige motivasjonsfaktorer for at studenter skal vise engasjement, også i arbeid med bevis.

Rollene diskutert ovenfor mener vi kan sees på i en større sammenheng med matematisk forståelse. Vi skal derfor nå beskrive måten vi ønsker at leseren skal se på bevis i skolematematikken videre gjennom avhandlingen. Etter innføringen av den nye læreplanen har det skjedd en endring i hvordan elever skal tenke og jobbe med matematikk. I større grad nå enn tidligere skal det jobbes grundig og systematisk med matematiske begreper og sammenhenger for å utvikle en forståelse og ferdighet på et dypere nivå (Kunnskapsdepartementet, 2017). Viktigheten av forståelse i matematikk fremstår dermed som tydeligere etter innføring av ny læreplan. Fra det som er diskutert opp til dette punktet i teorikapitlet ønsker vi at leseren skal forstå at teorien fra **Feil! Fant ikke referansekilden.** og 2.3 kan forstås som å henge sammen. Forfattere slik som Schoenfeld (2016), Skemp (1976), Lithner (2000b) og Engelbrecht (2010) er alle enig i at det bør skje en endring i skolematematikken, som ser ut til å være i takt med endringene som fremkommer i den nye læreplanen (Kunnskapsdepartementet, 2017).

Også Hanna (1990) skiller mellom de ulike rollene bevis har, og ser på skillet mellom bevis som har som utelukkende hensikt å bevise/verifisere, og bevis som har som hensikt å forklare leseren hvorfor en påstand stemmer. I en undervisningssammenheng vil det, som nevnt ovenfor, kunne tenkes at særlig bevis som har som hensikt å forklare burde ilegges særlig vekt. Slike bevis vil kunne bidra til å gi en økt forståelse for argumentasjonen som benyttes, i større grad enn bevis som bare viser fakta, uten å medføre en forståelse for hvorfor påstander stemmer, eventuelt ikke stemmer. Her vil det trolig være snakk om en utvikling av den relasjonelle forståelsen i matematikk, da det legges opp til en dypere forståelse for sammenhengen mellom ulike konsepter. På den andre siden vil det kunne tenkes at bevis som verifiserer gjerne vil kunne medføre og bidra til å utvikle en form for instrumentell forståelse, da beviset først og fremst blir lest, og følgelig heller memorert enn forstått.

2.3.3 Bevis i norsk læreplan

Vi skal i denne delen se kort på hvordan bevis har blitt implementert i den norske læreplanen. Her vil vi bruke noe tidligere diskutert teori, men vil hovedsakelig fokusere på hvordan dagens læreplan er annerledes fra den forrige. Fra den nye læreplanen har vi valgt å ta utgangspunkt i kjerneelementene og enkelte kompetansemål fra læreplan LK-20 (Kunnskapsdepartementet, 2019). Den forrige læreplanen, heretter kalt LK-06 (Kunnskapsdepartementet, 2006), avviker noe i oppbygningen sammenlignet med den nye, da den ikke inneholder kjerneelementer, men kun kompetansemål som utgangspunkt for hva eleven skal lære. Det store skille mellom disse kan hovedsakelig sees i ordbruken i kompetansemålene, der man i LK-06 for matematikk R2 bruker ord som «gjennomføre», «bruke og tolke», «beregne», «omforme», «derivere» og «løse». I LK-20 vil man heller se ordbruk slik som «utforske», «utvikle», «anvende», «analysere» og «forstå». Ordene brukt i LK-20 minner om det som er beskrevet tidligere i dette kapitlet og fra kjerneelementet «resonnering og argumentasjon» (Kunnskapsdepartementet, 2019):

> Resonnering i matematikk R handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer å forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Videre handler det om å utforme egne resonnementer både for å forstå og for å løse problemer. Argumentasjon i matematikk R handler om å begrunne og bevise gyldigheten til framgangsmåter, resonnementer og løsninger.

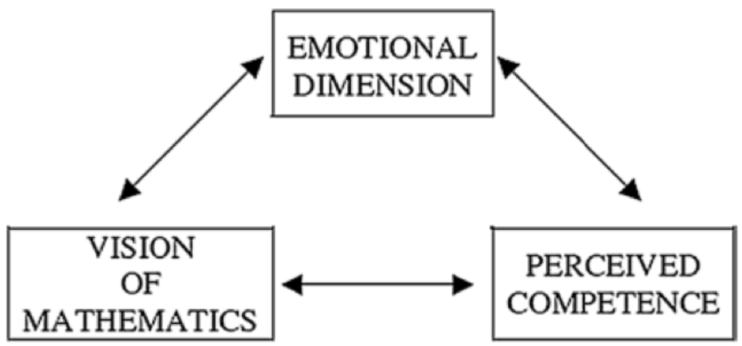
Ved å se på et av målene for opplæring i LK-06 i algebra hvor det vises til at eleven skal kunne «gjennomføre og gjøre rede for induksjonsbevis» (Utdanningsdirektoratet, 2006) fremstår det som det har skjedd en endring i læreplanens tilnærming til bevis. Her kan det se ut til at læreplanen har beveget seg bort fra en ordlyd som typisk legger til rette for verifiserende bevis slik, og heller har et større fokus på den forklarende rollen bevis har og kan ha.

2.4 Det affektive aspektet med matematikk for lærere

I dette kapitlet skal vi se litt dypere på det affektive aspektet med matematikk, der vi gir en kort innføring i dette for lærere i skolen. Å lære seg matematikk er en kognitiv prosess, og slik som andre kognitive felt kan det «affektive» spille en stor rolle i hvordan elever og studenter møter matematikk. Moore (1994) skriver også om at evnen til å lese abstrakt matematikk og gjennomføre bevis, avhenger av en kompleks sammensetning av holdning, kunnskap og kognitive ferdigheter. Det affektive aspektet i matematikk blir videre definert av Reyes (1984):

> Here, affective refers to students´ feelings about mathematics, aspects of the classroom, or about themselves as learners of mathematics. The definition is not intended to limit the affective domain to general feelings such as liking/disliking of mathematics, nor is it meant to exclude perceptions of the difficulty, usefulness, and appropriateness of mathematics as a school subject.

Reyes (1984) skriver videre at målet med undervisningen ikke er at elever og studenter skal ha en direkte positiv holdning (attitudes) til matematikk, men målet burde heller være å se hvordan affekt kan spille en rolle slik at studenter kan lære mer matematikk. Di Martino og Zan (2011, s. 476) legger fram en tredimensjonal modell for hvordan man skal karakterisere holdninger i matematikk (Figur 1) etter hva studenter mener viktig i deres utvikling av forholdet med matematikk. Denne modellen skal kunne behandles som en bro mellom formodninger (beliefs) og følelser da det er nettopp dette den tar stilling til, samt forholdet mellom dem (Di Martino & Zan, 2011, s. 476).



Figur 1: Tredimensjonal modell for holdninger i matematikk.

I denne artikkelen presenterer Di Martino og Zan (2010, s. 43-44) en tredimensjonal modell for holdninger basert på tre hovedpunkter; 1) Emosjonell innstilling til matematikk. Her svarer ofte elevene at liker eller ikke liker matematikk, noe som forfatterne argumenterer for at er den emosjonelle forbindelsen de har til faget. 2) Deres egen oppfattelse av kompetanse i faget. Elevene formidlet sin tro på egne evner i faget til å lykkes eller mislykkes. 3) Visjon i matematikk. Elevene ga sitt perspektiv på hva matematikk betydde for dem, og ga uttrykk for deres forståelse og oppfatning av faget.

Videre knyttet (Di Martino & Zan, 2010, s. 44-46) denne modellen opp mot lærere og skolen. De oppfattet at lærere, fremfor å kunne komme med presis informasjon om en elevs oppførsel, heller sa at eleven hadde dårlige holdninger til matematikk. De mener at denne modellen kan fungere som et verktøy for lærere i skolen, der den skal være med på å hjelpe lærere med hvor den burde rette oppmerksomheten sin til når det gjelder eleven.

3 Metode

I dette kapitlet skal det redegjøres for metodiske tilnærminger vi har gjort i forskningsprosjektet. Når en forsker vil forske på noe, er det først og fremst for å finne et svar på et fenomen. Hvilken metode som da velges avhenger primært av to ting; formålet med forskingen, og type spørsmål som forskeren vil ha svar på. Den metoden som anses som best passende velges deretter, og benyttes for å forsøke å svare på forskningsspørsmål eller problemstilling (Cohen et al., 2018, s. 174). Metodevalget i vår oppgave ble tatt ut fra følgende problemstillingen: «Hvordan opplever studenter ved innføringsfag i matematikk på universitetet overgangen til matematiske bevis?».

Everett og Furseth (2013) viser til to vanlige feil studenter har en tendens til å gjøre i valg av tema; å skrive om et tema som er for bredt til å kunne være forskbart, og å skrive i et område beskrevet som «overbefolket». For å sørge for en best mulig oppgave, vises det også til at justeringer burde skje underveis og fortløpende. Selv har vi valgt en problemstilling som kan oppfattes som nokså vidt, og vi har derfor valgt å snevre inn oppgaven ved å anvende følgende forskningsspørsmål for å besvare problemstillingen:

1. Hva er studenters oppfatning av betydningen av bevis i matematikk, og hva slags matematisk forståelse ønsker studenter å oppnå
2. Hva kjennetegner studentenes syn på viktigheten av å kunne resonnere i matematikk?

For å besvare problemstillingen, har vi valgt å ta i bruk Mixed Method Research-metoden. Dette vil gjennomføres ved å benytte et kvantitativt spørreskjema og kvalitative intervju som sammen skal bidra til å belyse relevante aspekter ved forskningsspørsmålene. De to forskjellige metodene blir presentert og behandlet individuelt fram til diskusjonskapitlet. Vi mener dette gjør det lettere for leseren å holde oversikt, samt lettere å forstå og følge arbeidet vårt i metode- og resultatdelen.

3.1 Mixed Methods Research: spørreskjema og kvalitative forskningsintervju

Cohen et al. (2018, s. 33) skriver at Mixed Methods Research er tiltenkt å kunne dekke problemstillingen på en mer komplett og meningsfull måte sammenlignet med en-metode forskning, slik som ren kvalitativ eller kvantitativ metode. Vi har valgt å ta i bruk en blanding av disse, da vi ønsker å utnytte styrken til begge metodene for å kunne gi et mer komplett bilde, samt minimere svakhetene til hver av metodene vi bruker. En kombinasjon av kvalitativ og kvantitativ metodisk tilnærming gir oss muligheten til å ha en meningsfull fortolkning av fenomenet som utforskes, samt muliggjøre en generalisering av resultatet vi finner (McKim, 2017). Vi har valgt å bruke retningen som kalles «Explanatory sequential design» definert av Creswell og Plano Clark (2011; referert i Cohen, 2018, s. 39) som tar utgangspunkt i at det først samles inn kvantitative data etterfulgt av en innhenting av kvalitative data. Hensikten bak denne tilnærmingen er å beskrive og forklare funnene fra de kvantitative datamaterialet gjennom funnene fra den kvalitative datainnsamlingen. Ivankova (2014, s. 245) påpeker at det særlig er tre aspekter som er viktig å ta hensyn til i en slik tilnærming; For det første er det viktig at utvalget for kvalitative intervju er representativt. For det andre må uforventede resultater fra de kvantitative dataene forklares eller følges opp. Til slutt vises det til viktigheten av å fremheve og tydeliggjøre hvordan den kvantitative og kvalitative delen har utspilt seg gjennom undersøkelsen.

3.2 Spørreskjema

En kvantitativ tilnærming egner seg best dersom man vil kartlegge eller gi en oversikt over et større utvalg personer (Gleiss & Sæther, 2021, s. 30). Kvantitative metoder bygger på et positivistisk vitenskapssyn hvor en hypotese eller en antakelse enten kan avvises eller bekreftes. Funnene i en kvantitativ undersøkelse skal kunne reproduseres samt være pålitelige, og må også kunne følge strenge regler satt gjennom naturvitenskapelig forskningspraksis. Gjennom å bruke en kvantitativ tilnærming åpnes muligheten for å sette tall på aspekter som for eksempel holdninger eller motivasjon. I tillegg gir det muligheten til å oppnå et større datagrunnlag med flere studenter på kort tid, enn dersom det utelukkende ble benyttet kvalitative intervju.

Undersøkelser gjort via internett har i den siste tiden overgått undersøkelser på papir (Vaske, 2011). Cohen et al. (2018, s. 361-362) skriver at det finnes fordeler og ulemper med begge. Internettbaserte undersøkelser har fordeler slik som at tiden det tar å distribuere, fullføre, samle og prosessere data er betraktelig kortere. Dersom analyseapparatet er klart på forhånd vil selve analyseringen av datagrunnlaget gå like fort som undersøkelsen. Det vil også være enklere å se på større deler av befolkningen, hvilket fører til et mer representativt datasett da en bredere andel av befolkningen kan bli undersøkes. Dette muliggjør også arbeid med større datasett for forskeren

Risikoen for såkalt «dropout» kan likevel være høy i en internettundersøkelse og det er derfor anbefalt at den skal være kortere enn sin motpart på papir (Cohen et al., 2018, s. 361-362). Vi har diskutert lengden av spørreskjemaet, og det vil komme fram noen synspunkter angående dette i delkapitlet om pilottesting. I en undersøkelse der respondentene ikke vil kunne stille spørsmål er det viktig å, til den grad det er mulig, bruke klart og tydelig språk for å unngå misforståelser, samt huske på at alle instrukser som er nødvendig for respondentene må være til stede (Cohen et al., 2018, s. 502). Problemer med mobiltelefon eller datamaskin kan oppstå, og programmet som brukes skal fungere med en rekke ulike operativsystemer og skjermer hvilket kan medføre ulikt oppsett, sammenlignet med det som var tiltenkt. Servere eller datamaskinen kan «krasje», «fryse» eller bare ikke gjøre slik den skulle (Cohen et al., 2018, s. 361-362). Grunnet den raske databehandlingen, i tillegg til den begrensede tiden vi har på prosjektet, anslo vi det fordelaktig å benytte en internettundersøkelse, da vi raskt ville kunne sammenligne og overføre data til de aktuelle programmene for databehandling.

3.2.1 Utarbeiding av spørsmål

I utarbeidelsen av spørsmål til et spørreskjema er det viktig å huske på å tilpasse spørsmålene etter den målgruppen en skal stille spørsmål til. Det kan også være lurt å ta eller hente inspirasjon fra andre tidligere validerte spørreundersøkelser, der validitet og reliabilitet tidligere er gjort rede for (Ringdal, 2018, s. 202). Vi startet med å gjøre søk i ulike databaser slik som Oria, Google Scholar og Eric der vi søkte etter ord slik som «proof questionnaire», «transition to university» og «proof in mathematics questionnaire» mfl. Vi opplevde da at denne overgangen har blitt forsket på, men ikke med den nøyaktige vinklingen vi ønsket å ta for oss. Da våre forskingsspørsmål og problemstilling er vinklet noe annerledes enn andre forskningsprosjekt og spørreundersøkelser, opplevdes det slik at vi forsøkte å måle noe annet enn det andre tilsynelatende tematisk like spørreskjema gjorde. Dette medførte følgelig at vi ikke kunne hente et *fullstendig* instrument fra en annen forfatter, og det ble bestemt at vi måtte produsere et eget spørreskjema. Dette ble gjort med inspirasjon fra andre spørreundersøkelser, i tillegg til at vi utarbeidet noen egne spørsmål og påstander for å kunne si noe om de aspektene vi anså som viktige.

I utarbeiding av spørsmål er det flere aspekter som skal tas hensyn til. Ringdal (2018, s. 207) skriver at «åpningsspørsmålene» i spørreskjemaet skal være lette, nøytrale og ufarlige. Videre skriver Ringdal (2018) at starten av spørreskjemaet skal forsøke å motivere respondentene. Dersom det stilles spørsmål angående tidsaspekter, skal disse stilles i kronologisk rekkefølge (se oversikten i slutten av avsnittet). Ringdal (2018, s. 208) skriver at i spørreskjemaer som er selvutfyllende (uten en ansvarlig fra prosjektet til stede) må alle beskjedene legges inn i skjemaet. Vi var klar over at dersom respondentene opplevde den første delen av spørreskjemaet som ubehagelig vil det kunne medføre økt antall «dropouts», altså respondenter som avslutter før de er ferdige med spørreskjema. Spørreskjemaet ble derfor utformet på et vis vi anså som logisk, med en kronologisk spørsmålsrekkefølge som begynte med bakgrunnsinformasjon om respondentene, deretter tok det opp spørsmål og påstander om tiden før universitetet, og gikk senere over til å omhandle tiden etter studentene begynte med universitetsmatematikk.

Før vi går videre til en mer detaljert beskrivelse av spørreskjemaet, vil vi bemerke at vårt forskningsfokus endret seg noe underveis i arbeidet med denne oppgaven. Dette har medført at det er flere aspekter fra spørreskjemaet som ikke vil belyses i oppgaven. Til tross endring i fokus, opplevdes det slik at vi fortsatt kunne hente relevante resultater fra undersøkelsen. Spørsmål eller påstander som ikke er relevante for oppgaven tas ikke med i dette kapitlet, men de kan sees i Vedlegg 4, der spørreskjemaet kan sees i sin helhet. Videre, er vår erfaring at det er bedre å stille ett spørsmål for mye, enn ett for lite. Det at vi stilte mange spørsmål, åpnet opp for muligheten til å se på flere interessante aspekter, og vinklinger med datamaterialet, dersom vi ønsket det. I den videre fremstillingen vil vi fokusere på å beskrive de delene av spørreskjemaet som har dannet datagrunnlaget for oppgaven.

I delen om bakgrunnsinformasjon stilte vi spørsmål om respondentenes kjønn, alder, type matematikk fra videregående, hva de gjorde i tiden mellom universitetet og videregående, matematikkarakter på videregående, og nåværende studieprogram. Dette gjorde at dersom vi så interessante forskjeller i ulike subgrupper av utvalget, var muligheten til stede for å kunne analysere dette videre.

Etter innledende spørsmål om bakgrunnsinformasjon til respondentene, ble det spurt om studentenes oppfatninger til undervisningen og deres tanker rundt matematiske bevis *før* de begynte på universitetet. Her er det en blanding av påstander som respondentene skulle vurdere ut fra fempunkts Likert-skala, samt vurdere hvor ofte det ble gjort ulike aktiviteter knyttet til bevis på videregående. «Hvor ofte»-spørsmålene handler om hvor ofte læreren på videregående gjennomførte bevis i klassen, hvor ofte de arbeidet selvstendig, eller i mindre grupper, med bevis, og om det ble diskutert ulike måter å bevise matematiske påstander på. Deretter ble det presentert Likert-skala-påstander som respondentene skulle vurdere fra 1- «Uenig» til 5 – «Enig», nedenfor gjelder dette påstand 1-3. Disse spørsmålene handler om undervisningen på videregående, men kan også være med å belyse aspekter rundt deres holdninger til bevis på videregående. Oversikten over spørsmålene om hvor ofte, samt Likert-skala-påstandene kan sees nedenfor. Enkelte Likert-skala-påstander fra spørreskjemaet er fjernet grunnet lite relevans for oppgaven. Disse kan leses i det komplette spørreskjemaet.

1. Jeg følte jeg forstod hva et bevis innebar på videregående
2. Læreren gjorde det enkelt å følge med i undervisningen
3. Jeg følte det var unødvendig å forstå bevisene læreren presenterte på videregående
4. Lærer på videregående gjennomførte bevis i klassen (Dette spørsmålet er formulert etter «Hvor ofte» med svaralternativer 1 – «Sjelden/aldri», 2 – «1-2 gang per halvår», 3 – «1-2 gang i måneden», 4 – «Ukentlig».)

De tre første påstandene er hentet med inspirasjon fra punktene presentert fra Moore (1994). Moore (1994) skriver at studenter sliter med bevisets natur, hva et bevis innebærer, det matematiske språket, samt vanskeligheten med å bruke matematiske uttrykk og symboler på en presis måte. Her ønsket vi at påstand 1 skulle være direkte siktet til om respondentene følte de forstod bevisene som var presentert på videregående. Påstand 2 skulle sikte til hvordan studentene opplevde undervisningen. Vi mener det kan tenkes at dersom elevene opplevde matematikken på videregående som enkelt å følge med på var det et mindre formelle presentasjoner. Påstand 3 var tiltenkt å måle om respondentene hadde en negativ eller positiv assosiasjon til å forstå bevis på videregående. Tanken bak påstand 4, var at den skulle fungere som et kontrollspørsmål. Dersom respondentene svarte at det var unødvendig å følge med på bevisene på videregående, men opplevde å bli presentert bevis svært sjeldent, ville svarene tenkes å kunne bli sett på som ugyldig – da de ikke hadde et grunnlag for å svare på dette.

Da vi skulle utarbeide spørsmål angående respondentenes holdninger til bevis og resonnering, bestemte vi oss for å bruke spørreskjemaet fra undersøkelsen til Stylianou et al. (2015) som inspirasjon. Dette ble brukt særlig i utarbeidingen av spørsmål som omhandlet studentenes tid på universitetet og vedrørende deres erfaringer med universitetsmatematikk og bevis. Her var meningen at vi skulle forsøke å fange opp respondentenes oppfatning om betydningen av bevis i matematikk, deres oppfatning av viktigheten av å kunne resonnere i matematikk og hvordan de engasjerer i seg i bevisprosessen.

Det overordnete målet med spørreskjemaet til Stylianou et al. (2015) er nokså likt vårt, i tillegg til at målgruppen er tilsynelatende lik, med unntak av nasjonalitet (deres ble gjennomført i USA). Vår undersøkelse ser på hvordan studenter opplever overgangen til matematiske bevis og resonnering, mens undersøkelsen av Stylianou et al. (2015) forsøker å finne forholdet mellom holdning, oppfatning og klasseromserfaring med læring av bevis. Enkelte spørsmål fremsto derfor ikke som særlig relevante for vår undersøkelse, og ble følgelig ikke tatt med. I Stylianou et al. (2015) er respondentene «Early undergraduates», altså studenter som er kommet en viss lengde i deres studium, og er ikke nødvendigvis inne i deres første semester slik våre respondenter er. Spørsmålene vi har tatt ut fra spørreundersøkelsen til Stylianou et al. (2015) kan sees i Tabell 1 under. Som nevnt tidligere, endret vi fokus underveis i oppgaven, og det er derfor flere spørsmål i vårt spørreskjema som ikke lengre er relevante. Disse er derfor ikke tatt med her. Som vist i Tabell 1, har vi oversatt noen av spørsmålene til Stylianou et al. (2015).

Tabell 1: Oversikt over vår tolkning av spørsmål fra Stylianou et al. (2015) sin undersøkelse.

Originalt spørsmål	**Vår oversettelse**
All students of mathematics should have the opportunity to learn to read and write proofs	Alle matematikkstudenter burde ha muligheten til å lære seg å lese og å skrive bevis
I think constructing proofs is an important part of doing mathematics	Jeg anser bevis som en viktig del av matematikk
In learning mathematics, it's important for me to understand the reasons not just memorize the formulas	Når jeg lærer matematikk, er det viktigere å forstå innholdet fremfor å memorere formler
I feel that I have an important contribution to make during the construction of a proof in math class.	Jeg opplever at jeg kan komme innspill når det gjennomføres bevis

Gjennom å oversette spørsmålene til Stylianou et al. som vi anså som relevante, åpnet det opp for en mulighet til å sammenligne våre resultater med deres. Dette vil kunne bidra til å styrke reliabiliteten og påliteligheten i vår undersøkelse. Vi anser likevel ikke en oversettelse av spørsmål som uproblematisk, da dette vil kunne medføre at ordlyden, betydning og kontekst vil kunne endres. Samtidig som vi ønsket å beholde betydningen av noen av spørsmålene til Stylianou et al. (2015), ønsket vi å overkomme de metodologiske forskjellene i undersøkelsen. Enkelte spørsmål ble derfor slått sammen, i tillegg at det ble lagt til spørsmål vi anså som relevante for å belyse vår problemstilling. Vi endte dermed opp med 9 påstander for å belyse studentenes tanker om universitetsmatematikken:

1. **Jeg anser det som nyttig å forstå bevisene foreleseren presenterer**
2. **Jeg anser bevis som en viktig del av matematikk**
3. Jeg opplever at jeg komme med innspill når det gjennomføres bevis
4. Bevis kan brukes for å formidle og forklare nye ideer innenfor matematikk
5. Alle matematikkstudenter burde ha muligheten til å lære seg å lese og å skrive bevis
6. **Jeg anser det som viktig å forklare og argumentere for valg jeg harr i eget arbeid med oppgaver**
7. For å bli god i matematikk krever det at man mestrer bevis

8. **Når jeg lærer matematikk, er det viktigere å forstå innholdet fremfor å memorere formler**
9. Dersom jeg ikke forstår et bevis som presenteres, oppsøker jeg andre forklaringer som gir mening (spør medstudenter, foreleser, ser videoer etc.)

Ovenfor nevner vi de 9 påstandene fra spørreundersøkelsen. Under utformingen av spørreskjema har vi tenkt på den tredimensjonale modellen som Di Martino og Zan (2010) presenterer gjennom sin studie. Det fremkommer for eksempel fra påstand 2 «Jeg anser bevis som en viktig del av matematikk» to aspekter vi ønsker å nevne. Dette spørsmålet er oversatt fra Stylinaou et al. (2015) som nevnt tidligere, men samtidig mener vi dimensjonen Di Martino og Zan (2010, s. 38-40) kaller «perceived competence».

Gjennom denne oppgaven brukt hoved- og hjelpepåstander som utgangspunkt for analysen senere. Hovedpåstandene er det vi ønsket å argumentere ut fra, og er påstander vi mente legger opp til interessante funn og diskusjoner. Disse påstandene var godt knyttet sammen med de spørsmålene vi planla å stille i intervjuet, samt at de gir innblikk i studenters tanker og syn rundt sentrale aspekter av forskningsspørsmålene. Hjelpepåstandene var ment som underbyggende og skulle gi en bedre forståelse av funnene våre. De skulle også bidra til å styrke argumentasjonen vår og gi et mer solid grunnlag for funnene fra de kvantitative dataene. Når påstandene blir presentert ovenfor vil hovedpåstandene være markert med fet skrift. Vi vil komme tilbake til begrepsvaliditeten i oppgaven når vi skriver om validiteten i delkapittel 3.5.2.

3.2.2 Gjennomføring av spørreundersøkelsen og pilottesting

For at studentene skulle ha muligheten til å delta i spørreundersøkelsen ble de bedt om å eksplisitt gi samtykke til deltakelse for vårt spesifikke formål og prosjekt. Dette kreves for å ivareta studentenes personvern i tillegg til å opplyse respondenten om hva undersøkelsen dreier seg om, samt hvordan personopplysningene deres blir oppbevart og behandlet (NESH, 2021). Samtykkeskjemaet ble utarbeidet gjennom Universitetet i Tromsøs (UiT) samarbeid med plattformen Nettskjema, fra Universitet i Oslo. Her ble det utviklet både et samtykkeskjema med informasjon fra samtykkeskrivet, i tillegg til selve spørreundersøkelsen. Etter å ha samtykket til å delta i forskningsprosjektet fra samtykkeskjemaet, ble respondenten sendt videre til selve spørreundersøkelsen. Dersom studenter valgte å ikke samtykke, ble studenten ikke sendt videre til spørreskjemaet. Avslutningsvis i spørreskjemaet fikk respondentene mulighet til å samtykke til delta i intervju ved å godta til dette, i tillegg til å legge igjen kontaktinformasjon.

3.2.3 Pilottesting

Gleiss og Sæther (2021, s. 156) påpeker viktigheten av pilotundersøkelser etter ferdig utforming av spørreundersøkelser, og viser til at pilottesting gir forskeren muligheten til å justere ordlyd og rekkefølge før selve datainnsamlingen finner sted. I vårt tilfelle var det totale antallet studenter/respondenter ikke avklart, og for å unngå å gjennomføre samme undersøkelse to ganger, ble det å teste den ferdigutformede spørreundersøkelsen på medstudenter for å kunne utbedre eventuelle uklarheter. I korte trekk ble det bekreftet at det var noe utydelig hvilke spørsmål som omfattet tiden på videregående, og hvilke spørsmål som tok for seg tiden på universitetet. Dette ble rettet opp i ved å legge til tekst, samt lage underoverskrifter for de ulike spørsmålsbolkene slik at det ble presisert hva som skulle svares på. Medstudentene som deltok på pilottestingen ble også bedt om å tenke over lengden av spørreundersøkelsen. Cohen et al. (2018, s. 499) skriver at innsats og belastning på respondentene alltid skal vurderes. Lengden må naturligvis muliggjøre en innhenting av det ønskede datamateriale, samtidig er det viktig at undersøkelsen ikke tar for lang tid for studentene. Forfatterne skriver også at for mye tenking, memorering og lesing vil kunne medføre en overbelastning på respondentene, hvilket bør unngås. For å hindre dette, ble det utformet et antall spørsmål vi anså passende, og da pilottestingen ikke medførte noen negative tilbakemeldinger på gjentakelse eller lengde endret vi ikke dette. Det ble derfor bestemt at spørreskjemaet var ferdigstilt med sine 50 spørsmål og en tidsbruk på 5-7 minutter fra pilottestingen.

3.2.4 Gjennomføring på studenter

Etter ferdigstilling av spørreskjema begynte prosessen med rekruteringen av respondenter. Dette ble gjort ved å kontakte forelesere som underviste i innføringsemner i matematikk på en rekke universiteter via e-post. Forespørselen gikk i grove trekk ut på at de skulle legge ut en kunngjøring på emnets kommunikasjonskanal for å formidle at spørreundersøkelsen lå ute til studenten, samt nevne dette i forelesningen. Første rekrutteringsrunde foregikk i slutten av november, og resulterte i 80 respondenter, hvilket vi anså som å være litt for få. For å rekruttere ytterligere respondenter, og særlig respondenter med erfaringer fra teoretisk matematikk tok vi kontakt med en foreleser i matematikk på Universitetet i Tromsø, og fikk med dette økt antallet respondenter til 111, i tillegg til flere deltakere til intervjuene.

3.3 Kvalitativt intervju

Vi vil nå beskrive den andre delen av vår datainnsamling. Her vil det bli argumentert for behovet av en kvalitativ del, som har som hensikt å komplementere det kvalitative datagrunnlaget vårt. Johannessen et al. (2016, s. 145) skriver at intervjuer egner seg godt i de tilfeller hvor forskeren har behov for å gi større frihet til informantene utover det som tillates i et strukturert spørreskjema. I tillegg muliggjøres en presentasjon av informantenes erfaringer og oppfatninger, som best kommer fram når de selv kan gjøre rede for sine egne svar. Et spørreskjema vil være begrensende for hvilke svar man får avgitt, og vil kunne medføre et nokså overfladisk bilde av respondentenes synspunkter. Gjennom bruk av intervju vil man derimot kunne få et dypere og mere nyansert blikk i synspunktene som kommer frem. Intervju muliggjør også en videre utdypning av påstander, og kan også være med på å avdekke ubevisste holdninger eller oppfatninger som ikke kommer frem i spørreskjemaet. For å rekruttere studenter til intervju, ble det besluttet å legge ved spørsmål på slutten av spørreskjemaet hvor respondentene selv kunne velge å gi samtykke til å bli kontaktet for å avtale et intervju. Dette er en tilnærming for rekrutering som Johannessen et al. (2016, s. 122) beskriver som svært vanlig.

3.3.1 Struktur

Intervju beskrives av Cohen et al. (2018, s. 506) som en utveksling av synspunkter mellom to eller flere personer om en felles interesse. Den kvalitative delen i vår oppgave vil i stor grad dreie seg om å nyansere og tilegne ny og dypere informasjon med utgangspunkt i de kvantitative dataene fra spørreskjemaet gjennom intervju. Kvale et al. (2009, s. 49) viser til intervju som en godt egnet metode i søken etter nyanserte beskrivelser av interpersonens livsverden ved hjelp av ord istedenfor tall. Det vises derfor videre til at det bør oppfordres til at informanten i størst mulig grad forklarer sin livsverden og sine tanker så nøyaktig som mulig. Kvale et al. (2009, s. 51) påpeker at det i et intervju er ønskelig å skape et samspill mellom den intervjuede for å videreutvikle kunnskap om de aktuelle temaene for intervjuet.

Johannessen et al. (2016, s. 148) skiller mellom fire ulike typer intervjuer. Disse varierer i grad av forhåndsstrukturering, fra minst til mest; Ustrukturert, semistrukturert, strukturert og strukturert med faste svaralternativer. Strukturerte intervju med faste svaralternativer vil i stor grad kunne resultere til samme resultat som fra spørreundersøkelsen, og ble derfor ikke vurdert som en aktuell intervjustruktur. I et ustrukturert intervju er hensikten at samtalen skal flyte uten at spørsmålene er har en fast rekkefølge eller er tilrettelagte på forhånd, og intervjuet bærer følgelig mere preg av å være som en samtale. Dette vil samtidig medføre at dataanalyse og sammenligning av andre intervjuer blir krevende, da de samme temaene og spørsmålene ikke nødvendigvis vil bli dekket i alle intervjuene. For å enkelt kunne sammenligne resultater vil et strukturert intervju være aktuelt, da alle spørsmålene er ferdigutformet og kommer i en fastsatt rekkefølge. Det ble likevel bestemt å benytte semistrukturerte intervju for den kvalitative delen av datainnsamling, da dette muliggjør en videre oppfølgning av interessante funn, og benytter dermed fordelene av både standardiserte intervju med åpne svar, og ustrukturerte intervju.

For å sørge for en tydelig struktur på intervjuene ble det utformet en intervjuguide som ble fulgt i gjennomføringen av alle intervjuene. Dette medfører at intervjuene mer eller mindre følger samme struktur, og gjør det enklere å sammenligne resultater. Cohen et al. (2018, s. 510) trekker frem viktigheten av en god intervjuguide, og viser til at planlegging av rekkefølge, spørsmål og sekvenser også hjelper med å gi dybde og nyansering i innholdet. Hovedinnholdet i intervjuguiden vil bli presentert senere i delkapittel 3.3.3.

3.3.2 Forberedelser

Kvale et al. (2009, s. 115-116) skriver at det kan oppfattes som om forskning er en fastsatt lineær og logisk prosess. Det påpekes at dette ikke er tilfelle, og vises til at prosessen heller kan beskrives som dynamisk, hvor det stadig gjøres endringer for å finne svar, samt belyse relevante aspekter. Vi skal nå beskrive forberedelsene våre til intervjuet og de overveide, men skiftende, valgene som ble tatt underveis. Mål som intervjuer er å skape en rikholdig kunnskap, samt etisk forsvarlig og positiv situasjon for den intervjuede (Kvale et al., 2009, s. 178). Ved å gjennomføre testintervjuer får intervjuer øvd seg på intervjusituasjonen, og hvordan ulike svar kan håndteres, samt utvikle en personlig teknikk for å få svar på spørsmålene som stilles. (Johannessen et al., 2016, s. 155).

Det ble gjennomført et prøveintervju på en medstudent som tidligere har gjennomført lignende matematikkemner som de intervjuede. Her var det ønskelig å oppnå samtaler som minnet om de som var tiltenkt å kunne oppstå i de ekte intervjuene. Da intervjuet skulle bestå av to intervjuere til stede var det også ønskelig å se på dynamikken mellom intervjuerne. Målet med gjennomføringen var derfor at prøve-intervjuobjektet kunne gi tilbakemeldinger på rekkefølgen og formuleringene til spørsmålene i tillegg til utprøving av samspill mellom intervjuere. Dette førte til refleksjoner og gode diskusjoner rundt spørsmål, oppfølgingsspørsmål og spørsmålsrekkefølgen som ble tatt i betraktning i videre utarbeiding av intervjuguide og gjennomføring. Gjennom dette fikk vi også gjort opp noen tanker rundt hvordan vi senere kunne analysere svarene, samt koble dette opp mot resultater fra spørreskjema.

3.3.3 Intervju

Det vil nå bli gjort rede for valg tatt rundt gjennomføring, praktisk informasjon samt hovedinnholdet i de kvalitative intervjuene som ble gjennomført. Vi ønsker å presisere at navnene på de intervjuede er fjernet og endret i oppgaven. Innledningsvis ble det utformet en intervjuguide bestående av 15 spørsmål (utover det vi anser som praktisk informasjon slik som studieretning, type matematikk og alder). Til de 15 spørsmålene var det også tilknyttet ulike oppfølgingsspørsmål avhengig av hvilken retning intervjuet tok, eller hvordan informantene besvarte de ulike spørsmålene. Den fulle intervjuguiden kan sees under i vedlegg 5.

Intervjuet består hovedsakelig av tre kategorier som vi har valgt å fokusere på. Her skal vi videre gjennomgå disse kategoriene, samt forklare tanken bak flesteparten av hovedspørsmålene vi ønsket å spørre alle de intervjuede. Dette følger delvis av det spørreundersøkelsen vår har spurt om tidligere, og stilles for å få frem svar som kan utdype aspekter funnet gjennom analysen av spørreskjemaet. Intervjuet startet med å spørre de intervjuede om hva de tenkte om matematikk på videregående, hvordan det jobbes med matematikk nå kontra før og litt om hvordan synet på matematikk har endret seg etter påbegynt utdanning:

- Husker du hva du tenkte om matematikk fra videregående?

- Opplever du at måten matematikk jobbes med, eller presenteres på har endret seg? I så fall hvordan?
- Hvilken rolle føler du matematikk har for deg i forbindelse med studie?
- Hvordan føler du møtet med matematikk på universitetet var?

Ovenfor er hovedspørsmålene, valgt ut fra interessante aspekter funnet gjennom resultater fra spørreskjema, som vi ønsket å se på videre. Vi ønsker å nevne at dette er semistrukturerte intervju, hvilket medfører at alle spørsmålene er gått gjennom, men påpeker at enkelte spørsmål stilles videre for å belyse og utforske interessante poenger. Etter dette ble det introdusert to bevis som vi ønsket at de intervjuede skulle lese over og prøve å fremme deres tanker om disse til oss. Det ble her presisert at det var studentenes tanker rundt beviset som var interessant for oss. Det første beviset var tenkt å være enklest for de intervjuede å forstå da det hadde et mindre formelt matematisk språk med mindre symboler og mer forklarende tekst:

Vi ønsker nå å bevise at $\sqrt{2}$ er et irrasjonelt tall. Dette vil vi gjøre ved hjelp av et motbevis. Vi antar derfor at $\sqrt{2}$ er et rasjonelt tall som og vil derfor kunne skrives som en ratio med av to andre heltall (en brøk):

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Tallene a og b har ikke en felles faktor og er skrevet i sin simpleste form. Vi fortsetter:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2}\right)^2 &= \frac{a^2}{b^2} \\ 2 &= \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Fra dette kan vi se at a^2 er delelig med 2 og det følger da at tallet a^2 er et partall. Dersom a^2 er et partall følger det også at a må være et partall. Vi velger derfor å skrive $a = 2c$, der c er et annet heltall. Vi fortsetter der vi slapp:

$$\begin{aligned} 2b^2 &= a^2 \\ 2b^2 &= (2c)^2 \\ 2b^2 &= 4c^2 \\ b^2 &= 2c^2 \end{aligned}$$

Vi har nå oppdaget at b^2 også er et heltall delelig på 2. Det følger også her at b^2 må være et partall. Dette betyr at de har en felles faktor 2, til tross for at vi har sagt at a og b er i sin simpleste form, uten felles faktorer. Siden en slig motsigelse har blitt etablert er vi nødt til å kaste det originale utsagnet da det viser seg at det er falskt. På bakgrunn av dette kan vi si at $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

Det andre beviset vi hadde med som vi ønsket at studentene skulle se på så slik ut, og tanken var at det skulle ligne mere på måten bevis gjerne blir presentert i forelesning:

Teorem La f være kontinuerlig i c og anta at $f(c) \neq 0$. Da eksisterer det et åpen intervall $\langle c-\delta, c+\delta\rangle$ om c slik at for alle x i dette intervallet så har $f(x)$ og $f(c)$ samme fortegn.

Bevis Anta at $f(c) > 0$. Vi vet at f er kontinuerlig i c, hvilket betyr at for enhver $\epsilon > 0$ så eksisterer det en $\delta > 0$ slik at:

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$$

Velger $\epsilon = \frac{f(c)}{2} > 0$, vi vet nå at det eksiterer en $\delta > 0$ slik at for alle x i intervallet $\langle c-\delta, c+\delta\rangle$ så er:

$$|f(x) - f(c)| < \frac{f(c)}{2}$$
$$-\frac{f(c)}{2} + f(c) < f(x) < \frac{f(c)}{2} + f(c)$$
$$\frac{f(c)}{2} < f(x) < \frac{3f(c)}{2}$$

Dersom $f(c) < 0$ så velger vi $\epsilon = -\frac{f(c)}{2}$

Mellom hvert av bevisene ble det stilt en rekke spørsmål. Dette ble gjort for å få best mulig forståelse av studentenes tanker rundt bevisene. Til begge bevisene ble de samme spørsmålene tatt utgangspunkt i, hvilket tydeliggjorde hva studentene opplevde som vanskelig med de ulike bevisene. Uten underspørsmål var dette de spørsmålene vi tok utgangspunkt i:

- Hva er det første du tenker når du ser bevis 1 eller 2?
- Stopper det opp? → Hvor stopper det opp? → Hva skyldes stoppen?
- Hva synes du om forskjellen mellom dette beviset og det en foreleser presenterer?

Studentene ble så stilt en rekke spørsmål om sine erfaringer rundt bevis:

- Hvordan opplever du at foreleser presenterer bevis på universitetet?
- Hvordan opplever du at måten bevis presenteres på har endret seg etter at du begynte med universitetsmatematikk?
- Følger du en gjennomgang av bevis av foreleser gir deg et nyttig verktøy videre?
- Klarer du å gi et eksempel på når et bevis er akseptabelt for deg?
- Dersom du ikke forstår et bevis presentert prøver du å forstå det?

Rekkefølgen ble lagt på denne måten, da det var tenkt gjøre det enklere for studentene å tenke tilbake på bevis fra forelesningene dersom de fikk muligheten til å først bli presentert med et konkret bevis. Studentene ble deretter bedt om å svare på noen flere spørsmål om bevis:

- Hvorfor/Hvorfor ikke føler du det er viktig å forstå matematikken som utføres?
- Hvordan hadde du foretrukket at bevis ble introdusert/presentert?
- Hvorfor/Hvorfor ikke anser du det som nyttig/uviktig å lære om bevis?

Avslutningsvis ble det spurt om to spørsmål for å oppklare studentenes tanker og avslutte intervjuet:

- Hva vil du si er de tre viktigste tingene vi har snakket om?
- Er det noe du vil legge til?

Da vi var klar for å gjennomføre intervjuene ble det opprettet kontakt med personene som hadde samtykket til å bli kontaktet i anledning intervjuet. Ivankova (2014) mener det viktig å ha en systematisk prosess på hvem man velger ut til intervju. Vi valgte derfor å spørre alle hvilken type matematikk de gjennomførte (anvendt eller teoretisk) slik at vi fikk et representativt utvalg. Basert på svarfordelingen med teoretisk og anvendt matematikk på rundt 70% teoretisk- og 30% anvendt matematikk, valgte vi ut to personer som hadde bakgrunn i teoretisk matematikk og en person med anvendt matematikk.

Før intervjuet startet ble de intervjuede belyst om sine rettigheter i prosjektet, samt at de ikke skulle testes, men at det heller var interesse for innsyn i deres tanker og opplevelser i forbindelse med matematiske bevis. Dette var gjort på bakgrunn av det Kvale et al. (2009, s. 141) skriver om at den intervjuede skal snakke fritt om sine opplevelser og følelser foran en fremmed person og at det kan skapes god kontakt med å vise interesse, samt lytte på hva intervjuede sier. Det å presentere oppgaven på forhånd og stille spørsmål til dette gjør at intervjuede retter oppmerksomheten mot temaet før den skal komme med sine erfaringer og betraktninger i hoveddelen av intervjuet (Johannessen et al., 2016, s. 149-150).

For å dokumentere intervjuet ble det brukt taleopptak via Nettskjema diktafon fra UiO som er godkjent via UiT sin personvernsavdeling. Johannessen et al. (2016, s. 155) skriver at det er umulig å huske alt som blir sagt under et intervju, og viser derfor til at det er lurt å ta opptak. Å benytte seg av en lydopptaker gjør at intervjuer kan konsentrere seg om intervjuets emne og dynamikk, der ordbruk, tonefall, pauser og liknende blir registrert slik at man kan lytte til det senere (Kvale et al., 2009, s. 187). Vi har valgt å utelukkende fokusere på det ble sagt under intervjuet, og aspekter som kommer fra ordbruk, tonefall og kroppsspråk er dermed ikke tatt hensyn. Dette valget ble gjort på bakgrunn av at dette gir flere momenter som kan feiltolkes. Vi følte også at fordelen med bruk av videokamera ble skygget av komforten til de intervjuede da dette kunne ha blitt et aspekt de la mye fokus på. Personer kan også reservere seg mer dersom de vet at de blir filmet med videokamera (Johannessen et al., 2016, s. 157). Som nevnt tidligere ble alle de intervjuede informert om sine rettigheter, samt bedt om å signere samtykkeskjema dersom de fremdeles ønsket å delta. Metoden som Johannessen et al. (2016, s. 149-150) anbefaler, ble fulgt, der en starter med enkle spørsmål først, etterfulgt av en overgang mot hoveddelen der det ble introdusert artefakter og nøkkelspørsmål, for så å avslutte med nøytrale spørsmål dersom intervjuede satt med negative følelser eller hadde noen ytterlige poenger å tilføre til intervjuet. Den totale tidsbruken ble relativt likt mellom de tre intervjuene, men tidsbruk innenfor hvert av temaene i intervjuene varierte noe. Oppbygningen av det semistrukturerte intervjuet er slik at intervjueren skal forsøke å opprettholde en samtale samtidig som den røde tråden, gjennom tematikken i oppgaven, kommer fram i samtalen (Johannessen et al., 2016, s. 148).

3.3.4 Transkribering

Ved å transkribere fra muntlig til skriftlig form blir samtalene strukturert og dermed lettere å analysere i etterkant (Kvale et al., 2009, s. 188-189). Når man har en lydfil som datagrunnlag for intervjuet vil det automatisk bli selektivt, da man allerede har filtrert ut viktige kontekstuelle faktorer som det visuelle og ikke-verbale aspektet av intervju (Cohen et al., 2018, s. 523-524). Kvale et al. (2009, s. 188-189) skriver at det finnes ingen standardprosedyrer for hvordan man transkriberer et intervju, men viser til en grunnregel som peker på at man i rapporten skal uttrykkelig skrive hvordan transkripsjon er utført, og man må derfor selv gjøre valg om man ønsker å inkludere pauser, gjentakelser og tonefall avhengig av studien. Vi har valgt å transkribere intervjuene i sin helhet, inkludert pauser. Goldin (2000, s. 527-528) skriver at i matematisk forskningsperspektiv har vi ikke mulighet til å se prosesser som foregår hos de intervjuede, slik som tenking, resonnering, kognitive prosesser, med mer. De intervjuede ble informert om at det var rom for å tenke, og vi har valgt å ta dette med da det også er slik matematikere jobber. På bakgrunn av dette, og et ønske om en naturlig samtale (slik som i semistrukturerte intervjuer) har vi endt opp med transkripsjonsnøkkelen som kan sees i Tabell 2:

Tabell 2: Transkripsjonsnøkkel

Tegn	Betydning
…	Tenkepause
« »	Intervjuperson siterer
[ ]	Tilfører kontekst
[…]	Utelatt del av sitat

Som nevnt tidligere er intervjuene transkribert i sin helhet, men det kan fremkomme sitater der vi bare ønsker deler av det. Å bruke tegnet […] gjør at vi kan utelatte deler som ikke er relevant når vi skal presentere resultatene våre. Vi har også lagt inn … som tenkepause, « » som at personen siterer fra artefakter og [ ] som når intervjuede tilfører kontekst som ikke direkte er spesifisert med tale.

3.4 Populasjon og utvalg

Målet med dette delkapitlet er å beskrive utvalget vi undersøkte i oppgaven, samt hvordan rekrutteringsprosessen foregikk. Vi ønsket å få et representativt utvalg for å kunne si at vi undersøkte studenter ved innføringsfag i teoretisk eller anvendt matematikk på generell basis. Vi valgte å kontakte forelesere på NTNU, UiO, OsloMet og UiT (Narvik, Tromsø og Alta) da disse tilbyr innføringsfag i teoretiske og anvendte (ofte studieretninger for ingeniører) matematikkfag. Den endelige deltakelsen på spørreundersøkelsen endte på 111 studenter. Av disse kommer 82 studenter fra UiT-Tromsø, 14 fra UiT-Narvik/Alta og 13 fra UiO. Siden det kun var 13 studenter var UiO opplevde vi det som en usikkerhet på om disse skulle bli tatt bort fra utvalget, men vi har valgt å beholde dem. Dette gjorde vi på bakgrunnen av overlappen mellom MAT-1001 Kalkulus 1 og MAT-1100 Kalkulus. På bakgrunnen av den lave deltakelsen og denne overlappen ble det bestemt at studentene fra UiO ble tatt med i datamaterialet.

Det var 22 studenter som svarte at de ville delta på et intervju etter å ha gjennomført spørreskjema. De som samtykket til å delta på intervju, ble kontaktet på e-post. Av disse ble det valgt ut tre tilfeldige studenter ved UiT, hvor to av dem gjennomførte teoretiske matematikkemner, og en gjennomførte et anvendt matematikkene.

Gjennom intervjuene har vi intervjuet studenter med emnene MAT-1001 Kalkulus 1 og MAT-1050 Matematikk for ingeniører 1. Her har vi gjort et skille der vi kaller Kalkulus 1 for det teoretiske *innføringsfaget* i matematikk og MAT-1050 for anvendt matematikk. Kalkulus 1 er et grunnleggende emne for studenter som skal arbeide med matematikk i sin fagkrets på universitetet (UiT, 2023a). Vi vurderte også at de respondentene som gjennomførte MAT-1100 Kalkulus har såpass stor overlapp med MAT-1001 Kalkulus 1 at vi kunne kategorisere disse sammen med respondentene i teoretisk matematikk. Matematikk 1 for ingeniører på den andre siden skal gi «grunnleggende kunnskaper innenfor matematikk og evnen til å bruke matematikk som et verktøy i ingeniørfaglig problemløsning» (UiT, 2023b).

3.5 Forskningens kvalitet

Det å oppnå forskning av høy kvalitet stiller krav til forskeren angående valgene den har tatt underveis i undersøkelsen. Et grunnleggende aspekt innenfor forskning er at det skal være mulig for andre forskere å følge fremgangsmåten og valgene tatt, gjennom å lese forskningsbeskrivelsen. En vanlig del av forskning å bruke teori som en forenkling av virkeligheten (Johannessen et al., 2016, s. 37-38). Vi har gjennom vår oppgave forsøkt å presentere alle aspektene med forskningen på en mest mulig åpen måte der vi har hatt som ønske å vise leseren hva, hvordan og hvorfor vi har tatt de valgene vi har tatt gjennom oppgaven. Disse valgene har vi forsøkt å beskrive så presist som mulig, med begrunnelsen vi mener leseren trenger for å følge vår fremgangsmåte.

3.5.1 Analyseprosessen

I dette delkapittelet vil vi gjennomgå og forklare hvordan vi har gjennomført analyseprosessen etter at datamaterialet var samlet inn og intervjuene transkribert. Vi hadde to runder med datainnsamling der vi satt igjen med mye tekst fra de tre intervjuene, i tillegg til 111 svar på spørreskjemaet. Da analyse i forskning er en omfattende og kontinuerlig prosess vil det være naturlig å starte analysen allerede etter innsamlingen av de kvantitative dataene der man vurderer datamaterialet. Da vi har brukt Mixed Method Research vil det være lett å starte å søke etter sammenhengen mellom de kvantitative og kvalitative dataene så tidlig som mulig. Vi har noe som kan oppfattes som en vid problemstilling med flere ulike aspekter som kan utforskes. I tillegg til å besvare forskningsspørsmålene på best mulig vis med det datamaterialet vi har tilgjengelig, er vi også ute etter å belyse sammenhengen mellom våre to forskningsspørsmål, da vi mener de sammen gir et mere helhetlig syn på hvordan studenter opplever overgangen til bevis i universitetsmatematikken.

3.5.1.1 Analyse av kvantitative data

De kvantitative dataene ble innsamlet gjennom Nettskjema, hvor vi gjennomførte spørreundersøkelsen. Etter endt innsamling overførte vi dataene til dataprogrammet SPSS, og de ble konvertert til numeriske verdier. Gjennom SPSS har vi laget ulike presentasjoner av data slik som frekvenstabeller, svarfordelinger, korrelasjonstabeller mm.

Den opprinnelige planen var å lage en samlevariabel som skulle kunne måle studentenes holdninger, men grunnet svake korrelasjoner og andre interessante aspekter valgte vi å endre fokus. Resultatet av dette gjorde analysen av de kvantitative dataene markant kortere. Vi har også brukt Spearman´s Rho korrelasjoner som et interessant aspekt med dataene vi har samlet inn. Dette vil bli presentert senere i resultatdelen, der vi også forklarer i dypere detalj hvordan vi har brukt dette opp mot oppgaven vår.

3.5.1.2 Analyse av semistrukturerte intervju

Etter gjennomføringen av de tre semistrukturerte intervjuene, ble lydfilene transkribert. Intervjuene varierte mellom 15-20 minutter der intervjupersonene brukte omtrent fem minutter hver på å lese over artefakter (bevis 1 og 2, se vedlegg 6). Intervjuene ble tematisk inndelt i studenters bakgrunn fra videregående, deres oppfatning av viktigheten av resonnering i matematikk, og deres oppfatning av viktigheten av forståelsen i matematikk og undervisning. Disse temaene framkom da vi leste gjennom intervjuene, og markerte utsagnene fra intervjupersonene.

Den korte intervjulengden gjorte at det tok relativt kort tid å analysere intervjuene. Videre var majoriteten av intervjupersonenes utsagn av interesse, og ble derfor tatt med videre i analyseprosessen.

Vi ville benytte de kvalitative dataene for å underbygge og støtte opp de kvantitative dataene. Derfor har vi valgt å ta utgangspunkt i en innholdsanalyse (Gleiss & Sæther, 2021, s. 136-137). Denne typen tilnærming til datamaterialet muliggjør en analyse hvor intervjuene kan kobles direkte opp mot spørreundersøkelsen. I tillegg åpner en slik analysemetode opp for muligheten til å kunne sammenligne resultatene fra spørreundersøkelsen og intervjuene. Dette har vi gjort, blant annet, ved å trekke ut viktige sitater fra intervjuene, sette disse opp mot viktige teoretiske begreper, samt det som fremkommer i spørreundersøkelsen.

Det vil for eksempel bli gjort en tolkning basert på det Stig (1) sier om hans erfaring med bevis fra videregående, sammen med påstander fra spørreundersøkelsen som dreier seg om bevis på videregående. Både styrken og svakheten med denne typen analyse er at det er forskeren som selv velger hva som skal komme fram gjennom analysen. Andre forskere vil da kunne ha fremhevet andre aspekter med intervjuene kontra det vi har gjort.

3.5.2 Validitet

I dette delkapittelet vil vi se nærmere på validitet i oppgaven. Dette er delt inn i to underkapittel: validitet i den kvantitative delen, og validitet i den kvalitative delen.

3.5.2.1 Kvantitativ del

I dette delkapittelet skal vi gi en kort introduksjon om hva validitet er, med hensyn på ulike metoder, samt presentere hvordan vi anser vår studie som troverdig og overførbar. Validitet referer til hvorvidt en studie faktisk måler det den har til hensikt å måle, og om resultatene kan generaliseres til andre situasjoner og populasjoner (Cohen et al., 2018, s. 245).

Validitetsbegrepet kan også spesifiseres i flere ulike former. Troverdighet eller intern validitet i kvantitative undersøkelser er beskrevet av Johannessen et al. (2016, s. 232) som noe som kan svares på med spørsmålet «måler vi det vi tror vi måler?». Den interne validiteten er ment å forklare sammenhengen mellom fenomenet man undersøker, og dataene man har samlet inn. Den ytre validiteten i kvantitative spørreskjema vil være hvor mye en kan generalisere fra utvalget til populasjon (Cohen et al., 2018, s. 254), altså om resultater fra et forskningsprosjekt overføres til liknende fenomener (Johannessen et al., 2016, s. 233).

Begrepsvaliditet vil kunne sees i sammenheng med spørreskjemaet vi har laget. Dette vil være om de spørsmålene vi har valgt å bruke faktisk måler fenomenet undersøkelsen sier den skal måle, altså om operasjonaliseringen er gjort på en rettferdig måte (Cohen et al., 2018, s. 256-257). For å sikre et sammenligningsgrunnlag for spørreskjemaet har vi, som diskutert tidligere, valgt å ta inspirasjon fra spørreskjemaet brukt i undersøkelsen til Stylianou et al. (2015). Her vi har oversatt, tolket og endret spørsmålene på en slik måte at vi mener de fortsatt kan være sammenlignbare, sett bort fra enkelte tilfeller som ble diskutert i delkapittel 3.2.

Vi mener basert på disse påstandene presentert delkapittel 3.2.1 at vi måler aspektene vi ønsker å se videre på i resultat- og diskusjonskapitlet. Dette vil være studenters forestillinger om bevis i seg selv, om undervisning, resonnering og engasjement i bevisprosessen. Vi ønsker ikke å trekke fram alle påstandene enkeltvis, men da operasjonaliseringen av noen påstander kan være problematiske, ønsker vi å diskutere disse. Her vil vi først trekke frem påstand 3 som er en av de oversatte påstandene fra Stylianou et al. (2015). Påstanden ble oversatt til «Jeg opplever at jeg kan komme med innspill når det gjennomføres bevis», og var tiltenkt å belyse hvorvidt studenter faktisk evner og har kunnskapen til å kunne komme med innspill i for eksempel forelesning. Grunnet oversettelsen kan det fremstå som at påstanden heller spør om studentene opplever at foreleser legger opp til at studentene kan komme med innspill, og hva påstanden måler er dermed ikke tydelig. Påstanden endte dermed opp med å ikke måle det samme som Stylianou et al. (2015), som vi mener tydeligere omhandlet det vi faktisk ønsket å måle.

Også påstand 5 «Alle matematikkstudenter burde ha muligheten til å lese og å skrive bevis» er noe utydelig, og kan tolkes på to ulike måter; 1) Alle kan ha muligheten til å lære seg å lese og å skrive bevis basert på at de har tid og ressurser, slik som internett eller bibliotek som muliggjør at alle *har* muligheten til å kunne gjøre dette. 2) Alle matematikkstudenter burde ha muligheten gjennom foreleserens didaktiske arbeid i klasserommet til å lære seg å lese og å skrive bevis. Slike utydeligheter og usikkerheter grunnet tolkning og oversetting vil være svakheter i vår operasjonalisering og vil kunne true begrepsvaliditeten vår.

Til slutt ønsker vi å gi en overordnet argumentasjon for begrepsvaliditeten i spørreundersøkelsen. Vi har til nå presentert hva vi ønsker å se på og hvordan vi har operasjonalisert spørsmålene. Et aspekt vi i liten grad har nevnt er om påstandene og spørsmålene våre faktisk måler det fenomenet vi faktisk ønsker (Cohen et al., 2018, s. 256-257). For å forsøke å underbygge en tilfredsstillende begrepsvaliditet vil vi vise til to aspekter med oppgaven. For det første vil vi sammenligne resultater med undersøkelsen til Stylianou et al. (2015) fra de oversatte spørsmålene nevnt ovenfor. Videre vil vi vise til ulike korrelasjoner mellom påstandene. Selv om korrelasjoner mellom påstander vanligvis brukes for å måle en sammensatt variabel med flere påstander som sammen måler et konkret aspekt, ønsker vi å kunne argumentere gjennom resultatene våre for at bruk av korrelasjon mellom påstandene er relevant. Vi vil dermed påstå at begrepsvaliditeten, på bakgrunn av påstandskorrelasjonene og sammenligningen av resultater fra Stylianou et al (2015), kan kalles tilfredsstillende for vår undersøkelse. Grunnen til at vi valgte å inkludere korrelasjoner i oppgaver kommer fra at vi mente det kunne bidra til å belyse interessante perspektiver vi ønsket å se på. Det fremkommer eksempelvis fra datagrunnlaget at de studentene som er enig i at bevis er en viktig del av matematikken, også mener alle matematikkstudenter burde ha muligheten å lære seg å lese og å skrive bevis.

3.5.2.2 Kvalitativ del

Dersom en følger Johannesen et al. (2016, s. 232) sin definisjon på validitet i kvantitativ forskning, vil ikke kvalitativ forskning kunne være valid – da en ikke kan *måle* det en gjør på samme måte. Johannesen et al. (2016, s. 232) viser derfor til at validitet i kvalitative undersøkelser handler om å sikre at forskeren har gjort det hen kan, for å framstille fenomenet og funnene på en pålitelig måte.

Som beskrevet tidligere, refererer validitet til hvorvidt en studie måler det en har til hensikt å måle (Cohen et al., 2018, s. 245). Ifølge Thagaard (2018, s. 180) kan validitet i kvalitativ forskning beskrives som *gyldighet*, og viser til gyldigheten av resultatene som er framkommet, samt måten disse er tolket på. Validiteten – eller gyldigheten – i denne masteroppgaven vil derfor baseres på hvorvidt våre funn faktisk gjenspeiler det som kom fram gjennom intervjuene, eksempelvis av intervjupersonenes erfaringer. Tjora (2021, s. 260) legger vekt på gyldigheten av tolkningen forskeren gjør i intervjusituasjoner. Derfor har vi forsøkt å være tydelig i hvordan vi har kommet fram til de slutningene vi har kommet fram til. Dette kommer blant annet fram i delkapittel 4.2, hvor resultatene fra intervjuene presenteres.

3.5.3 Reliabilitet

I dette delkapittelet vil vi se nærmere på reliabilitet i oppgaven. Dette er delt inn i to underkapittel: reliabilitet i den kvantitative delen, og reliabilitet i den kvalitative delen.

3.5.3.1 Kvantitativ del

Reliabilitet kan sees på som en samlebetegnelse for pålitelighet, konsistens og gjentagbarhet over tid, instrumenter og respondentgrupper. I kvantitative undersøkelser ønsker en ofte at målingene som gjøres skal være like dersom man måler på like premisser flere ganger, og derav produsere et likt resultat alle gangen(Cohen et al., 2018, s. 268). Det vil eksempelvis være relativt lett å måle fysiske størrelser til stor presisjon, men psykologiske aspekter kan endres over tid eller forandre seg litt avhengig av hvordan humøret til respondenten er. Det kan derfor være viktig å gjenta målinger slik at man ser det samme resultatet flere ganger (Ringdal, 2018, s. 103-104). Vi har bare gjennomført spørreundersøkelsen vår en gang, men vil sammenligne svarfordelingen vår med like spørsmål vi har funnet i spørreundersøkelsen til Stylianou et al. (2015). Denne delen av undersøkelsen vil kunne sees på som en form for kontrollgruppe til undersøkelsen vår. I kvantitative undersøkelser søker vi etter å minimere ulike faktorer som kan påvirke forskeren, deltakerne og instrumentene vi har brukt for å gjennomføre målingene (Cohen et al., 2018, s. 268). Vi har forsøkt å dekke et bredest mulig spekter av studenter ved å gjennomføre spørreundersøkelsen på både studenter som tar anvendt og teoretisk matematikk.

3.5.3.2 Kvalitativ del

Kvalitative undersøkelser søker ofte etter det Johannessen et al. (2016, s. 233) beskriver som overførbarhet og referer til om resultatene kan overføres til liknende fenomener. Forfatteren beskriver dette som søken etter å overføre kunnskap framfor generalisering, der en kvalitativ undersøkelse lykkes når en etablerer beskrivelser, begreper, fortolkninger og forklaringer som kan overføres til andre områder enn det undersøkelsen dreier seg om. Gjennom intervjuene er det ønskelig å få fram studentenes tanker, meninger og følelser om de ulike temaene tilknyttet vår oppgave. Dette vil eksempelvis være hvordan de oppfatter bruken av bevis i klasserommet, eller om de har et ønske om å kunne lese eller skrive bevis.

Ifølge Tjora (2021, s. 263) kan en beskrive reliabilitet i kvalitativ forskning som *pålitelighet*. Pålitelighet handler om hvorvidt den forskningen som er utført er gjort på en *pålitelig* og *tillitsvekkende* måte. Ifølge Thagaard (2018, s. 189) kan en oppnå en slik pålitelighet, blant annet, ved å være så transparent som mulig i forskningsprosessen. Dette har vi gjort ved å være klar og tydelig på oppgavens teoretiske grunnlag, samt være tydelig i våre metodiske tilnærminger. Som Thagaard (2018, s. 189) beskriver, er dette viktig fordi det viser grunnlaget til forskerens tolkninger av datamaterialet – som videre er grunnlaget for måten analysen gjennomføres og de eventuelle konklusjonene blir til. Tjora (2021, s. 264) beskriver ar det er viktig å formidle de ulike beslutningene og eventuelle endringene som gjøres underveis i et forskningsprosjekt, for å sikre transparens. Dette har vi forsøkt å gjøre, blant annet ved å vise til hvordan vårt fokus i oppgaven har endret seg underveis.

3.5.4 Etiske problemstillinger

Det etiske aspektet i forskning er alltid tilstedeværende da forskning er nødt å ta hensyn til gjeldende etiske og juridiske prinsipper (Johannessen et al., 2016, s. 83). Gjennom både et spørreskjema og intervju er det ulike aspekter som må tas hensyn til. Det er blitt utarbeidet retningslinjer for forskning innenfor samfunnsvitenskap og humaniora, der det fremheves og tydeliggjøres de grunnleggende forskningsetiske normene og hvilke etiske vurdering som bør tas når det gjennomføres et forskningsprosjekt (NESH, 2021). Universitetet i Tromsø benytter seg av NSD (norsk senter for forskningsdata) som innebærer rådgivning for at behandlingen av personopplysninger i prosjektet er lovlig etter personopplysningsloven.

I både spørreskjema og intervju er det krav til at det foreligger et fritt og informert samtykke fra deltakerne i studien (NESH, 2021). I forbindelse med spørreskjema, betyr dette at deltakerne skal få mulighet til å lese gjennom, samt eksplisitt si «ja» dersom de ønsker å være med i studien. Dette skal også være uten noen form for ytre press (Ringdal, 2018, s. 61). Gjennom informasjonsskrivet som deltakerne fikk lese, er det krav til at de skulle vite hvordan dataene vi samlet inn skulle bli behandlet og hvor lenge de skulle bli oppbevart. Videre ble de informert om muligheten til å trekke sin besvarelse. Som beskrevet tidligere har vi reklamert for spørreundersøkelsen vår på to måter: den første var å publisere en lenke på emnesiden, og i den andre brukte vi 15 minutter av forelesningen i en klasse til å reklamere for dette. Vi bruker ordet «reklamere» her for at det skal være tydelig at studentene forstår at det undersøkelsen skal være frivillig å delta på. Samtykkeskjema for både spørreskjema og intervju kan sees i vedlegg 4 og 5.

Forskere skal vurdere og sikre at anonymitet blir ivaretatt for de som deltar i forskningsprosjektet. Gjennom å anonymisere sørges det for å ivareta deltakernes identitet og integritet. NESH (2021) presiserer videre at det er en forskjell på *å samle inn* anonyme data og anonymisere det *etter* en datainnsamling. I vårt spørreskjema har vi samlet inn data som ikke ansees som anonyme da en kombinasjon av spørsmålene kan være med på å identifisere studenter. Vi har gjennom Universitet i Oslo benyttet oss av plattformen Nettskjema der både svar fra spørreskjema, samt intervjuene ble lagret. Vi har gjennom den perioden hatt tilgang til personopplysninger, men har behandlet datamaterialet i overenstemmelse med gjeldene lover og forskningsetiske regler slik som spesifisert i vurderingen gitt fra NSD (se vedlegg 1) og Universitetet i Tromsøs retningslinjer.

4 Resultater

I dette kapittelet vil vi presentere resultatene av spørreskjema og intervjuene. Dette er det som danner grunnlaget for å kunne svare på forskningsspørsmålene våre:

1. Hva er studenters oppfatning av betydningen av bevis i matematikk, og hva slags matematisk forståelse ønsker studenter å oppnå
2. Hva kjennetegner studentenes syn på viktigheten av å kunne resonnere i matematikk?

For å sørge for leserens forståelse slik at den kan følge med i prosessen vår hele veien har vi valgt å presentere resultatene uten å dele kapitlet inn etter forskningsspørsmål, dette vil skje videre i diskusjonsdelen. Dette gjelder også intervjuene, da vi mener at for å få et helhetlig bilde av hvordan disse ble gjennomført og resultatene tolket trenger man å se alle aspektene fra datainnsamlingen. Intervjuene vil bli presentert med tanke på relevante sitater fra de intervjuede.

4.1 Kvantitativt spørreskjema

Grunnet det endrede fokuset, som diskutert i metodedelen, vil spørreskjema bli lagt ved som vedlegg 4, men oppsettet der følger ikke rekkefølgen spørsmålene blir presentert på. Til tross for dette mener vi at måten vi har valgt å legge fram resultatene er tilstrekkelig for at leseren skal danne seg ett oversiktlig og troverdig bilde av datamaterialet.

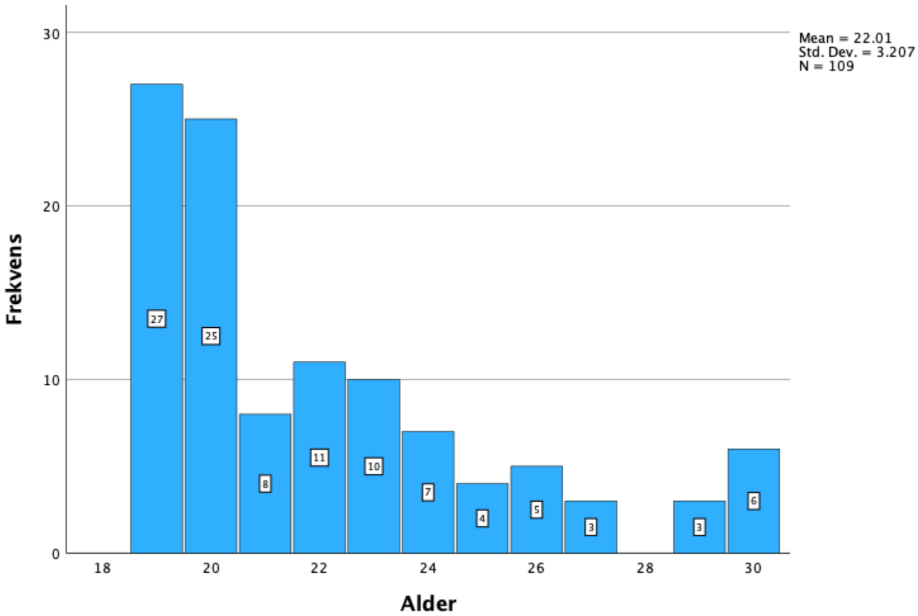
Det vi først ønsker å presentere er hva slags bakgrunnskunnskaper og bakgrunnsinformasjon respondentene oppgir at de starter sin universitetskarriere med. Vi valgte å spørre om bakgrunnsinformasjon til studentene gjennom spørreskjema da det var viktig for oss å kunne presentere hva studenter tenkte før de startet på universitetet. Dette var bakgrunnsinformasjon slik som kjønn, alder, studieforberedende og studie, samt noen spørsmål angående hvordan de husker de opplevde undervisningen under videregående opplæring. Denne informasjonen vil bli presentert nå, men vi gjort ulike tiltak slik at studenter ikke skal kunne bli gjenkjent ved å slå sammen kategorier. Videre vil vi introdusere 9 ulike påstander som er grunnlaget for det vi ønsker å si om de to forskningsspørsmålene. Disse vil bli sett i sammenheng med korrelasjonskoeffisienten Spearman Rho da denne kan si noe om hvor godt svarene i spørreskjemaet henger sammen teoretisk.

4.1.1 Bakgrunnsinformasjon

Tabell 3: Fordeling av kjønn og hvilken matematikk de gjennomførte. Dette er det prosentvise av totalt antall respondenter.

		Matematikk R	Matematikk P	Matematikk P, Y-vei	Matematikk S	Annet/ Blanding
Kjønn	Kvinne	25.5%	1.8%	0.9%	2.7%	3.6%
	Mann	42.7%	4.5%	6.4%	0.9%	10.9%
	Totalt	68.2%	6.3%	7.3%	3.6%	14.5%

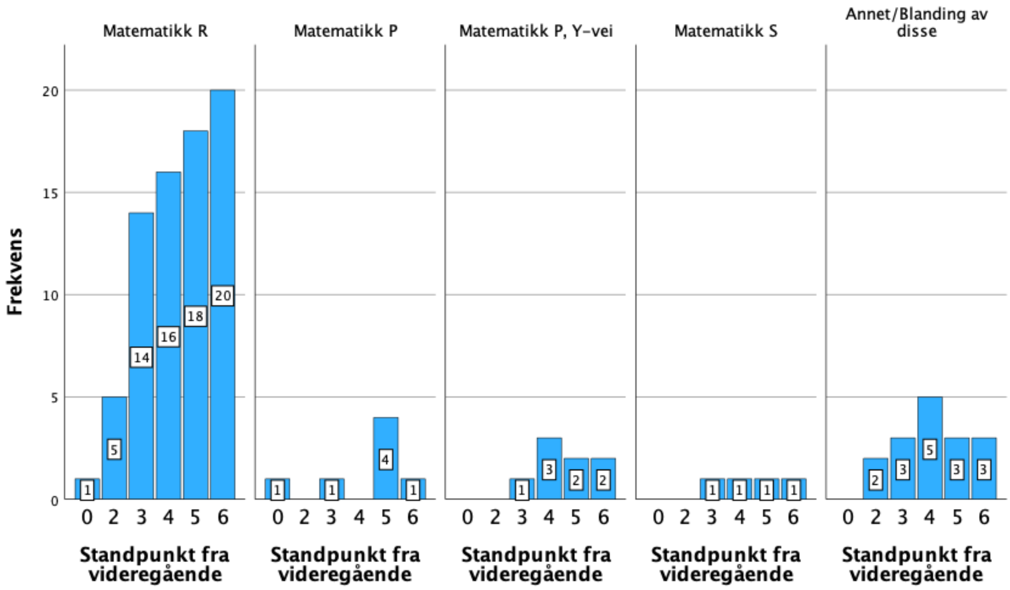
I studien vår var det en kjønnsfordeling med 65,8% menn og 34,3% kvinner, der fordelingen av hvordan type matematikk disse hadde på videregående er vist i Tabell 3. Som vi kan se er det hovedsakelig studenter med bakgrunn i realfagsmatematikk fra videregående. Aldersfordelingen kan sees i Figur 22. Noen av aldersgruppene var relativt små. Derfor har vi valgt å sette alderen til deltakeren «31 og høyere» til «30», for å hindre at deltakerne er gjenkjennbare i datamaterialet. Fra Figur 2 ønsker vi også å vise til at 45 % av respondentene er 22 år eller eldre.



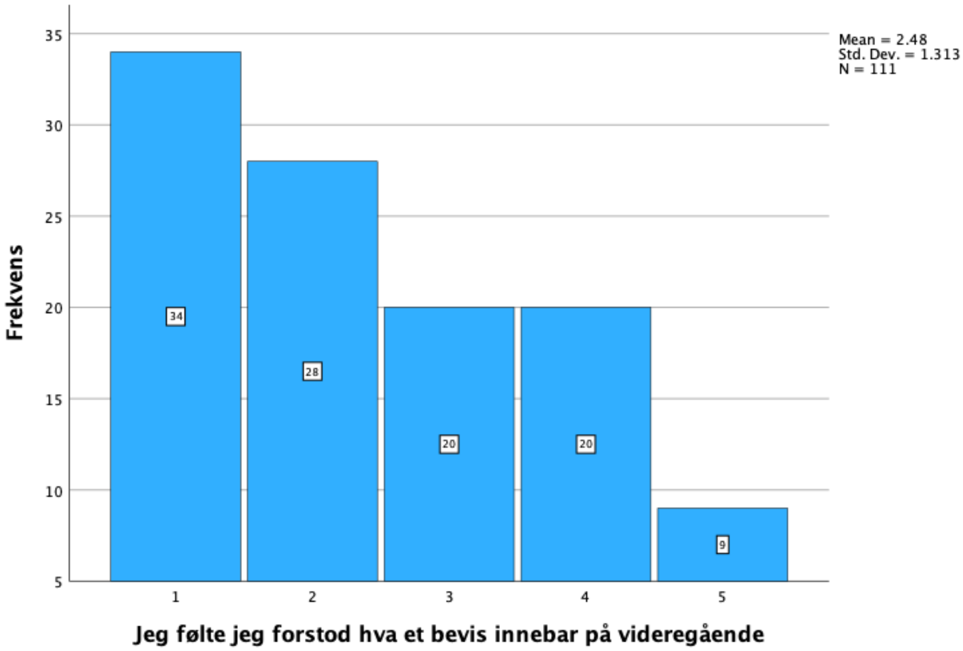
Figur 22: Fordeling over alder. Alle med en alder over 30 år har blitt satt til 30, samt at andre kategorier er slått sammen.

I Figur 33 kan vi se hvordan karakter de ulike studentene fikk avhengig av hvilket fag de gjennomførte. Denne figuren viser totalt 109 svar som betyr at det er 2 stykker som ikke har svart. På x-aksen kan vi se at noen har svart «0», det betyr at disse ikke ønsket å oppgi karakteren sin. Det er 73,3% som har svart at de fikk 4 eller høyere i matematikk-karakter på videregående. Dette svaret anser vi som svært høyt, men det kan tenkes at respondenter som ønsket å søke høyere utdanning innenfor realfag også kan ha likt matematikk under videregående opplæring. Et annet aspekt som er verdt å trekke ut fra tallene er at 71,6% har gjennomført matematikk R eller matematikk S på videregående. Vi ser også at det er en betydelig andel av studentene som har svart at de fullførte matematikk R med høy måloppnåelse.

Videre i beskrivelsen av respondentenes bakgrunn vil det bli presentert to ulike former for data. Den første, som vist i Figur 44, vil være Likert-skala spørsmål som varier fra 1 – «Uenig», 2 – «Litt uenig», 3 – «Verken eller», 4 – «Litt enig» og 5 – «Enig». Oversikt over svarfordelingene og Spearman Rhos korrelasjonstest kan sees henholdsvis Tabell 4 og Tabell 5. Vi vil hovedsakelig fokusere på om studenter er enig eller uenig, men vil noen ganger kommenter på det vi har kalt «Verken eller» da dette kan være bemerkelsesverdig i noen tilfeller. Den andre typen data som vil bli presentert er i Figur 55, og viser til hvor ofte respondentene følte de ble presentert bevis på videregående. Denne typen varierer fra 1 – «Sjelden/aldri», 2 – «1-2 gang per halvår», 3 – «1-2 gang i måneden», 4 – «Ukentlig».

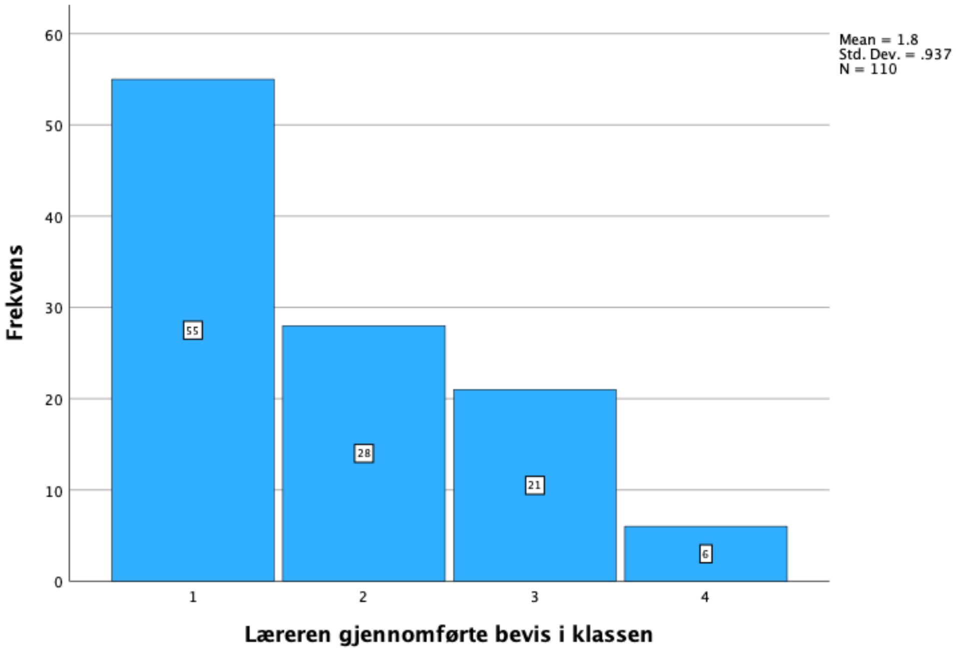


Figur 33: Fordeling av standpunktkarakter fra videregående basert på hvilket fag de fullførte. Karakter 0 betyr at respondenten ikke ønsket å oppgi svar.



Figur 44: Fordeling av spørsmålet "Jeg følte jeg forstod hva et bevis innebar på videregående". 1 – «Uenig», 2 – «Litt uenig», 3 – «Verken eller», 4 – «Litt enig», 5 – «Enig»

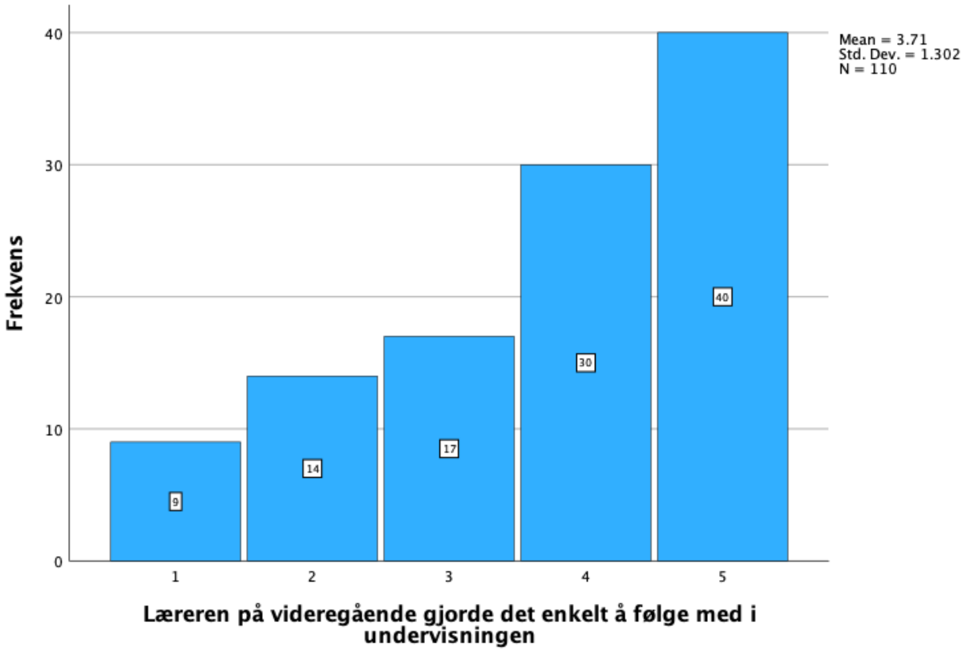
Studentene skal etter læreplanen være noe kjent med bevis fra videregående (Kunnskapsdepartementet, 2006). Her svarer likevel 55,8% at de var uenig eller litt uenig i påstanden «Jeg følte jeg forstod hva et bevis innebar på videregående», og med dette starter sin universitetskarriere med mer eller mindre blanke ark når det kommer til bevis på universitetet (se Figur 44).



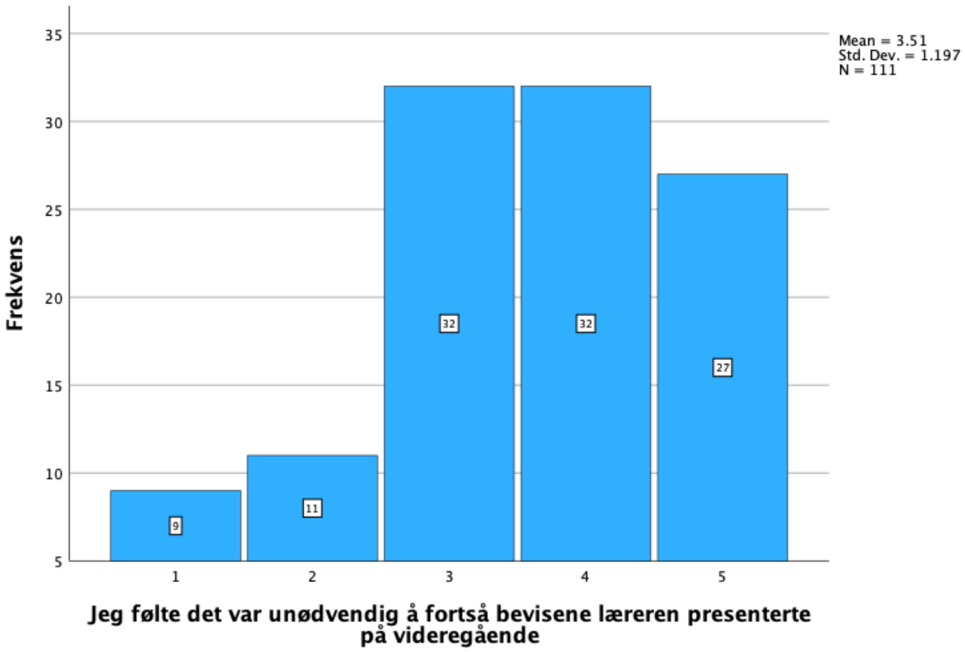
Figur 55: Fordeling av hvor ofte læreren gjorde bevis i klassen. 1 – «Sjelden/aldri», 2 – «1-2 gang per halvår», 3 – «1-2 gang i måneden», 4 – «Ukentlig».

I Figur 55 kan vi se at 50,0% svarer at de gjorde bevis «sjelden/aldri» og 75,5% svarer at det ble gjennomført bevis «1-2 gang per halvår» eller sjeldnere på videregående. Nesten hver fjerde respondent (24,5%) svarer altså at det var gjennomført bevis oftere enn «1-2 gang per måned» og «ukentlig». Tre fjerdedeler (75%) sier det ble gjennomført bevis sjeldnere enn 1-2 gang per halvår, mens halvparten av respondentene (55,8%) var negativ til påstanden om at de følte de forstod hva et bevis innebar på videregående. Dette er noe vi mener antyder at respondentene hadde lite erfaring med å lese bevis fra videregående skole.

Et annet sentralt aspekt en kan se på for å beskrive bakgrunnen til respondentene er hvordan de opplevde det er å henge med i undervisningen, samt hvor nyttig de anser bevisene på videregående å være. Til tross for at dette ikke nødvendigvis handler om respondentenes bakgrunn med hensyn på bevis, kan det tenkes at dersom de opplevde undervisningen som enkel å følge med på, har muligheten vært der for at de også kunne følge med dersom det ble presentert bevis. Her kan vi starte med å se på spørsmålet «Læreren gjorde det enkelt å følge med i undervisningen». Her oppga 63,6% at de er litt enig eller enig i påstanden (se Figur 66). Vi tolker dette slik at over halvparten av respondentene mener de klarte å følge med i undervisningen fra videregående. Videre fremkommer det fra Figur 77 at respondentene syntes bevis, dersom de ble presentert på videregående, ikke var nødvendig å følge med på.



Figur 66: Fordeling av spørsmålet "læreren gjorde det enkelt å følge med i undervisningen". 1 – «Uenig», 2 – «Litt uenig», 3 – «Verken eller», 4 – «Litt enig», 5 – «Enig»



Figur 77: Fordeling av spørsmålet "Jeg følte det var unødvendig å forstå bevisene læreren presenterte på videregående". 1 – «Uenig», 2 – «Litt uenig», 3 – «Verken eller», 4 – «Litt enig», 5 – «Enig»

Tilbake til påstanden «jeg følte det var unødvendig å forstå bevisene læreren presenterte på videregående (Figur 7) er det 28,8% som svarte «verken eller», noe som vi mener kan skyldes flere ulike grunner. Dette kan være grunner vi kanskje ikke har klart å komme på før undersøkelsen. Det kan være noe slikt som at det er vanskelig å svare på spørsmålet, fordi de ikke husker eller opplevde bevis. En annen årsak kan være at de opplevde at noen bevis var nyttige, mens andre ganger var de unyttige og slik sett føler de det ble «midt på treet». Dersom man trekker fra de som svarte nøytralt, er det 74,7% som sa seg «litt enig» eller «enig» i påstanden om det var unødvendig, og i forlengelse av dette er det 25,3% som svarte at de var «litt uenig» eller «uenig» i denne påstanden. Det vil si at hovedtolkningene gjort fra denne delen er at flertallet av respondentene ikke har mye erfaring med bevis fra tidligere, samt at dersom de har fått det presentert tyder det til at de ikke ønsket å ta del i bevisprosessen på det tidspunktet. Vi mener med den argumentasjon vi har lagt fram til nå kan vi si at resultatene antyder at respondentene ikke forstod hva et bevis innebar på videregående.

Tabell 4: Svarfordeling om bakgrunnsinformasjon til respondentene. Likert-skala spørsmål som varierer fra 1 – «uenig», 2 – «litt uenig», 3 – verken eller», 4 – «litt enig» 5 – «enig.

	Uenig	Litt uenig	Verken eller	Litt enig	Enig
Jeg følte jeg forstod hva et bevis innebar på videregående (1)	30.6%	25.2%	18.0%	18.0%	8.1%
Læreren gjorde det enkelt å følge med i undervisningen (2)	8.1%	12.6%	15.3%	27.0%	36.9%
Jeg følte det var unødvendig å forstå bevisene læreren presenterte på videregående (3)	8.1%	9.9%	28.8%	28.8%	24.3%

Tabell 5: Oversikt over korrelasjon mellom spørsmål brukt for å beskrive bakgrunnen til respondentene med hensyn på undervisning og bevis. Spearman Rho korrelasjonsanalyse.

		(1)	(2)	(3)
Jeg følte jeg forstod hva et bevis innebar på videregående (1)	Korrelasjon	1.000	.117	-.304**
	Sig. (2-sidig)	.	.221	.001
	N	111	111	111
Læreren gjorde det enkelt å følge med i undervisningen (2)	Korrelasjon	.117	1.000	-.059
	Sig. (2-sidig)	.221	.	.536
	N	111	111	111
Jeg følte det var unødvendig å forstå bevisene læreren presenterte på videregående (3)	Korrelasjon	-.304**	-.059	1.000
	Sig. (2-sidig)	.001	.536	.
	N	111	111	111

4.1.2 Forståelse i matematikk

I dette delkapitlet vil vi først presentere alle påstandene som er relevant for de videre resultatene vi ønsker å legge frem. Disse vil nødvendigvis ikke svare på første forskningsspørsmål slik vi har valgt å presentere de her, men de vil heller reflektere respondentenes opplevelser og følelser til bevis og samle dette slik at det er klart for å kunne diskuteres opp mot meningene til de intervjuede. Dette vil komme fram senere i kapittel 5 når resultatene fra det kvantitative og kvalitative blir knyttet sammen. Vi har derfor valgt å videre fokusere på tematikken som ligger bak spørsmålene. Alle påstandene som presenteres her vil være Likert-type spørsmål som går fra 1 - «Uenig», 2 - «Litt uenig», 3 - «Verken eller», 4 - «Litt enig» til 5 - «Enig» slik som gjort i delkapittel 4.1.1. For å vise en korrelasjon mellom spørsmålene har vi valgt bruke Spearman Rho.

Tabell 6: Svarfordeling som representerer funnene knyttet til universitetsmatematikken for den kvantitative delen av undersøkelsen. De påstandene som er markert med fet skrift er hovedpåstander.

	1 - Uenig	2 - Litt uenig	3 - Verken eller	4 - Litt enig	5 - Enig
Jeg anser det som nyttig å forstå bevisene foreleseren presenterer (1)	7.2%	7.2%	19.8%	39.6%	26.1%
Jeg anser bevis som en viktig del av matematikk (2)	6.3%	7.2%	23.4%	28.8%	34.2%
Jeg opplever at jeg kan komme med innspill når det gjennomføres bevis (3)	34.5%	30.0%	18.2%	10.0%	7.3%
Bevis kan brukes for å formidle og forklare nye ideer innenfor matematikk (4)	2.7%	6.3%	20.7%	33.3%	36.9%
Alle matematikkstudenter burde ha muligheten til å lære seg å lese og å skrive bevis (5)	4.5%	8.1%	21.6%	40.5%	25.2%
Jeg anser det som viktig å forklare og argumentere for valg jeg har tatt i eget arbeid med oppgaver (6)	3.6%	9.1%	23.6%	40.0%	23.6%
For å bli god i matematikk krever det at man mestrer bevis (7)	10.8%	8.1%	19.8%	37.8%	23.4%
Når jeg lærer matematikk, er det viktigere å forstå innholdet fremfor å memorere formler (8)	6.4%	5.5%	10.9%	29.1%	48.2%
Dersom jeg ikke forstår et bevis som presenteres, oppsøker jeg andre forklaringer som gir mening (spør medstudenter foreleser, ser videoer etc.) (9)	9.9%	13.5%	9.9%	31.5%	23.6%

Vi ønsker å starte med å presentere to påstander som vi mener kan si noe om studenter oppfatning av viktig heten av bevis på universitetet, samt tre støttepåstander som underbygger vårt funn tilhørende det første forskningsspørsmålet. Påstandene i seg selv sier en del om studentenes oppfatning av viktigheten av bevis, og mindre om hva slags type forståelse de ønsker å oppnå, men kan være med på å gi et inntrykk på hvorvidt studentene selv utrykker et ønske om å forstå bevis og vil følgelig være med på å male et bilde av deres tanker og formodninger. Påstandene vil derfor benyttes sammen med en rekke støttepåstander for å gi et inntrykk av hva studentene selv mener og sammen med argumentasjonen vi presenterer i

resultatkapitlet og diskusjonskapitlet mener vi disse kan si noe om både deres holdninger til viktigheten av bevis og hvordan type forståelse de ønsker å oppnå.
Det første vi ønsker å presentere er påstand 1 «Jeg anser det som nyttig å forstå bevisene foreleseren presenterer» (se Tabell 6). Her svarte totalt 65.7% at de er litt enig eller enig, 19.8% verken eller og 14.4% at de er litt uenig eller uenig. Her mener vi respondentene viser at de ønsker å forstå bevisene foreleseren presenterer. Den andre påstanden vi ønsker at leseren skal se dette i sammenheng med er påstand 2 «Jeg anser bevis som en viktig del av matematikk» der svarfordeling blant respondentene var totalt 63% at de enten er litt enig eller enig i påstanden, 23.4% at de var verken enig eller uenig, og 13.5 % svarte at de litt uenig eller uenig. Basert på svarfordelingene presentert her mener vi at resultatene kan antyde at majoriteten av studentene mener det nyttig å forstå bevisene foreleseren presenterer, og at de anser bevis som en viktig del av matematikk. Det bør også nevnes at det er flere respondenter som mener bevis ikke er nyttig, samt at de ikke anser det som en viktig del av matematikk. Begge disse aspektene skal vi diskutere senere.

Til tross for at majoriteten av respondentene svarer at de anser det som nyttig å forstå bevisene foreleseren presenterer og at de anser bevis som en viktig del av matematikken kan vi se i Tabell 6 at påstand 3 «Jeg opplever at jeg kan komme med innspill når det gjennomføres bevis» svarer 64.5% seg «uenig» eller «litt uenig», 18.2% «verken eller» og 17.3% «enig» eller «litt enig». Det vil si at majoriteten av respondentene ikke tror de kan komme et innspill når det gjennomføres bevis. Dette mener vi er bemerkelsesverdig da som nevnt tidligere mener også majoriteten at bevis er viktig. Dette leder oss inn på neste påstand, «Bevis kan brukes for å formidle og forklare nye ideer innenfor matematikk» der majoriteten av respondentene (70.2%) er «enig» eller «litt enig», noe som igjen underbygger det at respondentene mener om viktigheten av bevis i matematikk. Her svarer minoriteten på 9.0% seg «uenig» eller «litt uenig», men en femtedel (20.7%) svarer «verken eller». Vi har også enda en «støttepåstand» som vi har kalt det, «Alle matematikkstudenter burde ha muligheten til å lære seg å lese og å skrive bevis» der 12.6% svarte «uenig» eller «litt uenig», 21.6% «verken eller» og 65.7% «enig» eller «litt enig».

Vi har valgt å sammenfatte resultatene vi har presentert frem til nå med dette:

Majoriteten av studenter mener bevis er viktig, og gjennom spørsmålene presentert antyder de, basert på påstand 1, 2, 4 og 5 at de gjerne ønsker eller søker etter å forstå bevis som blir presentert, samt å kunne gjennomføre bevis selv. Resultatene kan også antyde at majoriteten ikke helt forstår hvordan de skal gjennomføre et bevis og sliter derfor å komme med innspill i for eksempel forelesninger. Videre når skal vi snakke om korrelasjonene til påstandene som er presentert til nå.

*Tabell 7: Oversikt over korrelasjon med Spearmans Rho mellom de ulike spørsmålene presentert i første funn. ** er korrelasjoner med signifikans på 0.01 nivå (2-sidig). * er korrelasjoner med signifikans på 0.05 nivå (2-sidig).*

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
Jeg anser det som nyttig å forstå bevisene foreleseren presenterer (1)	Korrelasjon	**1.000**	**.604****	**.357****	**.359****	**.410****	**.294****	**.356****	**.413****	**.399****
	Sig. (2-sidig)	.	<.001	<.001	<.001	<.001	.002	<.001	<.001	<.001
	N	111	111	110	111	111	110	111	110	111
Jeg anser bevis som en viktig del av matematikk (2)	Korrelasjon	**.604****	**1.000**	**.303****	**.424****	**.504****	**.342****	**.351****	**.467****	**.411****
	Sig. (2-sidig)	<.001	.	.001	<.001	<.001	<.001	<.001	<.001	<.001
	N	111	111	110	111	111	110	111	110	111
Jeg opplever at jeg kan komme med innspill når det gjennomføres bevis (3)	Korrelasjon	**.357****	**.303****	**1.000**	**.241***	**.234***	**.113**	**.252****	**.256****	**.227***
	Sig. (2-sidig)	<.001	.001	.	.011	.014	.243	.008	.007	.017
	N	110	110	110	110	110	109	110	109	110
Bevis kan brukes for å formidle og forklare nye ideer innenfor matematikk (4)	Korrelasjon	**.359****	**.424****	**.241***	**1.000**	**.381****	**.276****	**.267****	**.227***	**.206***
	Sig. (2-sidig)	<.001	<.001	.011	.	<.001	.003	.005	.017	.030
	N	111	111	110	111	111	110	111	110	111
Alle matematikkstudenter burde ha muligheten til å lære seg å lese og å skrive bevis (5)	Korrelasjon	**.410****	**.504****	**.234***	**.381****	**1.000**	**.073**	**.437****	**.312****	**.239***
	Sig. (2-sidig)	<.001	<.001	.014	<.001	.	.446	<.001	<.001	.011
	N	111	111	110	111	111	110	111	110	111
Jeg anser det som viktig å forklare og argumentere for valg jeg har tatt i eget arbeid med oppgaver (6)	Korrelasjon	**.294****	**.342****	**.113**	**.276****	**.073**	**1.000**	**.238***	**.258****	**.237***
	Sig. (2-sidig)	.002	<.001	.243	.003	.446	.	.012	.007	.013
	N	110	110	109	110	110	110	110	109	110
For å bli god i matematikk krever det at man mestrer bevis (7)	Korrelasjon	**.356****	**.351****	**.252****	**.267****	**.437****	**.238***	**1.000**	**.231***	**.290****
	Sig. (2-sidig)	<.001	<.001	.008	.005	<.001	.012	.	.015	.002
	N	111	111	110	111	111	110	111	110	111

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
Når jeg lærer matematikk, er det viktigere å forstå innholdet fremfor å memorere formler (8)	Korrelasjon	**.413****	**.467****	**.256****	**.227***	**.312****	**.258****	**.231***	**1.000**	**.266****
	Sig. (2-sidig)	<.001	<.001	.007	.017	<.001	.007	.015	.	.005
	N	110	110	109	110	110	109	110	110	110
Dersom jeg ikke forstår et bevis som presenteres, oppsøker jeg andre forklaringer som gir mening (spør medstudenter foreleser, ser videoer etc.) (9)	Korrelasjon	**.399****	**.411****	**.227***	**.206***	**.239***	**.237***	**.290****	**.266****	**1.000**
	Sig. (2-sidig)	<.001	<.001	.017	.030	.011	.013	.002	.005	.
	N	111	111	110	111	111	110	111	110	111

Ofte brukes korrelasjoner i forskning for å vise at et instrument måler det forskeren ønsker at den skal måle. Vi har ikke et sammensatt instrument i denne oppgaven grunnet en endring i fokus. Til tross for at det ikke er vanlig å nevne korrelasjoner i denne typen oppgaver ønsker vi å vise leseren en svak til moderat korrelasjon mellom påstandene våre. Vi ønsker å presisere at dette ikke et utgangspunkt for diskusjon videre i oppgaven, men heller at det er et interessant perspektiv som vi mener viser at operasjonaliseringen vi har gjort henger svakt til moderat sammen. Her ønsker vi hovedsakelig å trekke fram korrelasjonene fra påstand 1 «Jeg anser det som nyttig å forstå bevisene foreleseren presenterer» og 2 «Jeg anser bevis som en viktig del av matematikk» opp mot påstand 3 «Jeg opplever at jeg komme innspill når det gjennomføres bevis», 4 «Bevis kan brukes for å formidle og forklare nye ideer innenfor matematikk» og 5 «Alle studenter burde ha muligheten til å lese og å skrive bevis». Dersom vi begynner med påstand 1 kan vi se at denne har en moderat god korrelasjon til påstand 2 på .604 (se Tabell 7 for korrelasjoner) og regnes som statistisk signifikant. Det er interessant for oss at korrelasjonen mellom påstand 1 og 3, 4 og 5 er svak til moderat på henholdsvis .357, .359 og .410. Påstand 2 sammenlignet med 3,4 og 5 viser en korrelasjon på henholdsvis .303, .424 og .504 mener vi indikerer at resultatene viser en god nok troverdighet til å kunne være et godt grunnlag for en videre diskusjon.

4.1.3 Resonnering i matematikk

I denne delen ønsker vi at leseren skal få innblikk i det kvantitative aspektet av hva som kjennetegner studentenes syn på viktigheten av å kunne resonnere i matematikk. Her vil det, slik som ovenfor, presentert ulike Likert-skala påstander som sier noe mer generelt om hva respondentene mener om viktigheten av resonnering i matematikk og igjen vil vi presentere noe samlet som vi mener kan diskuteres ut fra. Vi vil starte med å presentere fire påstander om viktigheten av å kunne resonnere i matematikk som 111 respondenter har svart på, og alle påstandene varierer fra «uenig» til «enig». Vi har valgt påstand 6 og 8 i Tabell 6 som hovedpåstander som skal presentere funnene våre. Det er også tre andre påstandene er hjelpepåstander, påstand 5, 7 og 9. Ved presentasjon av funnene vil det også bli gjort fortolkninger som skal vise hvordan studenter ser på viktigheten av resonnement i matematikk på universitetsnivå.

Respondentene har slik som presentert tidligere antydet at bevis er en nyttig aktivitet gjennom forelesningene, (se delkapittel 4.1.2) og vi mener det kan kobles opp mot det neste funnet. I påstand 6 om «Jeg anser det som viktig å forklare og argumentere for valg jeg har tatt i eget arbeid med oppgaver svarer 63.6% seg «enig» eller «litt enig», 23.6% «verken eller» og 12.7% seg «uenig» eller «litt uenig» (se Tabell 6). Sammen med påstand 8 «Når jeg lærer matematikk, er det viktigere å forstå innholdet fremfor å memorere formler» der 65.7% var «enig» eller «litt enig», 19.8% «verken eller» og 18.9% svarte de var «uenig» eller «litt uenig» antyder at respondentene mener det er viktigere å kunne forklare og argumentere for valg gjort i eget arbeid, samt at det er viktigere å forstå innholdet fremfor å memorere formler. Dette leder oss inn på vårt første funn i denne delen: Studenter mener det er viktig å kunne resonnere i matematikk. Vi oppfatter det slik at dette funnet ikke direkte kommer fram gjennom disse to påstandene, men vi ønsker nå å underbygge denne påstanden videre.

I seg selv viser verken påstand 6 «Jeg anser det som viktig å forklare og argumentere for valg jeg har tatt i eget arbeid med oppgaver eller påstand 8 «Når jeg lærer matematikk, er det viktigere å forstå innholdet fremfor å memorere formler» en direkte tilknytning til funnet presentert, men vi ønsker å trekke frem noen påstander vi mener kan være med på å vise hva som ligger bak (se Tabell 6). Dersom vi følger denne tankerekken vil også påstand 7 «For å bli god i matematikk kreves det at man mestrer bevis» kunne si fortelle hvilket syn studentene har av viktigheten av å resonnere i matematikk. Her svarte 61.2% at de var «enig» eller «litt enig», 19.8% «verken eller» og 18.9% at de var «uenig» eller «litt uenig». Noe som vi mener igjen, er med på å underbygge det funnet vårt antyder om at det er viktig for respondentene å kunne resonnere i matematikk grunnet svarfordelingen der majoriteten av respondentene er «enig» eller «litt enig» i påstanden.

Videre ønsker vi nå å se på engasjement rundt bevis. Her ønsker vi å trekke fram påstand 9 «Dersom jeg ikke forstår et bevis som presenteres søker jeg andre forklaringer som gir mening (spør medstudenter, foreleser, ser videoer etc.)». Her svarer 23.4% at de er «uenig» eller «litt uenig», 9.9% «verken eller» og 55.1% «enig» eller «litt enig». Denne påstanden ønsker vi at skal sees i sammenheng med påstand 6 «Jeg anser det som viktig å forklare og argumentere for valg jeg har tatt i eget arbeid med oppgaver» da sistnevnt, slik som diskutert tidligere, sier noe om viktigheten av å resonnere i matematikk. Dersom man ser på den logiske forbindelsen mellom det å mene at det er viktig å kunne resonnere i matematikk med at svarene til respondentene antyder at majoriteten bruker andre metoder for å forstå mener vi dette kan sees i sammenheng med at respondentene prøver å forstå dersom de ikke gjorde dette i forelesningene, og i forlengelse av dette engasjerer de seg, gjennom det å ville kunne resonnere.

Spearman Rho korrelasjonene som er brukt i dette delkapitlet (4.1.3) anser vi for å være svak, se Tabell 7. Igjen, vi ønsker å presisere at dette er et interessant aspekt med resultatene våre og ikke at det er korrelasjonene som er grunnlaget for diskusjon eller analyse. For påstand 6 «Jeg anser det som viktig å kunne forklare og argumentere for valg jeg har tatt i eget arbeid med oppgaver» har vi først valgt å bruke sammen påstand 8 «Når jeg lærer matematikk, er det viktigere å forstå innholdet fremfor å memorere formler» med en korrelasjon på .258 og er regnet som statistisk signifikant. Vi brukte videre påstand 6 og 8 opp mot påstand 5 og 7 der korrelasjonene fortsatt er svake, se Tabell 7. Påstand 5 viser en svært svak til ingen korrelasjon til påstand 6 på .073, mens påstand 7 viser en svak korrelasjon på .238. For påstand 8 er det litt bedre der både påstand 5 og 7 viser en svak til moderat korrelasjon på henholdsvis .312 og .231. For påstand 9, selv om denne ikke er sammenlignet med andre påstander enn påstand 6, viser den også en svak til moderat korrelasjon til påstandene 5 til 8 på .239, .237 (påstand 6), .290 og .266. Vi mener dersom man ser alle påstandene i sammenheng kan vi si at det er en generelt svak til moderat korrelasjon mellom påstandene og vi mener det er godt nok til at det er mulig å diskutere ut fra.

4.2 Intervju

Videre når skal vi presentere de tre intervjuene som ble gjort for å belyse problemstillingen vår. Vi har valgt at alle tre intervjuene skal presenteres inngående der alle studentene har blitt gitt andre navn. Som nevnt tidligere har vi valgt å fokusere utelukkende på ord som blir sagt av intervjuede, og ting som ordbruk, tonefall og kroppsspråk er ikke tatt med. Vi vil presentere intervjuene sammen med teori der vi føler det tar opp viktige aspekter for videre bruk i analysedelen mellom det kvantitative og det kvalitative. Det kan være en fordel å lese de to bevisene som er lagt med i Vedlegg 6.Vi har også valgt å innføre et system som gjør at vi senere i analysen av spørreskjema og intervjuene kan referere til forskjellig utsagn sagt av de intervjuede. Dette er navnet vi har tilegnet intervjuede, samt nummereringen de forskjellige sitatene har fått. Et eksempel på dette vil være det tredje sitatet til Stig vil bli markert som S3 og det femte sitatet til Terje vil være markert som T5. Dette vil være markert med tall bak hvert sitat.

4.2.1 Student 1 (Stig)

Stig studerer romfysikk første året, gjennomførte matematikk R på videregående og gjennomførte et teoretisk orientert matematikkfag på universitetet (MAT-1001 Kalkulus 1). Stig gjennomfører dette semesteret et fag som bygger videre på det fra forrige semester og hadde på forhånd prøvd å huske på om det ble gjennomført bevis på videregående:

> Jeg prøvde å tenke på det, jeg tror vi var innom induksjonsbevis der liksom på veldig grunnleggende plan. Jeg tror vi hadde et delkapittel om det der som vi skippet over. Ingen oppgaver om det på prøver eller sånt. Vi bare gikk gjennom det. (1)

Stig kan altså ikke huske å ha gjennomført mye bevis på videregående, men mener dette om tiden fra videregående:

> Da syntes jeg det var veldig greit, jeg likte matematikk kjempegodt. Veldig artig å få til, det var en mestringsfølelse når man fikk til og fant nye løsninger. (2)

Det kan tenkes at stig gikk inn på universitetet med en positiv holdning til matematikk da det viste seg at han likte å holde på med det på videregående. Denne holdningen kan påvirke hvordan innstilling Stig tok med seg i matematikk etter han startet sin karriere på universitetet:

> Jeg tenker egentlig at det er en blanding av dette, når jeg begynte tenkte jeg at matematikk er noe som er gøy og tenkte at det skulle være spennende å studere. Etter det første semesteret følte jeg en down da jeg føler matte har endret synet mitt litt, det er ikke bare den gøyale delen av matte lenger. Jeg synes fremdeles det er artig og spennende da. (3)

Dette endret også synet på hvordan Stig så på arbeidsmåter i matematikk. Her skiftet det fra å være oppgaveorientert til å måtte tenke på forståelsen som kom fra det å løse oppgaver:

> Ja, det som er min oppfatning er at nå må jeg forstå mer, kontra på videregående gjorde vi oppgaver også var det greit. Nå må du skjønne hvorfor det er greit å gjøre det. Det er litt sånn avansert, det er ikke bare å sette seg ned å løse oppgaver lenger, du må faktisk skjønne oppgavene. Det tenker jeg er ganske avansert da det er et avansert språk. Det er det jeg tenker om matte nå, det er nesten som å lære seg et nytt språk. (4)

Stig kan tolkes som en veldig oppgaveorientert student, men har fortsatt et ønske om å forstå oppgavene som presenteres. Da det virker som om Stig bruker veldig mye tid på oppgaver kan det tenkes at det er det som er det er den mest naturlige måten for Stig å snakke om matematikk på. Stig sier også at han faktisk må forstå oppgavene, fremfor å bare kunne løse dem, noe som tyder på det en relasjonell forståelse som vi skal diskutere i et senere kapittel. Videre introduserer vi bevis 1:

> Altså, ja jeg har vært borti det beviset her før og det gir mening når du leser det, men jeg hadde aldri klart og utledet det selv. Jeg synes motbevis bygger veldig mye på det at man må anta det og anta det også etterpå motbevise alle antagelsene dine. Og det er litt vanskelig tenker hvertfall jeg. (5)

Videre lurer vi på om det er selve motbevisdelen som gjør dette beviset vanskelig:

> Ting som ikke har med bevis å gjøre så vet du ofte litt ting som skal gjøres, men med bevis så må du liksom bare prøve deg fram: Dersom det ikke funker må du

> prøve noe annet. Slik som her ser vi at a^2 er delelig med to og derfor må det være et partall. De overgangene er det vanskelig å se selv. (6)

Da det oppleves av Stig som vanskelig å se overgangene gjort i beviset selv, vil et spørsmål videre være om han opplever at det ikke stopper opp i bevisgangen:

> Nei, egentlig ikke sånn at det stopper opp, jeg henger med på forklaringer når den står der. Men når det der at de bytter til at a blir 2c så skjønner jeg hvorfor det gjør det men jeg hadde nok ikke blitt å gjort det selv. (7)

Vi tolker det slik basert på denne og forrige sitatet at Stig ser på bevis som en kreativ affære og anser ikke seg selv som å være «god nok» til å kunne resonnere kreativt i matematikk. Etter dette funnet valgte vi å introdusere det neste beviset som omhandler Bolzanos teorem der først får den tiden han trenger på å lese gjennom beviset starter med «Ja, det er avanserte greier». Dette teoremet kan ansees for å være relevant for Stig da pensumet i faget Stig gjennomførte på høsten før intervjuet var det en betydelig andel som omhandler kontinuitet i funksjoner. På spørsmål om Stig ser på dette som relevant i undervisningen svarer han:

> Jeg har lyst å si både ja og nei, når jeg hadde Kalkulus hadde vi mange epsilon-delta bevis som jeg ikke forstod. Det ga bare ikke mening. Etter hvert skjønte jeg litt mer av større og mindre epsilon og hva det betyr. Det gir på en måte mening for å få en forståelse av hvorfor det er sånn. Du kan nok ikke bruke dette på noen måter annet enn at det bevise at det stemmer for en gitt graf. Så det er mer sånn forståelse, og mindre bruksområdet. (8)

Stig trekker altså her et skille mellom et bevis for forståelse og et bevis som skal brukes. Vi skal diskutere dette sitatet senere, da det i seg selv kan sees på som motsigende, men det vi tror Stig mente å si var at dette beviset viser at en matematisk egenskap er sann, og i forlengelse av dette at han ikke ser nytteverdien av et slikt bevis. Stig syntes i tillegg det var tungt å lese seg gjennom dette beviset:

> Det er tungvint å lese. Når det er masse større og mindre enn, nuller og absoluttverdier. Ting som går i ett. Så velger man bare plutselig ting. Det har jeg lært meg at man må bare velge en epsilon også finner man en delta ut i fra det. (9)

Vi mener Stig her referer til at språket beviset er skrevet på er vanskelig, da det er mindre skrift, og mere rene matematiske tegn gjennom beviset. Vi ønsker gjerne at Stig skal forklare oss litt mer hva han mener med hvorfor det første beviset kan være litt mer forklarende enn det andre:

> ... det siste beviset bare sier noe om en egenskap som finnes. Det er ikke så brukbart utover det at du vet at det finnes, men du vet at kvadratrota av to er irrasjonell og det er noe du trenger å bruke og er en mer viktig ting. Det er også lettere å lese det beviset og du heng mer med på forklaringene uten så mye mer forkunnskaper. (10)

Vår øyeblikkelige tolkning av dette i intervjusituasjonen var at Stig mener det første beviset er forklarende for at han forstår tankerekken bedre og «henger med» på resonnementet. Sammen med dette sitatet og neste ønsker vi presentere et funn der Stig viser at han forbinder det formelle, kanskje uforståelig, med det som vises i forelesninger. Vi spør derfor om det er bevis nummer en eller to som han føler blir presentert i forelesningene:

> Jeg føler det er mer på den andre måten mesteparten av tiden. Det eneste som ble vist på den første måten er vell de bevisene som vi sjøl skulle klare å utlede. (11)

Med dette avslutter vi delen der vi spør direkte om artefaktene vi har tatt og beveger oss mot det som er litt mer generelle spørsmål angående universitet og hvordan Stig følte møtet med matematikken var:

> Det var ganske tungt, fordi det var så mye bevis og sånt. Det var mange setninger som ble bevist uten at jeg følte jeg visste hva de var. Også ble det bevist også snakka om uten at jeg følte jeg hang med. Det var noen forelesninger langt ute i semesteret som jeg plutselig bare følte at jeg forstod noe vi hadde tidligere på videregående. Det var litt rart, de snakker om noe du har vært borti før, men skjønte egentlig ikke at det var det de snakket om. Og det tror har med at bevisene ser ut som bevis nummer to, du vise alt før du skjønner hva du snakker om. (12)

Stig forteller at det ikke er alt han har fått med seg fra undervisningen og hevder det tok lang tid før han klarte å se forbindelsen med ting han har lært tidligere. Stig referer til at han tror det har med hvordan bevisene ser ut, men vi tolker det i retningen mot et mer formelt språk. Vi fortsetter med å spørre om det er en annen måte foreleseren kunne gjennomført dette på:

> Jeg har tenkt litt på dette før intervjuet og jeg tror egentlig det. Om det hadde vært gjort på den måten av at foreleseren sier at her et utsagn, lære meg å bruke det for å få litt forståelse og bevist det på slutten når jeg har litt kjennskap til det. Jeg følte jo at det kom mange utsagn jeg ikke visste hvordan jeg skulle bruke det eller hvilken sammenheng du skulle bruke det i. også fikk du et bevis for det for da ga det ikke mening, for hva er egentlig utsagnet i utgangspunktet? Også følte jeg ofte vi ikke nødvendigvis fikk et sånn et eksempel på hvordan vi skal bruke det i forelesning men heller at vi gikk videre til neste og da blir det litt sånn tunge forelesninger med bevis på bevis. Jeg tror det kunne vært gjort på en annen måte ja, men jeg skjønner at det må være bevis, for det er sånn faget er lagt opp, men det kunne fokusert litt mere på andre deler slik at man skjønner hva man faktisk beviser. (13)

Vi mener Stig presenterer to ulike, og viktige aspekter vi ønsker å se på senere. Først presenterer han en metode han ønsker at foreleseren skal følge når den presenterer pensum, altså si et utsagn, videreformidle hvordan man skal bruke det og bevise det til slutt. Dette mener Stig er metoden som vil gi han best forståelse av pensum. Videre spør vi om Stig føler en gjennomgang av bevisene fra foreleserne gir han et verktøy videre:

> Nei egentlig ikke, det gir meg ikke så mye, kanskje etter hvert i eksamenstiden når man får mer oversikt gir det litt verktøy. Men stort sett bruker man ikke bevisene i det hele tatt, og når man da ikke har skjønt hva beviset beviser er det et veldig dårlig verktøy. Også blir det kanskje et enda dårligere verktøy for at i starten så visste man kanskje ikke hva epsilon og delta var og hva alt betydde. Så det jeg kunne tenkt meg er at man i starten gikk gjennom et bevis, og det her betyr det og det betyr det. Slik at man har en sjans til å skjønne det. Jeg syntes det manglet en god del bakgrunns-forklaringer på hva ting er. (14)

Stig sier at han oppfatter det slik at bevisene ikke brukes og i forlengelse av det vil bevis være et dårlig verktøy å ta med seg videre når man ikke har bruk for det. Videre sier Stig at han skulle ønsket starten av universitetskarrieren var gjort på en litt annen måte, han vil helst ha en form for innføring i bevis og litt forklaring rundt det praktiske med bevis. Dette leder oss inn på hva forelesere må gjøre for å overbevise studenter om at noe kan sees på som sant:

> Det har jeg ikke tenkt på og det er nok litt fordi man er vandt til fra videregående at ting bare er sant, det bare er sånn. Og da godtar man ofte bare at der er sånn. Også når man da begynner å få forklaringene så tenker jeg, trenger jeg dette egentlig? Hvert fall følte jeg det slik i starten. Det er fornuftig å vite hva man bruker og ikke bare bruke ting. (15)

Stig vil altså anse det som en selvfølge at det som læreren på videregående er sant, men tenker nå i ettertid at det er lurt å kunne vite hva slags matematiske oppbygninger som ligger bak det man skal bruke videre. Som intervjuer skal man ikke legge ord i munnen på intervjuede, men vi ønsket her å få ord på hva Stig gjør når han er ferdig med en forelesning og føler han ikke forstår. Vi spurte om han da vanligvis brukte å gå tilbake å se på forelesningsnotater eller lese i boka, eller om han istedenfor dette gjør oppgaver og lar det han ikke forstod ligge i fred og anta at alt som sagt er korrekt/sant:

> Jeg tenker nok den siste, at nå går vi og gjør oppgaver og tenker at det er sant. Jeg har vært borti litt flere beviser på slutten når jeg skjønte det kunne komme på eksamen, så da gikk jeg tilbake å så på noen bevis, men for det meste så er det sagt og da er det greit og det står nok noe fornuftig på tavla også er det fint. Så går man tilbake til å gjøre noe som ikke har så mye med bevis å gjøre. (16)

Vi spør så videre om Stig føler bevis gir han en nytteverdi:

> På enkelt ting ja. På kontinuitet for eksempel når jeg skjønte epsilon-delta beviset så ga det ganske mye mening. Og på en måte kan man nesten bruke det inn i å finne kontinuitet så da ga det mening. På andre ting, uten at jeg har et eksempel da, på noen ting er det ikke et poeng med det. Jeg vet ikke om jeg er for at man skal presentere bevis for å presentere bevis uten at noen av studentene forstår det. For da tror jeg hele hensikten med det er borte, så mere at om man skal bevise noe så er det viktig at man sørger for at folk henger med og forstår det. (17)

Stig kan altså se nytten av bevis på universitet, men presiserer igjen at han mener det ikke er vits å gjennomføre bevis dersom ingen studenter forstår det og mener hensikten med å bevise noe bortfaller. Vi forteller Stig at intervjuet er ferdig og spør han om en ting som er det viktigste vi har pratet om:

> Det aller viktigste er nok at for å få en god forelesning så forklarer man hva et bevis er i starten av et semester slik at man skjønner de bevisene de presenterer. Og at det funker ikke slik det er nå, det er veldig krokete… også heller med flere bevis slik som det første som stod på arket, mere bevis som er logisk, eller forklarende. (18)

Vi avslutter nå med å oppsummere Stig som er arbeidsvillig student som gjerne ønsker å opparbeide seg en dypere forståelse. De videre tolkningene gjort fra intervjuet med Stig vil komme fram senere når dette skal diskuteres i lys av teori og kvantitativt datamateriale.

4.2.2 Student 2 (Terje)

Terje går bachelor i matematiske realfag, og har i likhet med Stig gjennomført innføringsemnet i teoretisk matematikk, og tar det nåværende semesteret det to matematikkemner som bygger videre på innføringsemnet. Selv forklarer Terje at han hadde positive assosiasjoner til matematikken fra videregående skole, og forteller at han også husker å ha arbeidet noe med bevis i timene, her særlig induksjon, og kontrapositive bevis:

> *Jeg var veldig glad i matematikk, og tenkte at dette var noe jeg kom til å holde på med videre. Gode holdninger til faget og veldig arbeidsvillig. (1)*

Og fortsetter på spørsmålet om bevis i undervisningen:

> Ja... til en viss grad. Det jo det ene kapitlet med induksjonsbevis og kontrapositive bevis, hvor det er veldig konkret med en oppskrift på hva du skal gjøre. (2)

Videre svarer Terje på spørsmål hvilken rolle matematikk har for han:

> *Det er egentlig noe jeg har lyst til å gjøre for å forstå ting. (3)*

Terje er altså en person som sier selv han er glad i matematikk og vil holde på med dette videre, han er også på en søken etter forståelse. På spørsmål om han opplevde en endring i måten matematikken ble presentert i universitetet, svarer han bekreftende og utdyper med å fortelle om sine erfaringer:

Ja altså, slik som forelesningen i det første matteemnet, er det en veldig brå overgang. Sånn som jeg ser det handler det om hvordan man ordlegger seg og hvordan notasjon man bruker. Jeg savner en ordentlig innføring i dette. Etter første forelesning var vi mange som satt og ikke forsto hva som skjedde. (4)

Terje viser her en tydelig frustrasjon over måten matematikken ble presentert på, særlig i begynnelsen av matematikkarieren i universitetssammenheng. Dette var en student som i utgangspunktet var glad i matematikk, og det oppfattes her som om han ikke er fornøyd med å bli presentert med en rekke ulikt formelt fagstoff, uten å selv kunne forstå eller forklare hvorfor fagstoffet er riktig. Studentene blir så presentert med bevis 1 og bedt om å forklare sine tanker rundt beviset

Dersom jeg får et bevis, liker jeg å skrive det på denne måten for å virkelig forstå det. Og da kjenner jeg meg også igjen i den mere formelle måten å skrive det på. (5)

Studenten forteller videre at han er positiv til at det er mere forklarende tekst i dette beviset enn det han er vandt med, i tillegg til at bevisteknikken også er kjent. Han presiserer også at bevis 1 på ingen måte ligner måten han føler bevis blir presentert på i lærebok og forelesning. Vi tolker det slik at å inkludere forklarende tekst som i bevis 1, vil kunne bidra til at studenter henger med på resonneringen og argumenteringen som foretas i bevisføringsprosessen, og vil med dette kunne bidra til at studenter i større grad forstår hvorfor beviset er riktig. Ved introduksjon av bevis 2 var ikke Terje like fornøyd med måten beviset ble presentert:

Jeg opplever at det er denne måten bevis presenteres på i forelesning, og føler at ingen forstår det. (6)

Videre forteller han at beviset i forelesningsnotatet gjerne står med mindre mellomrom mellom linjene, og at det følgelig blir enda vanskeligere å henge med. Terje forteller at han forstår hva beviset sier fordi han har sett en visuell fremstilling av resultatet i et seminar, og viser til at dette hjalp med å forstå beviset. Vi tolker det slik at studenten er tydelig frustrert over denne måten å bli presentert fagstoff på, og spør videre om han opplever at forelesningen gir et nyttig verktøy videre med bevis.

Ja … men samtidig ikke. Fordi vi ikke får noen innføring i hvordan vi kan gjøre det selv. Vi blir bare presentert med bevis på bevis, også får vi oppgaver hvor vi skal føre

> *bevis. Men vi har ingen verktøy, bare masse grå suppe som det er vanskelig å få tak på. (7)*

Her tolker vi det slik at Terje sliter med å få en det han omtaler som en god forståelse for hva bevisene han presenterer faktisk betyr og medfører, da de i liten grad forklarer hva som skjer underveis. Bevis 2 inneholder betraktelig mindre forklarende linjer, og er nokså kompakt, hvilket ser ut til å føre at studenten ikke henger helt med i resonneringen som skjer underveis, og resulterer til at en enklere tilnærming blir å memorere, heller enn å forstå hva det betyr. Nettopp det å forstå bevisene i forelesning er noe som trekkes frem som viktig for Terje, og på spørsmål om hvorfor han tenker det er viktig å forstå bevisene han presenteres med svarer han følgende:

> *Det er fordi det er interessant. Det er jo det jeg har lyst å jobbe med. Nå har jeg ikke tenkt å bli matematiker, men for å vite hva som skjer under overflaten i andre realfag. (7)*

Her tolker vi det slik at Terje ønsker å opparbeide seg en forståelse som går utover det rent instrumentelle for å kunne forstå hvorfor de teknikkene han benytter faktisk stemmer. Vi forstår det slik at han presenterer et ønske om en dypere matematisk forståelse, samt å selv kunne resonnere på en logisk og korrekt måte. Han påpeker også at det ofte er greit å forstå bevis, men vanskelig å gjøre det selv. Også her fremkommer det et ønske om å faktisk selv kunne utføre et bevis, uten å kopiere eller skrive av. Videre spør vi hvordan han tenker at forelesningen kan legge opp til dette.

> *Jeg skulle ønske at det fantes en ordentlig gjennomgang av hvordan man skal gjøre det selv. For min del er det hovedproblemet nå. ... Det er veldig demotiverende å vente på løsningsforslag for å kunne føre bevisene. Man har lyst til å kunne føre de selv, men foreløpig er det en mangel på de verktøyene som er så nærliggende å ha når man skal gjøre det selv. (8)*

Igjen forstår vi det slik at Terje gjerne ønsker å kunne avansere videre til det stadiet at han selv kan være den som faktisk beviser. Heller en å bli forklart hvorfor, ønsker han selv å være den som forklarer, og vi tolker det slik at han med dette viser til et ønske om å selv kunne utforske påstander i matematikk, heller en å få verifisert av andre. Her virker det som om

Terje virkelig anser det som viktig å lære å bevise. På spørsmål om hvorfor svarer han følgende:

> *Det er jo fordi man skal avlæres å ta ting for gitt. Jo høyere opp i nivå man kommer kan man akseptere hvorfor ting er som de er. Derfor er det viktig å lære seg fra starten av at man selv må kunne finne ut av ting. Dette kan jo også videreføres i annen forskning. (9)*

Vi tolker det slik at studenten har et genuint ønske om å utvikle en form for kritisk tenkning. I matematikk kan dette være det å sjekke stegene en foreleser gjør på tavla, framfor bare å godta at det foreleseren sier er nødt til å være korrekt. Basert på denne uttalelsen virker det som om Terje er lite fornøyd med å bli presentert med en fasit, uten å selv kunne komme frem til det samme. På spørsmål om han tenker at det er behov for en endring av undervisningsstilen på universitetet svarer han:

> *Ja det føler jeg så absolutt. (10)*

Avslutningsvis trekker han frem en trøblete undervisningsstil når det kommer til bevissom det viktigste vi har snakket om, når vi spør han om dette.

4.2.3 Student 3 (Hans)

Hans studerer droneteknologi, og gjennomførte forrige semester innføringsemnet i MAT-1050 Matematikk for ingeniører 1, og tar dette semesteret oppfølgingsemnet. Hans hadde matematikk R2 på videregående og beskriver det som veldig monotont og kjedelig. Han forteller om hvordan han opplevde timene på videregående:

> Kjedelige Powerpoints og veldig monoton lærer. Vi løste noen få oppgaver i timen også var vi ofte ferdig. Vi fikk sjeldent tid til å løse så mye oppgaver på skole, så dette var noe vi gjerne måtte gjøre på fritiden. (1)

På spørsmål om han husker å ha hatt om bevis på videregående svarer han svært lite, men at han minnes å ha sett induksjonsbevis før han begynte på universitetet. Vi spør videre hvordan Hans har opplevde overgangen til matematikken på universitetet.

> Jeg syntes at overgangen var vanskeligere enn overgangen fra ungdomsskole til vgs, men det er hovedsakelig fordi tempoet økte, og at matten ble mere komplisert. Vi hadde heldigvis en god foreleser så det var greit å hoppe på å følge med. (2)

Basert på dette fremstår det som om Hans er relativt fornøyd med opplegget i forelesningene på universitet og det virker som han klarer å henge med på det som blir presentert, selv om det var en endring i tempo. Det virker også som om han føler det er viktig å følge med i undervisningen. Vi presenterer så et bevis for Hans, og spesifiserer vårt ønske om å høre hans tanker rundt dette fremfor om han forstår beviset:

> Jeg synes egentlig det ser ganske greit ut. Oppsettet gir mening. (3)

Videre legger han også til:

> Det ser greit ut, alt er skrevet som det bør være, og er satt opp på en grei måte i alle ledd. Det argumenteres for alle fasene som gjøres. Så etter det jeg ser er det som en ganske normal måte å føre et bevis på. (4)

Hans ser ut til å henge med på resonneringen og argumenteringen i bevis 1, og vi spør derfor om han tror at han ville kunne fulgt med i forelesning dersom beviset ble presentert på en lignende måte.

> *Det kommer litt an på hvor fort det hadde blitt gått igjennom. Jeg tror det hadde gått greit å følge med, men tror at det hadde gått over hode på en del folk. (5)*

Det virker med dette som om Hans føler at han har grei kontroll og føler han evner og forstår det meste som presenteres i undervisningen, men også observerer at enkelte studenter ikke sitter igjen med samme inntrykk. Vi introduserer bevis 2 for Hans:

> Ja okei. Jeg føler at dersom dette hadde blitt tatt på en forelesning, ville det vært litt mere komplisert da det er en del teori og forkunnskaper som kreves. Alt kommer selvfølgelig an på forelesningen og hvor raskt det går, men jeg føler det er vanskeligere enn bevis 1 (6)

Da bevis 2 er lengre, to ligninger som blir manipulert samtidig og flere forskjellige symboler kan det tenkes at det er innholdet i dette som gjør at han ikke forstår beviset. Hans fortsetter her å vise at hans ønske er å forstå det som blir presentert for han, men forstod ikke beviset med å bare lese gjennom det:

> Det hadde nok blitt litt bedre med mere tekst, det hjelper jo med litt flere småforklaringer. Hvis du bare leser over det går det nok litt over hodet. (7)

Vi spør videre hvordan han arbeider for å forstå matematikken etter han kom på universitetet da vi tolket det slik at Hans ikke er positiv til bruken av bevis for læring:

> Jeg bruker heller eksempler istedenfor bevis. Disse er ofte enklere å forstå også kommer du fram til en forståelse som passer bedre for deg kontra det generelle du får fra et bevis. (8)

Vi sitter igjen med den oppfatningen av at Hans mener bevis kan være unødvendige og spør derfor videre om han ser nytten i bevis:

> Jeg synes det er greit, fordi man får en svak utdypning i teoremene man bruker for utregningen man gjør, som potensielt har mulighet til å hjelpe deg. Men dette er nokså potensielt, så jeg synes nok at utbytte er litt bob-bob. (9)

Dette kan lede inn på det motsatte av det vi tenkte i starten om at Hans er ute etter en relasjonell forståelse til matematikk. Vi tolker også dette som at dersom Hans hadde sett at bevis kan være nyttig for senere eller at det kan kommer på eksamen hadde han tatt del i denne aktiviteten. Vi prøver å få frem om det er relasjonell eller instrumentell forståelse Hans søker med å spørre om det er viktigst å forstå matematikk, eller om det viktigste er å få rett svar:

> Nei, matte er mere noe som bare må gjøres. Jeg ser ikke så mye fremtidig bruk for matematikk. Synes det virker unødvendig å kunne hele teoremet, da er jeg mere interessert i å vite hvordan jeg skal få rett svar, og forstå hvilke fallgruver jeg ikke skal gå i. (10)

Hans studerer Droneteknologi og mener at han ikke får en stor bruk for matematikk i fremtiden, dette tyder på at Hans er klar over at han søker det vi tidligere har definert som

Instrumentell forståelse, dette vil vi komme tilbake til senere. Det virker som om Hans har tatt et valg der han mener bevis i matematikk er noe han ikke trenger til senere og har derfor valgt å ikke ta del i denne aktiviteten av matematikk. Tidligere sa vi at det virker som om Hans er ute etter forståelse i matematikk, altså en relasjonell tilnærming, men nå virker det mere som om Hans har en instrumentell tilnærming til matematikk.

5 Samlet hovedfunn og diskusjon

Vi ønsker gjennom dette kapitlet å drøfte og kommentere resultatene fra både det kvantitative spørreskjema og de kvalitative intervjuene. Her vil vi samle og presentere ulike aspekter fra metodene for å beskrive problemstillingen vår på best mulig måte. Vi mener problemstillingen setter et søkelys på det studentene tenker, føler og opplever i sitt første møte med universitetsmatematikken. Funn presentert i resultatkapitlet fra både intervju og spørreskjema vil bli diskutert med utgangspunkt i teori presentert tidligere som omhandler studenters forståelse og syn på viktighet av resonnering i matematikk. Dette vil presenteres ut fra de to forskningsspørsmålene vi har valgt å avgrense oppgaven vår med, og vil overordnet være med å belyse aspekter rundt studenters oppfatning av overgangen fra videregående til universitetsmatematikk.

Vi vil kort presentere enkelte likheter med vårt eget forskningsprosjekt, og litteratur/empirisk forskning som tar for seg lignende tematikk som det vårt prosjekt undersøker. Som nevnt i metodekapitlet er enkelte påstander hentet fra spørreskjemaet til Stylianou et al. (2015), og vi vil diskutere enkelte likheter som oppstår her. Også spørreundersøkelsen til Rønning (2014) har vært til inspirasjon i utarbeidingen av prosjektet, og vi vil derfor se på tendenser som presenteres her, sammen med våre resultater vedrørende bevis i matematikken. Fra **Feil! Fant ikke referansekilden.** under, presenteres en sammenligning av svarfordelingene til spørsmålene hentet fra Stylianou et al. (2015), som jevnt over presenterer en nokså lik svarfordeling mellom Stylianou et al. og vår undersøkelse. Påstand 3 «Jeg opplever at jeg komme med innspill når det gjennomføres bevis» er den påstand med størst avvikende svarfordeling mellom de to undersøkelsene. Dette skyldes trolig oversettelsen som ble diskutert i delkapittel 3.2.1, og følgelig at påstanden ikke tar for seg den samme vinkling. Det er også verdt å nevne at Stylianou et al. (2015) gjennomfører undersøkelsen på «undergraduates students´», hvilket betyr at det ikke nødvendigvis er deres første år på universitetet. Studentene i Stylianous studie vil derfor kunne ha tidligere erfaringer med bevis eller utviklet en bedre forståelse fra tidligere. Vår undersøkelse har på den andre siden respondenter fra innføringsfag i matematikk, og vi har følgelig få respondenter med tidligere matematikkerfaringer fra universitetet.

Tabell 8: Sammenligning av svarene fra spørreundersøkelsen vi hentet inspirasjon fra.

		Undersøkelse gjort av Stylianou et al. (2015)		**Denne undersøkelsen**	
Originalt spørsmål	**Vår oversettelse**	**Uenig**	**Enig**	**Uenig**	**Enig**
All students of mathematics should have the opportunity to learn to read and write proofs	Alle matematikkstudenter burde ha muligheten til å lære seg å lese og å skrive bevis (5)	6.5%	72.5%	12.6%	65.7%
I think constructing proofs is an important part of doing mathematics	**Jeg anser bevis som en viktig del av matematikk (2)**	11%	64%	13.4%	63.0%
In learning mathematics, it's important for me to understand the reasons not just memorize the formulas	**Når jeg lærer matematikk, er det viktigere å forstå innholdet fremfor å memorere formler (8)**	11%	75.5%	11.9%	77.3%
I feel that I have an important contribution to make during the construction of a proof in math class.	Jeg opplever at jeg kan komme innspill når det gjennomføres bevis (3)	17.5%	34.5%	64.5%	17.3%

5.1 Studenters bakgrunnskunnskaper i matematikk og utvalg

Resultatene fra spørreundersøkelsen viser en aldersfordeling med en andel på 47.7% som er 20 år eller yngre. Dette betyr at halvparten av studentene har påbegynt utdanningen sin det samme året som de fullførte videregående, eller året etter. Den resterende andelen består av respondenter som svarer at de har gjennomført eller delvis gjennomført andre studier før de begynte på nåværende studie, eller har gjort andre ting som militæret eller folkehøyskole. Fra undersøkelsen fremkommer det at rundt 45% av respondentene er 22 år eller eldre, og det vil dermed være minst tre år siden de gjennomførte matematikk på videregående. Informasjonen fra denne gruppen vedrørende tiden før påbegynt utdanning i matematikk ved universitetet vil kunne være preget av at det har gått en del tid, og svarene vil følgelig kunne være upresise.

Uten at vi direkte vet hvordan dette har påvirket svarene til respondentene har vi også et utvalg med et nokså høyt karaktersnitt. Som nevnt tidligere er det 73.3% som har karakter 4 eller høyere fra matematikken på videregående. Basert på de ulike matematikkfagene på videregående, finner vi flest karakter 6 blant de respondentene som hadde matematikk R. Gjennomsnittet for matematikk R på landsbasis var på 4.2 for eksamener våren 2021 og 4.3 for våren 2022. Vårt utvalg har samme karaktergjennomsnitt som Oslo og Troms og Finnmark i 2021, med et gjennomsnitt på 4.5. Dette er en variasjon fra det som er nasjonalt, men vi mener det kan sees innenfor den normale variasjoner av karakterer, og det kan tenkes at det skyldes et lavt antall respondenter på spørreundersøkelsen. Vi mener på bakgrunn av dette at utvalget vårt kan representere, i minste fall, populasjonen som gjennomfører realfaglige utdanninger ved Universitetet i Tromsø. Det bør likevel vurderes om det er tilstrekkelig antall respondenter for å kunne si at det representerer studenter på en mer nasjonal basis.

På flere av spørsmålene som omhandlet respondentenes erfaringer fra tiden på videregående opplever vi også at det er en variasjon fra 15.8% til 28.8% av respondentene som svarer «verken eller» på påstandene. Vi opplever at dette kan være problematisk da det sammen med den lave korrelasjon, presentert i Tabell 5, tyder på at studentene har svart «verken eller» på et spørsmål, og så på en senere påstand har svart «enig» eller «uenig». Å stille spørsmål om ting for langt tilbake i tid kan være problematisk da glemsel og feilerindring kan prege noen av respondentene (Ringdal, 2018). I utarbeiding av spørsmålene var planen å stille så generelle påstander og spørsmål at respondentene skulle ha mulighet til å huske og svare på dem, men som nevnt tidligere er det 45.0% som har vært ute av videregående opplæring lenger enn tre år. Andre grunner til en høy oppslutning av svaralternativ; «verken eller» kan tenkes å være at det er mange som var usikre på svaret sitt, eller ikke ønskt å ta stilling til påstanden. På spørsmålene som tar for seg studentenes opplevelser med matematikken på universitetet ser vi at studentene i større grad tar stilling til påstandene, da langt færre svarer «verken eller». Dette kan trolig skyldes at det har oppstått et skifte i hva studentene opplever om undervisningen, eller at studentene i større grad evner å ta stilling til påstandene da de omhandler nåværende undervisning.

I et delfunn presentert i de kvantitative dataene i delkapittel 4.1.1 fremkommer det at respondentene har liten erfaring med å lese og skrive bevis når de begynte på sin utdannelse på universitetsnivå. Vi opplever at dette også gjelder for de intervjuede, noe som vi mener sitatet fra Stig (1) vedrørende erfaringer med bevis på videregående:

> Jeg tror vi hadde et delkapittel om det der som vi skippet over. Ingen oppgaver om det på prøver eller sånt. Vi bare gikk gjennom det

Også Terje (2) nevner at det var et kapitel om induksjonsbevis og kontrapositive bevis som han beskriver som veldig konkret og oppskriftsbasert. Slik vi oppfatter det har både respondentene og intervjuobjektene svært begrenset og lite erfaring med det å utarbeide bevis, samt selv å bevise påstander. Dette underbygges også av at majoriteten av respondentene oppga at de i videregåendematematikken i liten grad forsto hva bevis handlet om, og utrykker at de opplevde det som unødvendig å forstå bevisene som ble presentert.

5.2 Hva er studenters oppfatning av betydningen av bevis i matematikk, og hva slags matematisk forståelse ønsker studenter å oppnå

Vi vil her trekke inn elementer fra spørreundersøkelse og intervju vi mener kan bidra til å svare på forskningsspørsmål 1: «Hva er studenters oppfatning av betydningen av bevis i matematikk, og hva slags matematisk forståelse ønsker studenter å oppnå». Dette vil gjøres gjennom å presentere funn, og interessante vinklinger vedrørende betydningen av bevis og studenters syn på matematisk forståelse, som vi vil sette sammen og diskutere. Innledningsvis vil vi diskutere en endring i opplevelse av viktighet av bevis i matematikken i overgangen fra videregående til universitet, etterfulgt av at vi avslutningsvis vil vi forsøke å oppsummere og besvare forskningsspørsmål 1 gjennom bruk av teori og resultater presentert over. Vi vil særlig å diskutere at studentene utrykker et ønske om å kunne forstå bevis, samt at de ikke ønsker å pugge seg til en forståelse i matematikk. I tillegg vil vi diskutere hvordan studentene opplever undervisningen som omhandler bevis.

Da oppgaven belyser aspekter rundt studenters tanker om matematikkfaget i en overgangsfase til universitetsmatematikk, vil vi å belyse et interessant funn vedrørende studenters opplevelse av viktigheten av å forstå bevis som presenteres. Over 53% av respondentene oppgir at de anser seg som enige eller litt enige i påstanden om at det var unødvendig å forstå bevisene som læreren presenterte på videregående. Dette tallet endres drastisk etter at studentene begynner på universitetet, hvor under 15 % oppgir at det er unødvendig å forstå bevis som presenteres. Dette viser til en endring i hva studentene opplever som viktig å forstå, og til at det å kunne resonnere og argumentere for valgene de tar når de jobber med matematikk, øker i viktighet. En av grunnene til hvorfor dette kan være tilfelle, fremkommer fra intervjuet med Terje, hvor han mener at det forventes å kunne argumentere for valg i større grad, og at man skal avlæres å ta ting for gitt når man kommer høyere opp i nivå (T9). Engelbrecht (2010) trekker frem aspekter som oppleves som krevende i overgangen til universitetsmatematikken, og viser til nettopp en nødvendig utvikling av en deduktiv resonneringsevne, altså at det i større grad kreves at studentene evner å forklare og argumentere for matematikken som anvendes etter overgangen til universitetet.

At studentene i vår undersøkelse opplever overgangen til universitetsmatematikk som krevende stemmer godt overens med resultatene til Rønning (2014). Rønning viser blant annet viser til at studenter opplever at kunnskapen fra videregående matematikk, ikke imøtekommer det som forventes ved innføringsemner i høyere utdanning. Dette fremkommer også fra våre intervjuer fra blant annet Terje (3). Han viser til at det ved inngangen til universitet mangler en innføring i hvordan foreleser ordlegger seg, og hvordan matematisk notasjon anvendes. Følgelig presenterer han at overgangen opplevdes som stor.

Tabell 9: Oversikt over påstand 1,2,4 og 5. De påstandene som er markert med fet skrift er hovedpåstander.

Jeg anser det som nyttig å forstå bevisene foreleseren presenterer (1)
Jeg anser bevis som en viktig del av matematikk (2)
Bevis kan brukes for å formidle og forklare nye ideer innenfor matematikk (4)
Alle matematikkstudenter burde ha muligheten til å lære seg å lese og å skrive bevis (5)

Fra spørreundersøkelsen ønsker vi videre å trekke frem at studentene, basert særlig på påstand 1,2,4, og 5, ønsker å forstå bevis som presenteres, samt kunne gjennomføre dem selv. Det fremkommer også her (Se 4.1.2) at majoriteten av respondentene ikke vet hvordan de skal gjennomføre bevis og klarer heller ikke komme med innspill i forelesninger. Det at studentene ønsker å selv forstå og kunne gjennomføre bevis, tolker vi slik at de gjerne ønsker en gjennomgående kunnskap for matematikken de anvender. Dette er også en av forklaringene som gis utrykk for i intervjuene fra blant annet Stig. Her viser han til at det er forventet at han må forstå mere, og at han forstår hvorfor ting kan gjøres på de ulike måtene (S4). Dette tekker i retningen at Stig mener en ren instrumentell forståelse ikke lengre er tilstrekkelig i universitetsmatematikken, slik han mener den var på videregående, og viser til et behov for en dypere forståelse for matematikken som utføres. Relasjonell forståelse oppsummeres av Skemp (1976) som en type forståelse der det ligger en begrunnelse bak valgene som tas, og en forståelse for hvorfor nettopp denne måten er den riktige. Et ønske for en relasjonell forståelse er nærliggende å trekke ut fra svarene i spørreundersøkelsen. Over 60% sier seg enig eller litt enig i påstanden om at det er viktig å kunne forklare og argumentere for valg i eget arbeid. I svarer over 75 % at de er enige eller litt enige i at det er viktigere å forstå innholdet fremfor å memorere formler.

Imidlertid antyder våre data at studentenes ønske om å forstå matematikken, heller enn å pugge og memorere formler og eksempler, ikke oppfylles av undervisningen de mottar. I intervjuene uttrykkes det heller en frustrasjon over at forelesere har en tendens til å gjennomgå flere bevis uten at studentene har bakgrunnskunnskapen til å forstå det som presenteres. Et sentralt spørsmål vil derfor være hva tanken med å implementere bevis i undervisningen er.

Kunnskap om bevis, og bevis som virkemiddel for å forstå matematikk trekkes frem av Schoenfeld (1994) som en potensiell bidragsyter til matematikkundervisningen. Her pekes det på at forståelse for bevis vil kunne gi forklaringer for hvordan matematikken er bygget opp. Forfatteren viser til at bevis dette kan være med på å utvikle studentenes evne og forståelse av viktigheten til å argumentere og vurdere matematikken som foretas. Schoenfeld peker også på at dette er noe den tradisjonelle matematikkundervisningen i liten grad legger opp til. Studenten fra intervjuet utrykker likevel at de opplever at undervisningen ikke legger opp til en relasjonell forståelse rundt bevis. Stig oppsummerer intervjuet med at han ser nytten av bevis, men presiserer unødvendigheten av det dersom ingen studenter forstår hva det betyr, og mener da hensikten med at bevis i matematikkundervisningen bortfaller (S17). Også Terje presiserer at han opplever måten bevis presenteres på som lite hensiktsmessig, og viser til at han har problemer med å få en god forståelse for hva bevisene som presenteres faktisk betyr og medfører (T5/T6).

Likevel er det tenkelig at bevis i undervisningen vil kunne bidra til en økt forståelse for matematikk som utføres, slik som Schoenfeld (1994) nevner. Gjennom bevis vil studenter kunne få et innblikk i bakgrunnen til hvorfor matematikken de foretar seg av faktisk stemmer, og vil kunne legge opp til en økt forståelse. Dette forutsetter at måten bevis presenteres på også får studentene til å selv reflektere, resonnere og argumentere for de ulike stegene i bevisene de presenteres med. Dersom bruk av bevis er tiltenkt å legge til rette for en relasjonell forståelse, må også undervisningen gjenspeile dette. Studentene fra intervjuet presenterer en form for bevisundervisning hvor foreleser mer eller mindre uten innspill skriver opp og presenterer et bevis på tavlen. En slik undervisning vil i liten grad kunne tenkes å inkludere studentene i tankeprosessen bak argumentasjonsrekken til beviset, da de trolig mangler faglige kunnskaper som kreves for å kunne komme med innspill i bevisprosessen. Terje utrykker i sitt intervju at han føler han mangler en innføring i hvordan bevis skal gjøres og blir dermed presentert med bevis som en noe det er svært vanskelig å få tak på (T6). Kun 17.3 % fra spørreundersøkelsen oppgir at de er litt enige eller enige med at de opplever at de kan komme med innspill når det gjennomføres bevis. Dette trekker i retningen at måten bevis presenteres på og jobbes med, i liten grad legger opp til studentdeltakelse, men heller presenteres for å vise at påstander og teoremer stemmer.

Den rollen studentene hovedsakelig trekker frem at bevis har, omtales av De Villiers (1990) og Hanna (1990) som verifiserende, og benyttes for å demonstrere sannheten av en påstand. Presentasjon av verifiserende bevis vil i liten grad kunne tenkes å legge opp til en relasjonell forståelse av bevis, slik studentene utrykker et ønske for. En undervisning hvor bevis gjennomgås på tavlen uten forståelse for bevisene som presenteres, slik intervjuobjektene utrykker, vil heller kunne tenkes å legge opp til en instrumentell forståelse, hvor studentene i beste fall lærer seg å hvordan den aktuelle påstanden eller teoremet skal bevises. Dette vil i liten grad bidra til å det Schoenfeld (2016) omtaler som matematisk tenking. Her kreves det en annen tilnærming til argumentasjon i bevisene som presenteres, hvor det i større grad legges vekt på hvorfor beviset er riktig, heller enn å bekrefte hvorvidt en påstand stemmer eller ikke. En slik tilnærming vil forutsette at bevisene gjennomgås på en grundigere måte, hvor det i mindre grad fører til at studentene ender opp med å resonnere imitativt gjennom å kopiere det foreleser presenteres, eller eventuelt gjennom å se til lignende eksempler.

Hanna (1990) skiller mellom bevis som har som utelukkende hensikt å verifisere, og bevis som har som hensikt å forklare leseren hvorfor en påstand stemmer. Det vises her til at et bevis som har som mål å forklare, er det foretrukket valg, dersom hensikten med å presentere bevis er å gi en økt forståelse. Dette fremstår som nokså åpenbart, da poenget med selve matematikkundervisningen er å gi en økt matematisk forståelse, samt fremme matematisk tenking.

Viktigheten av bevis i matematikkundervisningen diskuteres av Schoenfeld (2016), som viser til bevis som et sentralt aspekt av det som ligger bak det å tenke matematisk. Med dette vises det til viktigheten av å kunne forstå bakgrunnen for å anvende matematikken, og viktigheten av å forstå hvorfor det gir mening å løse oppgaver på en bestemt måte. Dette skiller matematikken fra det å følge en ren oppskrift, og medfører følgelig at matematikk krever at det kan gjøres rede for valgene tatt i argumentasjon, blant annet i oppgaveløsning. Skemp (1976) trekker frem to mulige misforhold som gjerne oppstår i undervisningen av matematikk. Her fremkommer det at studentene enten ønsker å utvikle en relasjonell eller instrumentell forståelse, men ofte blir presentert med motparten av det de selv ønsker. Ønsket om å utvikle en relasjonell forståelse i matematikk fremstår som nokså tydelig fra spørreundersøkelsen, men basert svarene fra intervjuet opplever ikke studentene at undervisningen legger opp til en slik forståelse. Her kan det heller se ut til at undervisningen tvert imot legger opp til en instrumentell forståelse, da bevisene legges frem uten at studentene klarer å tenke gjennom hvorfor ting ble gjort på nettopp denne måten.

Studentene viser altså gjennom spørreundersøkelsen og intervju at de er misfornøyde med måten bevis legges frem på, da de selv ønsker å forstå bevisene på en annen måte enn det de opplever forelesningen legger opp til. Bevisene de presenteres oppleves å primært være bevis som tar den verifiserende rollen, og virker ikke å ha som hensikt å faktisk forklare hvorfor de gir mening.

5.3 Hva beskriver studentenes syn på viktigheten av å resonnere i matematikk?

I dette delkapittelet vil vi først fremme studentenes syn på viktigheten av å resonnere i matematikk, for å så diskutere dette ut fra relevant teori. Vi vil på samme måte som i delkapittel **Feil! Fant ikke referansekilden.**.2 starte med å samle opp resultatene fra spørreundersøkelsen, for å så presentere disse punktene i det som kommer fram i intervjuene. Fra spørreundersøkelsen er det to aspekter som fremstår som særlig interessante: 1) Studentene mener det er viktig å kunne resonnere i matematikk, og 2) studenter ønsker å kunne resonnere selv i arbeid med matematikk. Resonnering og bevis er to nært tilknyttede begreper, som kort vil diskuteres. Ethvert bevis vil kreve en form for resonnering i utarbeidingen, da ulike aspekter, implikasjoner, tilnærminger og resultater skal diskuteres, tenkes gjennom og redegjøres for. På den andre siden vil resonneringen som foretas i matematikken svært ofte (bevist eller ubevist) basere seg på resultater som fremkommer fra tidligere beviste påstander i matematikken (eksempelvis elevers bruk av abc-formelen som nevnt tidligere).

Det første vi ønsker å trekke frem fra spørreundersøkelsen er at studenter mener det er viktig å forklare og argumentere for valg de har gjort i eget arbeid med oppgaver. I delkapittel 4.1.3 ser vi påstand 6: «jeg anser det som viktig å forklare og argumentere for valg jeg har tatt i eget arbeid med oppgaver». Slik som nevnt av De Villiers (1990) er det ikke nødvendigvis presentasjonen av sannhet som burde ilegges mest vekt i undervisningen av/om bevis, men heller den fundamentale forklaringen som ligger til grunn. Derfor tolker vi det slik at det er resonnementet som ligger til grunn som burde være interessant for studenter. Stig (1) påpeker at hans oppfatning er at på videregående var det svært oppgavefokusert, mens etter påbegynt universitetskarriere føler han at det nå er slik at han må skjønne *hvorfor* det er greit å gjøre slik han gjør. Terje (3) sier at det burde vært en gjennomgang på hvordan man skal gjennomføre bevis, og som en forlengelse av dette tolke vi det slik at han ønsker å ha muligheten til å kunne argumentere og forklare arbeidet han gjør. Terje (9) sier videre at han opplever at man skal *avlæres* å ta ting for gitt på universitetsnivå, og han mener derfor også det er viktig på universitetsnivå at man selv må kunne finne ut av ting. På spørsmål om han opplevde at presentasjon av bevis fra foreleseren ga et verktøy for videre forståelse, svarte Stig (14) negativt, og at dersom man ikke forstår hva beviset beviser, har man heller ikke mulighet til å dra nytte av dette videre inn i andre sammenhenger. Begge studentene utrykker her et ønske om en tydeligere forståelse for hva som ligger i resonnementene som benyttes i bevisprosessen, og etterspør en tydeligere gjennomgang av hva som ligger i de ulike stegene i bevis (Stig (14) og Terje (6 og 8)). På den andre siden utrykker ikke Hans det samme ønsket om å bygge opp en forståelse for hvorfor matematikken som anvendes er riktig, gjennom bruk av bevis. Han forteller at han heller jobber ut fra eksempler, og synes ikke bevis tilfører så mye i oppgaveløsningen, som han selv ser på som det viktigste i matematikken (Hans 9 og 10).

I delkapittel 4.1.3 presenterte vi funnet «Studenter mener det viktig å kunne resonnere i matematikk». Vår opplevelse er at resonneringen som gjennomføres og presenteres i bevisføringen fra forelesning, oppleves som viktig å ta del i for studentene. Resonnering handler om å kunne redegjøre, og trekke slutninger, som er to viktige aspekter i bevisføring (Hanna, 2020). Evnen og ønsket til å kunne resonnere over bevisene som presenteres, fremstilles likevel ikke som tilfredsstilt av studentene. I likhet med det De Villiers (1990) presenterer, utrykker intervjuobjektene at bevisene de utsettes for, ofte tar en verifiserende rolle hvor det handler mer om at noe skal kontrolleres, enn at begrunnelsen for hvorfor påstander stemmer eller ikke, tydeliggjøres. Studentene opplyser i tillegg til dette (som diskutert i 5.1) at de har svært begrenset erfaring med å jobbe med bevis fra tidligere. Dette trekker i retningen at å jobbe på en imitativ måte gjerne vil være nærliggende, da de i liten grad har blitt utsatt for bevis, samt det faktum at studentene ikke opplever at undervisningen legger opp til at studentene skal forstå resonneringen underveis. Dette vil medføre at studentene i liten grad vil oppleve å resonnere på den måten Lithner (2008) omtaler som kreativ i arbeid med bevis. Den underliggende forståelsen for konseptene og metodene som anvendes vil i en slik undervisningssituasjon som studentene forklarer utebli, og en imitativ resonnering rundt matematikken vil heller være nærliggende.

Selv om studentene fra intervjuet i liten grad utrykker at de evner å forstå resonnementene i bevis, utrykkes det likevel et ønske om å kunne resonnere i matematikk fra resultatene i spørreundersøkelsen. Dette fremkommer blant annet gjennom påstand 5, 6 og 9. Her ønsker vi å trekke fram påstand 5 der det er 65.7% som er «litt enig» eller «enig» og 12.6% som er «litt uenig» eller «uenig» i at alle matematikkstudenter burde ha mulighetene til å lære seg å lese og skrive bevis. Dette mener vi tyder på at studenter jevnt over ønsker å engasjere seg i prosessen med bevis. Terje (7 og 8) utrykker et ønske om å vite hva som skjer under overflatene, og at han følgelig vil ha en gjennomgang av hva som skjer i de ulike stegene i bevisføringen for å kunne gjøre det selv. Dette vil gi en måte for studentene å vite hva slags tankegang og resonnering som ligger til grunn for hva foreleser gjør på tavla når han/hun gjennomfører bevis.

Vi ønsker også å legge til at det er en betydelig andel av respondentene som har vært uenig i påstandene våre, noe som har variert fra 11.9% til 23.4%. Det betyr at på visse spørsmål slik som påstand 9, «Dersom jeg ikke forstår et bevis som presenteres, oppsøker jeg andre forklaringer som gir mening (spør medstudenter foreleser, ser videoer etc.)» er nærmere en fjerdedel uenig i påstanden. Vi tolker det slik at en relativt betydelig gruppe følgelig ikke mener det er så viktig å forstå bevisene som presenteres at de selv oppsøker andre forklaringer for å få hjelp til å forstå dette. Samlet sett viser dette at påstandene gjenspeiler en variasjon i meningene til studentene, og vi har i hovedsak gjennom kapitlet presentert meningene til de respondentene som har vært *enig* i påstandene. Vi ønsker at dette avsnittet skal nyansere resultatene og at leseren skal reflektere over de ulike synspunktene i resultatene. Forskningen vi presenterer er ikke udiskutabel –og funnene våre er basert på *vår* tolkning av studentenes syn på viktigheten av resonnering fra intervju og svarfordelingen til aktuelle påstander.

Lithner (2008) har beskrevet et teoretisk rammeverk for analyse av resonnering i matematikk. Selv om vi ikke analyserer resonnementer i vår avhandling, ønsker vi å belyse hva slags resonnering studentene fra intervjuet fremstiller for oss gjennom intervjuet. Hans er en student vi har valgt å klassifisere som en oppgaveorientert student. Selv om Hans mener bevis ikke er nyttig for han, ønsker han å bruke eksempler for å forstå arbeidet han har foran seg. Dette kan tyde på en imitativ resonnering der han vil anvende tidligere lærte metoder, formler eller algoritmer for å løse problemer uten å nødvendigvis forstå de underliggende konseptene bak. På den andre siden ønsker Terje og Stig å søke etter forståelse i matematikk, da de ønsker å skjønne dette som er underliggende, samt forstå konseptene de presenteres med. Det er ikke slik at kreativ resonnering utelukker imitative tilnærminger, og imitativ resonnering utelukker heller ikke kreativitet i resonneringen –ofte vil man heller oppleve at det er en blanding av disse, dersom man skal resonnere slik som en matematiker gjør. Det å kunne bytte mellom disse er også det studenter sliter med (Lithner, 2008). Da Stig (5) ble introdusert for bevis klarte han å forstå det som ble bevist, men mener at dette er ikke noe han kunne fullført som eget arbeid. Det som kommer fram gjennom disse spørsmålene er at Stig sliter med å tro at han selv kunne ha gjort dette. Basert på dette, mener vi Stig siktet til det kreative resonnementet. Slik som De Villiers (1990) nevner er det de kommuniserende og utforskende funksjonene til bevis som kan gi studenter innsikt i hva som er et akseptabelt grunnlag for hvor godt et resonnement trenger å være.

Etter analysen og diskusjonen sitter vi igjen med noen tanker rundt forskningsspørsmålet «Hva beskriver studentenes syn på viktigheten av å resonnere i matematikk?». Vi ønsker å trekke frem at undersøkelsen antyder at studenter selv anser det som viktig å utvikle en bedre ferdighet innenfor resonnering. Videre ønsker vi også å trekke frem at resultatene kan antyde at studenter ønsker å engasjere seg i bevisprosessen, men opplever at måten bevis presenteres på i liten grad legger opp til dette. Dette kommer basert på svarene respondentene ga ut fra hvilken grad de mener bevisets rolle i matematikk er viktig, deres grad av ønskende resonneringsevne og at dersom de ikke forstår det foreleseren presenterer oppsøker de andre forklaringer.

6 Oppsummering

Vi har i denne oppgaven tatt for oss *«Studenters oppfatning av overgangen til fra videregående til universitetsmatematikk»*. Gjennom en kvantitativ spørreundersøkelse med 111 studenter og tre kvalitative intervju med studenter som tar innføringsemner i teoretisk og anvendt matematikk har vi sett på hvordan studenter opplever overgangen til universitetsmatematikk med fokus på matematiske bevis. Vi har gjort analyser som kan antyde at:

1. Studenter mener bevis er en viktig del av matematikk, samt at de ønsker å opparbeide seg en god relasjonell forståelse til bevis. Studentene utrykker videre gjennom spørreskjema og intervju at de ikke opplever at undervisningen legger opp til en slik forståelse.
2. Resultatene våre antyder også at studenter mener det er viktig å kunne resonnere og argumentere rundt egne valg i matematikk, og at de synes dette er viktigere etter at de har begynt sin *karriere* på universitetet.

Fra forskningsspørsmålet «Hva er studenters oppfatning av betydningen av bevis i matematikk, og hva slags matematisk forståelse ønsker studenter å oppnå?» har vi presentert funn og tolkninger som antyder at studenter mener bevis er en viktig del av matematikk, og at de ønsker å opparbeide seg en relasjonell forståelse rundt bevis. Det kommer frem fra intervjuene at Stig og Terje er opptatt av å forstå bevis, men føler ikke undervisningen legger opp til dette. Hans, på den andre siden, kan oppfattes som å være fornøyd med undervisningen, og utrykker også at han ikke er opptatt av å forstå bevisene, da han utrykker at det oppleves som unødvendig for hans utdanning.

Videre i forskningsspørsmålet «Hva beskriver studentenes syn på viktigheten av resonnering i matematikk?» har vi gjort funn og tolkninger fra spørreundersøkelsen som antyder at studenter mener det er viktig å resonnere i matematikk, og at de selv ønsker å utvikle sin resonneringsevne. I intervjuene kom det frem at Hans er opptatt av forståelse i matematikk, men mener nytten han opplever av bevis er beskjeden. Hans fokuserer heller på det å kunne løse oppgaver, og å unngå fallgruver. Stig og Terje på den andre siden er, likt som majoriteten i spørreundersøkelsen, er opptatt av at på universitetet skal man kunne forklare og argumentere for egne valg.

Vi ønsker avslutningsvis å dele et par tanker vi har gjort oss om denne oppgaven og studenters *overgang* til universitetsmatematikk. Det første vi ønsker å trekke frem er at studentene i vår studie viser at de mener det er viktig med bevis. Det å bevise er en av grunnpilarene i matematikk og vi mener alle studenter, gjennom gode didaktiske metoder, burde få muligheten til å kunne lære seg å argumentere og forklare i eget arbeid. Vi mener dette åpner for en mer fleksibel matematisk kompetanse, der studenter får muligheten til å se sammenhenger, styrke resonneringsevnen og opprette en egen logisk struktur og kobling mellom ulike grener innenfor matematikk. Videre ønsker vi også å påpeke at studentenes ambisjoner til bevis kan virke noe høy. Vi opplever at studentene har gjennomgått et slags *skifte* i fra å ikke tenke på det å bevise eller argumentere for valg på videregående, til at dette er en viktig del av matematikken når de begynte på universitetet.

6.1 Didaktiske implikasjoner

I dette delkapitlet ønsker vi kort forklare de didaktiske implikasjonene vi mener følger med denne oppgaven og dens gjennomføring. Vi sitter igjen med et inntrykk av at flesteparten av studenter som begynner på universitetet ønsker å ta del i det matematikkundervisningen har å tilby. Studentene har en forståelse for at bevis og resonnering er en viktig del av matematikk. Dette er noe som vi som fremtidige lærere vil ta med oss videre inn i vårt arbeidsliv.

Den nylig innførte fagfornyelsen (LK-20), tidligere diskutert i delkapittel 2.3.3 presenterte vi forskjellene mellom den gamle og nåværende læreplanen (henholdsvis LK-06 og LK-20) der det kom fram at kompetansemålene gjennom disse bruker ulike ord for å beskrive hva elevene skal lære seg. Ord slik som «gjennomføre», «bruke og tolke», «beregne», «omforme», «derivere» og «løse» ble brukt i LK-06 (Utdanningsdirektoratet, 2006). På den andre siden ble ord slik som «utforske», «utvikle», «anvende», «analysere» og «forstå» brukt i LK-20 (Kunnskapsdepartementet, 2019). Vi har gjennom vår oppgave belyst hvordan studentene har oppfattet denne overgangen, der vi hovedsakelig har fokusert på tiden etter påbegynt utdanning.

Majoriteten av studenter mener at det er viktig å forstå bevis, men slik som vi får det presentert, spesielt gjennom intervjuet, uttrykkes det at forståelsen som legges opp til foreleser, i liten grad gjør at den relasjonelle forståelsen i matematikk styrkes. Vi har redegjort for noen av fordelene og årsakene til at undervisning legger opp til instrumentell forståelse tidligere i kapittel 2.2.1, men ønsker å trekke frem at da studentene selv utrykker et ønske om en dypere matematisk forståelse, burde også undervisningen legge opp til, og gjenspeile dette.

Vi ønsker derfor på bakgrunn av det vi opplever studenten utrykker gjennom våre resultater, å foreslå en endring i undervisningspraksisen til universitetsmatematikken. Vi mener at fra våre resultater viser til at forelesere i større grad burde ta utgangspunkt i kunnskapsnivået til studentene i det de starter matematikkarieren sin på universitet. Dette vil føre til at studentene i mindre grad utsettes for bevis som oppleves som totalt uforståelig. De vil også kunne henge med på hvordan bevisene utledes, gjennom å forstå hvordan foreleser resonnere i utarbeidingen av matematiske bevis. Vi ønsker også å vise til at det i større grad burde tenkes igjennom hvorfor bevisene presenteres, og hvilken rolle bevisene har i undervisningen, og for studentene. På samme måte vil vi påpeke at matematikken på videregående i større grad burde legge vekt på argumentasjon, resonnering og bevis, slik at dette ikke er aspekter som plutselig vektlegges etter videregående, men heller er sentral gjennom hele matematikkutdanningen, også fra videregående. Dette vil kunne sørge for at universitetsmatematikken og videregåendematematikk strekker seg mot hverandre slik at overgangen virker mer naturlig.

6.2 Studiens begrensninger og videre forskning

Vi har gjennom vår oppgave belyst hvordan studentene har oppfattet overgangen fra videregående til universitet, der vi hovedsakelig har fokusert på tiden etter påbegynt universitetsutdanning. Vi sitter igjen med en oppfatning at dersom en ønsker å se på overgangen mellom videregående og universitet vil det kunne være fordelaktig å også følge elevene på videregåendestadiet. Dette vil sørge for en eliminering av feilkilder slik som hukommelsesaspektet diskutert tidligere, i tillegg til å måle hva de synes og tenker om temaet der og da.

Siden vi kun gjennomførte tre intervjuer, vil ikke disse kunne samle opp meningene til 111 svar på en spørreundersøkelse, men det kan tenkes at de vil kunne belyse ulike aspekter som andre studenter også mener. Derfor ser vi også på perspektiver som studentene kommer med som en mulig tankerekke om viktigheten av bevis og resonnering i matematikk. Vi ønsker likevel eksplisitt å utrykke at det de intervjuede ikke presenterer en representativ fasit, men heller et utvalg av mulige svar som kan forventes å forekomme. Da det er kvalitative intervju var hensikten aldri å benytte disse til å generalisere, men heller å få noen gode innblikk i enkeltstudenters erfaringer.

Videre vil det være interessant å se hvordan implementeringen av fagfornyelsen gjennom den nye læreplanen vil påvirke hvordan studenter opplever overgangen til universitetsmatematikken. Som nevnt tidligere fokuserer LK-20 i større grad på at elever skal kunne abstrahere, generalisere, utforske og resonnere. Da studentene i vår undersøkelse ikke gjennomførte matematikkundervisningen etter LK-20, vil det være interessant å se om innføringen av den nye læreplanen vil påvirke hvordan fremtidige studenter opplever overgangen til universitetsmatematikk.

7 Referanser

Avigad, J. (2006). Mathematical method and proof. *Synthese*, *153*, 105-159.

Cellucci, C. (2008). Why proof? What is a proof. *Deduction, computation, experiment. Exploring the effectiveness of proof*, 1-27.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8th. utg.). Routledge.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof on mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17-24.

Di Martino, P. & Zan, R. (2010). 'Me and maths': towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(1), 27-48. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9134-z

Di Martino, P. & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: a bridge between beliefs and emotions. *ZDM*, *43*(4), 471-482. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0309-6

Engelbrecht, J. (2010). Adding structure to the transition process to advanced mathematical activity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 143-154.

Furseth, I. & Everett, E. L. (2013). *Doing Your Masters Dissertation: From Start to Finish*. London: SAGE Publications, Limited.

Gleiss, M. S. & Sæther, E. (2021). *Forskningsmetode for lærerstudenter : å utvikle ny kunnskap i forskning og praksis* (1. utgave. utg.). Cappelen Damm akademisk.

Goldin, G. A. (2000). A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research. I (s. 517-546). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781410602725-28

Grabiner, J. V. (2012). Why Proof? A Historian's Perspective. I (s. 147-167) (New ICMI Study Series). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_6

Gueudet, G. & Thomas, M. O. (2020). Secondary-tertiary transition in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 762-766.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13.

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 42-49. http://www.jstor.org/stable/40248188

Hanna, G. (2020). Mathematical proof, argumentation, and reasoning. *Encyclopedia of mathematics education*, 561-566.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational studies in mathematics*, *24*(4), 389-399. https://doi.org/10.1007/BF01273372

Ivankova, N. V. (2014). Implementing quality criteria in designing and conducting a sequential QUAN→ QUAL mixed methods study of student engagement with learning applied research methods online. *Journal of Mixed Methods Research*, *8*(1), 25-51.

Johannessen, A., Christoffersen, L. & Tufte, P. A. (2016). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (5. utg. utg.). Abstrakt.

Kahle, R. (2015). What is a Proof? *Axiomathes : quaderni del Centro studi per la filosofia mitteleuropea*, *25*(1), 79-91. https://doi.org/10.1007/s10516-014-9252-9

Kunnskapsdepartementet. (2006). *Læreplan i matematikk(MAT1-02). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.*

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del- verdier og prinsipper for grunnopplæringen* https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/?kode=mat03-02&lang=nob

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i R (MAT03-02). Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.* https://www.udir.no/lk20/mat03-02/kompetansemaal-og-vurdering/kv294?curriculum-resources=true

Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T. M. & Rygge, J. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2. utg. utg.). Gyldendal akademisk.

Lithner, J. (2000a). Mathematical reasoning and familiar procedures. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(1), 83-95.

Lithner, J. (2000b). Mathematical reasoning in task solving. *Educational studies in mathematics*, 165-190.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational studies in mathematics*, *67*(3), 255-276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

McKim, C. A. (2017). The Value of Mixed Methods Research:A Mixed Methods Study. *Journal of Mixed Methods Research*, *11*(2), 202-222. https://doi.org/10.1177/1558689815607096

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational studies in mathematics*, *27*(3), 249-266.

NESH. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. https://uis.brage.unit.no/uis-xmlui/bitstream/handle/11250/3053460/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Reyes, L. H. (1984). Affective variables and mathematics education. *The elementary school journal*, *84*(5), 558-581.

Ringdal, K. (2018). *Enhet og mangfold : samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode* (4. utg. utg.). Fagbokforl.

Rønning, F. (2014, 26.-27. November). *Overgang fra videregående opplæring til universitet/høgskole - UHRs undersøkelse*. Paper publisert på Novemberkonferansen, Trondheim.

Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *The Journal of Mathematical Behavior*, *13*(1), 55-80.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of education*, *196*(2), 1-38.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*(1), 20-26.

Stylianou, D. A., Blanton, M. L. & Rotou, O. (2015). Undergraduate students' understanding of proof: Relationships between proof conceptions, beliefs, and classroom experiences with learning proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *1*(1), 91-134.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking* (Bd. 11). Springer Science & Business Media.

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse : en innføring i kvalitative metoder* (5. utg. utg.). Fagbokforl.

Tjora, A. H. & Tjora, A. H. (2021). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (4. utgave. utg.). Gyldendal.

UiT. (2023a). *Kalkulus 1*. Universitetet I Tromsø. https://sa.uit.no/utdanning/emner/emne?p_document_id=806525

UiT. (2023b). *Matematikk 1 for ingeniører*. Universitetet i Tromsø. https://uit.no/utdanning/emner/emne/671342/mat-1050

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk for realfag - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering (MAT3-01)*. Læreplansverket. https://www.udir.no/kl06/mat3-01

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i Matematikk R Kjerneelementer* (MAT03-02). https://www.udir.no/lk20/mat03-02/om-faget/kjerneelementer

Vaske, J. J. (2011). Advantages and disadvantages of internet surveys: Introduction to the special issue. *Human Dimensions of Wildlife*, *16*(3), 149-153.

Vedlegg

1 Vurdering NSD

OM VURDERINGEN

Personverntjenester har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket. Personverntjenester har nå vurdert den planlagte behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at behandlingen er lovlig, hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg.

VIKTIG INFORMASJON TIL DEG

Du må lagre, sende og sikre dataene i tråd med retningslinjene til din institusjon. Dette betyr at du må bruke leverandører for spørreskjema, skylagring, videosamtale o.l. som institusjonen din har avtale med. Vi gir generelle råd rundt dette, men det er institusjonens egne retningslinjer for informasjonssikkerhet som gjelder.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET

Prosjektet vil behandle alminnelige personopplysninger frem til 01.09.2023.

LOVLIG GRUNNLAG

Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 nr. 11 og art. 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse, som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen av alminnelige personopplysninger vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

LOVLIG GRUNNLAG TREDJEPERSONER

Under datainnsamlingen kan deltaker komme inn på foreleseres/læreres metodiske tilnærming til bevis i undervisningen. Dette vil da være tredjepersonopplysninger. Prosjektet har ikke tredjepersoner som hovedmål for studien. Det samles få opplysninger som er indirekte identifiserende i et kort tidsrom, og det anonymiseres fortløpende. Det er bare forskerne i prosjektgruppen som får tilgang til dataene, og informasjonssikkerheten er god. Det er vår vurdering at samfunnets interesse i at behandlingen finner sted klart overstiger ulempene for den enkelte, at forskningen kan komme formålet til gode. Vår vurdering er at behandlingen oppfyller vilkåret om vitenskapelig forskning, jf. personopplysningsloven § 8, og dermed utfører en oppgave i allmenhetens interesse. Lovlig grunnlag for behandlingen av alminnelige personopplysninger er dermed at den er nødvendig for å utføre en oppgave i allmennhetens interesse, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav e, samt for formål knyttet til vitenskapelig forskning, jf. personopplysningsloven § 8, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 3 bokstav b. Behandlingen er omfattet av nødvendige garantier for å sikre den registrertes rettigheter og friheter, jf. personvernforordningen art. 89 nr. 1.

PERSONVERNPRINSIPPER

Vi vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om: - lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen, og ved at behandlingen er omfattet av nødvendige garantier - formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål - dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet - lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER

Så lenge de registrerte i utvalg 1-4 kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20). Vi vurderer at informasjonen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13. Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

DE REGISTRERTES RETTIGHETER - TREDJEPERSON

Tredjepersoner har så lenge de kan identifiseres i datamaterialet følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20), og protest (art 21). Behandlingen har kort varighet, ingen sensitive opplysninger, og personopplysninger vil være indirekte identifiserende. Ved å gi informasjon vil det bli innhentet flere personopplysninger enn nødvendig for formålet. På dette grunnlaget finner vi at det kan gjøres unntak fra den individuelle informasjonsplikten til tredjepersonene fordi det vil innebære uforholdsmessig stor innsats å informere de registrerte, sett opp mot nytten av å informere, jf. personvernforordningen art. 14 nr. 5 b) Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER

Vi legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32). For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må prosjektansvarlig følge interne retningslinjer/rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema Du må vente på svar fra oss før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET

Vi vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson: Sturla Herfindal

Lykke til med prosjektet!

2 Samtykkeerklæring spørreskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Overgangen til bevisføring i universitetsmatematikk»

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se på overgangen i det matematiske språket fra videregåendematematikk til universitetsmatematikk. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Formålet med dette prosjektet er å se på hvordan studenter opplever bruken av bevis i introduksjonsemner i matematikk. Dette kan være abstraheringen og generaliseringen i bevisføring, samt forståelse av hva bevisene medfører, hvordan de utarbeides, tolkes og forståes, i tillegg til bevisets plass i matematikken. Bevis er et viktig verktøy for matematikere, og vi ønsker å se hvordan studenter tilnærmer seg kunnskap og holdninger rundt bevis i starten av sin matematikkarriere ved universitet. Det er tiltenkt at studien skal gjennomføres ved flere universitet i Norge og gjelder for studenter som tar sitt første emne i matematikk på universitetsnivå.

Undersøkelsen du kan velge å delta i er en masterstudie skrevet av to studenter som studerer Lektor i realfag 8-13.

Forskningsprosjektet er en masteroppgave ved UiT Norges arktiske universitet med den tentative problemstillingen: «Hvordan opplever studenter ved innføringsfag på universitet overgangen til matematiske bevis»

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Institutt for matematikk og statistikk ved UiT Norges arktiske universitet er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du får spørsmål om å delta da du er student ved et førsteårsemne i matematikk ved et universitet.

Hva innebærer det for deg å delta?

Dersom du samtykker til å delta i studien, innebærer det at du fyller ut et spørreskjema. Det vil ta deg ca. 15 minutter. Det vil hovedsakelig være spørsmål om din opplevelse fra matematikken på universitet som kan være relevant for prosjektet vi ønsker å gjennomføre. Du vil da få spørsmål om tiden før påbegynt utdannelse, nåværende utdannelse samt spørsmål vedrørende bevis i matematikken. I tillegg vil vi i spørreskjemaet be deg om å oppgi en del bakgrunnsopplysninger som navn, alder, epost, høyeste gjennomførte matematikkundervisning og karakter i matematikk fra videregående.

Svarene dine fra spørreskjemaet blir registrert elektronisk.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velg er å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- De som vil ha tilgang til denne informasjonen vil være Kristian Mange Johansen, Thomas
Langstrand, Ida Friestad Pedersen og Ole Kristian Fossum

- Dataopplysningene dine vil være lagret i et lukket området i Office365 som er beskyttet av tofaktor-autentisering. Spørreskjemaet som benyttes vil være Nettskjema, lagd av UiO som er en sikker løsnings for datainnsamling via nett driftet av UiO.

Dersom vi oppfatter det slik at noen kan gjenkjenne ditt svar i publikasjonen vil vi slå sammen kategorier slik at dette ikke skjer. Du vil med dette ikke kunne kjennes igjen i publikasjonen.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?

Prosjektet vil etter planen avsluttes 01.09.2023. Etter prosjektslutt vil datamaterialet med dine personopplysninger anonymiseres.

Hva gir os rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Institutt for matematikk og statistikk ved Universitet i Tromsø har Personverntjenester vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Institutt for matematikk og statistikk ved Universitet i Tromsø ved:
  - o Veileder: Ida Friestad Pedersen, tlf 77660378 eller e-post ida.pedersen@uit.no
  - o Bi-veileder: Ole Kristian Fossum, tlf 77660350 eller e-post ole.kristian.fossum@uit.no
  - o Masterstudent: Kristian Magne Johansen, tlf 92846463 eller e-post kjo188@uit.no
  - o Masterstudent: Thomas Langstrand, tlf 91914248 eller e-post tla095@uit.no
- Vårt personvernombud: Joakim Bakkevold, tlf 77646322 eller e-post personvernombud@uit.no

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Ida Friestad Pedersen (Forsker/veileder) Eventuelt student

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Overgangen til bevisføring i universitetsmatematikk», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ å delta i spørreskjemaet

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

3 Samtykkeerklæring intervju

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Overgangen til bevisføring i universitetsmatematikk»

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å redegjøre for studenters holdninger rundt bevis ved introduksjonsemner i matematikk ved universitetet. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Formålet med dette prosjektet er å se på hvordan studenter opplever bruken av bevis i introduksjonsemner i matematikk. Dette kan være abstraheringen og generaliseringen i bevisføring, samt forståelse av hva bevisene medfører, hvordan de utarbeides, tolkes og forståes, i tillegg til bevisets plass i matematikken. Bevis er et viktig verktøy for matematikere, og vi ønsker å se hvordan studenter tilnærmer seg kunnskap og holdninger rundt bevis i starten av sin matematikkarriere ved universitet. Det er tiltenkt at studien skal gjennomføres ved flere universitet i Norge og gjelder for studenter som tar sitt første emne i matematikk på universitetsnivå.

Undersøkelsen du kan velge å delta i er en masterstudie skrevet av to studenter som studerer Lektor i realfag 8-13.

Forskningsprosjektet er en masteroppgave ved UiT Norges arktiske universitet med den tentative problemstillingen: «Hvordan opplever studenter ved innføringsfag på universitet overgangen til matematiske bevis»

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Institutt for matematikk og statistikk ved UiT Norges arktiske universitet er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du har deltatt på spørreundersøkelsen til prosjektet, og får da også muligheten til å være med på et intervju. Dersom mange samtykker til å bli kontaktet til å gjennomføre intervju i etterkant av spørreskjemaet vil det bli trukket tilfeldige deltakere for å få dekket behovet for datainnsamlingen.

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du fyller ut et skjema med kontaktinformasjon slik at vi kan ta kontakt for å gjennomføre et intervju. Ved intervjuet vil du bli bedt om å oppgi noen opplysninger om deg, samt dine opplevelser med matematiske bevis og med overgangen til universitetsmatematikk. Det vil bli tatt lydopptak av intervjuet, og opplysninger som direkte indentifiserer deg som person vil bli fjernet.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- De som vil ha tilgang til denne informasjonen vil være Kristian Mange Johansen, Thomas
Langstrand, Ida Friestad Pedersen og Ole Kristian Fossum

- Navn vil fjernes ved transkribering, og lydfil vil oppbevares i et lukket området i Office365 som er beskyttet av tofaktor-autentisering.

Det vil ikke være mulig for utenforstående å kjenne igjen enkeltdeltakere i publikasjoner fra prosjektet.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?
Prosjektet vil etter planen avsluttes 01.09.2023. Etter prosjektslutt vil datamaterialet med dine personopplysninger anonymiseres.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke

På oppdrag fra Institutt for matematikk og statistikk ved Universitet i Tromsø har Personverntjenester vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Institutt for matematikk og statistikk ved Universitet i Tromsø ved:
  - o Veileder: Ida Friestad Pedersen, tlf 77660378 eller e-post ida.pedersen@uit.no
  - o Bi-veileder: Ole Kristian Fossum, tlf 77660350 eller e-post ole.kristian.fossum@uit.no
  - o Masterstudent: Kristian Magne Johansen, tlf 92846463 eller e-post kjo188@uit.no
  - o Masterstudent: Thomas Langstrand, tlf 91914248 eller e-post tla095@uit.no
- Vårt personvernombud: Joakim Bakkevold, tlf 77646322 eller e-post personvernombud@uit.no

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Ida Friestad Pedersen (Forsker/veileder) Eventuelt student

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Overgangen til bevisføring i universitetsmatematikk», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

☐ å delta i intervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

- (Signert av prosjektdeltaker, dato)

4 Spørreskjema

Skjema spørreundersøkelse master

Kjønn

Kvinne

Mann

Annen kjønnsidentitet

Ønsker ikke å oppgi

Hvor gammel er du?

Hvilken type matematikk hadde du på videregående?

Matematikk R (1T, R1, R2)

Matematikk P (1P,2P)

Matematikk P, Y-vei (1P-Y, 2P-Y)

Matematikk S (S1,S2, 1P/1T)

Annet/Blanding av disse

Har du gjennomført forkurs for ingeniør, gått Y-vei eller andre realfagsforberedende studier?

Ja

Nei

Hvilket forberedende studie gjennomførte du?

Dette elementet vises kun dersom alternativet «Ja» er valgt i spørsmålet «Har du gjennomført forkurs for ingeniør, gått Y-vei eller andre realfagsforberedende studier?»

Har du gjennomført eller påbegynt andre studier?

Ja

Nei

Hvilket studie?

Dette elementet vises kun dersom alternativet «Ja» er valgt i spørsmålet «Har du gjennomført eller påbegynt andre studier?»

Hvor studerer du?

UiT-Tromsø

UiT-Alta

UiT-Narvik

UiO

NTNU

Oslomet

Hvilket studieprogramm går du på nå?

Hvilket matematikkemne tar du dette semesteret?

Hvor langt er du kommet i studiet ditt?

Antall semester påbegynt. Dersom du er i ditt første semester så er dette lik 1.

Har du gjennomført andre matematikkemner tidligere?

Ja

Nei

Hvilke emner?

Dette elementet vises kun dersom alternativet «Ja» er valgt i spørsmålet «Har du gjennomført andre matematikkemner tidligere?»

Hvilken standpunktskarakter fikk du i det siste matematikkfaget du hadde på videregående?

Ønsker ikke å oppgi

1

2

3

4

5

6

Om tiden før påbegynt utdanning

Hvor enig er du i disse påstandene om tiden før du begynte på universitetet?

Lærer på videregående gjennomførte bevis i klassen

Sjelden/Aldri

1-2 gang per halvår

1-2 ganger i måneden

Ukentlig

På videregående jobbet jeg med bevis selvstendig eller i mindre grupper

Sjelden/Aldri

1-2 gang per halvår

1-2 ganger i måneden

Ukentlig

På videregående diskuterte vi ulike måter å bevise matematiske påstander

Sjelden/Aldri

1-2 gang per halvår

1-2 ganger i måneden

Ukentlig

Hvor enig er du i disse påstandene om tiden før du begynte på universitetet?

Jeg følte det ikke var behov for å forberede meg til undervisning på videregående

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Læreren på videregående gjorde det enkelt å følge med i undervisningen

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Jeg følte det var unødvendig å forstå bevisene som læreren presenterte på videregående

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Jeg følte jeg forstod hva et bevis innebærte på videregående

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Jeg forventet at emnene på universitetet skulle bli krevenende

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Holdninger til bevis i matematikk

Ta utgangspunkt i matematikkemnet denne undersøkelsen gjennomføres i/matematikkemnene du tar

dette semesteret

Viktigheten av bevis

Jeg anser det som nyttig å forstå bevisene som foreleseren presenterer

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Jeg anser bevis som en viktig del av matematikk

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Bevis er nødvendig i alle områder av matematikk

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Jeg anser det som viktig å argumentere og forklare valg jeg har tatt i eget arbeid med oppgaver

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

For å bli god i matematikk krever det at man mestrer bevis

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Arbeid med bevis på universitetet

Jeg opplever at det er forventet at jeg forstår bevis som presenteres

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Jeg synes der er vanskelig å forstå måten foreleseren gjennomfører bevis på

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Jeg tror jeg kan forstå og gjennomføre bevis dersom jeg gjør en innsats

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Jeg opplever at jeg kan komme med innspill når det gjennomføres bevis

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Jeg opplever at det er et for stort fokus på bevis i undervisningen

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Argumentasjon av bevis

Bevis er argumenter basert på logikk som alle kan lære å forstå

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Bevis kan brukes for å formidle og forklare nye ideer innenfor matematikk

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Tilnærming til bevis

Jeg går ut ifra at det foreleseren presenterer er korrekt

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Dersom et matematisk utsagn krever et bevis, anser jeg det som foreleserens ansvar å presentere dette til studenter

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Jeg forventer at relevante matematiske påstander/bevis blir presentert til klassen

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Det irriterer meg når forelesere sier jeg bare må godta at noe er sant uten å forklare hvorfor det er sant

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Engasjement rundt bevis

Engasjement i forståelse av bevis

Jeg liker utfordringen når jeg skal gjøre bevis

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Jeg føler på mestring når jeg forstår resonnering og argumentasjon i matematiske bevis

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Når jeg lærer matematikk, er det viktigere å forstå innholdet fremfor å memorere formler

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Alle matematikkstudenter burde ha muligheten til å lære seg å lese og å skrive bevis

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Dersom jeg ikke forstår et bevis som presenteres, oppsøker jeg andre forklaringer som gir mening (spør medstudenter foreleser, ser videoer etc.)

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Arbeidsmetoder med bevis på universitetet

Jeg har jobbet individuelt med å utarbeide bevis

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Jeg har deltatt i gruppearbeid hvor det ble arbeidet med utarbeiding av bevis

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Når foreleseren gjennomfører bevis fokuserer jeg på å ta notater heller enn å delta eller diskutere med medstudenter

Uenig

Litt uenig

Verken eller

Litt enig

Enig

Aspekter med bevis i matematikk

Hva opplever du som vanskelig/krevende i arbeid med bevis?

Fritt tekstsvar

Velg ut de påstandene du er enig i

Foreleseren har gjennom semesteret bevist de relevante teoremer og matematiske påstander til klassen

Foreleseren har brukt visuelle hjelpemidler (bilder, figurer, grafer o.l.) for å bevise matematiske påstander

Foreleseren forklarer bevisene de presenterer i detalj

Foreleseren inkluderer studenter i klassen når det gjennomføres bevis

Foreleseren har gjennomført flere bevis for samme påstand/teorem

Jeg opplever at bevis i forelesninger presenteres uten innvending fra studenter

Jeg synes eksamener, prøver og obligatoriske innlevering bør inkludere bevis

Jeg tror arbeid med et bevis sammen med andre studenter i grupper kan være fordelaktig for å utarbeide en forståelse

Kunne du tenke deg å bli kontaktet for å gjennomføre et kort intervju for å belyse dine holdninger rundt bevis?

Ja

Nei

Generert 2023-04-15 13:59:06.

5 Intervjuguide

Intervjuguide

Lese gjennom, har du sett tidligere, hvordan forstår du, hva er vanskelig, hvor langt henger du med.

Innledning

- Takke for at studenten deltar

- **Formålet med studien:**
  Formålet med dette prosjektet er å se på hvordan studenter opplever bruken av bevis i introduksjonsemner i matematikk. Dette kan være abstraheringen og generaliseringen i bevisføring, samt forståelse av hva bevisene medfører, hvordan de utarbeides, tolkes og forståes, i tillegg til bevisets plass i matematikken. Bevis er et viktig verktøy for matematikere, og vi ønsker å se hvordan studenter tilnærmer seg kunnskap og holdninger rundt bevis i starten av sin matematikkarriere ved universitet. Det er tiltenkt at studien skal gjennomføres ved flere universitet i Norge og gjelder for studenter som tar sine første emner i matematikk på universitetsnivå.

  Undersøkelsen du kan velge å delta i er en masterstudie skrevet av to studenter som studerer Lektor i realfag 8-13.

Databehandling:

  - Vi blir å gjennomføre opptak med telefon via Nettskjema-applikasjon til UiO. Taleopptaket vil lagres på Nettskjema.no frem til transkripsjon er gjennomført. Lydfilen vil ligge i en tofaktor-autentisert mappe i Office365.

- Innhold:
  - Intervjuet består av noen omformulerte spørsmål fra spørreskjemaet du har deltatt i, samt noen forskjellige ferdige bevis vi ønsker du skal reflektere rundt.

Dersom du ikke ønsker å svare på et spørsmål kan du si fra om dette til oss. Videre kan det hende at du ikke forstår hva vi stiller spørsmål rundt og du kan spørre oss om det som virker uklart. Vi vil gjennomgå en oppsummering av dine svar, dersom du mener noe ikke burde bli tatt med videre kan du si det under intervjuet eller i etterkant. Vi ønsker gjerne å prøve å ha en naturlig samtale gjennom intervjuet der vi er innom punktene nedenfor.

- Tidsbruk:
    - Den planlagte tidsbruken for intervjuet er ca. 30 minutter.

Bakgrunn i matematikk

- Husker du hva du tenkte om matematikk fra videregående?
    - Hadde dere bevis? Kanskje induksjon?
    - Har denne overgangen vært positiv eller negativ
- Opplever du at måten matematikk jobbes med, eller presenteres på har endret seg? I så fall hvordan?

- Hvilken rolle føler du matematikk har for deg i forbindelse med studie?
    - Eksempel:
        - Et nødvendig onde man må gjennom
        - Et verktøy til videre jobb eller studier
        - Et verktøy som gir meg en dypere forståelse av
        - Å se mønstre og få en dypere forståelse av matematikk
        - Å løse matematiske problemer er gøy
        - Det er gøy fordi jeg mestrer det
        - Osv.

- Hvordan føler du møte med matematikken på universitetet var?
    - Vanskelig, andre krav
    - mindre oppfølging
    - mye å gjøre på lite tid
    - ikke nok tid til å virkelig forstå tema

Dybdespørsmål av artefakter

- Hva er det første du tenker når du ser bevis 1?
    - Stopper det opp noen plasser når du leser det?
        - Hvor i beviset stopper det opp?
        - Hva skyldes stoppen? Eksempel:
            - Vanskelig å holde følge på hva som egentlig foregår
            - Mye tegn og lite tekst
            - Konsepter jeg ikke husker
            - Det er ikke konsistent med slik jeg husker det eller tror foreleseren ville gjort det
            - Det er mye som blir tatt for gitt at man kan

- Hvordan opplever du at foreleser presenterer bevis på universitet?
    - Hva tenker du om foreleseren på universitetet har introdusert beviset vi gjorde på samme måte? Hva er forskjellen på hvordan det gjøres i forelesninger?
    - Dersom det er en forskjell, hva vil du si er den største overgangen for deg?

- Hvordan opplever du måten bevis presenteres på har endret seg etter at du begynte med universitetsmatematikk?

- Føler du en gjennomgang av bevis av foreleser gir deg et nyttig verktøy videre?

- Klarer du å gi et eksempel på når et bevis er akseptabelt for deg?

- Dersom du får et bevis presentert og du ikke forstår dette:
  - Prøver du å forstå det etter forelesning?
  - Du går ut fra det foreleseren presenterer er sant, hva føler du er hensikten med å se på beviset til foreleseren når du uansett tror på at det er sant

Fra spørreskjema

- Hvorfor føler du det er viktig å forstå matematikk som utføres?

- Hvordan hadde du foretrukket av bevis ble introdusert/presentert?

- Hvorfor/hvorfor ikke anser du det som nyttig/viktig å lære om bevis?

Avslutning

- Hva vil du si er de tre viktigste tingene vi har snakket om?

- Er det noe du vil legge til?
  - Hva?

- Takk for at du stilte opp!

6 Bevisartefakter

6.1 Hvorfor kvadratroten av 2 er irrasjonell

Vi ønsker nå å bevise at $\sqrt{2}$ er et irrasjonelt tall. Dette vil vi gjøre ved hjelp av et motbevis. Vi antar derfor at $\sqrt{2}$ er et rasjonelt tall som og vil derfor kunne skrives som en ratio med av to andre heltall (en brøk):

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Tallene a og b har ikke en felles faktor og er skrevet i sin simpleste form. Vi fortsetter:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2}\right)^2 &= \frac{a^2}{b^2} \\ 2 &= \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Fra dette kan vi se at a^2 er delelig med 2 og det følger da at tallet a^2 er et partall. Dersom a^2 er et partall følger det også at a må være et partall. Vi velger derfor å skrive $a = 2c$, der c er et annet heltall. Vi fortsetter der vi slapp:

$$\begin{aligned} 2b^2 &= a^2 \\ 2b^2 &= (2c)^2 \\ 2b^2 &= 4c^2 \\ b^2 &= 2c^2 \end{aligned}$$

Vi har nå oppdaget at b^2 også er et heltall delelig på 2. Det følger også her at b^2 må være et partall. Dette betyr at de har en felles faktor 2, til tross for at vi har sagt at a og b er i sin simpleste form, uten felles faktorer. Siden en slig motsigelse har blitt etablert er vi nødt til å kaste det originale utsagnet da det viser seg at det er falskt. På bakgrunn av dette kan vi si at $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

6.2 Bolzanos Teorem

Teorem La f være kontinuerlig i c og anta at $f(c) \neq 0$. Da eksisterer det et åpen intervall $\langle c-\delta, c+\delta\rangle$ om c slik at for alle x i dette intervallet så har $f(x)$ og $f(c)$ samme fortegn.

Bevis Anta at $f(c) > 0$. Vi vet at f er kontinuerlig i c, hvilket betyr at for enhver $\epsilon > 0$ så eksisterer det en $\delta > 0$ slik at:

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$$

Velger $\epsilon = \frac{f(c)}{2} > 0$, vi vet nå at det eksiterer en $\delta > 0$ slik at for alle x i intervallet $\langle c-\delta, c+\delta$ så er:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &< \frac{f(c)}{2} \\ -\frac{f(c)}{2} + f(c) < f(x) &< \frac{f(c)}{2} + f(c) \\ \frac{f(c)}{2} < f(x) &< \frac{3f(c)}{2} \end{aligned}$$

Dersom $f(c) < 0$ så velger vi $\epsilon = -\frac{f(c)}{2}$