UiT Norges arktiske universitet

Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

Instruerende og utforskende undervisning

En mikroetnografisk kasusstudie av hva som kjennetegner matematikkundervisningen til tre anerkjente lærere på 7.-10. trinn i New Zealand

Christer Tungland Bergo og Sivert Vatnehol Fjørtoft

Masteroppgave i matematikkdidaktikk, LER-3903, mai 2023

Abstract

In this master's thesis, we have researched what characterizes the teaching of three acknowledged mathematics teachers in 7th-10th grade in New Zealand. The purpose was to uncover, describe and learn from their way of teaching. Utilizing a qualitative approach, data was collected through observation and interviews. Thematic analysis was used to identify and discuss the teachers' characteristics. The research question is answered in two levels: First, the teachers were analysed individually in light of relevant research and theory. Secondly, TRU was used as a framework to discuss similarities and differences between the teachers. To strengthen the relevance of the study, their teaching was also discussed in a Norwegian context.

The *first* teacher is characterized by his use of explicit teaching, where he utilizes variation theory as a tool for selecting tasks. He uses a variety of methods for formative assessment and exploits the benefits of the digital learning platform Desmos to make the assessment more efficient. The teacher is also characterized by the variety of ways he addresses critical learning points, where he aids his students' focus on the 'how and why' of mathematics.

The *second* teacher is characterized by planning and conducting lessons in alignment with the DMIC-approach, which facilitates problem-solving and mathematical discussions. The teacher starts off the lesson by breaking down the problem with a carefully selected context. While the students work, the teacher monitors the students to ensure that they are all participating in the problem solving and to plan the structure of the upcoming whole-class discussion. In this closing discussion, the teacher establishes and develops norms for participation in discussion and shows connections between the students' solutions and connects them to mathematical ideas.

The *third* teacher is characterized by her focus on reversing negative mathematical identities and strengthening her students' disciplinary self-confidence. She monitors the students, poses open and curious questions while they work on tasks, and uses "acting" in her formative assessment. Her questions make the students responsible for doing the thinking, and at the same time make them believe they can teach her something. She also maps their current understanding during whole-class discussions and adapts her teaching to create learning opportunities and develop social and socio-mathematical norms.

Despite the differences in their teaching approaches, the five dimensions of TRU are prominent features in all the three teachers' classrooms. For instance, all teachers address critical learning points in plenary and create learning opportunities from incorrect answers, although the way they do this varies. The teachers' approaches to teaching are relevant to several fundamental goals in the new Norwegian curriculum (LK-20). The study indicates that both instructing and inquiry-based approaches to teaching are beneficial in a Norwegian context and that the approaches can be beneficial for each other.

Sammendrag

I dette masterprosjektet har vi undersøkt og analysert hva som kjennetegner matematikkundervisningen til tre anerkjente lærere på 7.-10. trinn i New Zealand. Formålet var å avdekke, beskrive og lære av grepene lærerne gjør. Med en kvalitativ tilnærming brukte vi observasjon og intervju for å undersøke hva som kjennetegner lærerne. Deretter utførte vi en tematisk analyse for å identifisere og drøfte lærernes kjennetegn. Problemstillingen besvares på to nivåer: Først hver for seg i sammenheng med relevant forskning og teori, for så å ta for seg likheter og forskjeller mellom lærerne med TRU som et rammeverk. For å styrke studiens overførbarhet, drøftes lærernes undervisningspraksis i norsk kontekst.

Den *første* læreren kjennetegnes ved å anvende eksplisitt undervisning, der variasjonsteori nyttes som et verktøy for valg av oppgaver. Han bruker varierte metoder for å drive formativ vurdering og drar fordel av den digitale læringsarenaen Desmos for å effektivisere den. Læreren kjennetegnes også ved å bruke flere grep rundt viktige læringspunkter, der han orienterer elevenes fokus mot hvordan matematikk kan anvendes og hvorfor det er slik.

Den *andre* læreren kjennetegnes ved at han planlegger og gjennomfører undervisningen i tråd med DMIC-modellen, der problemløsing og matematikksamtaler er sentralt. Læreren bearbeider en nøye utvalgt kontekst til problemet sammen med elevene i oppstarten. Mens elevene arbeider, inntar læreren en overvåkende rolle for å aktivere elever og planlegge strukturen i kommende plenumssamtale. I den avsluttende plenumssamtalen etablerer og utvikler læreren normer for deltakelse i diskusjon og viser sammenhenger mellom elevenes løsninger og kobler dem til matematiske ideer.

Den *tredje* læreren kjennetegnes av sitt fokus på å snu negative elevidentiteter og bygge selvtillit. Hun inntar en overvåkende og undrende tilnærming til elevene når de jobber med oppgaver, og bruker «skuespill» i sin formative vurdering. Hun stiller elevene spørsmål som ansvarliggjør dem til å gjøre tenkningen, samtidig som de da kan lære henne noe. Hun sjekker også elevenes forståelse i plenumssamtaler og tilpasser undervisningen for å skape læringsmuligheter og utvikle sosiale og sosiomatematiske normer.

De fem dimensjonene i TRU er fremtredende trekk i alle de tre lærernes klasserom, selv om deres undervisningstilnærminger er svært forskjellige. Blant annet er det en likhet at lærerne adresserer viktige læringspunkter i plenum og bruker feilsvar som læringsmuligheter, men hvordan dette gjøres er forskjellig. Lærernes undervisningspraksis er relevant for flere sentrale mål i det nye læreplanverket LK-20. Studien indikerer at både instruerende og utforskende tilnærminger til undervisning er gunstige i norsk kontekst og at tilnærmingene kan komplementere hverandre.

Forord

Etter fem innholdsrike år med gode medstudenter er det på tide å takke for seg her i Nordens Paris. Masteroppgaven vår markerer slutten på studentkapittelet, og tiden er inne for å starte lærerkapittelet.

Med det ønsker vi først og fremst å takke lærerne vi har hatt i løpet av studiet, særlig praksislærerne. Ikke bare står dere i læreryrket, men dere har også overskudd til å ta imot oss studenter, gi oss den uvurderlige praksiserfaringen og minne oss om hvorfor vi valgte lærerstudiet. Dere er inspirerende.

Dere inspirerte oss faktisk så mye at vi ønsket å undersøke læreres undervisningspraksis som en del av vår masteroppgave – denne gangen i en annen kultur. Vi er svært takknemlig for Ove Gunnar Drageset og TEDNET-prosjektet som gjorde det mulig for oss å reise til New Zealand for å samle inn data. Prosjektet hadde ikke vært gjennomførbart uten deg og ditt nettverk. I New Zealand ble vi tatt imot av Fiona Ell; vår samarbeidspartner ved Universitetet i Auckland. Tusen takk for at du tok imot oss med åpne armer og gjorde oppholdet vårt latterfullt og smidig. Vi hadde bokstavelig talt ikke kommet langt uten deg i dette venstrekjørende landet. Du er fantastisk. Informantene du ordnet skal også ha en stor takk. Foruten dere hadde det ikke vært noe prosjekt å snakke om.

Sist, men ikke minst – tusen takk til vår trofaste veileder Jan Nyquist Roksvold. Du har gitt oss gode råd og vært utrolig viktig for å gjøre vårt prosjekt til en masteroppgave.

Tromsø, Mai 2023 Christer og Sivert

Innholdsfortegnelse

Figurliste

1 Innledning

I sitt hovedbudskap skriver Hattie (2009, s. 22); «what teachers *do* matters». Selv beskriver han sitatet som klisjéaktig og misledende, fordi omtrent alt lærere gjør har en positiv effekt på elevers læring. Lista må ligge høyere enn bare det å ha en lærer til stede. Kvaliteten på undervisningen utgjør den store forskjellen for læringsutbyttet, og det er derfor lærere bør reflektere rundt sin undervisningspraksis og gjøre valg basert på hva som kan ha størst innvirkning på sine elevers læring (Hattie, 2012, s. 149-150).

Når vi som lærerstudenter reflekterer over egen undervisningspraksis, går det ofte igjen at det er utfordrende å sette teori ut i praksis. Læreryrket er en sammensatt pedagogisk praksis. Læreren må ikke bare kunne sitt fag; læreren må kunne forstå elevers faglige læring og velge gunstige måter å representere faget, slik at det er forståelig for elevene (Ball et al., 2008; Shulman, 1986). Fagdidaktisk kompetanse har en sentral rolle i skolen, der «lærere må tenke nøye over hva, hvordan og hvorfor elevene lærer, og hvordan de best mulig kan lede og støtte elevenes læring, utvikling og danning» (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 20).

Matematikkundervisning og elevers læring i faget er komplekst, og jo mer vi lærer om det, desto mer komplekst virker det. Likevel er det flere matematikklærere som mestrer sitt fag og har stor innvirkning på elevenes læring. Vi har selv hatt privilegiet av å observere og bli undervist av slike lærere, som alle får det til å se naturlig og lett ut å koble teori om matematikkundervisning inn i sin undervisningspraksis. Det er disse lærerne som har inspirert oss til å velge læreryrket, og ikke minst medvirket til vårt ønske om å bli flinke lærere. Det har også motivert oss til å avslutte lærerstudiet med å undersøke hva lærere som lykkes faktisk gjør, noe denne masteroppgaven skal omhandle. Gjennom å studere de som lykkes – slik Bjerkeli (2017) gjorde i sin kvalitative masterstudie av en flink lærers grep i matematikkundervisningen – åpner en for muligheten til å dra nytte av deres kunnskap og erfaringer.

Det er ikke gitt at en slik studie må foregå innenlands. I en velkjent analyse av TIMMS sine videoer av undervisningspraksiser i USA, Tyskland og Japan, undersøker og sammenligner Stigler og Hiebert (1999) undervisningspraksiser i matematikk på tvers av landegrenser. De beskriver studien som en unik mulighet til å undersøke likheter og forskjeller mellom lærere og kulturer. Stigler og Hiebert (1999, s. 9-13) viser til en svært lik undervisningstilnærming innenfor hver kultur, mens på tvers av kulturene var det store variasjoner – landene har en egen undervisningskultur. Videre hevder de at det er mye å lære av andre undervisningskulturer, der ny innsikt kan forbedre undervisning og bidra til å tette det de kaller et kryss-kulturelt gap i undervisningstilnærminger.

I ettertid er det utført flere kryss-kulturelle forskningsstudier, og «The Learner's Perspective Study» (Clarke et al., 2006) er blant de mest omfattende. De undersøkte en lærers matematikkundervisning i 8.klasse i 12 forskjellige land, for så å sammenligne dem. Clarke et al. (2006, s. 6) påpeker at en betydelig forskjell mellom tidligere nevnte studie og deres, er at de samlet inn detaljert data om undervisningspraksisen til individuelle 'well-taught' klasserom over ti økter (økter undervist av lærere ansett som kompetente av det lokale utdanningssamfunnet), mens Stigler og Hiebert sammenlignet 231 enkeltøkter av et representativt utvalg. Ved å undersøke kompetente lærere, kan en finne deler av deres undervisningspraksis som er verdt å spre, slik at andre kan dra nytte av deres suksess (Clarke et al., 2006, s. 9).

Lærerutdanningen på Universitetet i Tromsø (UiT) ble i stor grad utviklet gjennom å se til lærerutdanninger i andre land og deres erfaringer (særlig Finland), og for å utvikle seg videre er det behov for å samarbeide med andre lærerutdanninger av høy kvalitet (Drageset & Ytreberg, 2017, s. 5). Med mål om å skape en sterkere kultur for forskningsbasert utvikling på tvers av landegrenser, startet UiT, Universitetet i Auckland (heretter UiA) og UC Berkeley samarbeidsprosjektet Teacher education network (TEDNET). Nettverket skal blant annet bidra til å etablere en helt ny form for mobilitet mellom institusjonene, herunder studenters innsamling av data til masteroppgaven, lære om undervisning og utvikle sin læreridentitet (Drageset & Ytreberg, 2017, s. 6-7). Prosjektet til TEDNET åpnet dermed for å studere lærere som lykkes i både New Zealand og USA.

Det er få norske kryss-kulturelle studier av matematikkundervisning, særlig av anerkjente læreres undervisningspraksis, noe som tyder på et kunnskapshull. Ettersom «lærere jobber i en virkelighet som hele tiden er i forandring» (Gleiss & Sæther, 2021, s. 190), er det et kontinuerlig behov for oppdatert forskning. Det er en forskningsmessig kryss-kulturell interesse av å undersøke kompetente læreres klasserom (eks. Clarke et al., 2006), og det er sannsynlig at en anerkjent lærer har større innvirkning på sine elevers læring enn en tilfeldig lærer. TEDNET var interessert i en kryss-kulturell studie av lærere som lykkes i sitt yrke, og UiA kunne tilby tre anerkjente lærere som informanter. UiA var klar på at studien skulle være av lærerne – ikke en sammenligning mellom dem for å vurdere hvem som er «flinkest». De var derimot positive til en drøfting av likheter og forskjeller mellom informantene, fordi det er naturlig og ikke involverer en form for vurdering av lærerne. Eksempelvis kan formativ vurdering (kap. 2.2.1) være et tilbakevendende trekk, men hvordan lærerne henter ut informasjon fra elevene og bruker den videre i sin undervisning kan være forskjellig, og vil følgelig være et kjennetegn ved deres undervisning og interessant å drøfte.

1.1 Problemstilling

Ved å undersøke de tre nevnte lærerne kan vi bidra til å tette det kryss-kulturelle kunnskapshullet, samtidig som vi får en unik mulighet til å lære av lærere som lykkes i sitt yrke. Med utgangspunkt i tidligere forskning og ulike perspektiver innenfor feltet, fikk vi muligheten til å undersøke problemsstillingen:

«*Hva kjennetegner matematikkundervisningen til tre anerkjente lærere på 7.- 10. trinn i New Zealand?*»

Hva som er en kompetent lærer er kulturelt betinget (Clarke et al., 2006, s. 11). Vi så ingen grunn til å legge føringer for valg av informanter i en annen kultur ved å definere hva en kompetent eller flink lærer skulle innebære. I likhet med Clarke et al. (2006) har vi latt det være opp til det lokale utdanningssamfunnet å definere og velge ut lærere som skal studeres. Vi har valgt å bruke begrepet *anerkjente* lærere, fordi det er et mer nøytralt begrep enn flink, og det tydeliggjør at det er lærere anerkjent i sin kultur, heller enn at vi har vurdert dem til å være flinke. Et hensiktsmessig utvalg med gitte kriterier er typisk for kvalitative studier (Cohen et al., 2018, s. 218-220), og vi har ikke påvirket utvalget utover å etterspørre anerkjente matematikklærere. Det greies mer ut om valget av begrepet og valget av informantene i studiens metodekapittel.

I sitt svar på hva de tre lærerne er anerkjent for, sier vår kontaktperson i TEDNET og UiA at alle tre har over 20 års erfaring i læreryrket, og beskriver dem som svært dedikerte og reflekterte rundt sin undervisningspraksis, samtidig som de er veldig forskjellige. Den første læreren er kjent for svært gode resultater og har tidligere jobbet for universitetet. Læreren har skrevet mastergrad i matematikkdidaktikk og vært med å utvikle undervisningsressurser i matematikk i regi av universitetet. Den andre læreren har tette bånd til flere av landets universiteter og betegnes som en «gallionsfigur» innenfor Developing Mathematical Inquiry Communities (DMIC), en undervisningstilnærming utviklet i New Zealand og som det satses stort på. Denne spesifikke undersøkende undervisningsformen brukes på 140 skoler. Den tredje læreren er en del av utvalget som utarbeider forslag til ny læreplan i matematikk. I tillegg til ordinær undervisning, driver læreren etter- og videreutdanning av matematikklærere.

Ifølge Schoenfeld (2013, s. 619) handler det ikke om hva en lærer kan eller hva en lærer tror på; det handler om hvordan lærerens kunnskap og tro spilles ut i klasserommet. Hvordan lærerens kunnskap og tro spilles ut i klasserommet er det vi anser å være *kjennetegnene* ved hver lærers matematikkundervisning. For å undersøke og besvare problemstillingen ble det gjort en todelt datainnsamling hos hver av de tre lærerne. I første del observerte vi lærernes matematikkundervisning i klasserommet, og andre del bestod av et intervju hvor læreren fikk dele sine tanker om egen undervisning. Kombinasjonen av observasjon og intervju med lærerne åpner for å belyse problemstillingen mer utfyllende. Formålet er å avdekke, beskrive og lære av grepene lærerne gjør, noe som gjøres på to nivåer: Først analyseres kjennetegnene ved lærernes undervisning i sammenheng med relevant forskning og teori. Dette er selve hoveddelen i vår besvarelse av problemstillingen. Etter å ha analysert lærerne hver for seg, drøftes likheter og forskjeller mellom lærerne, som er det andre nivået. For å sammenligne tre svært forskjellige lærere, systematiseres kjennetegnene etter «The Five Dimensions of Powerful Classrooms» i Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework (Schoenfeld, 2016).

TRU-rammeverket er laget som et forskningsbasert svar på spørsmålet: «What are the attributes of equitable and robust learning environments – environments in which all students are supported in becoming knowledgeable, flexible, and resourceful disciplinary thinkers?» (Schoenfeld, 2016, s. 1). Forskningsgruppen hevder at kvaliteten på læringsmiljøet avhenger av i hvilken grad det gir muligheter for elevene innen de følgende fem dimensjonene (vår oversettelse): Innhold; Kognitive krav; Lik tilgang til innhold; Mestringstro, eierskap og identitet; Formativ vurdering. Schoenfeld (2016, s. 1-3) poengterer at rammeverket ikke er en oppskrift for hvordan et «powerful classroom» skal se ut, men heller at de fem dimensjonene er fremtredende i alle slike klasserom. Slik sett bør det også være mulig å bruke rammeverket til å identifisere kjennetegn til hver lærer og drøfte likheter og forskjeller mellom dem. For å styrke potensialet en slik studie kan ha for norske lesere og norske forhold, vil det være naturlig å drøfte lærernes undervisningspraksis i norsk kontekst (med hovedvekt på det nye læreplanverket), noe som gjøres i kapittel 5.

Læring er alltid læring av noe, som begrenser verdien av å diskutere læring generelt – uten å referere til hva som læres (Marton et al., 2004, s. 35). Denne masteroppgaven skal hovedsakelig omhandle fagdidaktiske kjennetegn ved lærerne. Det er ikke en matematikkfaglig analyse, og utdrag av det faglige innholdet i undervisningsøktene brukes mer som en kontekst, med hensikt om å illustrere hvordan læreren bruker innholdet.

1.2 Oppbygningen av oppgaven

I neste kapittel presenteres det teoretiske grunnlaget for oppgaven; selve utgangspunktet for vår analyse av lærernes kjennetegn. Det tredje kapittelet handler om utvalgsprosessen og metodiske valg for innsamling av data og analyse. Videre drøftes studiens kvalitet og det reflekteres rundt forskningsetiske betraktninger. Det fjerde kapittelet er en presentasjon og diskusjon av studiens resultat, der lærerne har hvert sitt delkapittel. Kapittelet avsluttes med å diskutere likheter og forskjeller mellom lærerne gjennom TRU-rammeverket. I det femte kapittelet drøftes lærernes undervisningspraksis i en norsk kontekst, før masteroppgavens sjette kapittel tar for seg våre konklusjoner. Studien avsluttes med videre implikasjoner for praksisfeltet.

2 Teori

I dette kapittelet presenteres teori og forskning på læring og undervisning, hovedsakelig innenfor matematikkfaget. Selv om denne studien vektlegger lærerens kjennetegn ved undervisning, handler undervisning om å lære noe. Det første delkapittelet omhandler elevers læring i matematikk og forskjellige syn på matematisk forståelse. I det andre delkapittelet legges det frem grunnleggende teori for viktige kunnskaper og ferdigheter i en lærers tilnærming til undervisning. Videre utdypes det hvilke dimensjoner som bør være til stede for å drive «god undervisning» i matematikk gjennom rammeverket *Teaching for Robust Understanding* (Schoenfeld, 2016).

Informantenes tilnærminger til sin undervisning er som nevnt svært forskjellige, noe det tredje delkapittelet skal presentere et grunnlag for å analysere og diskutere. Tradisjonelt sett deles ulike undervisningstilnærminger inn i to overordnede kategorier; instruerende typer undervisning og utforskende typer undervisning (Kirschner et al., 2006, s. 75-76). Den første læreren beskriver seg selv som en eksplisitt underviser (instruerende), den andre læreren blir beskrevet som en gallionsfigur innenfor DMIC (utforskende), mens den tredje læreren forteller at hun ikke er like knyttet til en bestemt tilnærming og har «plukket opp litt her og der». Eksplisitt- og DMIC-undervisning utdypes, før det siste delkapittelet tar for seg sentrale grep for læring og læringsmiljø en kan bruke på tvers av undervisningstilnærming. Læring gjennom matematikksamtaler og normer i klasserommet vektlegges i dette delkapittelet, fordi det er en sentral del av alle informantenes undervisning.

2.1 Elevers læring i matematikk

Undervisning handler om elevers læring, og det vil derfor være nødvendig å kort beskrive fremtredende syn på forståelse innenfor matematikk. Det har i lengre tid vært forsket på elevers læring i undervisning, med hensyn om å identifisere hva god læring er og hva en ønsker å oppnå. Van de Walle et al. (2018, s. 7) sier hovedmålet med matematikken du underviser må være å skape forståelse. En form for forståelse bestående av mer enn matematiske sannheter og evnen til å følge en prosedyre, der en kan eksemplifisere og redegjøre for hvorfor noe gir mening (Van de Walle et al., 2018, s. 7).

Skemp (1976, s. 15) beskriver instrumentell og relasjonell forståelse som to ulike måter å se på matematikk. Instrumentell forståelse handler om å vite hva du skal gjøre uten å vite hvorfor, og gjør det nødvendig å huske hvilke metoder som passer de ulike problemene

(Skemp, 1976, s. 2/9). Fordelen med instrumentell forståelse er at det kan oppleves lettere å lære, gi raskere svar og presise resultater. En skal ikke undervurdere følelsen av mestring elevene får gjennom instrumentelt arbeid (Skemp, 1976, s. 8-10). Denne typen undervisning gir elevene kunnskap om algoritmer og hvordan de kan brukes til å løse oppgaver, men det er lite rom for ulike fremgangsmåter og å skape sammenhenger mellom konsepter (Van de Walle et al., 2018, s. 11).

Relasjonell forståelse er evnen til å vite hva du skal gjøre og hvorfor, og gjør det mulig å se sammenhenger mellom metoder og problemområder (Skemp, 1976, s. 9). Relasjonelle klasserom møter elevene der de er og tar utgangspunkt deres ideer (Van de Walle et al., 2018, s. 8). Elevene får mulighet til å løse problemer og tilnærme seg oppgaver på meningsfulle måter. De utvikler robust forståelse av matematikk gjennom å forklare, begrunne, eksemplifisere, generalisere og formulere koblinger mellom emner og ideer (Van de Walle et al., 2018, s. 8). Relasjonell forståelse krever mindre memorering, kan overføres mellom metoder og kan kobles til nye temaer (Skemp, 1976, s. 8-10).

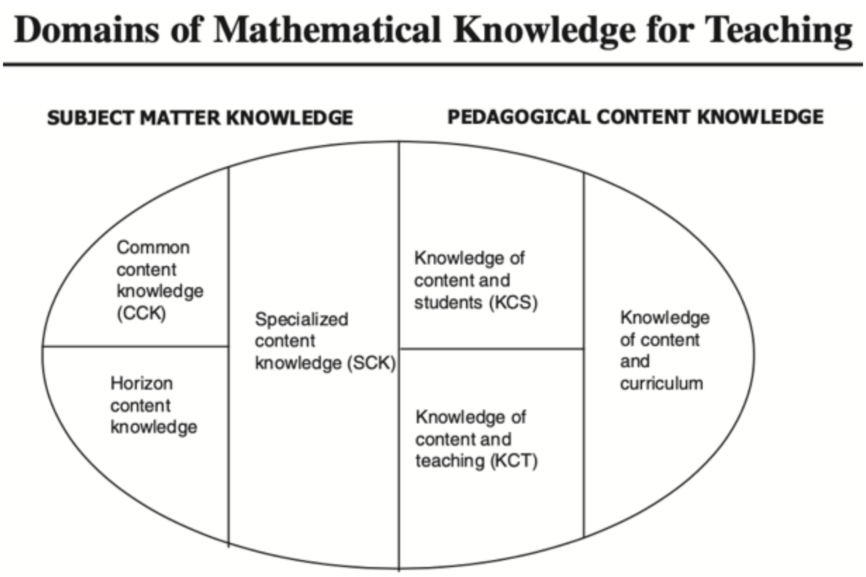
En todelt matematisk forståelse (som nevnte instrumentell og relasjonell forståelse) ble lenge betraktet som to separate enheter, inntil interessen rundt gjensidig fordelaktige sammenhenger økte på 80-tallet (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 2). Hiebert og Lefevre (1986) presenterer to former for kunnskap, samt hvordan de kan komplementere hverandre. Den første formen er prosedyrekunnskap, som deles i to: Kjennskap til det formelle språket og representasjoner av symboler i matematikk, og å kjenne regler og algoritmer for å løse oppgaver (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 6). Den andre formen er konseptuell kunnskap, og karakteriseres som et kunnskapsnett der kunnskapen utvikles gjennom å skape koblinger mellom den, enten mellom allerede lagret informasjon eller mellom eksisterende og ny kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-4). «Mathematical knowledge, in its fullest sense, includes significant, fundamental relationships between conceptual and procedural knowledge» (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 9). For å være kompetent i matematikk involverer det kunnskap om konsepter, symboler og prosedyrer, og kunnskap om hvordan de er henger sammen (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 16).

Det finnes mange andre syn på elevers læring i matematikk, men for denne oppgaven er Skemp (1976) og Hiebert og Lefevre (1986) sine beskrivelser dekkende for å gi mening til teori om undervisning som videre presenteres, samt vår analyse av lærernes undervisningspraksis opp mot den teorien.

2.2 Lærerens tilnærming til undervisning

Synet på elevers læring i matematikk har utviklet seg over tid, og det samme har synet på lærernes tilnærming til undervisning. Selv om utdanningsforskning er et relativt nytt fagfelt, er det flere som har forsøkt å beskrive hvilke kunnskaper og ferdigheter som er viktige for lærerens undervisningskunnskap, med hensyn til elevers læring. Shulman (1986) sitt arbeid er ofte brukt som utgangspunkt i ulike rammeverk innenfor temaet. Han så behovet for et rammeverk for å kunne beskrive lærerens fagkunnskap, noe han delte inn i de tre kategoriene: *Subject matter knowledge*, *pedagogical content knowledge* og *curricular knowledge*.

Ball et al. (2008, s. 389) har tatt utgangspunkt i Shulman (1986) sitt arbeid med å identifisere kunnskapsområder innenfor undervisning og bygd videre på disse. Basert på analyser av undervisning undersøkte de viktigheten av profesjonsrettet fagkunnskap i matematikk, og presenterer kunnskaper og ferdigheter innenfor undervisning og læring i matematikk. Ball et al. (2008, s. 403) har i sin inndeling laget to overordnede kunnskapsområder (subject matter knowledge og pedagogical content knowledge), der Shulman (1986) sitt tredje kunnskapsområde (curriculum knowledge) er en de av seks underliggende dimensjonene for undervisning i matematikk (se figur 1).



Figur 1: Domains of Mathematical Knowledge for Teaching

(Ball et al.,2008, s. 403)

Under subject matter knowledge finner vi tre dimensjoner (Ball et al., 2008, s. 399-403). Den første er *common content knowledge*, og defineres som matematisk kunnskap aktuell for andre settinger og ikke spesifikk for undervisning. Den andre dimensjonen, *specialized content knowledge*, omhandler den matematiske kunnskapen og ferdighetene unike for undervisning. Lærere skal ikke bare forstå det selv, men kunne bryte ned innholdet og gjøre det forståelig for elevene. *Horizon content knowledge* er siste fagspesifikke dimensjon, og omhandler lærerens kunnskap om det matematiske landskapet og hvordan det henger sammen, hva elevene har lært, lærer nå og skal lære videre (Ball et al., 2008, s. 403).

Under området pedagogical content knowledge presenterer Ball et al. (2008, s. 401) *knowledge of content and students*, kombinasjonen av kunnskap om elever og kunnskap om matematikk. Dette innebærer å kjenne til vanlige misoppfatninger, vurdere valg av oppgaver, se for seg elevers tanker og ulike løsninger på oppgaver, samt hva de finner interessant og motiverende. *Knowledge of content and curriculum* innebærer kunnskap om undervisningsmateriell og læreplan tilhørende ulike områder og nivå (Ball et al., 2008, s. 391/402). Den siste pedagogiske dimensjonen er *knowledge of content and teaching*, som kombinerer kunnskap om undervisning og matematikk. Strukturering av undervisning krever matematisk og pedagogisk innsikt, både med tanke på valg av gunstige eksempler som kan gi elever en dypere forståelse og valg av hensiktsmessige metoder for å presentere innholdet.

Ball et al. (2008, s. 404) konkluderer med det som grunnleggende at lærere må kjenne faget de underviser godt for å ha den kunnskapen som kreves for å kunne støtte elevene i deres læring. Samtidig kreves mer enn bare kunnskap om avansert matematikk for å tilfredsstille kravene. Lærere må evne å gi mening til elevenes arbeid og gjøre innholdet forståelig. Ball et al. (2008, s. 404-405) oppfordrer til videre forskning innenfor temaet for å bedre kunne forstå hvor en skal rette fokuset i utviklingen. Noen år senere påpekte Schoenfeld (2016, s. 2) at det finnes mengder av litteratur på undervisning, læring og «gode ting» som bør skje i et klasserom, og i et forsøk på å organisere denne kunnskapen utviklet de TRU – et rammeverk som beskriver fem dimensjoner for robust læring. Der Ball et al. (2008) beskriver kunnskaper og ferdigheter viktige for å kunne drive god undervisning i matematikk med læreren i fokus, tar Schoenfeld (2016) sine dimensjoner utgangspunkt i både elevers læring og lærerens komplekse undervisningspraksis, med hensyn om å oppnå robust læring.

2.2.1 Teaching for Robust Understanding

I dette delkapittelet presenteres TRU, blant annet fordi det brukes som et rammeverk for å drøfte likheter og forskjeller mellom lærerne i kapittel 4.4. Mange har sterke meninger om hva «god undervisning» er, men sjeldent underbygges disse meningene med noen form for forskning (Schoenfeld, 2014, s. 406). Det handler ikke om hva en lærer kan eller hva en lærer tror på; det handler om hvordan lærerens kunnskap og tro spilles ut i klasserommet

(Schoenfeld, 2013, s. 619). Mangel på verktøy som kan måle lærerens undervisningspraksis og elevprestasjoner – samt relasjonen mellom dem – var motivasjonen bak utviklingen av TRU-rammeverket og tilhørende scoringsrubrikker for å analysere undervisningen (Schoenfeld, 2014, s. 406). Rammeverket skulle være enkelt å forstå og bruke, og ble laget som et forskningsbasert svar til spørsmålet: «What are the attributes of equitable and robust learning environments – environments in which all students are supported in becoming knowledgeable, flexible, and resourceful disciplinary thinkers?» (Schoenfeld, 2016, s. 1-2). Schoenfeld (2016) hevder at kvaliteten på slike læringsmiljø avhenger av i hvilken grad det gir elevene muligheter innenfor de fem dimensjonene illustrert i figur 2.

The Five Dimensions of Powerful Classrooms

The Content	Cognitive Demand	Equitable Access to Content	Agency, Ownership, and Identity	Formative Assessment
The extent to which classroom activity structures provide opportunities for students to become knowledgeable, flexible, and resourceful disciplinary thinkers. Discussions are focused and coherent, providing opportunities to learn disciplinary ideas, techniques, and perspectives, make connections, and develop productive disciplinary habits of mind.	*The extent to which students have opportunities to grapple with and make sense of important disciplinary ideas and their use. Students learn best when they are challenged in ways that provide room and support for growth, with task difficulty ranging from moderate to demanding. The level of challenge should be conducive to what has been called "productive struggle."*	*The extent to which classroom activity structures invite and support the active engagement of all of the students in the classroom with the core disciplinary content being addressed by the class. Classrooms in which a small number of students get most of the "air time" are not equitable, no matter how rich the content: all students need to be involved in meaningful ways.*	*The extent to which students are provided opportunities to "walk the walk and talk the talk" – to contribute to conversations about disciplinary ideas, to build on others' ideas and have others build on theirs – in ways that contribute to their development of agency (the willingness to engage), their ownership over the content, and the development of positive identities as thinkers and learners.*	*The extent to which classroom activities elicit student thinking and subsequent interactions respond to those ideas, building on productive beginnings and addressing emerging misunderstandings. Powerful instruction "meets students where they are" and gives them opportunities to deepen their understandings.*

Figur 2: The Five Dimensions of Powerful Classrooms (Schoenfeld, 2016, s. 1)

Schoenfeld (2015, s. 162) sier at det er betydelig bevismateriale for at matematikkundervisning som skårer høyt på de fem dimensjonene vil skape kompetente elever innenfor matematikk, og at det er grunn til å tro at rammeverket er komplett (ingen flere dimensjoner skal være nødvendige). Vi har oversatt de fem dimensjonene til innhold; kognitive krav; lik tilgang til innhold; mestringstro, eierskap, og identitet; og formativ vurdering.

Innhold – Dimensjon 1

I følge Schoenfeld (2016, s. 4) handler innhold om i hvilken grad undervisningen legger til rette for at elevene kan bli kunnskapsrike, fleksible og ressurssterke tenkere innenfor fagdisiplinen. Kvaliteten på innholdet avhenger av i hvilken grad matematikken er fokusert og sammenhengende, der forbindelsene mellom prosedyrer, konsepter og kontekst (der kontekst er hensiktsmessig) adresseres og forklares (Schoenfeld & Floden, 2014, s. 1). I samtale mellom elev og lærer eller helklassesamtaler presenteres matematikken relativt oversiktlig og korrekt, som enten inneholder begrunnelser og forklaringer eller at læreren oppfordrer til det (Schoenfeld & Floden, 2014, s. 5).

Kognitive krav – Dimensjon 2

Den andre dimensjonen til Schoenfeld (2016, s. 5-6), kognitive krav, handler om i hvilken grad det skapes muligheter for elevene til å gripe tak i og gi mening til viktige disiplinære ideer og deres bruksområder. Elevene lærer best når øktens innhold hverken er for lett eller for vanskelig. Det er derimot ikke tilstrekkelig å finne en gyllen middelvei i vanskelighetsgraden på innholdet; forskjellige oppgaver leder til forskjellige læringsmuligheter. Elevene må ha muligheten til å bygge videre på det de kan og oppleve meningsfulle muligheter for læring i det som kan kalles «productive struggle». Lærerens komplekse rolle innenfor denne dimensjonen er ikke bare å skape og opprettholde de kognitive kravene, men også hjelpe elevene ved å stille avklarende spørsmål, komme med hint eller «scaffolding», uten å fortelle de nøyaktig hva de skal gjøre (Schoenfeld & Floden, 2014, s. 1-3).

Lik tilgang til innhold – Dimensjon 3

Schoenfeld (2016, s. 7-8) sin tredje dimensjon – lik tilgang til innhold – handler om i hvilken grad alle elevene har tilgang til det disiplinære innholdet og i hvilken grad de involveres på meningsfulle måter. Lærere velger ut og bruker oppgaver som gjør alle elevene i stand til å engasjere seg i utfordrende innhold, og etablerer og forsterker forventninger til ulike måter å delta i og bidra til klasseromsaktiviteter. Oppgaver som kan tilnærmes på flere måter – og der tilnærmingene kan sammenlignes – kan gi flere elever tilgang til innholdet og skape muligheter for å knytte sammenhenger mellom elevenes tilnærminger. I følge Schoenfeld og Floden (2014, s. 1-4) er det sentralt for denne dimensjonen at lærere jobber aktivt for å oppnå en bred og meningsfull matematisk deltakelse blant elevene.

Mestringstro, eierskap og identitet – Dimensjon 4

Mestringstro, eierskap og identitet handler ifølge Schoenfeld (2016, s. 9-10) om i hvilken grad: Elever har muligheten til å skape og dele ideer; elevbidrag oppmuntres, anerkjennes og støttes som en vanlig del av klasseromsaktiviteten; og elevenes ideer bygges på når klassen konstruerer sin kollektive forståelse. Et grunnleggende aspekt ved identiteten handler om mestringstro – elevenes villighet til å engasjere seg i matematikken, troen på at de kan mestre utfordrende oppgaver og stole på sine konklusjoner. Eierskap i matematikk handler om følelsen av å ha kontroll på disiplinfaglige ideer og kunne stole på sine egne resonnementer, heller enn å repetere det andre sier og være avhengig av eksterne autoriteter (som lærer eller fasiten i en lærebok). Elevidentiteter som «jeg er ikke en matteperson» utvikles fra erfaringer innen fagdisiplinen. Nøkkelutfordringen innen denne dimensjonen er å snu negative elevidentiteter og skape et positivt læringsmiljø. For å oppnå dette kan lærere skape situasjoner hvor elevbidrag får anerkjennelse i plenum, bruke «talk moves», bygge på det elever sier og be om forklaringer. Lærere bør tilskrive eierskap når elever forklarer sine ideer og begrunnelser og/eller legge til rette for at medelever responderer og bygger på hverandres ideer (Schoenfeld & Floden, 2014, s. 1-2).

Formativ vurdering – Dimensjon 5

Den siste dimensjonen til Schoenfeld (2016, s. 11-12), formativ vurdering, handler om i hvilken grad undervisningen «møter elevene der de er» og medfører matematisk tenkning. Det involverer å orkestrere klasseromsaktiviteter slik at de avslører elevenes nåværende matematiske forståelse og tankemønstre. Informasjonen som hentes ut spiller så en stor rolle for videre klasseromsaktivitet. Læreren kan tilpasse innhold, justere de kognitive kravene som stilles, bygge på produktive tanker og adressere misforståelser som dukker opp. Schoenfeld (2014, s. 407) sier at å drive formativ vurdering er en vanskelig oppgave, fordi det krever et sett med pedagogiske sinnsvaner og fagdidaktisk kompetanse som ikke er lett å tilegne seg.

Rammeverket til TRU beskriver fem dimensjoner av et «powerful classroom», som hver for seg kan være et fokusområde i observasjoner og utviklingsarbeid (Schoenfeld, 2016, s. 2). Selv om de presenteres hver for seg, er de nært knyttet til hverandre. Schoenfeld (2016, s. 5-12) viser blant annet til følgende to eksempler:

> Formativ vurdering (5) er uløselig knyttet til innhold (1), støtter riktig nivå av kognitive krav (2), kan gi lik tilgang til innhold (3) og muliggjør utvikling av elevmedvirkning (4).

Innenfor kognitive krav (2) er «productive struggle» selve mekanismen for utvikling av dybdeforståelse av innholdet (1). Det er essensielt for alle elevene (3), ikke bare for meningsfull deltakelse, men også for å gjøre innholdet sitt eget og utvikle positive disiplinfaglige identiteter (4). Den beste måten å oppnå dette på er å «møte elevene der de er» (5).

2.3 Instruerende vs. utforskende undervisning

I teorikapittelets introduksjon nevnes det at lærernes overordnede tilnærming til undervisning er forskjellig, noe dette delkapittelet skal skape et teoretisk grunnlag for å diskutere. I prosjektet til Schoenfeld (2016) hevder de å ha identifiserte fem dimensjoner for undervisning som legger til rette for at elevene kan utvikle en robust forståelse. Matematikkundervisning som skårer høyt på alle dimensjonene er et «powerful classroom» og vil skape kompetente elever innenfor matematikk (Schoenfeld, 2015), men utover dette legger de ikke begrensninger for hvilke undervisningstilnærminger som kan oppnå dette.

Kirschner et al. (2006, s. 75-76) viser til en todelt disputt rundt hvilke undervisningstilnærminger som har størst innvirkning på elevers læring, noe som har foregått i over et halvt århundre: Den ene siden argumenterer for at en lærer best i et læringsmiljø preget av direkte instruerende veiledning for nødvendige konsepter og prosedyrer, der elevene ikke bør bli overlatt til å oppdage prosedyrene selv. Den andre siden argumenterer for at elever lærer best i et utforskende læringsmiljø med minimalt av instruksjon fra læreren, hvor de selv oppdager eller konstruerer den essensielle informasjonen. Allerede rundt Kirschner et al. (2006) sin todeling starter disputten, der Hmelo-Silver et al. (2007, s. 99) mener at deres beskrivelse av utforskende læringsmiljø er misvisende, fordi de også kan inneholde veiledning og «scaffolding».

I sin syntese av over 800-metastudider, laget Hattie (2009) et system for å måle forskjellige faktorers effekt på elevers læring, der valg av undervisningstilnærming har en signifikant betydning (Hattie, 2009, s. 200-203). Kirschner et al. (2006, s. 75) hevder at selv om utforskende undervisningstilnærminger er veldig populære og intuitivt appellerende, viser forskning på undervisning og læring vedvarende at tilnærmingen er mindre effektiv enn instruerende undervisningstilnærminger. Eksplisitt undervisningstilnærming regnes som en instruerende undervisningstilnærminger, og tilnærmingens effektivitet har blitt bekreftet gang på gang gjennom forskning på både generell undervisning og spesialundervisning (Archer & Hughes, 2011; Rosenshine, 1987).

I motsatt ende finner vi blant annet George Polya og uttrykket: «The best way to learn anything is to discover it by yourself» (Polya, 1963, s. 607). Boaler (2015, s. 51-77) gjør et poeng av flere fremtredende verdier til utforskende undervisningstilnærminger i sine studier. Blant annet er elevene aktivt involvert i sin læring, samarbeider, kommuniserer ideer og har større mestringstro – der flere viste at læringen av (og gleden for) matematikk satt igjen flere år etter endt skolegang. For å møte elevenes behov i det 21. århundre, utviklet Hunter et al. (2018, s. 26) Developing Mathematical Inquiry Communities (DMIC). Det er en utforskende undervisningsmodell hvor samarbeid og kommunikasjon står sentralt, og tar utgangspunkt i å endre lærerens rolle fra å være en matematisk autoritet til å være en tilrettelegger som trekker frem og bygger på elevenes tenkning (Hunter et al., 2018, s. 26).

Hattie (2009, s. 144/210) hevder at både instruerende undervisningstilnærminger (eks. eksplisitt undervisning) og mer utforskende tilnærminger (eks. problemløsning) kan være effektive. Inquiry-basert undervisning har derimot en under-gjennomsnittlig effekt på elevers læring (Hattie, 2009, s. 209). Hmelo-Silver et al. (2007, s. 105) stiller spørsmål rundt verdien av å sammenligne tilnærmingene basert på hvor effektive de er, fordi det ikke tar hensyn til større mål med utdanningen som går utover fagets innhold – som epistemiske praksiser, selvstyrt læring og samarbeid – noe som ikke måles på prestasjonsprøver, men er viktige for livslang læring og for borgere i et kunnskapssamfunn.

Kilpatrick et al. (2001, s. 315) mener på sin side at debatten rundt instruerende vs. utforskende undervisning i seg selv er misledende, fordi disse merkelappene gjør retoriske distinksjoner som ofte går glipp av poenget – kvaliteten på undervisningen. Kilpatrick et al. (2001, s. 8-9) viser til undervisningskvaliteten som en funksjon av lærerens kunnskap og bruk av matematisk innhold, læreres oppmerksomhet til og håndtering av elever, og elevenes engasjement i og bruk av matematiske oppgaver. Effektiv undervisning kan forekomme i varierte former, alle med hver sine muligheter og begrensninger (Kilpatrick et al., 2001, s. 8-9).

2.3.1 Eksplisitt undervisning og variasjonsteori

Den første læreren viser og sier at han underviser eksplisitt, der han ofte anvender variasjonsteori. På 80-tallet beskrev Rosenshine (1987) eksplisitt undervisning som et samlebegrep for funn gjort av effektiv undervisning. Funnene resulterte i følgende seks oppsummerende prinsipper for eksplisitt undervisning (Rosenshine, 1987, s. 35):

1. Review and check previous work
2. Present new material in small steps
3. Guide practice
4. Provide feedback and correctives
5. Supervise independent practice
6. Review, weekly and monthly

I Archer og Hughes (2011) sin bok om eksplisitt undervisning, viser de til Rosenshine sine prinsipper som grunnmuren til effektiv og eksplisitt undervisning. De har utviklet 16 punkter læreren kan følge for å sikre seg at prinsippene blir adressert i planleggingen og utførelsen av undervisningen. Likevel er undervisningstilnærmingens ryggrad den samme noen tiår senere:

> «Effective and explicit instruction can be viewed as providing a series of instructional supports or scaffolds – first through the logical selection and sequencing of content, and then by breaking down that content into manageable instructional units based on students' cognitive capabilities […]. Instructional delivery is characterized by clear descriptions and demonstrations of a skill, followed by supported practice and timely feedback. Initial practice is carried out with high levels of teacher involvement; however, once student success is evident, the teacher's support is systematically withdrawn, and the students move toward independent performance» (Archer & Hughes, 2011, s. 3).

Oppstarten av undervisningsøkten klargjør hva elevene skal lære og hvorfor de skal lære det. Her sjekkes også elevenes forkunnskaper og det nye innholdet knyttes til tidligere undervisning. Innholdet gjøres eksplisitt ved å bruke eksempler og modellere nøyaktig hvordan ønskede ferdigheter og strategier brukes i små steg, der læreren sjekker elevenes forståelse for hvert steg (Rosenshine, 1987, s. 35). For å kunne levere i selve gjennomføringen av øktene, er det fire essensielle ferdigheter læreren må utøve: Kreve hyppige svar, overvåke elevenes prestasjoner nøye, gi umiddelbar bekreftende og korrigerende tilbakemelding, og levere økten i et raskt nok tempo (Archer & Hughes, 2011, s. 131).

De fire ferdighetene representerer selve «kunsten å undervise» (Archer & Hughes, 2011, s. 197), og innebærer at læreren planlegger for høy grad av elev-lærer interaksjon ved bruk av spørsmål og nøye observerer og lytter til elevenes respons. Hensikten er å verifisere mestringsgrad og så raskt som mulig rette opp eventuelle feil og komme med konstruktiv tilbakemelding (Archer & Hughes, 2011, s. 3). Den konstruktive tilbakemeldingen må adressere relasjonen mellom læringsmålet, hvordan eleven ligger an og hvordan målet kan nås (Hattie & Timperley, 2007, s. 88-90). Mer konkret er målet å tette gapet mellom det eleven kan og det som er ønskelig, gjennom å informere eleven om et svar er riktig eller galt, om deres forståelse er korrekt eller mangelfull, og hva som kan gjøres for å komme dit (Archer & Hughes, 2011, s. 175). Her er det viktig at elevene forstår at målet for økten er å lære, og at det å gjøre feil er en naturlig del av læring (Archer & Hughes, 2011, s. 179). Tempoet i undervisningsøkten skal være raskt nok til å optimalisere undervisningen med tanke på innhold og elevarbeid, samtidig som elevene har nok tid til å tenke/bearbeide innholdet for å nå målet (Archer & Hughes, 2011, s. 3). Når elevene har demonstrert at de er klar for å jobbe selvstendig, handler det om «øvelse gjør mester» (Archer & Hughes, 2011, s. 243), før økten avsluttes ved å gjennomgå kritiske deler av innholdet (Archer & Hughes, 2011, s. 52).

Eksplisitt undervisning er en av de beste undervisningstilnærmingene lærere kan ta i bruk for å hjelpe elevene få ut sitt akademiske potensial (Archer & Hughes, 2011; Barton, 2018; Rosenshine, 1987). Til tross for dette har eksplisitt undervisning et negativt rykte, noe som kan skyldes en oppfatning om at det dreier seg om «chalk and talk» eller å forelese (Barton, 2018, s. 93) og en misledende to-deling; eksplisitt undervisning plasseres under «teacher-centered», mens tilnærminger som utforskende undervisning plasseres under «student-centered» (Archer & Hughes, 2011, s. 19). Archer og Hughes (2011, s. 19) poengterer at prinsippene for eksplisitt undervisning viser at alle avgjørelser som blir tatt, baseres på elevenes behov og prestasjoner, og er i høyeste grad «student-centered».

I boken «How I Wish I'd Taught Maths: Lessons learned from research, conversations with experts, and 12 years of mistakes», beskriver Barton (2018) sin reise fra utforskende til eksplisitt undervisning. Han pleide å se frem til sine utforskende undervisningsøkter og forestilte seg alle oppdagelsene elevene kom til å gjøre, undersøkelseslinjene de skulle følge og interessen for matematikk som skulle utvikle seg. Men ikke en eneste gang i løpet hans 12 år som lærer gikk det slik, hverken med tanke på faglige mål eller engasjement (Barton, 2018, s. 97-98). I sin eksplisitte undervisning er ikke elevene passive mottakere av informasjon – de er fullstendig involvert i læringsprosessen, og en kan argumentere for at de involveres mer enn i mindre strukturerte tilnærminger, der elevene har større mulighet for å gjemme seg bort (Barton, 2018, s. 93). Archer og Hughes (2011, s. vii) beskriver eksplisitt undervisning som en absolutt nødvendighet i undervisning av innhold som elever ikke ellers kan oppdage. Men eksplisitt undervisning er ikke bare hjelpsom når utforsking er umulig, utforsking kan være unøyaktig, utilstrekkelig, ufullstendig, eller ineffektivt. Blant annet må regler undervises eksplisitt, fordi flere av reglene ville ikke blitt oppdaget av elevene på andre måter (Archer & Hughes, 2011, s. 108).

Variasjonsteori

Variasjonsteori er en læringsteori som handler om at variasjonsmønstre iboende for en læringssituasjon er fundamental for utvikling av bestemte evner (Marton et al., 2004, s. 15). Marton et al. (2004, s. 15-18) beskriver læringsteorien som generell, og innebærer alt fra motorisk læring (eksempelvis å øve på å treffe et mål med en ball ved å variere vekten på ballen, forholdene, avstanden og vinkelen) til læring i matematikk (eksempelvis forskjellige strategier for å løse problemer og utviklingen av tallforståelse). Bruk av variasjonsteori i matematikkundervisning er en effektiv læringsmetode (Baskoro, 2021). Marton et al. (2004, s. 15) påpeker at variasjonsteorien ikke handler om jo mere variasjon, desto mer er det å lære. Det er utvalgt variasjon som muliggjør elever å oppleve kritiske trekk for en bestemt læring, så vel som for utvikling av visse evner. Disse trekkene kan eksempelvis være det å forstå «mangheten» av et tall, som krever erfaring med forskjellige tall. Marton et al. (2004, s. 16-17) viser til fire fremtredende variasjonsmønstre:

1. Kontrast: For å kunne erfare noe, må en erfare noe å sammenligne det med. Å bruke kontraster muliggjør at elevene opplever eksempler og ikke-eksempler for kritiske aspekter. Eksempelvis, for å forstå hva 3 er, må en erfare at 3 ikke er det samme som 2 eller 4.
2. Generalisering: For å virkelig kunne forstå hva 3 er, må en erfare variasjoner av tallet, som tre epler, tre hunder, tre bøker osv. Variasjonen er nødvendig for å forstå ideen bak tallet og klare å skille det fra irrelevante trekk.
3. Separasjon: For å kunne erfare et bestemt aspekt av noe – og for å kunne skille det fra andre aspekter – må det variere mens andre aspekter forholder seg like.
4. Fusjon: Det er uunngåelig at flere variasjoner kan oppstå samtidig. Hvis det er flere kritiske aspekter eleven må ta stilling til samtidig, må alle erfares samtidig. Dersom det skjer, er det mest effektive å skille aspektene, for så å fusjonere dem.

I tillegg til å presentere sekvenser av ulikheter (variation) og likheter (invariance) for å innarbeide bestemte mønstre, må undervisningen adressere mønstrene (Kullberg et al., 2017, s. 566-567). Det er viktig å bevisstgjøre seg hva som varierer og hva som ikke varierer i læringssituasjonen for å kunne forstå hva som er mulig å lære og ikke (Marton et al., 2004, s.

16). Siden variasjonsteorien om læring har som mål å avsløre de nødvendige forutsetningene for læring i spesifikke tilfeller, kan den også brukes til å se for seg hva som er – og ikke er – mulig å lære i en undervisningsøkt (Kullberg et al., 2017, s. 566). Carpenter et al. (2003, s. 40-45) trekker frem variasjonsteori som en gunstig læringsmetode innenfor aritmetikk og algebra, både fordi den oppmuntrer til relasjonell aritmetisk forståelse, og fordi den kan gjøre overgangen mellom aritmetikk og algebra smidigere.

2.3.2 Developing Mathematical Inquiry Communities (DMIC)

Innledningsvis nevnes det at den andre læreren beskrives som en gallionsfigur innenfor DMIC – en undervisningstilnærming det satses stort på i New Zealand. Vår kontaktperson ved University of Auckland forteller at undervisningsformen brukes på 140 skoler, der godt over 1000 lærere er involvert i prosjektet. Basert på forskning innenfor matematikkundervisning ble DMIC-modellen utviklet med mål om å ivareta og fremme kultur gjennom ambisiøs og kompleks matematikkundervisning. Hunter et al. (2018, s. 27) beskriver DMIC-modellen som et forskningsbasert utviklingsinitiativ og et pedagogisk endringsinitiativ, utviklet over 15 år med fokus på et samarbeidende læringsfelleskap på tvers av skoler, klasserom og lærere.

Videre redegjør Hunter et al. (2018, s. 28-31) for fire sentrale elementer innenfor et DMIC-perspektiv på matematikkundervisning; planlegging, presentasjon av problemet, gruppearbeid og oppsummering. Planleggingen legger grunnlaget for undervisningen og starter med at lærerne velger meningsfulle oppgaver som utfordrer elevene. For å engasjere elevene er det viktig at de utfordrende oppgavene har lav inngangsterskel og stor takhøyde. Gjennom å selv løse oppgavene og anta elevenes strategier på forhånd, får lærerne oversikt over ulike måter å løse problemene på og eventuelle feilsvar, og er bedre rustet til å respondere på elevenes tanker (Hunter et al., 2018, s. 28-31).

I oppstarten presenteres problemet for økten, og normer for deltakelse og kommunikasjon etableres (Hunter et al., 2018, s. 28-31). Formålet med å presentere oppgaven er todelt: Først er det ønskelig at elevene får en forståelse for oppgavens kontekst, for så å kunne trekke ut hva problemet spør om. Videre samarbeider elevene i små ikke-nivåinndelte grupper for å løse problemet. De får utdelt et ark og en penn per gruppe. Lærerens rolle underveis er å følge med på elevenes arbeid med problemet. Dette gjør det lettere for læreren å koble elever på gruppas resonnement. Det gir også læreren oversikt over de ulike løsningene og mulighet til å vurdere rekkefølgen de skal presenteres i plenumssamtalen. Ettersom læringsfelleskapet utvikles handler det mer om å etablere produktive samtaler som inneholder rettferdiggjøring og matematisk argumentasjon (Hunter et al., 2018, s. 28-31).

Under plenumsgjennomgangen beskriver de lærerens rolle som tilrettelegger og deltaker i det lærende felleskapet (Hunter et al., 2018, s. 28-31). Det er viktig at elevene viser og forklarer fremgangsmåten for løsningene sine på tavla foran de andre gruppene, samtidig som det er rom for oppklaring. Elevene skal selv ta ansvar for egen læring og stille spørsmål dersom de ikke forstår. De understreker at elevene i løpet av kort tid blir flinke til å respondere på medelevers svar, forutsett at læreren ikke involverer seg med mindre de ikke forstår hverandre. I avslutningen av undervisningen handler det om å tydeliggjøre sammenhengene mellom de ulike løsningene og koble de til større matematiske ideer. Koblingene kan omhandle det læreren hadde sett for seg på forhånd eller nye ideer som har kommet frem underveis i aktiviteten (Hunter et al., 2018, s. 28-31).

2.4 Sentrale grep for læring og læringsmiljø

DMIC-undervisning er blant annet basert på «five practices» (Smith og Stein, 2011), der læreren skal bruke «talk moves» (Chapin og O'Connor, 2007) som grep for å sikre bred deltakelse og tilgjengeliggjøre resonnement for elevene Hunter et al. (2018, s. 28/30). Vi bemerker at det har kommet nyere versjoner av begge bøkene, og siden matematikksamtaler er sentrale også blant de to andre lærernes undervisning, greies det videre ut om Smith og Stein (2018) sine fem praksiser og Chapin et al. (2013) sine samtalegrep. Smith og Stein (2018, s. 96) hevder at bruk av samtalegrep over tid bidrar til etablering av normer i matematikkundervisningen. Etablering og utvikling av normer, samt bruk av ros, differensiering og kontekst er også en del av lærernes undervisning, noe det tredje og fjerde delkapittelet presenterer et teoretisk grunnlag for å diskutere.

2.4.1 Five practices

Boaler (2015, s. 41) fremmer hvor viktig samtalen er for læring i matematikk og sier elever ofte har behov for å snakke gjennom metodene sine for være sikre på at de forstår. Videre påpeker hun at det er lett å tenke at noe gir mening når en får det forklart, men det er først når en evner å sette ord på det selv og forklare noen andre en viser faktisk forståelse. Smith og Stein (2018) sine fem praksiser er et rammeverk for organisering og tilrettelegging av produktiv matematisk diskusjon med utgangspunkt i elevers tanker. Smith og Stein (2018, s. 9-10) sine fem praksiser er (vår oversettelse):

- **Anta** elevers respons på oppgaver og egnede oppfølgingsspørsmål
- **Overvåke** elevenes arbeid med oppgaven
- **Velge ut** løsninger som skal presenteres i plenum
- **Velge rekkefølge** for presentasjon av løsninger
- **Koble sammen** ulike løsninger og knytte de til grunnleggende matematiske ideer

Rammeverket er ment for å gjøre det overkommelig for lærere å drive elevfokusert undervisning ved å moderere graden av improvisasjon som kreves for å drive matematisk diskusjon (Smith & Stein, 2018, s. 9). Etter valg av en gunstig oppgave eller oppgaver, skal en *anta* elevenes matematiske tilnærming til oppgaven og vurdere hensiktsmessige spørsmål relatert til strategiene. Det er viktig at lærerne løser oppgavene på ulike måter – gjerne sammen med kollegaer. Prosessen skal avdekke korrekte løsninger og mulige feilsvar, i tillegg til å se for seg hvordan dette kan kobles til de matematiske konseptene og prosedyrene en ønsker at elevene skal lære (Smith & Stein, 2018, s. 9-10).

Underveis i arbeidet med oppgavene går læreren rundt og *overvåker* elevenes arbeid for å få innsikt i deres tanker og løsningsstrategier (Smith & Stein, 2018, s. 11-13). Læreren kan stille spørsmål for å synliggjøre- eller hjelpe de å klare opp i egne tanker. De kan stille spørsmål for å aktivisere og sørge for at alle er deltakende, eller for å utfordre aspekter ved oppgaven som elevene ikke har tatt tak i. Oversikten over elevenes arbeid gjør det lettere for læreren å *velge ut* hvilke løsninger som er gunstige å trekke frem og hvem som skal dele sine løsninger for klassen (Smith & Stein, 2018, s. 11-13).

Etter å ha valgt hvilke løsninger som skal fremmes i diskusjonen, må læreren *velge rekkefølge* for presentasjonene. Smith og Stein (2018, s. 13-14) sier det er viktig å tenke gjennom struktureringen for å gi best mulig læringsutbytte for elevene. En måte er å bevege seg fra den mest konkrete til den mest abstrakte løsningen, noe som åpner for at elevene kan se koblinger mellom ulike tilnærminger og oppnå en dypere forståelse. Dersom det viser seg å være felles misoppfatninger i gruppa, kan det være nyttig å oppklare disse først for å sørge for at alle har mulighet til å forstå/delta. Til slutt skal læreren hjelpe elevene med å *koble sammen* de ulike løsningene og knytte de opp mot målet og større matematiske ideer (Smith & Stein, 2018, s. 14). En ønsker at elevenes presentasjoner i plenum skal bygge på hverandre for å kunne gi en dypere matematisk forståelse.

Smith og Stein (2018, s. 14) understreker hvordan de frem praksisene bygger på hverandre, hvor det er mindre krevende å overvåke dersom en har gjort et godt forarbeid med antakelser. God planlegging kan frigjøre kapasitet til meningsskaping av uforutsette ting, og det er tydelig hvordan å velge ut, velge rekkefølge og å koble sammen tar utgangspunkt i god overvåking. «All of this leads to more coherent, yet student-focused, discussions» (Smith & Stein, 2018, s. 15).

Både Smith og Stein (2018, s. 91) og Kazemi og Hintz (2019, s. 33) trekker frem samtalegrep som verktøy for å drive den matematiske diskusjonen/samtalen. Smith og Stein (2018, s. 95-96) sier at samtalegrepene komplimenterer de fem praksisene og fremmer elevers resonnering og tenkning. Kazemi og Hintz (2019, s. 29) trekker det blant annet frem i sammenheng med åpen strategideling og sier at det «gir deg muligheten til å utvikle de reglene du trenger for å ha et miljø for produktive matematiske samtaler». De redegjør for «hvordan strukturere og lede gode, matematiske diskusjoner» basert på mange av de samme prinsippene Smith og Stein (2018) og Chapin et al. (2013) beskriver.

2.4.2 Talk moves

Chapin et al. (2013) presenterer flere samtalegrep og beskriver hvordan de kan opptre i matematikkundervisning. I sine observasjoner av lærere som lykkes i å bruke samtale til støtte for læring i sin undervisning, fant de «four steps toward productive talk» som går igjen. Chapin et al. (2013, s. 10-12) sine fire steg handler om å hjelpe elevene klargjøre og dele sine tanker, orientere dem mot andre elevers tenkning, bedre deres egen resonnering, og engasjere dem i andre elevers resonnering. Videre påpeker de at dersom elever skal ha mulighet til å delta i diskusjonen, må de evne å dele sine tanker og resonnement slik at det er noenlunde forståelig for andre. Deltakelse i diskusjon handler ikke bare om å kunne dele egne bidrag, men også om å lytte og kunne ta stilling til andres bidrag. Gjennom de to siste stegene skal læreren støtte elevene i både å utype sine egne resonnement og involvere seg i andres, som gir grobunn for ekte og produktive diskusjoner. Chapin et al. (2013, s. 11-30) presenterer flere samtalegrep læreren kan bruke innenfor hver av de fire stegene i arbeidet med å tilrettelegge for og drive denne typen klasseromssamtale.

Det er viktig å ta seg tid til å bearbeide elevenes ytringer, slik at de opplever at en ønsker å vite hva de tenker og får muligheten til å gjøre seg forstått (Chapin et al., 2013, s. 12). Chapin et al. (2013, s. 13-14) presenterer ulike grep en kan bruke for å hjelpe elevene dele og klargjøre sine tanker. En måte å gi elevene tid til å gjøre tanker om til ord er *å vente* minimum fem sekunder, men det er ikke alltid dette er nok for å få i gang diskusjonen. Samtalegrepet *snu og snakk* er naturlig å bruke etter en har stilt et spørsmål og responsen er liten. Her kan en gi elevene alt fra 30 sekunder til et par minutter til å sammen i par sortere og klargjøre tankene sine. Alternativt kan en bruke grepet *stopp og noter*, hvor elevene får rom til å notere spørsmål eller ideer til løsninger på oppgaven. Når elevene får diskutere med en partner eller notere ned tanker, ansvarliggjøres de til å tenke på oppgaven (Van de Walle et al., 2018, s. 28). Underveis kan læreren bevege seg rundt, se og lytte for å få innsikt i elevenes tanker og danne et bedre utgangspunkt for den videre samtalen (Chapin et al., 2013, s. 13-14).

Det er ikke uvanlig at elever velger å dele et minimum av hva de tenker, som kan gjøre det utfordrende å forstå hva de forsøker å si (Chapin et al., 2013, s. 16-17). Ved å bruke grepet *si mer*, bes eleven om å utdype sitt resonnement, samtidig som læreren viser et behov for å forstå hva elevene tenker og signaliserer et ønske om mer enn et korrekt svar. (Chapin et al., 2013, s. 16-17). For å oppnå større fokus på resonnering, sier Chapin et al. (2013, s. 21) at elevene må bli vant til å forklare sine tanker og forklare hvorfor de sier det de sier. En måte læreren kan hjelpe elevene utdype sine resonnement er bruk av samtalegrepet *presse for resonnering*, eksempelvis ved å stille spørsmålene: «How did you get that answer? Why do you think that? Can you prove that to us? What makes you think that?» (Chapin et al., 2013, s. 21). Van de Walle et al. (2018, s. 4) trekker frem viktigheten av å lære elevene å være eksplisitte i resonnementene sine. Videre sier de at læreren må gjøre forventningen til presisjon og klarhet tydelig og stille oppklarende spørsmål når de kommuniserer sine ideer, noe som bidrar til å få frem detaljene i resonnementene deres. Å skape oppmerksomhet rundt presisjon i det matematiske språket er et grep som kan styrke utviklingen av matematiske språkferdigheter – en viktig del av konseptuell forståelse (Livers & Elmore, 2018, s. 162/171).

Chapin et al. (2013, s. 17-18) påpeker at det kan være nødvendig å rydde opp i og omformulere elevenes forklaringer. Samtalegrepet *så du sier at* er et verktøy som gir læreren mulighet til å omformulere det eleven forsøker å si med et mer presist språk, samtidig som det bevarer elevens eierskap i resonnementet (Chapin et al., 2013, s. 17-18). Når alle har forstått påstanden og resonnementet bak, kan den produktive diskusjonen finne sted, der en faktisk får muligheten til å jobbe med andres tanker og resonnement og oppnå robust læring (Chapin et al., 2013, s. 24). Gjennom resonneringsgrepene *er du enig eller uenig* og *hva tenker du om det* hjelpes elevene til å engasjere seg i andres resonnement og får mulighet til å ta stilling til det som blir diskutert. Van de Walle et al. (2018, s. 28) sier denne typen grep kan bidra til meningsfulle diskusjoner. En annen måte å engasjere på er grepet å *tilføye* til andres bidrag. Grepet åpner opp for å delta i diskusjonen, men ikke med en forventing om et konkret bidrag. Det kan være gunstig dersom bidragene er ufullstendige, samt underbygger det at hele klassen samarbeider om en felles forståelse (Chapin et al., 2013, s. 27).

2.4.3 Sosiale og sosiomatematiske normer

«It´s common knowledge that learning takes place most easily within an atmosphere of respect and support» (Chapin et al., 2013, s. 68). For at elevene skal dele sine tanker, slik at andre kan respondere på de, er det viktig å etablere normer som sikrer at elevene føler seg trygge i disse situasjonene (Chapin et al., 2013, s. 12). Ifølge Yackel og Cobb (1996, s. 460) omhandler både sosiale og sosiomatematiske normer mønstre i sosiale interaksjoner. Sosiomatematiske normer skiller seg fra generelle sosiale normer på den måten at de er spesifikt rettet mot elevers matematiske aktivitet. En forventing om at elevene skal forklare sine løsninger og tanker er en sosial norm, men hva som er en akseptabel matematisk forklaring er en sosiomatematisk norm. Hva som anerkjennes som matematiske forklaringer og rettferdiggjøring i klasserommet, og hva som gjelder for at noe skal være matematisk annerledes, sofistikert eller elegant, er eksempler på sosiomatematiske normer (Yackel & Cobb, 1996, s. 461).

Etableringen av de sosiomatematiske normene åpner læringsmuligheter for både lærer og elever (Yackel & Cobb, 1996, s. 466). En viktig del av å lære matematikk er å lære hva som teller som legitim rettferdiggjørelse (Carpenter et al., 2003, s. 85). Rettferdiggjøring er sentralt i matematikk og kommer i mange former, lenge før elevene møter formelle bevis. For å kunne gi mening til konsepter og prosedyrer, må eleven kunne rettferdiggjøre konseptene og prosedyrene for seg selv. Når de deler sine ideer og blir spurt om å overbevise andre om validiteten i sin fremgangsmåte, må de bruke argumenter som er overbevisende for andre (Carpenter et al., 2003, s. 85). Carpenter et al. (2003, s. 87-92) presenterer tre forskjellige klassifiseringer av elevers forsøk på å rettferdiggjøre en matematisk påstand:

- Appellere til autoriteten: Ved å appellere til autoriteten unngås matematisk rettferdiggjørelse. Det er viktig at elever selv avgjør om noe gir mening og ikke bare aksepterer det som sant fordi noen andre sier det.
- Rettferdiggjøring gjennom eksempel: Tanken om at flere eksempler som viser det samme tyder på at det stemmer, i hvert fall inntil noen kommer med et mot-eksempel.

- Generelle former for rettferdiggjøring: Når elevene innser eksemplenes begrensninger og bruker mer generelle former for argumentasjon.

Dersom det legges opp til at læreren til enhver tid skal gi respons på elevenes resonnement, opplever de ikke et ansvar for å ta del i hverandres bidrag (Chapin et al., 2013, s. 20), og kommunikasjonen følger et mønster hvor alle bidrag vurderes av læreren. Når læreren er den som skal bekrefte riktig løsning istedenfor å benytte samtalegrep som involverer elevene, mister en mulighet til å engasjere elevene i meningsfulle diskusjoner og begrenser læringsmulighetene (Van de Walle et al., 2018, s. 28). Ønsker en å engasjere elever i diskusjon som bidrar til læring, må en hjelpe elevene å være orientert om medelevers tanker og få med seg og forstå innholdet. I situasjoner der elevene utfordres til å vurdere og sammenligne egne og andres svar, strekker aktiviteten seg ut over å lytte og forstå bidrag til å identifisere likheter og forskjeller mellom løsningsmetoder. En slik type reflekterende aktivitet har stort potensiale til å bidra i elevers matematiske læring (Yackel & Cobb, 1996, s. 464). Elever er ofte mer mottakelig for kritikk fra sine medelever enn fra læreren, og elevene kommuniserer gjerne med enkle ord som er lette å forstå (Boaler, 2015, s. 87). Likevel er den asymmetriske rollen i klasserommet tydelig, og lærerens respons på elevenes forslag fungerer som en indikator på hvordan bidragene verdsettes matematisk (Yackel & Cobb, 1996, s. 464).

Elever kan ofte ende opp med å anta at de har svart feil dersom læreren stiller spørsmål til forklaringen deres (Yackel & Cobb, 1996, s. 467). Boaler (2015, s. 2) beskriver elefanten i klasserommet som en holdning til matematikk som et fag hvor de som lykkes er intelligente og et fag du enten mestrer eller ikke evner å mestre. Ideen om at matematikk er en medfødt gave som noen har og andre ikke har, er en svært skadelig myte for barns matematiske utvikling (Boaler, 2015, s. 186). Ifølge Boaler (2015, s. 187-188) er det viktig å anerkjenne feilsvar for å fjerne tanken om at å gjøre feil i matematikk er en dårlig ting og at det betyr en ikke er en «matteperson». Van de Walle et al. (2018, s. 29) påpeker at det er uunngåelig at elever gjør feil og viser misoppfatninger og naive oppfatninger – spesielt når utfordrende oppgaver løftes frem i klasserommet. En ønsker gjerne ikke å fremheve en elevs feil eller misoppfatning, fordi en er redd for at det vil gjøre eleven flau eller forvirre elever som sliter. Hvordan en velger å behandle elevers feil og misoppfatninger i klasserommet har en enorm effekt på elevenes oppfatning om læring og seg selv som elever. Når feil, misoppfatninger og naive oppfatninger oppfattes og brukes for å måle hvor «smarte» noen er, kan elever gjemme sine feil og sin manglende forståelse (Van de Walle et al., 2018, s. 29).

«We know that it is really important for students to take risk, engage in productive struggle, and make mistakes» (Boaler, 2015, s. 188). Van de Walle et al. (2018, s. 29) sier det er ønskelig at elever omfavner tanken om å se feil, misoppfatninger og utfordringer som muligheter for læring. Faktisk er dette en kritisk del av undervisningspraksisen som støtter «productive struggle» i læringen av matematikk. Å verdsette feil eller misforståelser i plenum og få elevene til å tenke over hvorfor det er en feil eller misforståelse, forsterker det viktige budskapet om at vi alle gjør feil og har misoppfatninger, og kan forbedre forståelsen vår ved å undersøke dem nærmere (Van de Walle et al., 2018, s. 29).

2.4.4 Bruk av ros, differensiering og kontekst

Matematikk spiller en unik rolle i de fleste barns læring; faget som kan ødelegge selvtilliten, få de til å føle seg håpløs og dum, eller være en kilde til gode opplevelser og selvtillit dersom det gjøres på riktig måte (Boaler, 2015, s. 1). Dweck (2009) hevder at å rose elever for sin intelligens forsterker budskapet om at deres ferdigheter er «satt» (fixed-mindset), og svekker selvtillit og motivasjon. Istedenfor bør en fokusere på å rose prosessen (deres valg, strategier, innsats, utholdenhet osv.), som forteller eleven hva de gjorde for å lykkes og hva de kan gjøre for å lykkes igjen – et viktig element for å vise at deres ferdigheter kan utvikles (growth-mindset).

Differensiering er et grep en kan bruke for å oppnå likhet for alle elevene i klasserommet (eks. Sousa & Tomlinson, 2011; Tomlinson, 1999; Van de Walle et al., 2018). For å kunne differensiere, må en bort fra 'one-size-fits-all' tanken om undervisning og rette fokuset over på elevene – de som skal lære noe (Sousa & Tomlinson, 2011, s. 7-15). Den grunnleggende ideen for differensiering i undervisningstilnærmingen er at læreren er bevisst på å anerkjenne elevene som enkeltindivider, gjør innholdet meningsfullt og skaper et læringsmiljø som kobler sammen innhold og elever (Sousa & Tomlinson, 2011, s. 15). Det betyr ikke at læreren skal lage individuelle øktplaner til hver elev (Van de Walle et al., 2018, s. 55).

Et differensiert klasserom kjennetegnes blant annet ved at vurdering brukes formativt, forskjellige perspektiver på ideer søkes, læreren legger til rette for at elevene skal bli mer selvstendige og elevene hjelper andre elever (Tomlinson, 1999, s. 16). Noen konkrete differensieringsgrep lærere kan gjøre er i følge Tomlinson (1999, s. 121-122) å justere vanskelighetsgrad, tempo, grad av selvstendighet og graden av konkret/abstrakt. Det er ingen «riktig måte» å drive differensiert undervisning; den må passe lærerens undervisningsstil, så vel som elevenes behov (Tomlinson, 1999, s. 3).

Matematikk ble lenge formidlet gjennom abstrakte problemer med lite rot i omverden, men i nyere tid er bruk av kontekst blitt mer vanlig (Boaler, 2015, s. 46). Skovsmose (2022, s. 3-6) skiller mellom «ren» matematikk, matematikk med referanser fra en «semi-virkelighet» og matematikk med referanser fra «virkeligheten», og hvor vidt matematikken er en er del av et oppgaveparadigme eller et undersøkelseslandskap, der han alltid har viktiggjort at elever må bli invitert inn i et undersøkelseslandskap. En måte å referere til semi-virkelighet og virkelighet er ved bruk av kontekst (Skovsmose, 2022), og ifølge Boaler (2015, s. 46-47) er bruk av kontekst en viktig del av matematikken, men det må benyttes der det er hensiktsmessig og på en fornuftig måte. Den må være realistisk og tilføre noe, gjerne i form av å vekke elevenes interesse eller modellere et konsept. En realistisk bruk av kontekst er der elevene får presentert en virkelig situasjon som krever matematisk analyse og inneholder elementer de får bruk for. Kontekst kan også brukes til å formidle mening gjennom visuelle representasjoner, samtidig som det er viktig å begrense mengden kontekstuell informasjon elevene ikke får bruk for (Boaler, 2015, s. 48).

3 Metode

I dette kapittelet er målet å tydeliggjøre hvordan vi har gått frem i forskningsprosessen for å undersøke og besvare problemstillingen «*hva kjennetegner matematikkundervisningen til tre anerkjente lærere på 7.- 10. trinn i New Zealand?*». I første delkapittel begrunnes valget av en kvalitativ tilnærming, etterfulgt av studiens forskningsdesign. Deretter redegjøres det for utvalget og utvalgsprosessen, samt metodene for datainnsamling. Videre beskrives vår analyseprosess, for så å presentere våre refleksjoner rundt studiens kvalitet. Kapittelet avsluttes med våre forskningsetiske betraktninger.

3.1 En kvalitativ tilnærming

Temaet for studien er å undersøke hva som kjennetegner undervisningen til tre lærere som er anerkjent i det lokale utdanningsmiljøet i New Zealand. Formålet er å identifisere og analysere hva disse kjennetegnene er. For å kunne undersøke problemstillingens «hva», må vi være åpne og fleksible, noe som er viktige styrker ved kvalitativ forskning (Gleiss & Sæther, 2021, s. 30-31). Metoden legger vekt på det idiografiske og distinkte (Cohen et al., 2018, s. 223), samtidig som den lar forskningsdeltakeren påvirke kunnskapsutviklingen med sine egne perspektiver (Gleiss & Sæther, 2021, s. 30). En kombinasjon av observasjon og intervju ble valgt for å kunne beskrive kjennetegnene ved lærernes matematikkundervisning mer helhetlig, fordi vi fant det gunstig å få et grundigere innsyn i lærernes intensjon bak valgene sine i tillegg til det som kom frem i undervisningsøktene.

Forskningsdesign

Innenfor kvalitativ forskning finnes det flere overordnede tilnærminger. For å kunne undersøke hva som kjennetegner undervisningen til de tre lærerne kvalitativt, var det nødvendig å være fysisk til stede. Å studere en liten gruppe i deres naturlige setting kan beskrives som en naturalistisk kasusstudie med en mikroetnografisk tilnærming (Cohen et al., 2018, s. 292). En kasusstudie innebærer detaljerte beskrivelser av fenomenet som studeres i sin kontekst (Postholm, 2010, s. 50), og Geertz (1973, s. 3-30) omtaler etnografi noe forenklet som «tykke beskrivelser», fordi konteksten og intensjonen bak det som skjer er sentral for beskrivelsen. De to tilnærmingene (kasusstudie og mikroetnografi) fremstår som overlappende og kan spille på flere av de samme styrkene. Som et resultat av disse betraktningene valgte vi å kombinere de to tilnærmingene. Gjennom å være til stede kunne vi studere lærerne i deres naturlige kontekst, og observasjon kombinert med intervju gav oss innsyn i intensjonene bak lærernes valg i undervisningen. Dette muliggjorde tykke beskrivelser og gav oss et bedre utgangspunkt for å helhetlige beskrive hva som kjennetegner lærernes undervisning. Postholm (2010, s. 50) sier at målet med den kvalitative forskningen er å gi et helhetlig bilde av det som studeres og at dette muliggjøres med en kasustilnærming, fordi blikket er rettet mot et konkret kasus i sin kontekst. Vårt valg om å kombinere observasjon og intervju støttes av Cohen et al. (2018, s. 253), som sier at metodetriangulering er viktig for den indre validiteten i en etnografisk studie (noe vi kommer tilbake til i kapittel 3.5.2).

3.2 Utvalg og rekruttering

Utgangspunktet for studien var at vi søkte om å få delta i det pågående internasjonaliserings- og utviklingsprosjektet Teacher education network (TEDNET), som er et samarbeid mellom Universitetet i Tromsø, Universitetet i Auckland og UC Berkeley. Vi kontaktet TEDNET sin samarbeidspartner ved UiA, som fortalte at New Zealand (i likhet med Norge) har hatt sitt «PISA-sjokk», noe som blant annet førte til nye læreplaner. I 2006 scoret de 522 på PISA-testen (Kjærnsli et al., 2007, s. 22), og ser en på resultater i etterkant av dette (500 poeng i 2012, 495 poeng i 2015 og 494 poeng i 2018), er det en nedadgående trend i prestasjoner i matematikk blant 15-åringer i New Zealand (Jensen et al., 2019, s. 28). Denne nedadgående trenden og faktum at New Zealand gjør det dårligere i matematikk på internasjonale prøver enn Norge, gjorde det vanskeligere å argumentere for å hente inn data i New Zealand. Selv om samarbeidsprosjektet til TEDNET er mellom Norge, USA og New Zealand, ble Finland vurdert som et mulig alternativ. Lærerutdanningen på Universitetet i Tromsø (UiT) ble som nevnt innledningsvis i stor grad utviklet gjennom å se hvordan Finland gjorde det (Drageset & Ytreberg, 2017, s. 5), men med et fall fra 548 poeng i 2006 (Kjærnsli et al., 2007, s. 22) til 507 poeng i 2018 (Jensen et al., 2019, s. 28) på PISA-testen, lunket interessen for Finland.

Samtidig kan en stille spørsmål rundt verdien til prøver og dets resultater. Vi registrerer blant annet flere likhetstrekk mellom Norge og New Zealand sine læreplaner i matematikk (særlig oppbygning og målformulering), noe som sannsynliggjør overføringsverdi til norsk kontekst. I tillegg viste samarbeidspartneren ved UiA til spennende utviklingsprosjekter (eksempelvis DMIC) og visste om flere anerkjente lærere som kunne være interessante å studere. TEDNET-prosjektet var en døråpner for oss som gjorde det mulig å reise til New Zealand for å samle inn data. Inntrykket av sannsynlig overføringsverdi mellom kulturene, tilgjengeligheten og samarbeidspartneres nettverk ble viktig for valget av lokasjonen.

I forskningslitteraturen brukes ulike adjektiv for å beskrive lærere. Bjerkeli (2017, s. 3-4) studerte en «flink» lærer og beskrev det som en lærer ansett som ekstra dyktig av miljøet rundt. Hva som betraktes som kompetente lærere er som nevnt kulturelt betinget (Clarke et al., 2006, s. 11), og i likhet med Bjerkeli (2017, s. 3-4) lot Clarke et al. (2006) det være opp til det lokale utdanningsmiljøet, men Clarke et al. (2006) sier ikke hva de legger i selve begrepet «kompetente» lærere. Vår hensikt er ikke å måle eller vurdere lærerne, noe vi heller ikke har kompetansegrunnlag til å gjøre. I vår studie brukes begrepet *anerkjente* lærere, fordi det tydeliggjør at det er miljøet rundt dem som sier at de er anerkjente. Det understreker viktigheten av å finne lærere som er anerkjent lokalt i New Zealand, heller enn at vi skulle vurdere dem med vårt utgangspunkt. Det som er vesentlig for denne studien er at lærerne er *anerkjente* for sin praksis i det lokale utdanningsmiljøet, og hele vurderingen av informanter har derfor vært opp til vår samarbeidspartner ved UiA.

Det er mange måter å rekruttere informanter. Snøballmetoden er en metode for å rekruttere informanter, hvor en bruker nettverket sitt og spør om andre kjenner til noen som kunne tenke seg å delta (Johannessen et al., 2021, s. 71). Andersson-Bakken og Dalland (2021, s. 42) sier at det er en nyttig metode dersom en er avhengig av informanter det er vanskelig å få tak i – slik som i vårt tilfelle, hvor vi var avhengige av å få kontakt med *anerkjente* matematikklærere som underviste i *New Zealand* (med en geografisk begrensning til Auckland og nærliggende byer med tanke på hva som var gjennomførbart). Kriteriene som var satt krevde kjennskap til hva som verdsettes i kulturen, kjennskap til det lokale utdanningsmiljøet og tilgang til de aktuelle informantene. Partene i TEDNET-prosjektet hjalp med utvalgsprosessen og skaffet som nevnt en samarbeidspartner fra UiA. Gleiss og Sæther (2021, s. 41) bruker begrepet *portvokter* om en person som kan bidra i rekrutteringsprosessen. De beskriver personen som en døråpner med tilgang til det sosiale miljøet en søker. Vår samarbeidspartner ved UiA hadde god kjennskap til det lokale utdanningsmiljøet og et nettverk som gjorde det mulig å få tak i informanter som tilfredsstilte kriteriene.

Likevel ble ikke rekrutteringsprosessen så enkel som først antatt. Blant annet er ikke lærerutdanningen i New Zealand en masterutdanning slik som i Norge, noe som medfører at lærerne der ikke er vant til å bli kontaktet for å delta i masterprosjekter hvor de skal bli observert og intervjuet. En annen utfordring var at rektorene i New Zealand i større grad skal involveres i slike henvendelser enn i Norge. Gleiss og Sæther (2021, s. 41) poengterer at en portvokter også kan hindre tilgang til informanter ved å ikke gi de tillatelse til å delta. Vi hadde altså både portvoktere som muliggjorde tilgang og som hadde i oppgave å verne om sine ansatte. Som besøkende i en ny kultur var det viktig å følge rådene vi fikk underveis. Vår samarbeidspartner ved UiA anbefalte oss å skrive et utfyllende informasjonsskriv til rektorer og lærere med informasjon prosjektet, en beskrivelse av oss selv, hvor vi kom fra og landskapet der (vedlegg 1). Det var vanlig å presentere seg slik, og for oss var det viktig å vise åpenhet og respekt for kulturen.

Med tre lærere fra tre ulike skoler, som alle tilfredsstilte utvalgskriteriene og hadde mulighet til å delta, formulerte vi problemstillingen: «*Hva kjennetegner matematikkundervisningen til tre anerkjente lærere på 7.- 10. trinn i New Zealand?*». Videre presenteres utvalget gjennom å gi en kort beskrivelse av lærerne. Alle er anerkjente i utdanningsmiljøet, samtidig som de har ulike tilnærminger til matematikkundervisning. Vi har valgt å gi lærerne pseudonymene Eskil, Derek og Sølvi, med bakgrunn i noe som kjennetegner undervisningen til hver av dem.

3.2.1 Lærer 1 – Eskil

Den første læreren har som nevnt over 20 års erfaring som lærer, mastergrad i matematikkdidaktikk, vært med å utvikle undervisningsressurser i matematikk og er kjent i utdanningsmiljøet for svært gode resultater. I intervjuet forteller læreren at gjennom hans utdanning var utforskende undervisning «the flavor of the time», og han underviste slik i flere år. Etter hvert gikk han over til en mer konservativ tilnærming med et større fokus på eksplisitt undervisning, og det er derfor han har fått pseudonymet Eskil. Han sammenligner selv sin matematikkdidaktiske utvikling med nevnte Barton (2018) sine beskrivelser av sin reise fra utforskende til eksplisitt undervisning. Eskil opplever at flere elever ofte mangler den grunnleggende forståelsen for å få et skikkelig utbytte av utforskende økter. Han gikk etter hvert bort fra å «bruke en time på noe som tar fem minutter», men bruker fremdeles utforskende elementer og undervisningsopplegg. Videre trekker han frem at det viktigste er at lærere spiller på sine egne styrker, der han forsøker å levere innhold og konsepter så godt som mulig med et mål om å utvikle en entusiasme for matematikk hos elevene.

3.2.2 Lærer 2 – Derek

Den andre læreren er svært erfaren, har tette bånd til flere av landets universiteter og betegnes som en gallionsfigur innenfor DMIC-undervisning (Developing Mathematical Inquiry Communities), som er bakgrunnen for pseudonymet Derek. Denne utforskende undervisningstilnærmingen er utviklet over lang tid og satses stort på i New Zealand. Han sier at å være en del av DMIC-prosjektet er spennende og lærerikt, og setter særlig pris på det kollektive samarbeidet modellen bidrar til, både hos lærerne og elevene. Hans tilnærming følger DMIC sine undervisningsprinsipper, hvor han ser på seg selv som en tilrettelegger i elevenes egen utforskningsprosess.

3.2.3 Lærer 3 – Sølvi

Den tredje anerkjente læreren har undervist i over 30 år, og driver i tillegg med etter- og videreutdanning av matematikklærere. Hun er også en del av utvalget som utarbeider forslag til ny læreplan i matematikk. Læreren har fått pseudonymet Sølvi på grunn av sitt fokus på å stille spørsmål og bygge opp elevenes selvtillit i undervisningen. Der de to andre lærerne anser seg selv å være nært knyttet til en bestemt undervisningstilnærming, forteller Sølvi at hun har «plukket opp litt her og der» og fremdeles prøver ut nye ting i sin tilnærming til undervisning. Et element hun beskriver som sentral i sin matematikkundervisning er å stille seg undrende til elevene. Hun stiller elevene spørsmål som får dem til å tenke og får dem til å stille spørsmål rundt hennes tenkning, fordi hun ikke ønsker å være en matematisk autoritet. Videre påpeker hun at det er viktig å tilpasse seg elevgruppene, noe som endrer seg fra år til år og klasse til klasse, og nylig tok hun over to klasser som sliter med lav selvtillit i matematikkfaget.

3.3 Datainnsamling

Datainnsamlingen foregikk over to uker i november 2022. Observasjon av undervisning og intervju med lærerne ble valgt som metoder, fordi vi anså det som nødvendig for å muliggjøre tykke beskrivelser av lærernes undervisning. Vi bemerker at datainnsamlingen foregikk like før sommerferien i New Zealand. Elever i 9. og 10. klasse skulle snart ha eksamen, og alle undervisningsøktene til Eskil og Sølvi var forberedende til det. Derek sin 7. og 8. klasse har ikke eksamen. Siden skoleåret i New Zealand går fra januar-desember, er elevene et halvt år yngre sammenlignet med samme årstrinn i Norge.

3.3.1 Observasjon

I og med at vi var til stede i samtlige undervisningsøkter, var rollen vi hadde som observatører avhengig av hvor deltakende vi var i situasjonen. Postholm et al. (2018, s. 115) sier at «observatør-som-deltaker»-rollen er en observatørrolle hvor forskeren er til stede i klasserommet under observasjonen, men ikke deltar i aktiviteten. Dette er en beskrivelse som treffer godt for vår tilnærming. Vi var til stede i undervisningen og satt bakerst i klasserommet. I tilfellene hvor elevene henvendte seg til oss var vi imøtekommende og svarte på spørsmålene som ikke omhandlet undervisningen. Kom de med faglige spørsmål, bad vi de henvende seg til læreren. Måten vi forholdt oss til elvene er i tråd med det Postholm et al. (2018, s. 115) anbefaler for deltakende observasjon av undervisning.

Slike deltakende observasjonsformer muliggjør rike og tykke beskrivelser (Cohen et al., 2018, s. 551). Gleiss og Sæther (2021, s. 104-105) beskriver observatørrollen som en pendel mellom fullstendig deltaker og fullstendig observatør, hvor en i ustrukturert og semistrukturert observasjon befinner seg en plass imellom disse ytterpunktene. De sier at i en semistrukturert tilnærming er fokuset til en viss grad styrt, men forskeren er fortsatt åpen for nye aspekter ved det som observeres. Observasjonsformen egner seg til utforskende tilnærminger der en har lite forhåndskunnskap om fenomenet (Gleiss & Sæther, 2021, s. 104). Vårt mål var å observere lærerne for å kunne beskrive kjennetegn til deres undervisning – uavhengig av hverandre. På forhånd ble vi fortalt at de tre lærerne hadde ulike tilnærminger til sin matematikkundervisning, men vi fikk lite konkret informasjon om hva dette innebar. Vi ønsket å være relativt åpen i vår tilnærming for å kunne ta inn det interessante, samt unngå å forhåndsdefinere kategorier som kunne vise seg å ikke være treffende, og fant det naturlig å velge en semistrukturert tilnærming.

Med en semistrukturert tilnærming til observasjon fokuserte vi på lærerens undervisning, samtidig som vi tok notater om elevenes respons. Elevenes respons på lærerens handlinger var viktig å notere seg for å gi et mer helhetlig bilde av læreren. Det ble også utarbeidet en huskeliste med åpne kategorier som tok utgangspunkt i teoretiske prinsipper vi hadde blitt kjent med gjennom utdanningsløpet, samt de fem dimensjonene i TRU-rammeverket. Rammeverket har tilhørende observasjonsguide, men istedenfor å bruke guiden under observasjonen, valgte vi heller å gjøre oss kjent med rammeverket som en del av forberedelsen og forholde oss åpen under selve observasjonene. Som Schoenfeld (2016, s. 1-3) poengterer er ikke TRU-rammeverket en oppskrift for hvordan et «powerful classroom» skal se ut. De fem dimensjonene er fremtredende i alle slike klasserom, uavhengig av hvilken tilnærming læreren har. Derfor har vi valgt å bruke rammeverket som grunnlag for å drøfte likheter og forskjeller blant de tre lærernes undervisningspraksis (kap. 4.4) innenfor de fem dimensjonene (basert på kjennetegnene ved deres undervisning), heller enn å følge en guide og undersøke om lærernes praksis samsvarer med noen utvalgte definerte kategorier.

Observasjon er krevende, fordi en skal få med seg det som skjer og samtidig skrive gode notater (Andersson-Bakken & Dalland, 2021, s. 131). Vi valgte å sitte bakerst i klasserommet, fordelt på hver vår side for å få god oversikt over lærerens handlinger og noterte både verbale og non-verbale observasjoner fortløpende. I og med at vi var to observatører hadde vi også muligheten til å veksle mellom å være aktivt observerende og å fylle ut viktige detaljer i notatene underveis. Det var også gunstig for påliteligheten, fordi det gav oss muligheten til å vurdere hvor vidt vi hadde oppfattet situasjoner likt eller ulikt i etterkant. Arbeidet med å fylle ut observasjonsnotatene i etterkant opplevdes viktig for å få fullstendige data å jobbe videre med. Gleiss og Sæther (2021, s. 115-116) sier ettarbeidet med å renskrive notatene og utdype kommentarer er viktig, særlig fordi inntrykkene fra observasjonen endres eller glemmes etter kort tid. For å forhindre at det skulle skje satte vi oss ned rett etter øktene og fylte ut notatene hver for oss, før vi sammenlignet og utarbeidet et felles observasjonsnotat. Vi tok også bilder av det læren skrev på tavla og hentet inn kopier av undervisningsmateriellet som elevene hadde jobbet med, slik at vi kunne se nærmere på det senere.

Tidlig i prosjektet var tanken å følge én lærer i to uker og det ble søkt om bruk av video- og lydopptak. Kort tid etter ble søknaden avvist, og fordi datainnsamlingen skulle gjøres i november (som er en hektisk periode i innspurten til sommerferien), anbefalte vår samarbeidspartner å samle inn data fra tre forskjellige lærere. At dette skjedde tidlig i prosjektet kan ha vist seg å være gunstig for studiens kvalitet. Først og fremst gav det oss tid til å undersøke fordeler og ulemper med observasjon som metode uten video- og lydopptak, slik at vi kunne være forberedt på utfordringer og heller spille på metodens styrker. I forberedelsene før datainnsamlingen øvde vi på å observere undervisning fysisk på UiT og ved å se på videoer av undervisning fra New Zealand. Vi la merke til at flere av undervisningsvideoene hadde et kunstig preg over seg, blant annet ved at elever så inn i kamera og virket lite komfortabel i situasjonen. Ifølge Cohen et al. (2018, s. 556) kan bruk av videoopptak skape endringer i oppførsel, noe som medfører mindre autentisk data. Siden det ble tre forskjellige lærere (istedenfor en lengre observasjon av én lærer), ville det nok vært svært ugunstig for autentisiteten i dataen med ytterligere inngrep som å rigge opp kameraer for så få økter.

Likevel kunne vår tilstedeværelse i undervisningen i seg selv påvirke elevene og lærernes oppførsel. Andersson-Bakken og Dalland (2021, s. 130) sier at effekten observatøren kan ha på deltakerne kan forebygges av grep som trygger situasjonen for deltakerne (som å introdusere seg selv og fortelle om hensikten med observasjonene). I tillegg til informasjonsskrivet de fikk tilsendt, møtte vi lærerne i forkant av observasjonene og utdypet mer om hensikten med studien vår. Vi introduserte oss også for elevene før hver observasjonsøkt med en ny elevgruppe. Vi fortalte om oss selv og at hensikten med besøket var at vi selv skulle bli lærere og var der for å observere og lære av læreren deres. Elevene fikk stille oss spørsmål, noe vi opplevde lettet på stemningen og ufarliggjorde situasjonen. Etter undervisningen spurte vi lærerne om hvordan de opplevde økten sammenlignet med en vanlig dag uten observatører. Samtlige beskrev gjennomføringen som autentisk og sa at det virket som om elevene i liten grad lot seg påvirke av situasjonen. Vi hadde det samme inntrykket.

3.3.2 Intervju

For å få en bedre innsikt i intensjonene bak lærernes valg og deres perspektiver på undervisning, vurderte vi intervju som en gunstig metode. Intervju er et fleksibelt verktøy, hvor en kan hente ut informasjon på et dypere nivå (Cohen et al., 2018, s. 506). Det gir innsikt i detaljer og gjør det mulig å forstå andres perspektiv på en bedre måte enn bare bruk av observasjon (Bjørndal, 2017, s. 107). Intervju av lærerne kunne med andre ord tilføre ny informasjon og gi tilgang til tanker og oppfatninger om undervisningspraksisen som observasjonene ikke kunne.

Både før og etter observasjonsøktene hadde vi uformelle samtaler med lærerne. Samtalene gav oss mer informasjon om skolens struktur og undervisningskultur, bakgrunn for struktureringen av klasserommet, elementer vi la merke til i undervisningen, og gjorde at vi ble bedre kjent med lærerne som enkeltindivider. Samtalene kan minne om det Gleiss og Sæther (2021, s. 79-80) omtaler som feltsamtaler. De sier at feltsamtaler ofte brukes i observasjonsstudier og har som mål å få innsyn i informantens tanker og erfaringer med utgangspunkt i konteksten. Feltsamtalene var ikke en del av datainnsamlingen, men gav oss innsikt og var (sammen med observasjonene) veiledende med tanke på hva vi ønsket å snakke om/vektlegge i intervjuene.

Vi benyttet oss av semistrukturert intervju, noe Kvale et al. (2015, s. 162) beskriver som et intervju med en viss form for struktur (der temaoversikt og forslag til spørsmål er formulert i forkant), samtidig som en står fritt til å variere hvilke spørsmål som stilles og deres rekkefølge. En av styrkene Gleiss og Sæther (2021, s. 80) trekker frem med denne intervjuformen er muligheten til å stille oppfølgingsspørsmål, slik at en kan få mer utdypende svar og har frihet til å ta tak i det som kommer frem underveis i intervjuet. På forhånd hadde vi tenkt gjennom noen spørsmål vi anså som viktige for å kunne beskrive kjennetegn med lærernes undervisning. De omhandlet blant annet hvordan lærerne planla undervisningen sin, om de brukte spesifikke undervisningstilnærminger og hva de opplevde som viktig å vektlegge i sin matematikkundervisning.

Samtidig var det et kort tidsrom mellom observasjon, feltsamtale og intervju. Vi ønsket å få læreren til å utdype interessante situasjoner og momenter vi hadde bemerket oss før intervjuene, noe den semistrukturerte tilnærmingen åpnet for. Det gav oss muligheten til å ta tak i det uforventede og få bedre innsikt i det som var fremtredende i situasjonene. En annen fordel med den semistrukturerte intervjuformen er at den også egner seg dersom en ønsker å sammenligne informantenes svar (Gleiss & Sæther, 2021, s. 80). Som nevnt ønsket vi ikke å vurdere lærerne opp mot hverandre (noe en gjerne gjør i en sammenligning), men var heller ute etter å se på likheter og forskjeller ved lærernes praksis og deres perspektiver, noe som drøftes i kapittel 4.4 og videre reflekteres rundt i studiens siste kapitler.

I forkant av intervjuene spurte vi lærerne om tillatelse (både skriftlig og muntlig) til å bruke lydopptak og informerte om at de stod helt fritt til å si at de ikke ønsket det. Ifølge Kvale et al. (2015, s. 205) er lydopptak den vanligste måten å registrere intervju og gjør at den som intervjuer i større grad kan konsentrere seg om samtalen. For oss gjorde dette at vi kunne være til stede i samtalen og slapp å notere underveis. Lydopptak sørger også for mer nøyaktighet og fullstendig informasjon, og gjør det mulig å transkribere intervjuet i etterkant (Bjørndal, 2017, s. 114). Dette var også en vesentlig fordel med tanke på vår manglende erfaring og kompetanse som intervjuere.

Det ble gjort tre separate intervju med lærerne, hvor alle ble gjennomført i sammenheng med en lunsj på en café i nærheten av deres skole. Vår samarbeidspartner ved UiA ønsket å gjøre det på denne måten – som en gest for å gi noe tilbake. Som en trygghet for både oss og informanten var samarbeidspartneren fra UiA til stede under alle intervjuene. En av studentene hadde hovedansvaret for å lede intervjuet. Dette gjorde det lettere for den som ledet intervjuet å holde en naturlig flyt i samtalen, og den som ble intervjuet trengte bare å forholde seg til en om gangen. Dersom det opplevdes naturlig kunne den av oss som ikke ledet intervjuet og samarbeidspartneren også delta i samtalen og komme med spørsmål underveis.

Intervjuene startet med noen enkle bakgrunnsspørsmål (som hvor lenge de hadde jobbet som lærere og hvilke fag de underviste i), noe Bjørndal (2017, s. 113) anbefaler for å få i gang samtalen. Videre fikk lærerne fortelle om sin opplevelse av egen undervisning og situasjoner som oppstod underveis. De fikk også dele sine perspektiver på undervisning og hva de opplevde som viktig i sin tilnærming til matematikkundervisning.

3.4 Analyse

Datagrunnlaget for vår studie baserer seg på observasjonsnotater av undervisningen og de transkriberte intervjuene med lærerne. Mengden observasjonsøkter varierte fra én til tre undervisningsøkter, avhengig av tiden de ulike lærerne hadde tilgjengelig.

I tilfeller hvor en har samlet inn dataen selv, går en inn i analyseprosessen med forkunnskaper om innholdet og har gjerne gjort seg noen betraktninger om innholdet på forhånd (Braun & Clarke, 2006, s. 87). Datamaterialet ble gjennomgått flere ganger i arbeidet med å renskrive og sammenfatte observasjonene. Ifølge Braun og Clarke (2006, s. 86) starter analyseprosessen når en begynner å legge merke til og søke etter mønster av interesse, noe som kan forekomme allerede i datainnsamlingen. Underveis i datainnsamlingen noterte vi ned refleksjoner vi gjorde oss omkring interessante elementer i undervisningen og intervjuene. Dette illustrerer hvordan analysen startet allerede under innsamlingen av data og at den mer systematiske analysen foregikk på et senere tidspunkt.

Ifølge Cohen et al. (2018, s. 643) innebærer kvalitativ dataanalyse å organisere, beskrive og redegjøre for dataen en har samlet inn, og videre søke etter mønster, tema og kategorier. Tidlig i prosessen med prosjektet ble det gjort vurderinger av hva som var hensiktsmessige tilnærminger for å identifisere kjennetegn ved lærernes undervisning. Braun og Clarke (2006, s. 78-79) beskriver tematisk analyse som en grunnleggende kvalitativ analysemetode og sier metoden er et fleksibelt og godt verktøy for å identifisere og analysere mønster/tema i dataen, noe som virket gunstig for å identifisere kjennetegn i vårt datamateriale. I tillegg sier Andersson-Bakken og Dalland (2021, s. 147) at tematisk analyse er et godt utgangspunkt for å analysere sammenhenger mellom observasjon og intervju, som også gjør metoden egnet for vårt formål.

Tematisk analyse kan gjøres induktivt, deduktivt eller som en kombinasjon. Gleiss og Sæther (2021, s. 171) sier at i en induktiv tilnærming definerer en kategorier med utgangspunkt i datamaterialet, i kontrast til en deduktiv tilnærming, hvor en forhåndsdefinerer kategorier med utgangspunkt i forskningslitteraturen. Ifølge Braun og Clarke (2006, s. 86) er det ikke noen riktig eller gal tilnærming til når i analysen en skal gjøre seg kjent med forskningslitteratur. Med tanke på den begrensede tiden vi hadde til datainnsamlingen, valgte vi å sette oss inn i tidligere forskning på feltet i forkant, fordi vi mente det kunne øke sannsynligheten for at dataen vi hentet inn var relevant for å kunne besvare problemstillingen.

Gjennom å kombinere egendefinerte kategorier med utgangspunkt i datamaterialet og kategorier med bakgrunn i forskningslitteratur, benytter vi både induktiv og deduktiv analysemetode, noe (Gleiss & Sæther, 2021, s. 171) kaller en abduktiv tilnærming. I en abduktiv kodeprosess benyttes en kombinasjon av empirinære koder (direkte hentet fra datamaterialet) og tematiske koder (fra empiri, intervju eller forskningslitteraturen) (Gleiss & Sæther, 2021, s. 174). Vi ønsket å utnytte kunnskap om forskningslitteraturen underveis i analysen for å få en bedre forståelse for innholdet vi jobbet med. Dette gjorde det nærliggende å velge en abduktiv tilnærming, som involverte en kombinasjon av empirinære koder og koder med utgangspunkt i litteraturen.

3.4.1 Tematisk analyse

Ifølge Braun og Clarke (2006, s. 86-87) er analysen en ikke-lineær og rekursiv prosess, hvor en gjennomgående beveger seg frem og tilbake i datasettet mellom ulike deler av analysen og skriveprosessen, slik det faller seg naturlig. De presenterer en stegvis guide bestående av seks faser som beskriver gangen i en tematisk analyse: *Gjør deg kjent med dataen, frembringe/generere koder, lete etter tema, gjennomgang av temaene, definering og navngiving av temaene, og produsere rapport/resultat*.

Første fase innebærer å gjøre seg kjent med dataen (via transkribering dersom det er nødvendig) og gjerne lese gjennom datamaterialet flere ganger og notere seg tanker og ideer om innholdet (Braun & Clarke, 2006, s. 87). Den systematiske delen av analyseprosessen startet for vår del med transkribering av intervjuene. Braun og Clarke (2006, s. 87-88) sier arbeid med verbale data krever transkripsjon av innholdet for å kunne gjennomføre en tematisk analyse. Vi startet med å transkribere samme utdrag på 10 minutter hver for oss, for så å sammenligne transkripsjonene, slik at vi fikk en felles forståelse for hvordan vi skulle gjøre det. Med en felles forståelse kunne vi fordele intervjuene mellom oss for å effektivisere arbeidet. Transkriberingen gjorde oss godt kjent med innholdet i datamaterialet, og videre leste vi gjennom både intervju og observasjoner hver for oss og tok notater, for så å snakke sammen om hva vi hadde bemerket oss.

Fase to var koding av datasettet, som går ut på å kode interessante trekk i datamaterialet og samle dataen som faller inn under samme kode (Braun & Clarke, 2006, s. 88-89). Sammen gikk vi gjennom og kodet empirinære koder (slik som spørsmålet *«hvordan har du tenkt?»*), noe som senere viste seg å være ett av flere *undrende* spørsmål som læreren Sølvi stilte i sin tilnærming til elevene. Vi brukte fargekoder for å holde bedre oversikt over kodene og lettere kunne samle utdragene som var tilknyttet de ulike kodene. Med et mål om å være tro mot lærerne og deres kjennetegn ble de analysert hver for seg. Dette innebar at vi kodet all dataen som tilhørte én lærer, før vi gikk videre til neste. Hittil i prosessen hadde dataen tilknyttet hver lærer blitt kodet og det var laget en oversikt utdragene som tilhørte de ulike kodene.

Tredje fase går ut på å samle kodene og tilhørende utdrag i potensielle tema (Braun & Clarke, 2006, s. 89). Vi forsøkte å få et bedre overblikk for å kunne identifisere temaene. Det var viktig å undersøke sammenhengene mellom kodene på tvers av observasjon og intervju (innenfor hver av lærerne) for å få en dypere forståelse og for å se om det var sammenheng mellom det lærerne faktisk gjorde og det de sa at de gjorde. Ett av temaene/kjennetegnene vi identifiserte var *bruk av variasjonsteori* – som viste seg å være en viktig del av undervisningstilnærmingen til læreren Eskil. Bruk av variasjonsteori i undervisning var et felt vi hadde lite kjennskap til på forhånd sammenlignet med andre temaer vi var kjent med fra utdanningen – som «five practices» og «talk moves». Temaet er et eksempel på den deduktive delen av vår abduktive tilnærming, fordi forskningslitteraturen var med å påvirke identifiseringen av dette temaet. For å forstå deler av dataen måtte vi sette oss inn i relevant forskningslitteratur underveis i analysen, som også er et eksempel på hvordan en hopper frem og tilbake mellom de ulike fasene som en del av prosessen. Etter hvert som vi forstod mer om hva variasjonsteori handlet om, kunne vi se at flere av kodene passet inn under temaet. Temaene vi identifiserte er det vi betrakter som kjennetegn ved undervisningen til hver av lærerne (eks. Eskils bruk av variasjonsteori, Dereks forberedelse til undervisning og Sølvi sitt fokus på selvtillit), noe som legges frem i kapittel 4.

Fase fire går ut på å vurdere og eventuelt justere temaene som er satt. Det vil si å gjennomgå og tilse at kodene og utdragene innenfor hvert av temaene samsvarer, før en gjøre en lignende prosess hvor en vurderer helheten basert på alle temaene og hele datasettet (Braun & Clarke, 2006, s. 91). I tillegg til å gå over de ulike delene for å se at de gav mening, var det viktig å forsikre oss om at temaene vi hadde kommet frem til representerte kodene og utdragene på en god måte. Prosessen førte blant annet til at vi opplevde ett av temaene som beskrev kjennetegn ved læreren Derek som for omfattende (lærerens grep i den avsluttende plenumssamtalen) og valgte å dele det inn i to mer konkrete tema (lærerens arbeid med normer i den avsluttende plenumssamtalen og læreren kobler sammen elevenes løsninger).

Fase fem handler om å definere essensen innenfor temaene en ønsker å presentere, og samtidig se til at helheten og innholdets kobling til problemstillingen er ivaretatt (Braun & Clarke, 2006, s. 92). For oss innebar dette å gjøre tema om til konkrete funn, som i dette tilfellet var kjennetegn ved lærernes undervisning. Det var viktig å holde den røde tråden og vurdere om de utvalgte temaene belyste problemstillingen på en god måte, samtidig som temaene var tro mot lærerne og faktisk kjennetegnet deres undervisning. Vi trakk ut, definerte og beskrev det som var sentralt å få frem innenfor de ulike delene. Arbeidet gjorde oss sikre på at lærerne skulle presenteres hver for seg, fordi det var viktig å ivareta den helhetlige beskrivelsen av hver enkelt lærer. Det var også gunstig for å få frem at det er mange måter å drive matematikkundervisning.

Dette ledet oss videre til sjette fase, som er siste steg i Braun og Clarke (2006, s. 93) sin modell for tematisk analyse. Fasen innebærer skriving av resultatet, hvor en forsøker å formidle innholdet i dataen overbevisende og forståelig for leseren, samt diskutere det opp mot problemstillingen. Denne fasen kommer først og fremst til uttrykk i kapittel 4, som er presentasjon og diskusjon av våre funn.

3.5 Studiens kvalitet

Kvaliteten på studien har betydning for hvor vidt en kan stole på det som legges frem eller ikke. I den sammenheng snakker en i dagligtalen om pålitelighet og gyldighet, som i forskningen gjerne omtales som reliabilitet og validitet (Andersson-Bakken & Dalland, 2021, s. 200). Videre vil vi redegjøre for kvaliteten ved å beskrive hvordan vi har forsøkt å motvirke eventuelle svakheter og spille på styrkene til våre metodiske valg for studien.

3.5.1 Reliabilitet

Reliabiliteten styrkes ved å gi grundige beskrivelser av gangen i forskningsprosessen og konteksten der forskningen ble utført (Johannessen et al., 2021, s. 256). Det har derfor vært viktig å være åpen om og tydeliggjøre valgene som ble gjort underveis – både gjennom grundige beskrivelser av prosessen og ved å beskrive og eksemplifisere datamaterialet slik at det er forståelig for leseren. Ifølge Postholm et al. (2018, s. 224) relateres reliabiliteten til refleksjonene som gjøres rundt påvirkningen forskeren kan ha for resultatet av studien. Det vil ikke være mulig å garantere at vi ikke har hatt en påvirkning på datainnsamlingen eller at elevene og lærerne ikke oppførte seg annerledes enn vanlig på grunn av vår tilstedeværelse. Derfor har det vært viktig å begrunne underveis i metodebeskrivelsen hvordan vi har forsøkt å motvirke disse mekanismene. Blant annet gjennom å ufarliggjøre situasjonen med å dele informasjon om studiens hensikt ovenfor deltakerne (både skriftlig og muntlig) og grundig beskrive situasjonene, i tillegg til at tilbakemeldingen fra lærerne var at de opplevde gjennomføringen som autentisk.

Vi har også beskrevet hvordan lydopptak av intervjuene gjorde det lettere å være til stede i situasjonen, samtidig som det gav presise data og muligheten til å transkribere det som ble sagt. Notering av observasjoner gjorde det derimot umulig å få med seg alt som foregikk. Bevisst eller ubevisst ble det gjort en selektering av hva vi som observatører anså relevant, noe det var viktig å være klar over. For å minimere ulike påvirkninger og optimalisere gjennomføringen, forsøkte vi derfor å gjøre gode forberedelser. Dersom flere samarbeider om observasjon er det viktig for studiens reliabilitet at observatørene har en felles forståelse av hva og hvordan en skal observere, og for å oppnå det er en avhengig av å trene (Andersson-Bakken & Dalland, 2021, s. 144). Dette underbygger viktigheten av tidligere nevnte forberedelser, hvor vi trente på observasjon. Vi gjennomførte også en lignende øvelse med tanke på intervju. Etter forelesningen vi observerte ved UiT fikk vi mulighet til å intervjue foreleseren. I tillegg til at dette i seg selv var nyttige erfaringer å ta med seg, erfarte vi at vår kjennskap til feltet vi studerte var nyttig – særlig med tanke på å forstå det vi observerte og identifisere hva som kunne være viktig, samt evnen til å stille relevante oppfølgingsspørsmål som kunne få læreren til å utdype. Den forberedende prosessen gjorde oss tryggere på at vi kunne få til å hente inn relevante data på en god måte.

3.5.2 Validitet

Intern validitet (som inkluderer begrepsvaliditet) og ekstern validitet er noe en gjerne adresserer innenfor kvalitativ metode (Postholm et al., 2018, s. 229-241). Den interne validiteten kan noe forenklet sees på som sannhetsverdien i forskningen (Cohen et al., 2018, s. 252). Postholm et al. (2018, s. 229) utdyper at den baserer seg på om det er samsvar mellom virkeligheten som er studert og den en påstår en har studert, samt de begrepene som brukes for å beskrive den. Basert på denne beskrivelsen kan en spørre seg om det er sammenheng mellom det vi har studert og måten vi presenterer og diskuterer lærerne. Å være tro mot det som faktisk kjennetegner lærernes undervisning har vært et gjennomgående mål i vår forskningsprosess.

Det har derfor vært viktig å samle inn gode data for å kunne gjengi og beskrive situasjonene så godt som mulig, slik at det har vært mulig å vise sammenhenger mellom datamaterialet og de slutningene som er tatt. For å gjøre dette mulig var det viktig å velge hensiktsmessige metoder for å samle inn data. Forberedelsene med å sette seg inn i relevant forskningslitteratur gav bedre forutsetninger for å forstå feltet, noe vi kombinerte med en semistrukturert tilnærming til observasjon og intervju for å ta tak i det interessante underveis. For ytterligere å validere og gi mening til dataen er det brukt forskningslitteratur for å presentere og diskutere funnene. Underveis i teksten har det også vært viktig å redegjøre for begreper for å tydeliggjøre deres relevans i oppgaven. Blant annet hva vi legger i *kjennetegn* og *anerkjente* lærere (for å operasjonalisere problemstillingen) og teoretiske begreper (for å diskutere lærerne). Det bidrar til å ivareta det Johannessen et al. (2021, s. 44) beskriver som begrepsvaliditet, og dreier seg om hvorvidt det er samsvar mellom teoretiske begreper og slik de defineres og brukes.

Den ytre validiteten omhandler sammenlignbarhet og overførbarhet (Cohen et al., 2018, s. 252-256). I kvalitativ forskning omhandler denne overførbarheten hvorvidt leseren kjenner seg igjen i det som beskrives og kan overføre det til sin egen situasjon (Postholm et al., 2018, s. 238). For å øke sannsynligheten for en slik overførbarhet har det vært viktig å være gjennomgående transparente. For oss innebærer det å synliggjøre hvordan prosessen har foregått og begrunne de metodiske valgene som har vært gjort underveis. I kapittel 3.4 er analyseprosessen lagt frem steg for steg, slik at resultat og diskusjon skal være mer forståelig og relaterbar. I tillegg var det som nevnt flere likhetstrekk i landenes læreplaner i matematikk som tilsa at innholdet i undervisningen kunne overføres. Overførbarheten styrkes ytterligere i kapittel 5, hvor lærernes undervisningspraksis drøftes i norsk kontekst, med hovedvekt på læreplan for matematikk 1.-10. trinn (Kunnskapsdepartementet, 2019).

Til begge validitetsformene understreker Postholm et al. (2018, s. 230/239) viktigheten av tykke beskrivelser, fordi det bidrar til å øke gyldigheten og sannsynligheten for overførbarhet. Undervisningen foregikk på et annet språk, noe som kunne vært en stor utfordring, men vi opplevde det ikke som en barriere. Det var heller en styrke at undervisningen foregikk på engelsk sammenlignet med språkene i andre land det kunne vært relevant å besøke, eksempelvis Finland. Likevel gjorde den begrensede tiden vi hadde til datainnsamling det vanskelig å sikre tykke beskrivelser. En bevisstgjørelse av dette var i seg selv viktig, og flere grep ble gjort for å redusere svakheten tidsbegrensningen kunne medføre. Her fant vi det ikke bare viktig å kombinere observasjon med intervju for å hente inn tykke beskrivelser, men også å øve på å observere, notere og intervjue i forkant. Postholm et al. (2018, s. 237) poengterer også at metodetriangulering styrker både pålitelighet og gyldighet, fordi det gjør det mulig å beskrive virkeligheten fra flere vinkler som gir et mer helhetlig bilde. Bruk av kun observasjon ville begrenset studien til å bare kunne si noe om hva lærerne gjorde i undervisningen, uten å vite noe om intensjonen bak.

For å besvare problemstillingen på en måte som er tro mot lærerne var det nødvendig å få frem helheten i kjennetegnene. Kombinasjonen av observasjon og intervju gjorde at lærerne fikk muligheten til å fortelle om intensjonen bak handlingene, og på den måten påvirke studien. Det gav oss også bedre forutsetninger for å gi helhetlige og tykke beskrivelser, samtidig som det åpnet for å undersøke om det var sammenheng mellom det lærerne gjorde og det de sa at de gjorde. Læreren Eskil brukte blant annet oppgaver som bygget på hverandre og var svært like med en liten variasjon. Dette var noe vi la merke til i observasjonene, og i intervjuet etter undervisningen fortalte han om variasjonsteori og at det var en stor del av hans undervisning. Til tross for kort datainnsamling, kunne vi på denne måten med større sikkerhet si at dette var noe som faktisk kjennetegnet undervisningen til Eskil. Muligheten til å knytte observasjonene sammen med det lærerne fortalte i intervjuet har vært viktig for å være tro mot dem og deres kjennetegn – slik at det ikke bare ble noe vi definerte fordi vi observerte det (med vår kompetanse som studenter), men noe de bevisst gjør jevnlig i sin undervisning.

3.6 Forskningsetiske betraktninger

Postholm et al. (2018, s. 247-251) sier forskningsetikk i Norge hovedsakelig forholder seg til tre grunnleggende prinsipper: Informert samtykke, krav på korrekt sitering og krav på privatliv. De utdyper at deltakeren skal være informert om hva studien går ut på og vet hva deltakelse innebærer, blir behandlet med respekt og får mulighet til å se at det som legges frem er korrekt, og er klar over når de undersøkes og forholdes anonymisert. Prinsippene og beskrivelsen av dem støttes av den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH, 2021), og deres anbefalinger om å følge disse prinsippene har vært viktig for oss å følge gjennom hele forskningsprosessen.

Det at vi observerte uten bruk av video- og lydopptak reduserer mengden personvernsmessige betraktninger. Likevel ble det benyttet lydopptak under intervjuene av lærerne, som krever visse hensyn. Bruk av lydopptak gjorde prosjektet meldepliktig til Sikt (Kunnskapssektorens tjenesteleverandør) for å sikre at behandling og oppbevaring av personopplysninger ble gjort i tråd med retningslinjene. Innmeldingen er utført og Sikt har vurdert prosjektets behandling av personopplysninger som lovlig. Vi utarbeidet som nevnt et informasjonsskriv (til rektorene og lærerne), hvor hensikten var å gi tilstrekkelig informasjon om studien slik at partene fikk en forståelse for hva det innebar (vedlegg 1). I forkant av datainnsamlingen hentet vi inn informert samtykke fra rektor og lærere (vedlegg 2 og 3), og satte av tid til å snakke med lærerne om studien før selve datainnsamlingen.

Som en sentral del av det informerte samtykket understreker Postholm et al. (2018, s. 248) at deltakelsen skal være frivillig og uten press fra omgivelsene. I forkant av intervjuet spurte vi lærerne igjen for å forsikre oss om det var greit at vi tok opp lyd, selv om de allerede hadde gitt skriftlig samtykke. For oss var det viktig å være tydelig på at det var frivillig å delta og at de kunne trekke seg når som helst dersom de ønsket det, uten noen form for konsekvens, og det virket som om informantene satte pris på det tydelige budskapet. Med tanke på det andre etiske prinsippet om korrekt sitering opplevde vi en konkret utfordring. Datainnsamlingen baserer seg på engelskspråklige informanter i en masteroppgave skrevet på norsk. Derfor har det vært viktig å bruke noen sitater og bevare meningen i våre oversettelser, samtidig som vår metodetriangulering og intensjon om være tro mot lærernes kjennetegn bidrar til å respektere informantene. I tillegg har informantene fått tilbud om få tilsendt masteroppgaven og et engelsk sammendrag.

Deltakernes anonymitet er også viktig for å ivareta informantenes personvern og privatliv. For å overholde taushetsplikten og bevare anonymitet i kvalitative studier benyttes gjerne pseudonymer istedenfor deltakernes ekte navn, med en endret alder og sted for gjennomføring (Johannessen et al., 2021, s. 50). Underveis i datainnsamlingen ble ikke lærernes faktiske navn benyttet. De ble beskrevet som lærer 1, 2, og 3 ut fra rekkefølgen i datainnsamlingen. De aktuelle elevutsagnene ble markert med «E» for elev, med et tilhørende nummer dersom det var flere elever som deltok i en spesifikk dialog. Senere i prosessen fikk lærerne pseudonymene Eskil, Derek, og Sølvi, både for å ivareta anonymitet og for å gjøre det mer oversiktlig for leseren. Prosjektet hadde heller ingen behov for sensitiv informasjon om elever, lærere eller skoler, og vi hadde tillitt til kontaktpersonens vurdering av hva som er en anerkjent lærer, som gjorde det mindre komplisert å ivareta personvernet. Transparente metodesteg nevnes som en viktig styrke ved studiens validitet, noe som også vil være god forskningsskikk. For å oppnå dette har vi blant annet redegjort grundig og ærlig om hvordan dataen har blitt samlet inn og analysert i dette kapittelet.

4 Resultat og diskusjon

Problemstillingen for vår masteroppgave er: «*Hva kjennetegner matematikkundervisningen til tre anerkjente lærere på 7.- 10. trinn i New Zealand?*». Som nevnt innledningsvis besvares problemstillingen på to nivåer: Først presenteres og diskuteres funnene av de tre anerkjente lærerne hver for seg (nivå 1), for så å drøfte likheter og forskjeller mellom dem (nivå 2), noe som gjøres i dette kapittelet. Lærerne har hvert sitt delkapittel, der vi presenterer funnene først, for så å diskutere dem. Vi har valgt denne strukturen for å tydeliggjøre hver enkelt lærers kjennetegn, som er selve hoveddelen i vår besvarelse av problemstillingen. I det fjerde delkapittelet brukes TRU som et rammeverk for å drøfte likheter og forskjeller mellom lærerne. TRU brukes fordi Schoenfeld (2016, s. 1-3) selv poengterer at rammeverket ikke er en oppskrift for hvordan et «powerful classroom» skal se ut, men heller at de fem dimensjonene er *fremtredende* i alle slike klasserom – noe som gir oss muligheten til å sammenligne tre svært forskjellige lærere innenfor ett rammeverk.

4.1 Lærer 1 – Eskils eksplisitte undervisning

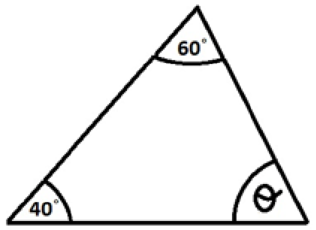
I dette delkapittelet presenteres og diskuteres funn tilknyttet Eskil (beskrevet i kapittel 3.2.1). Læreren ble observert i tre undervisningsøkter på 55 minutter hver. Datautdragene som videre presenteres er hentet fra to av øktene, som begge er fra samme 9. klasse med 28 elever til stede – samt intervjuet i etterkant. Kjennetegnene til Eskil er delt inn i: Lærerens bruk av variasjonsteori, lærerens rolle under og etter individuelt elevarbeid, og lærerens grep rundt viktige læringspunkter.

Lærerens bruk av variasjonsteori

Det første funnet er at Eskil bruker variasjonsteori i valg av oppgaver som et verktøy i sin eksplisitte undervisning. Det kommer frem i alle de observerte øktene, og datautdraget nedenfor er hentet fra oppstarten av en undervisningsøkt som illustrerer hvordan læreren anvender variasjonsteori i sin utvalgte variasjon mellom fire trekanter. Etter utdraget fra økten, vises det til et tilhørende utdrag av intervjuet der læreren forteller mer generelt om sin undervisningstilnærming og hvordan variasjonsteorien er et verktøy for valg av innhold.

I starten av økten ber læreren to elever om å dele ut konvolutter. På hver konvolutt har elevene tidligere skrevet navnet sitt, og i dem ligger seks forskjellige regler for vinkler (vedlegg 4) som de skal bruke i økten. Læreren tegner så opp en trekant:

L: Her er en enkel en



(vår illustrasjon av Eskils trekant)

(Flere elever sier «80˚»)

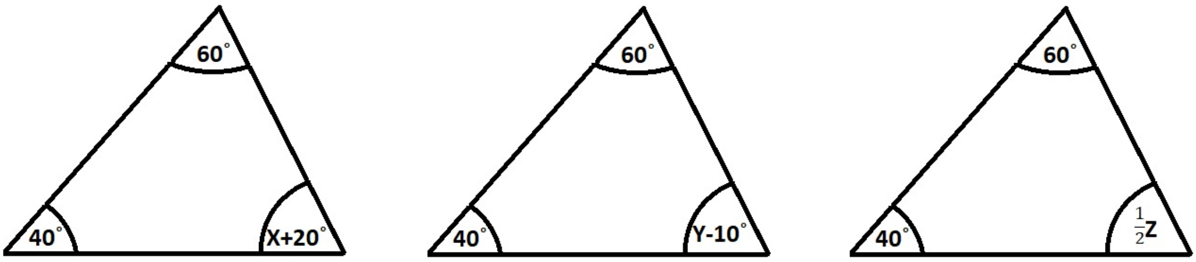
L: Dere sa 80˚ før jeg rakk å stille spørsmålet, men hvorfor er theta 80?

E1: Vinkelsummen i en trekant er 180 grader. Den ene er 40 og den andre er 60. 180 minus 40 og 60 er 80

L: Forstår alle? (flere elever nikker)

L: Det var en presis og god begrunnelse! Som vi har snakket om tidligere er det ikke viktig i matematikk å bruke mest mulig ord. Vi skal være presise og bruke minst mulig unødvendige ord

L: Disse er litt forskjellige, men ikke mye (lærer lager tre eksempler på tavlen)



(vår illustrasjon av Eskils tre eksempler)

L: La oss trekke inn litt algebra

L: Første ble 80˚. Hvordan kan vi bruke den informasjonen til disse?

E2: $x + 20^\circ = 80^\circ$ (lærer skriver det på tavlen)

L: Hvorfor kan du si det?

E3: Summen av vinklene i en trekant er 180˚, og de to andre er 40 og 60

L: Så hva er x?

E4: 60˚

L: Bra! Ikke glem det. Fort gjort å glemme å trekke fra 20

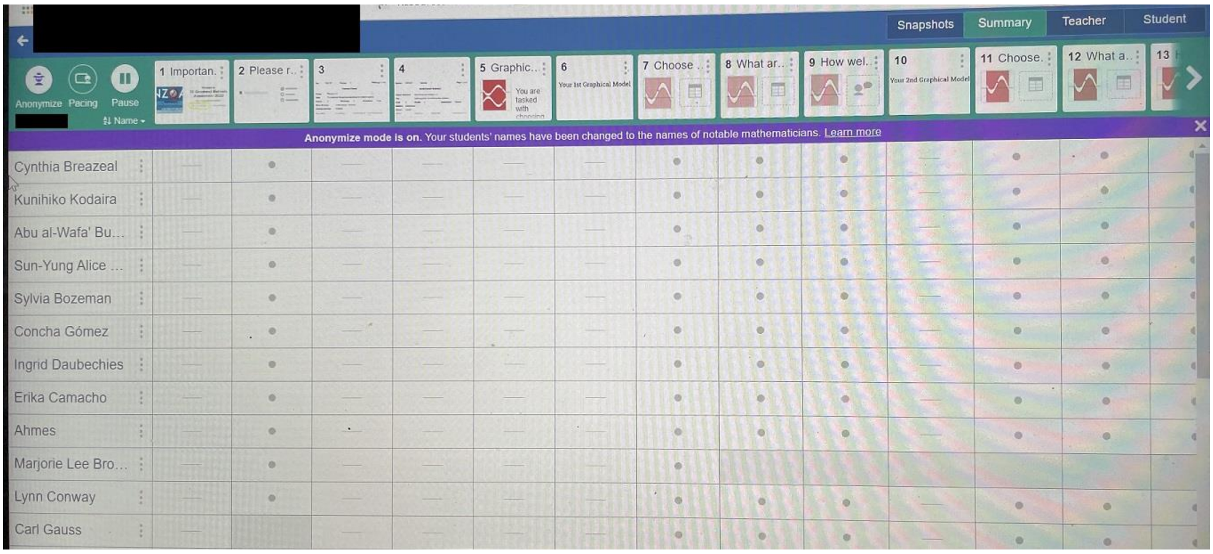
Forskjellige elever kommer med svar og begrunnelser til lærerens plenumsspørsmål. Eskil går gjennom de siste to trekantene på lignende vis, før de settes i gang med individuelt arbeid. Under arbeidet vandrer læreren mellom elever frem til neste plenumssamtale. Det er flere lignende eksempler fra øktene, der kombinasjonen av variasjonsteori og eksplisitt undervisning brukes. Det kommer også frem i intervjuet, der læreren forteller om hans bruk av variasjonsteori og hvordan det har en sentral rolle for hans eksplisitte undervisning:

> «I'm a big fan of variation theory. Repeating the skills, repeating the concepts, but in a very different way. And you can do ramps rather than steps. Weird thing with math is that you always come up with you got to take sort of steps, but for some students these steps are like cliffs. You got to get them something that every student can do any time. Usually, I'm starting off with something very simple and giving them something equally simple to do themselves. So, you're at the bottom of the ramp. You get some students who's going this is really easy, but then the art is to be able to fill up a notch, but also leave something there that actually is challenging for everyone – at least to a certain extent. And even if they are really not sure, you can be there with some examples and lead them back to something they know and build their confidence. Back to something they are comfortable with and guide them so they can sort of see the pattern and they're away».

I utdraget ser vi at alle elevene får utdelt reglene for geometrisk argumentasjon. En av reglene er argumentet E1 bruker. Aldersgruppen tilsvarer en 8. klasse i Norge, og sekvensen er nok en lett oppvarming for de fleste elevene. Men som han sier; han er på bunnen av «rampen». Den lille variasjonen i de fire trekantene er en måte å bryte ned oppstarten og illustrerer sammen med lærerens spørsmål, responsen fra elevene og hans tilbakemeldinger en bruk av eksplisitt undervisning og variasjonsteori.

Lærerens rolle under og etter individuelt elevarbeid

Det andre funnet er at læreren bruker varierte metoder for å drive formativ vurdering og drar fordel av den digitale læringsarenaen 'Desmos.com' for å effektivisere den formative vurderingen – både under og etter økten. Desmos er et gratis undervisningsverktøy og inkluderer en grafisk kalkulator, mengder av digitale klasseromsaktiviteter og andre hjelpsomme funksjoner for både elever og lærere (Bourassa, 2020). Foruten plenumssamtaler jobber elevgruppen med oppgaver på Desmos i begge øktene. For å få frem hvordan læreren bruker Desmos er datautdragene hovedsakelig hentet fra hans beskrivelser i etterkant av undervisningen. I den delen av intervjuet forklarer og viser han hvordan han anvender Desmos, særlig med tanke på formativ vurdering. I både observasjonen og intervjuet kommer det frem at læreren overvåker elevenes arbeid på PC-en sin (skrivebordet på teacher.desmos.com, figur 3) og ved å vandre rundt og oppsøke elever. I tillegg til å hente ut informasjon om elevene i øktene, brukes Desmos til lekser og prøver, der alle har hver sin bruker og arbeider hovedsakelig individuelt.



Figur 3: Skrivebordet på det digitale verktøyet Desmos (bilde vi har tatt)

Bildet av det digitale verktøyet Desmos (figur 3) har ingen sammenheng med selve øktene, men det illustrerer det han kaller skrivebordet på teacher.desmos.com. Her vises en generell oversikt over elevene, der anonymiseringsmodusen er skrudd på og alle elevene har fått tildelt navnet til en kjent matematiker. I intervjuet forteller læreren at på Desmos sitt skrivebord kan han effektivt bla mellom elevene, se hva de gjør, hvordan deres progresjon er og gå bort til elevene for å ta opp noe. Han går også rundt mer systematisk med et mål om å være innom alle elevene i løpet av øktene, slik at de føler seg sett og kan ta opp noe når han er der. Selv om han ikke sier det i intervjuet, observerte vi at læreren også stiller utdypende spørsmål til elevene i sin vandring, som «fortell meg hvordan du har tenkt her», «hva tenker du å gjøre videre?» og «forklar meg hvordan du fikk det svaret».

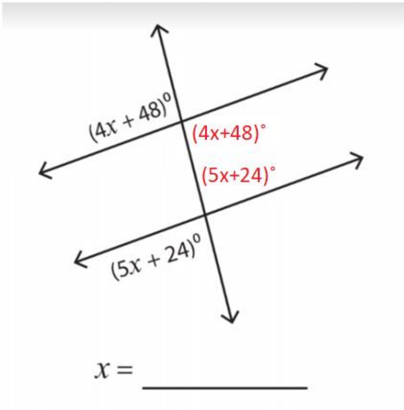
Han sier at når arbeidet gjøres digitalt er det også lettere tilgjengelig og han kan se over arbeidet etter øktene. Han mener at formativ vurdering er viktig – både for at lærere og elever skal kunne bli bedre. Et viktig element han trekker frem med Desmos er at det er enkelt å «skanne» etter misoppfatninger, slik at han kan adressere dem. Her forteller læreren at han ofte bruker feilsvar som er nesten riktig i videre undervisning. Han mener at svar som er helt feil eller riktig er fint for å gi ham selv en pekepinn på måloppnåelse, men at de ikke åpner for like gode undersøkelser. Læreren har brukt Desmos i flere år og er tydelig på at han ikke ville klart å drive så god formativ vurdering for så mange elever uten digitale verktøy.

Vi ser at læreren overvåker elevene på forskjellige måter, i tillegg til å hente ut informasjon i fellesoppstarten. Informasjonen som hentes ut brukes videre, der Desmos blir et effektivt verktøy for å se etter noe som bør adresseres. I intervjuet forteller læreren at elevene kan jobbe i sitt eget tempo i Desmos, samtidig som han kan kontrollere tempoet når han vil gå gjennom noen viktige læringspunkter eller adressere misoppfatninger i plenum. Et slikt læringspunkt er grunnlaget for det tredje funnet.

Lærerens grep rundt viktige læringspunkter

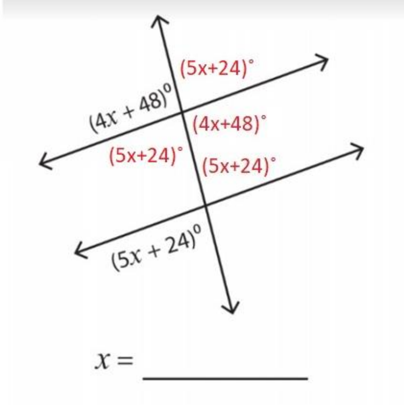
Det tredje funnet er at læreren anvender eksplisitte undervisningsgrep og samtalegrep rundt viktige læringspunkter. Datautdraget er fra en plenumsgjennomgang der matematiske regler gjøres sentrale for hvordan en løser oppgaver, og starter omtrent halvveis ut i samme økt som oppstarten illustrert tidligere, hvor elevene frem til nå har jobbet individuelt med oppgaver på Desmos. Læreren tar frem en oppgave fra Desmos på tavlen (vedlegg 5):

> L: Hvem mener at vi har jobbet med parallelle linjer tidligere? Hva vet vi om dette? (peker på oppgaven)
>
> (ingen umiddelbar respons)
>
> L: Tenk i 1 minutt først. Bruk informasjon fra arket og skriv ned det dere vet. Etter 1 minutt jobber dere sammen med sidemannen.
>
> (elevene begynner å jobbe og læreren vandrer rundt. Etter ca. 4 minutter beveger han seg frem til tavlen og tar ordet)
>
> L: Okey. Hvilke regler kan vi bruke?
>
> E1: Vertically opposite angles are equal
>
> L: Hvordan kan vi bruke den?
>
> (samme elev forklarer mens læreren skriver $(4x+48)^\circ$ og $(5x+24)^\circ$, se illustrasjon)
>
> L: Bra. Noe mer vi kan bruke?



(vår illustrasjon av Eskils tegninger på tavla)

E2: Kan flytte de to opp fordi de er parallelle (lærer flytter de to (5x+24)˚ opp, se illustrasjon)



(vår illustrasjon av Eskils tegninger på tavla)

L: Bra. Også sa noen bak der noe om en linje?

E3: Ja, vi kan bruke regelen om «angles on a line add to 180˚»

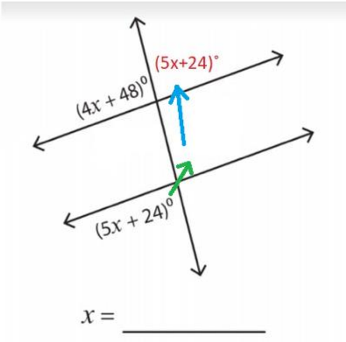
(lærer skriver (4x+48)˚+(5x+24)˚=180˚)

L: Hva nå?

Når læreren starter plenumssamtalen, ser vi at han ikke får en respons fra elevene. Læreren tar grep og elevene kommer etter hvert med tre forslag som sammen er nok til å løse oppgaven, men elevene klarer ikke å koble dem sammen og finnet svaret selv. Læreren er stille i etterkant av sitt «hva nå»-spørsmål, samtidig som en plenumssamtale mellom elevene foregår. Noen prøver å finne riktig svar og gjetter blant annet 110˚ og 70˚, mens andre argumenterer for at det ikke går på grunn av reglene. Flere gir uttrykk for at de ikke helt forstår.

Læreren tar frem et ark og holder det opp mot tavla. Lysbildet treffer arket og han tegner den kryssende linjen og den øverste parallelle linjen. Læreren skyver så arket nedover langs den kryssende linjen til arket treffer den andre parallelle linjen. Elevene ser nå at arket passer like godt der og læreren forklarer at dette viser at vi kan være sikre på at de to parallelle linjene har like vinkler mot den kryssende linjen. Videre viser han hvordan vi alltid kan bruke rette linjer som et godt utgangspunkt. De er alltid 180 grader. Han forklarer hvorfor motstående vinkler alltid er like i en slik situasjon, og at nabovinkler er enkle å regne ut med utgangspunkt i rette linjer når du vet den ene vinkelen. Samtlige elever ser på læreren og tavlen under forklaringen, og flere sier «ah!» og gir utrykk for å forstå.

Læreren legger vekk arket og visker bort det som står på tavlen, for så å gå gjennom løsningsmetoden på ny:



(vår illustrasjon av Eskils tegninger på tavla)

L: Først sa E1 at vi kunne bruke regelen om toppvinkler (grønn pil).

L: Deretter sa E2 at vi kan flytte den opp fordi det er to samsvarende vinkler (blå pil)

L: Da har vi funnet (4x+48)˚ + (5x+24)˚ = 180˚, fordi vinklene på en rett linje er 180˚. Så nå er det bare å regne det ut.

I intervjuet spurte vi læreren om den illustrerte plenumsgjennomgangen midt i økten var planlagt:

> «I think that my planning is a lot of experience and I'm feeling my way a little bit. I don't go in with a set structure on what I'm going to do. I have a clear idea of what I want to try to achieve, but I've been doing enough where I think I'm quite flexible, and I also have a repertoire where I can deliver content in different ways and adapt to the different students».

Etter en kort plenumssamtale, avslører lærerens «hva nå»-spørsmål elevenes (manglende) forståelse. Sett i sammenheng med intervjuet, gjør Eskil her et grep som ser ut til å være på sparket, der han tar opp et ark og «leverer innholdet» på en ny måte. Modelleringen viser hvordan elevenes forslag hører sammen, noe han refererer tilbake til i oppsummeringen.

Lærer 1 – Diskusjon Eskil

I kapittel 3.2.1 nevnes det at Eskil kjenner seg igjen i Barton (2018) sine beskrivelser, der han selv beveget seg fra utforskende undervisningstilnærminger til å drive eksplisitt undervisning mesteparten av tiden. I observasjonen kommer det også frem at han underviser eksplisitt, men vi har ikke valgt å ha det som et eget funn. Lærerens bruk av eksplisitte undervisningstrekk vil diskuteres på tvers av de tre funnene: Læreren bruker variasjonsteori som et verktøy (funn 1), lærerens formative vurdering og bruk av Desmos (funn 2), og lærerens grep i en plenumssamtale (funn 3).

4.1.1 Læreren bruker variasjonsteori som et verktøy

Det første funnet er at Eskil bruker variasjonsteori i valg av oppgaver som et verktøy i sin eksplisitte undervisning. Rosenshine (1987, s. 35) sitt andre prinsipp for eksplisitt undervisning handler om å *presentere nytt innhold i små skritt*, men som læreren påpeker i intervjuet kan også små skritt bli for mye for noen elever. Løsningen hans er å bruke variasjonsteori for å gjøre skrittene så små at det blir som en «ramp».

Separasjon – ett av de fire variasjonsmønstrene – er å variere kun ett aspekt mens de andre forholder seg like (Marton et al., 2004, s. 16-17), noe de fire trekantene i utdraget fra oppstarten illustrerer. Alle vinklene forholder seg konstant, og kun ett trekk ved den siste vinkelen varierer. Et sentralt trekk for variasjonen kan være å vise «mangheten» (Marton et al., 2004, s. 15), noe som her vil være variasjonen mellom trekantene og variasjonen i strategier en kan bruke for å finne den ukjente. Læreren «blandet inn algebra» for å vise ulike måter den siste vinkelen kan representeres matematisk. Først gjennom theta, så $x + 20$, $y - 10$ og $\frac{1}{2}z$, som alle krever litt ulike regnestrategier for å løses, selv om alle vinklene er konstante. Ved å etterspørre hvordan informasjonen fra den første trekanten kan brukes til å finne den ukjente i neste trekant, adresserer læreren et bestemt mønster – et viktig læringsgrep innenfor variasjonsteori (Kullberg et al., 2017, s. 566-567).

Reglene elevene foreslår og måten de skal anvendes for å løse oppgaven i plenumssamtalen midt i økten kan også sees på som bruk av variasjonsteori. Forslaget til E1 er å bruke regelen om «vertically opposite angles are equal», altså toppvinkler. E2 bygger videre på elevsvaret ved å foreslå en parallellforskyvning av vinklene for å løse oppgaven. Her brukes samsvarende vinkler. Til slutt foreslår E3 å bruke regelen om «angles on a line add to 180˚», altså supplementvinkler. De tre forslagene må settes sammen for å løse oppgaven, og sammen utgjør de Euklids 29. proposisjon. Innenfor variasjonsteori påpeker Marton et al. (2004, s. 16-17) at dersom det er flere kritiske aspekter eleven må ta stilling til samtidig, må alle erfares samtidig. I slike tilfeller er det mest effektive å skille aspektene, for så å fusjonere dem (Marton et al., 2004, s. 16-17). De tre forslagene læreren har hentet ut av elevene kan sees på som en oppstykket del av Euklids proposisjon, og som må fusjoneres for å løse oppgaven.

Læreren må gjøre logisk valg av innholdet og rekkefølgen av det, samt bryte det ned for å tilpasse innholdet til elevene (Archer & Hughes, 2011, s. 3). Den lille variasjonen i de fire trekantene i oppstartsfasen er en måte å bryte ned innholdet på, der én regel er sentral for å løse oppgavene. Her er han på bunnen av «rampen» sin. Senere i økten presenteres en betydelig mer kompleks oppgave, der tre forslag skal fusjoneres for å løse den (lærerens eksplisitte grep for å skape forståelse i den plenumssamtalen diskuteres i funn 3). Variasjonsmønstrene separasjon og fusjon brukes for å bryte ned og tilpasse innholdet, og sammen med å adressere mønsteret viser læreren hvordan variasjonsteori anvendes i undervisningen. Variasjonsteorien blir et middel for å få alle med og fungerer som et læringsgrep, der han har utvidet prinsippet om å ta små skritt i sin eksplisitte undervisning.

4.1.2 Lærerens formative vurdering og bruk av Desmos

Det andre funnet er at læreren driver med formativ vurdering og drar fordel av den digitale læringsarenaen Desmos for å effektivisere den. I Chorney (2022) sin kasusstudie av fire matematikklæreres bruk av Desmos, hevder de at Desmos kan være et kraftfullt læringsverktøy, særlig blant lærere som har lengre erfaring med å bruke det i sin undervisning. Læreren har flere års erfaring med Desmos og har funnet flere fordeler ved å bruke det. At elevenes arbeid i økter, hjemmelekser og prøver er tilgjengelig kontinuerlig i en online database, gjør Eskil mindre avhengig av å gå rundt og sjekke elevene i økten og at elevene leverer inn arbeid (slik at det kan sjekkes i etterkant). Læreren kan følgelig bruke Desmos til å *gjennomgå og sjekke tidligere arbeid*, *overvåke selvstendig arbeid* og utfører jevnlige *gjennomganger/prøver* – Rosenshine (1987) sitt første, femte og sjette prinsipp for eksplisitt undervisning.

I Desmos kan en også gi elever skriftlig tilbakemelding midt i en aktivitet (Bourassa, 2020, s. 17). Med andre ord kan læreren se over og gi tilbakemeldinger både i og etter økten i Desmos, selv om oppgaven ikke er ferdig, noe som gjør den formative vurdering mer tilgjengelig. Læreren forteller også at Desmos effektiviserer overvåkningen og den formative vurderingen for det store antallet elever, noe han ikke hadde klart så bra uten. Det er tydelig at Desmos har en sentral formativ rolle under og etter øktene, både gjennom hans beskrivelser og når han viser skrivebordet på teacher.desmos.com, der han enkelt blar mellom elevene. Slik sett kan Desmos også brukes til å *gi elevene tilbakemeldinger,* Rosenshine (1987, s. 35) sitt fjerde prinsipp, men han holder fast på å gi tilbakemeldinger på andre måter også.

Læreren forteller at han går systematisk rundt under elevarbeid – slik at elevene føler seg sett og kan ta opp noe når han er der – noe som kan tolkes å være mindre sentralt for den matematikkfaglige læringen. Det er mulig han ikke nevnte det fordi det er så opplagt, men observasjonen viser at han i sine systematiske runder ber elevene fortelle hvordan de tenkte og forklare sine fremgangsmåter (som vi også ser i plenumssamtalene). Det gir ham innsikt i deres tankeprosess frem til svaret, som også har en betydningsfull formativ rolle. Hvordan klasseromsaktiviteter orkestreres er sentralt for å avsløre elevenes nåværende matematiske forståelse og tankemønstre (Schoenfeld, 2016, s. 11-12). Med Desmos kan han effektivt se *hva* elevene har gjort, og ved å systematisk snakke med dem *om* det, kombinerer læreren to måter å skaffe informasjon om elevene i sin formative vurdering.

For å kalle det formativ vurdering skal informasjonen som hentes ut ha en stor rolle for videre klasseromsaktivitet (Schoenfeld, 2016, s. 11-12). Læreren viser og påpeker dette flere ganger, blant annet når han beskriver Desmos som et effektivt verktøy for formativ vurdering, der han «skanner» etter misoppfatninger og ofte bruker nesten riktige feilsvar når han skal adressere dem. I eksplisitt undervisning er det viktig at elevene forstår at det å gjøre feil er en naturlig del av læring (Archer & Hughes, 2011, s. 179) og læreren skal så raskt som mulig rette opp eventuelle feil (Archer & Hughes, 2011, s. 3), der Desmos som overvåkningsverktøy blir et effektivt middel for å få til dette. Når læreren stiller «hva nå»-spørsmålet i den siste plenumssamtalen, legger han ansvaret for å fusjonere reglene og løse oppgaven over på elevene (istedenfor å gjøre det selv). Spørsmålet er avslørende og spiller en stor formativ rolle for videre klasseromsaktivitet, der sekvensen som følger er et eksempel på å *guide* elevene, Rosenshine (1987, s. 35) sitt tredje prinsipp for eksplisitt undervisning. Grepene læreren bruker for å skape ønsket forståelse diskuteres videre i neste funn.

Selve kunsten å undervise eksplisitt er ifølge Archer og Hughes (2011, s. 197): Å kreve hyppige svar, overvåke elevenes prestasjoner nøye, gi umiddelbar konstruktiv tilbakemelding, og levere økten i et raskt nok tempo. Læreren krever hyppige svar, og elevenes prestasjoner overvåkes i oppstarten, i elevenes arbeid (både ved hjelp av Desmos og ved å gå rundt blant elevene) og i plenumssamtalen midt i økten. Det gis også noen konstruktive tilbakemeldinger, som da læreren poengterer at en elev kom med en presis og god begrunnelse. Å skape oppmerksomhet rundt presisjon i det matematiske språket er et grep som kan styrke utviklingen av matematiske språkferdigheter – en viktig del av konseptuell forståelse (Livers & Elmore, 2018, s. 162/171).

Kort oppsummert er funnet at læreren vurderer elevene formativt på varierte måter. I plenumssamtalene avslører hans spørsmål elevenes forståelse, og under individuelt arbeid overvåker han elevene både i Desmos og i sin systematiske vandring. Desmos brukes også etter øktene, og kan sees på som et praktisk og formativt verktøy i hans eksplisitte undervisning, der informasjonen som hentes ut brukes i videre undervisning.

4.1.3 Lærerens grep rundt viktige læringspunkter

Det tredje funnet er at læreren anvender eksplisitte undervisningsgrep og samtalegrep rundt viktige læringspunkter. Et trekk ved en eksplisitt undervisningsøkt er at oppstarten klargjør for elevene hva de skal lære og hvorfor de skal lære det (Rosenshine, 1987, s. 35). Dette er også noe læreren gjør i de observerte øktene, og selv om det ikke direkte påpekes av læreren i utdraget av oppstartsfasen, er selve utdelingen av reglene (som elevene har brukt tidligere) en klargjøring av hva elevene skal lære om i økten. Lærerens spørsmål og tilbakemeldinger preges av *hvorfor* det er slik. Når elever deler sine ideer og blir spurt om å overbevise andre om validiteten i sin fremgangsmåte, må de bruke argumenter som er overbevisende for andre (Carpenter et al., 2003, s. 85). Hvorfor-spørsmålene viser at et svar uten begrunnelse ikke er tilstrekkelig, og de utdelte reglene fungerer som eksplisitte eksempler for hvilke matematiske konsepter som er gode argumenter for å overbevise de andre. Fokuset på argumentasjon er et grep som tydeliggjør viktigheten av å anvende matematiske regler.

En eksplisitt undervisningsøkt avsluttes gjerne ved å gjennomgå kritiske deler av innholdet (Archer & Hughes, 2011, s. 52). Selv om det siste datautdraget er fra midten av økten, tar læreren grep for å samle klassen rundt et viktig læringspunkt for økten. I oppstarten var kun én regel nødvendig for å løse alle oppgavene, mens nå skal flere regler anvendes sammen for å løse en oppgave. Den umiddelbare responsen er lav og læreren ber elevene om å først tenke og skrive selv, for så å samarbeide med sidemannen. Grepene læreren bruker er sammenfallende med Chapin et al. (2013, s. 13-14) sine samtalegrep *stopp og noter* og *snu og snakk*, med hensyn om å hjelpe elevene dele og klargjøre sine tanker for å få med flest mulig i gjennomgangen. Ved å samle klassen rundt denne plenumssamtalen justeres tempoet i økten – et differensieringsgrep lærere kan bruke for å oppnå en større likhet for elevene i klasserommet (Tomlinson, 1999, s. 121-122) og en viktig ferdighet i kunsten å undervise eksplisitt (Archer & Hughes, 2011, s. 3).

Kommunikasjonen i det siste datautdraget er et eksempel for hvordan læreren stegvis henter ut informasjon og sjekker elevene underveis, og illustrasjonene er laget for å få frem hvordan læreren skrev inn elevenes forslag på selve oppgaven. Boaler (2015, s. 41) fremmer hvor viktig samtalen er for læring i matematikk og sier det er først når en evner å sette ord på det selv og forklare noen andre en viser faktisk forståelse. I denne sammenheng presenterer Chapin et al. (2013, s. 16-17) samtalegrepet *si mer*, der læreren ber eleven utdype og viser et ønske om å forstå hva eleven tenker. Selv om svaret E1 kommer med er korrekt, kunne det vært ren gjetning. Oppfølgingsspørsmålet fra læreren gjør at eleven forklarer videre og er den som anvender regelen (istedenfor at det er læreren som gjør det), noe som både signaliserer et ønske om mer enn et korrekt svar og gir innsyn i elevens forståelse. Hva som anerkjennes som matematiske forklaringer og begrunnelser i klasserommet er eksempler på sosiomatematiske normer (Yackel & Cobb, 1996, s. 461). Læreren etterspør flere ganger hvordan regler brukes i økten, og responsen tyder på at anvendelse og begrunnelse er et jevnlig fokus i lærerens etablering av sosiomatematiske normer.

Rosenshine (1987, s. 35) sier at øktens innhold gjøres eksplisitt ved å bruke eksempler og modellere nøyaktig hvordan ønskede ferdigheter og strategier brukes i små steg, der læreren sjekker elevenes forståelse for hvert steg. Eskil sjekker ofte for forståelse, både på individuelt nivå og som helklasse, eksempelvis når elevene har presentert all nødvendig informasjon for å løse oppgaven i plenumssamtalen. Etter «hva nå»-spørsmålet oppfatter læreren at de ikke klarer å sette forslagene sammen og anvende informasjonen for å finne svaret. Læreren legger først opp til at elevene selv skal finne ut hvordan de anvendes, for så å benytte et eksplisitt grep ved bruk av et ark for å modellere hvordan reglene kobles sammen mens han forklarer underveis. I intervjuet forteller læreren at han ofte føler seg litt frem i økten for hvordan han best mulig kan oppnå målet, at han er fleksibel og kan levere innholdet på forskjellige måter og tilpasse seg elevene. Rollen til læreren blir her å være en «leverandør» av innholdet og dets sammenkoblinger når elevene selv ikke finner dem.

Chapin et al. (2013, s. 17-18) trekker frem samtalegrepet *så du sier at*, et grep som gir læreren mulighet til å omformulere det eleven forsøker å si med et mer presist språk, samtidig som det bevarer elevens eierskap i resonnementet. Samtalegrepet er nært knyttet til situasjonen etter modelleringen med arket, der læreren går gjennom løsningsmetoden på ny og henviser til elevene og deres svar, samtidig som han har omformulert det de sier. Avslutningen på plenumssamtalen kan også sees i sammenheng med Marton et al. (2004, s. 16-17) sin fusjonering og bruk av to av Smith og Stein (2018, s. 9-10) sine samtalepraksiser, der han velger en gunstig *rekkefølge* for elevenes forklaringer og får *koblet dem sammen* på en mer presis og ryddig måte.

Kort oppsummert er funnet at Eskil bruker flere grep rundt viktige læringspunkter. Det å samle klassen rundt et viktig læringspunkt for økten er i seg selv et eksplisitt grep. Det jobbes aktivt med sosiomatematiske normer, der læreren har gitt elevene konkrete regler som danner et grunnlag for tilstrekkelig argumentasjon til hans hvorfor-spørsmål, og han bruker flere samtalegrep for å få elevene til å anvende reglene, heller enn at det er han som gjør det. Når elevene ikke klarer å sette sammen og anvende reglene, fungerer han som en slags back-up. Gjennom eksplisitt modellering leverer han innholdet på en ny måte, rydder opp i elevenes forslag og kobler dem sammen, slik at elevene skal forstå den sentrale rollen reglene har for å løse oppgaven.

4.2 Lærer 2 – Dereks DMIC-undervisning

I dette delkapittelet presenteres og diskuteres funn tilknyttet Derek (beskrevet i kapittel 3.2.2). Læreren ble observert i én økt på 40 minutter, hvor 8 elever deltok (vanligvis var de 15-20 elever). Elevene gikk i 7. og 8. klasse. Kjennetegnene til Derek er delt inn i: Forberedelse til undervisning, oppstart av undervisningen, lærerens rolle under elevenes arbeid, lærerens arbeid med normer i den avsluttende plenumssamtalen, og læreren kobler sammen elevenes løsninger.

Forberedelse til undervisning

Første funn er at læreren planlegger i tråd med DMIC-modellen og teoretiske prinsipper den bygger på. Dette legger grunnlaget for hans videre organisering av undervisningens oppstart, elevenes arbeid og avsluttende plenumsgjennomgang.

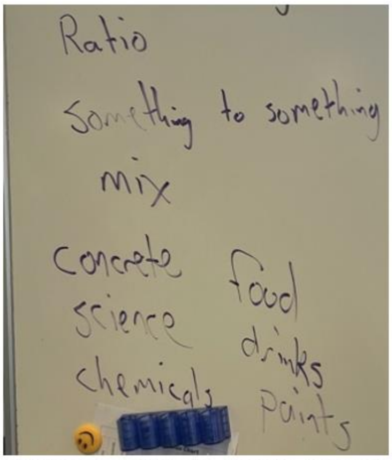
I intervjuet forteller Derek om hvordan han planlegger undervisningen sammen med sine kollegaer. Han sier det nyttig å planlegge «unitene» og øktene sammen på teamet (7 lærere). En sentral del av planleggingen er å regne gjennom oppgavene og se for seg ulike løsninger, hva elevene kommer til å si og hvilke spørsmål som kan komme opp. Han påpeker at det er viktig med passe utfordrende oppgaver og at han alltid er forberedt på å kunne justere innholdet. Planleggingsdokumentet (vedlegg 6) som lå til grunn for oppgaven læreren brukte i undervisningen viser sammenheng mellom oppgaven og konkrete læreplanmål, ønsket læringsutbytte for elevene, relevante fagbegreper og koblinger til større matematiske ideer.

Oppstart av undervisningen

Det andre funnet er at læreren bearbeider oppgavens kontekst sammen med elevene og lar de gjøre seg kjent med problemet før de skal løse det. Elevene sitter i en halvsirkel foran læreren. De diskuterer hva de forbinder med begrepet forhold – temaet for dagens økt. Utdraget nedenfor viser hvordan diskusjonen utspiller seg:

> L: Vi har hatt om matlaging, oppskrifter, måling og skal bli eksperter på dette
>
> L: Forhold. Dersom vi skal blande vann og mel. Hva skjer hvis vi har veldig mye vann?

(Flere elever responderer med at det blir vannete)



(bildet vi tok av tavlen fra Dereks undervisning)

L: Hvis det er veldig mye mel da?

(Ingen respons)

L: Blir veldig tykt

Elevgruppen: Ah! Ja!

L: Hva kan vi kalle dette forholdet?

E1: Something to something

L: (skriver det på tavla) Ja, vi blander. Mix. Hva er eksempler på noe vi blander sammen?

Forskjellige elever responderer: Concrete, science, chemistry, food, drinks

Derek bruker tid sammen med elevene på å bearbeide temaet før elevene får oppgaven. Læreren har valgt å bruke hva som skjer med en deig dersom en varierer forholdet mellom vann og mel, en kontekst elevene kjenner til fra sin egen hverdag. Videre får elevene utdelt en oppgave (vedlegg 7) de skal jobbe med i grupper på fire. De blir bedt om å lese og diskutere hva oppgaven omhandler. Etter ca. 3 minutter (der læreren har vandret mellom gruppene, men ikke involvert seg) tar han ordet i plenum og ber elevene dele hva de har funnet ut. De forteller at oppgaven handler om pizzadeiger.

Før elevene får oppgaven, diskuteres temaet for økten (forhold) i plenum. Når oppgaven først deles ut, skal elevene gjøre seg kjent med problemet ved å diskutere hva oppgaven handler om i gruppen sin, for så å samles rundt en ny felles gjennomgang. I intervjuet forteller læreren at det er viktig å bearbeide konteksten sammen med elevene. Det gjør oppgaven mer kjent for elevene og sørger for at alle får en god forståelse av konteksten til problemet *før* de setter i gang med å løse det.

Lærerens rolle under elevenes arbeid

Det tredje funnet er at Derek inntar en aktiverende rolle for elever som ikke deltar og holder oversikt over hva de gjør mens de arbeider i grupper. Det gir læreren muligheten til å forberede hvordan han skal strukturere den avsluttende plenumsgjennomgangen.

Etter oppstarten setter elevene i gang arbeidet med oppgaven. De sitter på gulvet og læreren varierer mellom å stå med god avstand til gruppene og vandre mellom dem. Han observerer elevene i arbeidet og involverer seg nå og da med å stille noen spørsmål eller svare på det elevene lurer på. I intervjuet forteller læreren at han observerer elevene i deres arbeid, går rundt, lytter til elevene og ser på hva de skriver. Læreren sier at han bruker å ta tak i de ulike svarene og vise hvordan de bygger på hverandre – fra de simpleste til de mest sofistikerte. Rekkefølgen er viktig, for dersom han begynner med den mest abstrakte er det lett at de andre ikke skjønner hva dette hjelper de og hva deres løsning har med dette å gjøre. I tillegg forsvinner progresjonen og sammenhengen når han skal koble det sammen.

Underveis i økta går læreren til elevgruppe 1 og setter seg ned på gulvet med dem. Læreren stiller spørsmål og tre av de fire elevene responderer. Etter en liten stund går læreren tilbake til gruppen og stiller følgende spørsmål direkte til den fjerde eleven på gruppa:

> L: Dere har ganget med 5,5 på den ene siden. Hva skal dere gjøre på andre siden?
>
> E4: De må jo gange med 5,5 på den andre siden også!
>
> L: Ja! Det var det du som fant ut

Elev 4 tar tusjen, fortsetter på arbeidet de andre har gjort og ganger ut den andre siden. I elevgruppe 2 er det en lignende situasjon hvor to elever diskuterer, mens de to andre sitter taus og ser rundt i rommet. Læreren går bort og spør en av elevene som ikke snakker om hva de tenker. Eleven sier at de dobler, tar tusjen og skriver videre på det de to andre elevene har gjort. Nå er alle fire elevene med i diskusjonen og læreren trekker seg unna.

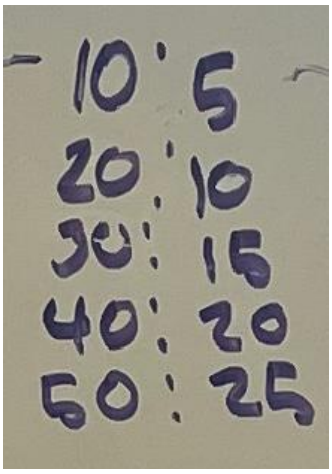
Mot slutten av økten gir læreren en felles beskjed om at det er et par minutter igjen å jobbe før de skal samles foran tavla og dele hvordan de har løst oppgavene. I mellomtiden går han først og ser på notatarket til gruppe 1, så videre til den andre gruppen og ser på deres notatark. Læreren forteller senere i intervjuet at han så elevgruppe 1 var ute etter felles faktorer, mens elevgruppe 2 doblet for å finne svaret. Den ene gruppen gjorde feil på oppgave 2 (svarte 12 istedenfor 12,5). Læreren poengterer at det er viktig at de gjør disse feilene og at de får muligheten til å rette opp i det selv, fordi det er mye læring i det.

Lærerens arbeid med normer i den avsluttende plenumssamtalen

Det fjerde funnet er at læreren etablerer og utvikler normer for deltakelse i diskusjon. I intervjuet sier læreren at han jobber mye med å etablere normer i klasserommet. Han ønsker at elevene skal engasjere seg i hverandres tanker og at de skal være kritiske til hverandres løsninger. Det er viktig at elevene kan korrigere hverandre. Han sier det vil fungere sterkere og være bedre for deres læring enn at han som lærer skal korrigere hele tiden. For å få til det er det viktig å ikke involvere seg for mye, så vil det komme etter hvert. Han mener det ligger naturlig hos lærere å ha et ønske om å være involvert i elevene sitt arbeid til enhver tid. Det er viktig å ikke oppklare elevenes utfordringer hele tiden, men å holde seg unna og faktisk la de streve litt med oppgaven. Han mener dette er noe av det vanskeligste for mange lærere med å bruke DMIC sin undervisningstilnærming.

Elevene sitter på gulvet foran tavla sammen med læreren. Han ber en elev fra gruppe 2 (som har den minst sofistikerte løsningen) om å ta med seg en fra gruppa for å vise på tavla hvordan de har løst de to første deloppgavene. De tar utfordringen, og elevene som ser på får i oppgave å tenke på spørsmål til de som presenterer. Utdraget nedenfor er hentet fra diskusjonen rundt presentasjonen av andre deloppgave (vedlegg 7):

> L: Så, fortell oss hva dere gjorde
>
> (En av elevene går gjennom hvordan de løste oppgaven)
>
> L: Forstår dere på den andre gruppen hva de har gjort?
>
> Elev fra gruppe 1 (som har feil svar) diskuterer i gruppa og spør: Hvordan fikk dere det svaret?
>
> Elev fra gruppe 2: Vi har doblet begge sider. Eller, når den ene siden får 10 mer får den andre 5 mer
>
> Flere fra gruppe 1: Aaaah!



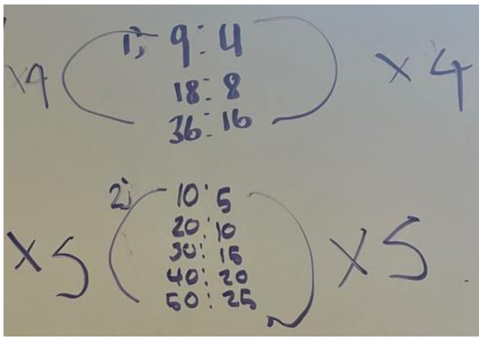
(bildet vi tok av elevenes løsning på tavlen)

Læreren legger til rette for diskusjon og etablerer en struktur som setter elevenes bidrag i sentrum. Ansvaret legges i hovedsak på elevene, både når det kommer til presentasjon av løsninger og å engasjere seg i diskusjonen. Det stilles med andre ord forventninger til hvordan elevene skal bidra faglig. Elevene lurer på hvordan gruppen kom frem til riktig svar, da de selv hadde feil. Eleven sier først at de doblet, for så å justere svaret sitt mer utdypende, uten forespørsel fra andre.

Læreren kobler sammen elevenes løsninger

Det femte funnet er at Derek viser sammenhenger mellom elevenes løsninger og kobler dem til andre matematiske ideer. Utdraget nedenfor er en fortsettelse på plenumssamtalen presentert i forrige funn. Etter elevene har presentert andre deloppgave og svart på spørsmål, går læreren frem til tavla og tar tak i løsningene.

> L: Først startet dere med å doble. Så fant dere etter hvert ut at dere ikke kunne doble resultatet videre. Dere satte opp en rekke med addisjoner. Så hvis dere ser her. Er det noen annen måte vi kan skrive denne addisjonen på?
>
> E: Multiplikasjon
>
> L: Ja, vi kan multiplisere med 5 – og det må vi gjøre på begge sider
>
> L: Kan vi gjøre det samme på forrige oppgave? Hva må vi gange 9 med for å få 36?
>
> (Elevene kommer med forslag og læreren bekrefter at 4 er riktig og viser utregning)



(bildet vi tok av sammenkoblingen)

Med utgangspunkt i det elevene har skrevet gjenforteller læreren løsningene som er presentert med egne ord, samtidig som han påpeker at det er elevenes løsning. Han markerer på tavla og forteller elevene at de har satt opp en rekke addisjoner. Videre spør han om det er andre måter å gjøre det på. Elevene foreslår multiplikasjon, noe læreren bekrefter og viser hvordan det kan gjøres i første deloppgave også. Til slutt går han gjennom de ulike elevsvarene steg for steg og viser hvordan de er relatert til hverandre. Han bruker igjen det elevene har skrevet på tavla som utgangspunkt, noterer og viser hvordan løsningene henger sammen med multiplikasjon.

I intervjuet sier læreren at det er viktig å skape mening for elevene i sammenkoblingen av de ulike løsningene – «connecting solutions and connecting the big ideas». Planleggingen gjør at han ofte vet hva som kommer og hvordan han skal ta tak i det. Læreren sier det er viktig for han å være fleksibel i måten han jobber på, både for å kunne ta tak i det som dukker opp og med tanke på rekkefølgen i gjennomgangen. Han ønsker alltid å bruke elevens forslag først, så er han heller en slags back-up dersom det ikke er nok variasjon. Mye må tas på sparket og den gode planleggingen gjør det lettere å være fleksibel underveis.

Lærer 2 – Diskusjon Derek

Diskusjonen av Derek følger den kronologiske gangen i hans undervisningen. Det er gjort slik for å tydeliggjøre hvordan læreren kjennetegnes ved å planlegge og gjennomføre undervisningen i tråd med DMIC-modellen og de teoretiske prinsippene den bygger på. Første steg på veien mot DMIC-undervisning starter med en kollektiv planlegging (funn 1), og danner grunnlaget for hvordan læreren videre organiserer undervisningens oppstart (funn 2), elevenes arbeid (funn 3), og den avsluttende plenumsgjennomgangen (funn 4 og funn 5).

4.2.1 Planlegger i tråd med DMIC-modellen

Det første funnet er at læreren planlegger undervisningen i tråd med DMIC-modellen og de teoretiske prinsipper den bygger på. Funnet er viktig for å vise helheten i lærerens bruk av DMIC som undervisningstilnærming og hvordan det gjør utforskningen strukturert.

I sin stegvise redegjørelse av DMIC beskriver Hunter et al. (2018, s. 28-31) modellens form for planlegging som sentral, fordi en rustes til å møte elevenes responser. Smith og Stein (2018, s. 10) beskriver det som ett av sine fem prinsipper – *å anta*. De oppfordrer til å gjøre arbeidet med å sette seg inn i elevenes matematiske tilnærminger sammen med kollegaer. Hunter et al. (2018, s. 28-31) beskriver DMIC-prosjektet som et samarbeidende læringsfellesskap på tvers av lærere, noe som er beskrivende for hvordan læreren forteller at han og hans team jobber. I likhet med at Derek trekker frem valg av treffende innhold og evnen til å justere innholdet som viktig, understreker Hunter et al. (2018, s. 28-31) at meningsfylte oppgaver som utfordrer elevgruppen legger grunnlaget for undervisningen. Den grundige planleggingen gir læreren et godt utgangspunkt for undervisningen. Det gir han muligheten til å være fleksibel underveis, noe som diskuteres nærmere i det femte funnet.

4.2.2 Bearbeider kontekst

Det andre funnet er at læreren bearbeider oppgavens kontekst sammen med elevene og lar de gjøre seg kjent med problemet før de skal løse det. Ifølge Hunter et al. (2018, s. 28-31) skal oppgaven presenteres og bearbeides sammen med elevene i oppstarten av økten, slik at de får en forståelse av oppgavens kontekst og kan trekke ut hva det spørres om så tidlig som mulig. Den trinnvise gjennomgangen gir elevene et likt utgangspunkt før de skal angripe selve problemet. Konteksten brukes for å gjøre innholdet tilgjengelig og forståelig for alle. Det læreren beskriver i intervjuet og gjør i undervisningen samsvarer med overnevnte prinsipp for DMIC, og viser hvordan undervisningstilnærmingen kan settes ut i praksis.

Skovsmose (2022, s. 3-6) fremmer viktigheten av å invitere elevene inn i et undersøkelseslandskap med referanser fra virkeligheten, der kontekst kan nyttes som et middel. Bruk av pizzadeig i arbeidet med forhold kan ses på som et grep for å invitere elevene inn i undersøkelseslandskapet – en kontekst som er virkelighetsnær og kjent fra elevenes hverdag. Boaler (2015, s. 46-48) sier bruken av kontekst må være hensiktsmessig og kan vekke interesse, forutsatt at den er realistisk og presenterer virkelige situasjoner som krever bruk av matematikk. Konteksten i oppgaven fremstår hensiktsmessig, både med tanke på den brede responsen hos elevene og at den gir mening til matematikken i oppgaven. Den kan også tenkes å bidra til å engasjere og aktivere elevene.

4.2.3 Overvåker for å aktivere elevene og strukturere plenumsgjennomgangen

Det tredje funnet er at Derek inntar en aktiverende rolle for elever som ikke deltar og holder oversikt over hva de gjør mens de arbeider i grupper. Det gir læreren muligheten til å forberede hvordan han skal strukturere den avsluttende plenumsgjennomgangen.

En DMIC-lærers rolle under elevenes arbeid er basert på «five practices» (Hunter et al., 2018, s. 28). Læreren forteller at han bevisst følger med på elevenes arbeid på samme måte som Smith og Stein (2018, s. 11-13) beskriver *å overvåke* arbeidet for å få innsikt i tanker og løsningsstrategier. De sier oversikten gjør det lettere å *velge ut* gunstige løsninger å trekke frem og å *velge rekkefølgen* løsningene skal presenteres i for å gi elevene best mulig læringsutbytte. Derek sier rekkefølgen løsningene presenteres i er viktig for at begge gruppene skal ha meningsfulle bidrag i plenumssamtalen og han strukturerer rekkefølgen fra simplest til mest sofistikert. Dette er også et av Smith og Stein (2018, s. 13-14) sine forslag til å strukturere løsningene, fordi det åpner for at elevene kan oppnå dypere forståelse og se koblinger mellom ulike tilnærminger.

Oversikten læreren skaffer seg ved å overvåke underveis i økten gjør at han kan legge til rette for at elevene kan lære av hverandre. Struktureringen av hvilke løsninger som skal trekkes frem og deres rekkefølge gjør også at elevene får muligheten til å oppklare hverandres feil, noe læreren mener er en viktig del av deres læring. Lærerens grep støttes av Boaler (2015, s. 87), som hevder at elever kan være mer mottakelig for kritikk fra medelever enn fra læreren. Elevene virker å være villige til å lære av hverandre og valgene læreren gjør fremstår ikke tilfeldig, men heller som et resultat av erfaring og bevisste tanker om hva han ønsker å oppnå.

Underveis i arbeidet med oppgavene henvender læreren seg til elever som ikke deltar ved å be de om å tydeliggjøre og dele sine tanker, som er det første av Chapin et al. (2013, s. 10) sine steg for produktive samtaler. Den ene eleven svarer på spørsmålet med pronomenet «de», som kan oppfattes distanserende og tyde på at eleven ikke opplever seg selv som en del av gruppa, men lærerens involvering kobler tilsynelatende eleven på gruppearbeidet. Denne måten å koble elevene på gruppas resonnement er ifølge Hunter et al. (2018, s. 28-31) en del av en DMIC-lærers rolle under elevenes arbeid. Det å oppfordre elevene til å dele tankene sine om arbeidet slik kan også være en måte å læreren overvåker på. Eleven får muligheten til å bidra i den matematiske samtalen, samtidig som læreren skaffer seg innsikt i elevens forståelse.

Nærmest som svar til Barton (2018, s. 93) sin påstand om at mindre strukturerte undervisningstilnærminger gjør det lettere for elevene å gjemme seg bort, viser læreren hvordan hans systematiske overblikk ikke gir elevene denne muligheten. Overblikk gir en mulighet til å stille spørsmål som kan bidra til deltakelse (Smith & Stein, 2018, s. 11-13), og i begge tilfellene henvender læreren seg med matematikkfaglige spørsmål relatert til oppgaven, heller enn sosialt rettede spørsmål om hvorfor de ikke deltar. Dette gir elevene rom og åpner for positive bidrag til gruppa, og kan være et eksempel på hvordan læreren tilrettelegger for meningsfull deltakelse. Boaler (2015, s. 1) påpeker at matematikk kan være en kilde til gode opplevelser og selvtillit dersom det gjøres på riktig måte. Derek sine utvalgte spørsmål til de mer passive elevene ser ut til å fungere som en faglig påkobling, nettopp for å styrke deres selvtillit og legge til rette for at de har et positivt bidrag til felleskapet.

4.2.4 Etablerer og utvikler normer for deltakelse i diskusjon

Det fjerde funnet er at læreren etablerer og utvikler normer for deltakelse i diskusjon. Normer for deltakelse og kommunikasjon står sterkt i DMIC (Hunter et al., 2018, s. 28-31), og Yackel og Cobb (1996, s. 474-475) fremmer lærerens rolle i etablering av sosiale og sosiomatematiske normer. De mener normene bidrar til å utvikle holdninger og verdier hos elevene, gjør de mer selvstendige i matematikk og bedre i stand til å bedømme hensiktsmessige bidrag til felleskapet. Derek legger til rette for diskusjon og etablerer en struktur som gir elevenes bidrag en viktig plass. Elevene får ansvar som engasjerer dem, noe som setter forventninger til hvordan de skal bidra faglig. Dersom det legges opp til at elevene skal dele sine tanker, forutsettes det at normer som gjør at elevene føler seg trygge i situasjonene er etablert (Chapin et al., 2013, s. 12). Ansvarsfordelingen læreren legger opp til og villigheten elevene viser kan tyde på at slike normer allerede er etablert.

En annen forutsetning for at elevene skal kunne delta i diskusjonen er at de må evne å lytte og ta stilling til andres bidrag, tanker og resonnement på en måte som gjør det forståelig for andre (Chapin et al., 2013, s. 10-11). Ansvaret Derek gir til elevene som lytter (stille spørsmål til det som presenteres), er ifølge Chapin et al. (2013, s. 24) et aktiverende samtalegrep som ber andre elever ta stilling til det som blir presentert og diskutert. For å kunne gjøre dette er elevene nødt til å engasjere seg i medelevers resonnement og gjøre seg opp en mening om det som presenteres basert på egne erfaringer med oppgaven. På denne måten øver elevene på å orientere fokuset sitt mot det som presenteres og får ansvar for å ta del i og respondere på hverandres bidrag. Dersom læreren til enhver tid er den som skal gi respons på resonnementene, opplever ikke elevene dette ansvaret (Chapin et al., 2013, s. 20) og fratas muligheten til å engasjere seg i meningsfulle diskusjoner (Van de Walle et al., 2018, s. 28). Samtalegrepet får en normbyggende effekt ved å skape en forventning om å lytte og ta stilling til andres bidrag, samtidig som det sørger for å involvere dem i diskusjonen.

Ved å spørre elevene om de forstår forklaringen de får presentert, gjør læreren det opp til elevene å identifisere hva som eventuelt er forskjellig fra sin egen løsning. Elevene utfordres til å vurdere og sammenligne sine egne og andres løsninger, noe som er en reflekterende og nyttig aktivitet for læring i matematikk (Yackel & Cobb, 1996, s. 464). Eleven som skulle forklare hvordan de kom frem til svaret de hadde presentert, valgte å justere svaret sitt fra å beskrive det som en dobling til å utdype og forklare, som kan være et eksempel på allerede etablerte sosiomatematiske normer i klassen. Det kan være eleven selv ikke opplevde det første svaret som en tilstrekkelig matematisk forklaring, noe den endelige forklaringen synes å være med tanke på medelevenes og lærerens (manglende) respons. Situasjonen kan også illustrere hvordan læreren og elevene sammen utvikler og opprettholder en felles forståelse for hva som er anerkjente forklaringer (Yackel & Cobb, 1996, s. 461). Hunter et al. (2018, s. 28-31) sier elevene selv skal ta ansvar for egen læring og stille spørsmål dersom de ikke forstår, noe læreren i dette tilfellet oppfordret til. Samtidig understreker Hunter et al. (2018, s. 28-31) at elevene i løpet av kort tid blir flinke til å respondere på medelevers svar, forutsatt at læreren ikke involverer seg med mindre de ikke forstår hverandre. Dette er også noe læreren selv sier i intervjuet og gjør i undervisningen, som viser at arbeidet er en pågående prosess.

Læreren er en viktig støtte for elevene på veien mot ekte og produktive diskusjoner for å få elevene til å utdype egne – og engasjere seg i andres – resonnement (Chapin et al., 2013, s. 10-11). Det er først når en evner å sette ord på det selv og forklare andre at en viser faktisk forståelse (Boaler, 2015, s. 41). Dette underbygger hvor viktig arbeid med å etablere normene er, og undervisningen kjennetegnes av grep læreren gjør for å etablere normer som kan være med å løfte diskusjonene. Det legger til rette for at elevene både øves i å delta og deltar aktivt i plenumsgjennomgangen.

4.2.5 Læreren kobler sammen

Det femte funnet er at læreren viser sammenhenger mellom elevenes løsninger og kobler dem til andre matematiske ideer. På veien dit bruker han de fem praksisene på en måte som gjør innholdet tilgjengelig for seg selv og elevene. Læreren inntar en mer fremtredende rolle mellom og etter presentasjonene, hvor han sørger for å oppklare og tydeliggjøre matematikken som blir presentert.

Læreren gjenforteller løsningene elevene har presentert med egne ord, samtidig som han påpeker at det er elevenes løsninger. *Så du sier at* er et samtalegrep hvor en omformulerer det eleven sier og bevarer elevens eierskap i sitt resonnementet (Chapin et al., 2013, s. 17-18), og brukes i dette tilfellet før læreren *kobler sammen* (Smith & Stein, 2018, s. 14) løsningene og knytter de til andre matematiske ideer. Han viser hvordan elevenes dobling er et eksempel på gjentatt addisjon og utfordrer elevene på om de ser andre måter å representere addisjonene. Elevene ser koblingen til multiplikasjon og læreren viser hvordan det kunne vært brukt i andre deloppgaver. En ønsker at elevenes presentasjoner i plenum skal bygge på hverandre for å kunne gi en dypere matematisk forståelse (Smith & Stein, 2018, s. 14), noe Derek selv utrykker som mål med logistikken. Utvalg av løsninger og valg av rekkefølge bidro til å gjøre progresjonen frem til sammenkoblingen naturlig, og elevenes bidrag i diskusjonene la et grunnlag for at læreren kunne skape mening til innholdet. Han fikk vise hvordan løsningene hang sammen og kunne knyttes til andre elementer i det matematiske landskapet.

I det tredje funnet diskuteres lærerens overvåkning og mulighetene det gir for å planlegge plenumssamtalen. Smith og Stein (2018, s. 15) sine fem praksiser bygger på hverandre, der grundig planlegging og antagelser frigjør kapasitet til å skape mening til innholdet. Samtidig gjør planleggingsfasen det lettere å overvåke, som igjen legger grunnlaget for å velge ut løsninger og velge rekkefølge på det som skal presenteres. Dereks praktisering av de fem praksisene kan være noe av det som frigjør kapasiteten til å være fleksibel og gi overskuddet til videre sammenkobling og meningsskaping av innholdet.

4.3 Lærer 3 – Sølvis undervisning

I dette delkapittelet presenteres og diskuteres funn tilknyttet Sølvi (beskrevet i kapittel 3.2.3). Læreren ble observert i to undervisningsøkter: Én økt i 9. klasse med 18 elever til stede og én økt i 10. klasse med 13 elever til stede. Datautdragene som videre presenteres er fra begge undervisningsøktene og intervjuet i etterkant. Kjennetegnene til Sølvi er delt inn i: Lærerens fokus på selvtillit, lærerens overvåking og undring, og lærerens grep i en plenumssamtale.

Lærerens fokus på selvtillit

Det første funnet er lærerens fokus på å snu de negative elevidentitetene og bygge selvtillit. Videre beskrives oppstarten av en økt der læreren gir elevene valgmuligheter som et grep for å bygge selvtillit og eierskap. Deretter presenteres et utdrag fra intervjuet hvor læreren forteller om økten og sitt fokus på selvtillit.

I starten av økten i 10. klassen sier læreren at de skal jobbe med oppgaveark. Hun sier at det er tre forskjellige oppgaveark (vedlegg 8, 9 og 10) og elevene skal selv velge fritt hvilke oppgaveark de vil starte med. Læreren vandrer rundt og deler ut oppgavearkene til hver elev, der hun har korte samtaler med hver av dem. I intervjuet ble læreren spurt om hun kunne fortelle om oppstarten av økten og hennes tanker bak valgene. Følgende er et utdrag av hennes svar:

> «They haven't quite got the gist of what a variable is… at all… so for me it's okay to see if we can reduce the elephant in the room. I was trying to build confidence, you know. Kids need to see what they can do and can't do, and these are very "I can't do it". So, for a lot of things sometimes it's just time. So today we just needed to sit back and consolidate. For those who are ready to push on, it's okay to push on. Those 3 worksheets were quite different in terms of capability and terms of where they were at and what connections I thought they could make. Keep them kind of on the same work, but also differentiate. I could get them to come up and get them, but this way I could have a conversation with them really quickly. It means I can guide it a little bit as well, so they feel like they're in ownership of their choice. And they can say no, and it's okay. Like I don't feel like doing this today. You have to respect them as a learner. Where they are at for today».

I utdraget ser vi at elevene får et valg mellom tre ulike oppgaveark. De forskjellige arkene omhandler samme tema, der læreren byr på en differensieringsmulighet. Hun velger å gå rundt og dele ut arkene til hver elev, slik at hun får hatt en kort samtale med hver av dem. Hun jobber blant annet med selvtillit og eierskap ved å tilby elevene en valgmulighet og respektere deres valg.

Lærerens overvåkning og undring

Det andre funnet er at læreren inntar en overvåkende og undrende tilnærming til elevene når de jobber med oppgaver. Det er noe vi observerer i begge øktene, der følgende utdrag er fra den samme økten som den ovenfor, hvor elevene jobber i omtrent 30 minutter med oppgavearkene. Vi presenterer også deler av intervjuet der hun forteller om sin undervisningstilnærming.

Under arbeidet vandrer hun mellom elever og elevgrupper, til elever som ikke har rekket opp hånden og til elever som rekker opp hånden. Læreren ser på arbeidet til elevene, lytter til deres samtaler og stiller spørsmål. Når elevene har argumentert for riktig løsning, svarer Sølvi enten bekreftende, roser og smiler eller bare smiler før hun går videre. Noen av spørsmålene læreren stiller elevene mens hun går rundt er:

> Hvordan går det?
>
> Hvordan fikk du det?
>
> Hva er det du ikke forstår?
>
> Hvordan vet du at det er riktig?
>
> Hvordan vet du det er feil?
>
> Hva har du tenkt?

De åpne spørsmålene ender ofte i en samtale som går frem og tilbake mellom lærer og elev eller læreren og flere elever på gruppen. Utdraget nedenfor er en samtale mellom Sølvi og en elev som vi mener er veldig typisk for øktene vi observerte:

> Læreren går bort til en elev som rekker opp hånden (eleven jobber med vedlegg 8).
>
> E: Er det feil i oppgavene?
>
> L: Ja, det er mulig jeg har gjort noen feil. Fortell meg hva du mener er feil

E: Det står $4(x+2) = 4x + 2$, men det skal jo være $4x + 4$?

E: Nei, vent, 4 ganger 2 er jo 8

L: Hva gjorde du for å løse oppgaven nå?

E: Ganget 4 med x og så 2

L: Og hva har du funnet ut?

E: Svaret er ikke riktig

L: Ja, det stemmer. Bra! (læreren smiler og går videre)

I utdraget ser vi flere forskjellige spørsmål læreren stiller til elevene mens hun vandrer rundt i klasserommet og en typisk responsrekke hun kommer med i samtaler med elevene. I intervjuet spurte vi om hva hun finner viktig når hun vandrer rundt mens elevene jobber med oppgavearkene sine, der hun svarte:

> «Lots of things! I'm monitoring and like get out where they are going. I want to know where they are at as learners, where I think we need to go next, am I pushing too hard… For me as a teacher; have I got it right, did I make a good choice, you know… I'm constantly thinking through those things».

Selv om oppgavearket eleven i samtaleutdraget jobber med handler om å finne riktige og feil måter å løse en parentes på (der eleven skal finne en vei fra venstre til høyre side av arket gjennom riktige svar), ser vi at Sølvi later som hun kanskje har gjort noen feil og oppmuntrer eleven til å utdype hva han mener er feil. I intervjuet sier hun: «It's like people say; teaching is acting», og en viktig del av hennes undervisning er å være undrende på denne måten. Hun forteller at elevene i begge disse klassene kom med lite tro på seg selv, og en del av det å stille spørsmål og få dem til å forklare gjøres for å bygge selvtillit. Hun mener det er viktig for å få dem til å tenke og det kan komme mye interessant ut av samtalene, og da må hun tilpasse.

Læreren overvåker for å finne ut mer om elevene og hvordan hun treffer i sine valg. Sølvi påpeker at hun bruker et slags «skuespill» i undervisningen i sitt forsøk på å gjøre spørsmålene og hennes undring mer ekte. Det er mye interessant i informasjon som hentes ut av elevene og hun utfører nødvendige justeringer for å møte elevene der de er. En bevisst og større tilpasning læreren gjør kommer frem i den andre undervisningsøkten, noe det tredje funnet handler om.

Lærerens grep i en plenumssamtale

Det tredje funnet er at læreren sjekker elevenes forståelse i plenumssamtaler og tilpasser undervisningen for å skape læringsmuligheter og utvikle sosiale og sosiomatematiske normer. Funnet baseres på en samtale tidlig i økten i 9. klassen og et utdrag fra intervjuet der hun snakker om situasjonen.

Simplify or fill in the gap!

1. $3a + 4a + \square = 15a$

2. $2a \times 3 = \square$

3. $a + a + a + a = \square$

4. $7a \times \square = 21a$

5. $2 \times a \times 3 \times b = \square$

6. $2 \times a + 3 \times a = \square$

Create 2 questions that have an answer of 6a

Create 2 questions that have an answer of $8a^2$

Figur 4: Oppgavene Sølvi skrev på tavlen (vår illustrasjon)

I gjennomgangen av de fem første oppgavene (figur 4) ber læreren elevene som svarer om å forklare hvordan de tenkte, for så å se ut i klasserommet og spør om alle er fornøyde/enig. Flere elever nikker hver gang. I den sjette oppgaven sier en elev først 5a (som er riktig svar), for så å endre det til et feilsvar i løpet av sin forklaring. En annen elev rekker opp hånden, får ordet og sier at 5a er riktig, men vet ikke hvorfor. Den fraværende responsen fra resten av elevgruppen tyder på en manglende forståelse. Som en respons til elevenes usikkerhet skriver læreren opp 2 × 3 + 2 × 4 på tavlen. I plenum sier hun at elevene skal løse oppgaven individuelt og kunne forklare hvordan de tenkte. Læreren vandrer rundt mens de løser oppgaven, og utdraget nedenfor beskriver situasjonen som utspilte seg videre:

> E1: Jeg har svaret!
>
> L: Okey du har svaret
>
> E2: Jeg har svaret!
>
> L: Okey
>
> (Mange elever gir beskjed om at de har funnet svaret og flere elever rekker opp hånden og vil svare. Etter omtrent ett minutt gir læreren ordet til en elev som rekker opp hånden)
>
> E3: 6 + 8 = 14 (læreren skriver regnestykket på tavlen)
>
> L: Hva med 32?

L: 2 gange 3 er 6, pluss 2 er 8, gange 4 er 32 (læreren peker fra venstre til høyre på regnestykket mens hun snakker)

L: Hvor mange fikk 32? (to elever rekker opp hånden)

L: Okey. To stykker pluss meg fikk 32

E1: Ja! Jeg hadde 32 som svar hele tiden!

L: Hvor mange fikk 14? (to elever rekker opp hånden)

L: Noen andre svar?

E4: 18

L: Hvordan?

E4: Aner ikke (eleven ler og smiler. Læreren skriver opp 18)

L: Hva er riktig?

E1: Jeg har rett, 32 er riktig

L: Okey. Hvorfor? (eleven klarer ikke å svare)

L: Noen som kan hjelpe oss?

E5: Det er 14, fordi du må multiplisere 2 med 3 og 2 med 4 først, så kan du legge de sammen (eleven snakker veldig lavt)

E6: Ja! BEDMAS! (flere elever sier ah, ja! En elev sier oh my God. Læreren skriver opp BEDMAS)

I intervjuet ble læreren spurt om hun kunne fortelle om situasjonen hvor hun produserte et feilsvar. Følgende er et utdrag av hennes svar:

> «I had noticed some emerging misunderstandings walking around and I just wanted to test the kids and see what their understanding really is. And kids are always expecting right answers. So when you see a wrong answer, do you just expect that it's right? I wanted to see if they could figure out which is right and which is wrong and challenge

> why my thinking would be wrong. I often do things that are deliberately wrong, and that was the curiosity in terms of like... could we push? So, it's kind of getting into big deeper understanding. Can you prove? Can you justify? Can you tell me why?».

Læreren bruker flere grep i plenumsgjennomgangen der elevene ikke gir et tilfredsstillende svar på det sjette spørsmålet. Læreren lager en lignende ny oppgave (fra $2 \cdot a + 3 \cdot a$ til $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$). Mens elevene jobber med å løse den nye oppgaven, ser læreren noen misoppfatninger hun ønsker å adressere. I plenumssamtalen som følger, utfordrer hun elevene på sin matematiske autoritet. Vi opplevde det som en sterk utfordring, for ikke bare presenterer læreren feilsvaret 32 som sin løsning, men hun kommer også med en begrunnelse for hvorfor det er riktig (regner fra venstre mot høyre). Vi ser at E1 ble svært fornøyd med å ha samme svaret som læreren, men når Sølvi utfordrer eleven på hvorfor det er riktig, svarer han ikke. Etter hvert er det en elev som utfordrer hennes feilsvar og kommer med riktig svar. Elevens begrunnelse for svaret (regnerekkefølge) skaper en reaksjon blant elevgruppen. En annen elev bygger på svaret og roper ut BEDMAS, og flere elever gir uttrykk for forståelse.

Lærer 3 – Diskusjon Sølvi

I kapittel 3.2.3 nevnes det at Sølvi har tatt over matematikkundervisningen i to klasser med elever som mangler selvtillit, noe hun ønsker å bygge opp. Under observasjonen og intervjuet kommer det frem at undervisningen i høy grad handler om å bygge selvtillit, noe som er det første funnet. Diskusjonen av funn 1 viser først og fremst til delkapittelets del om lærerens fokus på selvtillit, men læreren gjør også grep for å bygge selvtillit under elevarbeid og i plenumssamtalen. Videre diskuteres lærerens overvåkende og undrende tilnærming til undervisningen (funn 2), før lærerens grep i en plenumssamtale (funn 3) diskuteres.

4.3.1 Å bygge selvtillit er sentralt

Det første funnet er lærerens fokus på å snu de negative elevidentitetene og bygge selvtillit. Læreren snakker bokstavelig talt om å «redusere elefanten i rommet» med tanke på selvtillit. Boaler (2015, s. 2/186) bruker begrepet elefanten i klasserommet i sin beskrivelse av ideen om at matematikk er en medfødt gave som noen har og andre ikke har, en svært skadelig myte for barns matematiske utvikling. Sølvi sine beskrivelser av elevene kan sees på som et «fixed-mindset», der elevene har en forestilling om at deres ferdigheter er satt (Dweck, 2009). Dweck (2009) sier et slikt tankesett svekker selvtillit og motivasjon. Ifølge Schoenfeld (2016, s. 9-10) er elevenes tro på egen mestring og deres villighet til å engasjere seg grunnleggende for identitet, som gjør at negative elevidentiteter som «jeg er ikke en matteperson» må snus for å skape et positivt læringsmiljø. Matematikk er et fag som både kan ødelegge og bygge selvtillit (Boaler, 2015, s. 1), og et sentralt kjennetegn ved læreren er hennes fokus på å snu de negative elevidentitetene og bygge selvtillit, noe hun bruker flere konkrete grep for å få til.

Et grep læreren bruker er differensiering, der selvtillit bygges ved at elevene opplever mestring. De tre oppgavearkene elevene får velge mellom handler om samme tema, men har ulik vanskelighetsgrad, som ifølge Tomlinson (1999, s. 121-122) er ett konkret differensieringsgrep. En skal ikke undervurdere følelsen av mestring elevene får gjennom instrumentelt arbeid (Skemp, 1976, s. 8-10), og vi bemerker at de tre oppgavearkene og alle oppgavene tilknyttet plenumssamtalen handler om å løse parenteser, forenkle uttrykk og gjøre utregninger som ikke krever mer enn instrumentell forståelse. I to klasser som «haven't quite got the gist of what a variable is… at all», er nok selve oppgavene valgt nettopp med tanke på å legge til rette for mestring i sitt forsøk på å snu de negative elevidentitetene.

Et annet grep læreren gjør for å bygge selvtillit er hennes «skuespill» og bruk av ros. Under lærerens overvåkning og undring spør en elev om det er feil med oppgavene (noe som er nettopp det oppgavearket handler om, der de skal finne de riktige svarene for å komme seg fra venstre til høyre), og vi anser responsen til læreren som viktig for elevens selvtillit. Istedenfor å respondere med noe som kunne svekket den, later Sølvi som hun kanskje har gjort noen feil og får eleven til å fortelle hvorfor eleven tror det, for så å rose elevens riktige resonnement. Lignende hendelser så vi flere ganger i begge øktene, der læreren later som de kan lære henne noe, får elevene til å utdype sine tanker og alltid smiler før hun går videre til neste elev. Å rose prosessen som forteller hva eleven gjorde for å lykkes og hva en kan gjøre for å lykkes igjen er et viktig element for å vise at deres ferdigheter kan utvikles (Dweck, 2009).

Et tredje grep læreren gjør for å bygge selvtillit er hennes «skuespill» relatert til feilsvar. I plenumsgjennomgangen er ikke læreren tilfreds med elevenes svar på et spørsmål. Hun lager en lignende ny oppgave og vandrer litt rundt mens de løser den. I etterkant forteller Sølvi at hun la merke til misoppfatninger blant elevgruppen i sin vandring og ønsket å utfordre dem på det. Van de Walle et al. (2018, s. 29) sier at hvordan en velger å behandle elevers feil og misoppfatninger i klasserommet har en enorm effekt på elevenes oppfatning om læring og seg selv som elever. Den første eleven som sa han hadde svaret klart (E1), hadde et feilsvar (32), og eleven som svarer (E3) sier $6 + 8 = 14$, som er både riktig svar og forklaring (dog noe kort). Selv om læreren ikke eksplisitt nevnte det i intervjuet, hadde vi inntrykk av at dette var nøye utvalgt med tanke på den lave selvtilliten til klassen, særlig fordi hun i etterkant velger å presentere 32 som et alternativt svar. I en klasse med lav selvtillit hadde det nok vært svært ugunstig om læreren fikk noen av elevene til å stå for eierskapet i sin misoppfatning. Sølvi omgår dette ved å bevisst å produsere og ta eierskap til et feilsvar hun anser gunstig å diskutere. I sitt «skuespill» viser Sølvi at hun også kan gjøre feil og at feilsvar ikke er farlige. Faktisk tvert imot – de kan føre til læring, noe som diskuteres videre i det tredje funnet.

Sølvi har et ønske om å snu «I can't do it»-identitetene og gjør flere konkrete grep for å bygge opp elevenes selvtillit i matematikkfaget. Noen er planlagt, som bruken av differensiering. Andre grep er mer spontane og handler mer om de avgjørende mellommenneskelige øyeblikkene, der læreren bruker «skuespill». I samtaler later læreren som elevene kan lære henne noe, får elevene til å utdype sine tanker og roser deres resonnering – en viktig del av hennes måte å bygge selvtillit og å få frem at ingen sine ferdigheter er satt, ikke en gang læreren sine. Læreren sin behandling av feilsvar og misoppfatninger har stor betydning for elevenes læring og selvtillit i faget (Van de Walle et al., 2018, s. 29). Elevenes selvtillit står også sentralt når læreren selv produserer et feilsvar i plenum for å adressere en misoppfatning blant elevgruppen, noe som omgår at en elev står ansvarlig for et feilsvar foran hele klassen.

4.3.2 Lærerens overvåkende og undrende tilnærming

Det andre funnet er at læreren inntar en overvåkende og undrende tilnærming til elevene når de jobber med oppgaver. Sølvi oppsøker alle elevene under elevarbeid i begge øktene, uavhengig om de har rekket opp hånden eller ikke. Hun ser på arbeidet til elevene, lytter til deres samtaler og stiller spørsmål. Læreren forteller i denne sammenheng at hun overvåker elevene og prøver å finne ut hvor elevene er i sin læringsprosess og om hun som lærer treffer i sine valg. Formativ vurdering handler om å «møte elevene der de er», der læreren må orkestrere klasseromsaktivitetene slik at læreren kan hente ut informasjon fra elevene og bruke den videre i sin undervisning (Schoenfeld, 2016, s. 11-12). Lærerens overvåkende og undrende tilnærming skaffer informasjon om elevene, noe som har betydning for hennes valg i videre undervisning. Ett eksempel på dette er adresseringen av en fremtredende misoppfatning innenfor regnerekkefølge, noe det neste funnet tar for seg.

Spørsmålene Sølvi stiller rettes mot elevenes tankeprosesser, og samtaler med elevene avsluttes alltid med en form for ros. Spørsmålene kan sees på som bruk av samtalegrepet *si mer*, der eleven bes om å utdype sitt resonnement, samtidig som læreren viser et behov for å forstå hva elevene tenker og signaliserer et ønske om mer enn et korrekt svar (Chapin et al., 2013, s. 16-17). En forventing om at elevene skal forklare sine løsninger og tanker er en sosial norm, men hva som er en akseptabel matematisk forklaring er en sosiomatematisk norm (Yackel & Cobb, 1996, s. 461). Hennes stadige undring legger til rette for at det å forklare sine løsninger og tanker skal bli en sosial norm i klassen, og hennes ros kan etablere og vedlikeholde sosiomatematiske normer for hva som er akseptable forklaringer.

Schoenfeld (2014, s. 407) sier at å drive formativ vurdering er en vanskelig oppgave, fordi det krever et sett med pedagogiske tankemåter og fagdidaktisk kompetanse som ikke er lett å tilegne seg. I det første funnet diskuteres det hvordan læreren later som at elevene kan lære henne noe med tanke på selvtillit. Hennes undrende og «skuespillende» tilnærming gjør at elevene utdyper og gir Sølvi innsikt i deres tanker og tankeprosesser. Med andre ord får tilnærmingen flere funksjoner enn å bygge selvtillit – hun skaffer informasjon som kan brukes formativt. Vi opplevde hennes «teaching is acting» som et naturlig grep i sin overvåkende og undrende tilnærming, og det så ut til å treffe samtlige ganger, noe som tyder på at hun har tilegnet seg gunstige vaner for å drive formativ vurdering.

4.3.3 Lærerens grep i en plenumssamtale

Det tredje funnet er at læreren sjekker elevenes forståelse i plenumssamtaler og tilpasser undervisningen for å skape læringsmuligheter og utvikle sosiale og sosiomatematiske normer. Å orkestrere klasseromsaktiviteter slik at de avslører elevenes nåværende matematiske forståelse og tankemønstre er et formativt grep (Schoenfeld, 2016, s. 11-12). Boaler (2015, s. 41) fremmer hvor viktig samtalen er for læring i matematikk og påpeker at det er først når en evner å sette ord på det selv og forklare noen andre en viser faktisk forståelse. Det at Sølvi har lagt opp til en plenumsgjennomgang kan avsløre elevenes faktiske forståelse og fungerer som selve grunnlaget for samtalen hun videre leder. Elevene må bli vant til å forklare sine tanker og forklare hvorfor de sier det de sier (Chapin et al., 2013, s. 21), der en forventing om at elevene skal forklare sine løsninger og tanker er en sosial norm, og hva som er en akseptabel matematisk forklaring er en sosiomatematisk norm (Yackel & Cobb, 1996, s. 461). Læreren ber om forklaringer og prøver å skape en forventning om at elevene skal forklare hvorfor deres svar er riktig, hun involverer forskjellige elever og får dem til å avgjøre om en forklaring er tilfredsstillende i plenumssamtalen, noe som medfører at læreren kan få frem og sjekke elevenes forståelse, samt utvikle både sosiale og sosiomatematiske normer.

Elevene klarer ikke å forklare hvorfor 5a er riktig svar i en oppgave som handler om både regnerekkefølge og algebra. Oppgaven læreren lager etterpå tar kun for seg regnerekkefølge

$(2 \cdot 3 + 2 \cdot 4)$, og det er denne forståelsen hun ønsker å teste dem på. Vi finner det rimelig å anta at hun allerede her hadde planer om å diskutere oppgaven i plenum etter at de hadde jobbet med den individuelt. Smith og Stein (2018) sine fem praksiser er et rammeverk for organisering og tilrettelegging av produktiv matematisk diskusjon med utgangspunkt i elevers tanker, og vi ser at særlig to av prinsipper er fremtredende. Underveis i arbeidet med oppgavene går læreren rundt og *overvåker* elevenes arbeid for å få innsikt i deres tanker og løsningsstrategier (Smith & Stein, 2018, s. 11-13). Vi ser at læreren får overvåket flere elevers arbeid ved å la klassen få lenger tid til oppgaven enn det den første eleven som var ferdig (E1) behøvde, og hun forteller i intervjuet at hun her bemerket seg noen misforståelser. Oversikten over elevenes arbeid gjør det lettere for læreren å *velge ut* hvilke løsninger som er gunstige å trekke frem og hvem som skal dele sine løsninger for klassen (Smith & Stein, 2018, s. 11-13). Hvorfor en elev med feilsvar ikke fikk det første ordet i plenum (der en elev med riktig svar ble valgt ut) og hvorfor hun selv tar ansvaret for feilsvaret diskuteres i det første funnet – poenget her er at hun lot det gå litt ekstra tid i sin overvåkning for å hente ut informasjon om flere elever og fant 32 som en gunstig løsning å trekke frem.

Å verdsette feil eller misforståelser i plenum og få elevene til å tenke over hvorfor det er en feil eller misforståelse, forsterker det viktige budskapet om at vi alle gjør feil og har misoppfatninger, og kan forbedre forståelsen vår ved å undersøke dem nærmere (Van de Walle et al., 2018, s. 29). Når læreren gjentatte ganger utfordrer elevene på hennes tenkning (også når en elev har samme svar som henne), viser læreren eksplisitt at også hennes svar bør utfordres og at matematisk rettferdiggjørelse er det viktigste for å kunne avgjøre hvilket svar som er riktig. Å utfordre elevene til å vurdere og sammenligne egne og andres svar er en reflekterende aktivitet med stort potensial for elevers matematiske læring (Yackel & Cobb, 1996, s. 464). Det er et asymmetrisk forhold mellom lærer og elever (Yackel & Cobb, 1996, s. 464), og det er viktig at elevene selv avgjør om noe gir mening og ikke bare aksepterer det som sant fordi autoriteten sier det (Carpenter et al., 2003, s. 87-92). At eleven som presenterer riktig svar og begrunnelse (E5) snakker veldig lavt, indikerer nettopp det læreren beskriver (det er en klasse med lav selvtillit) og at læreren er i en fase hvor hun etablerer og utvikler sosiale og sosiomatematiske normer.

Som nevnt forteller Sølvi at hun har «plukket opp litt her og der» og fremdeles prøver ut nye ting i sin tilnærming til undervisning. Å kreve hyppige svar, overvåke elevenes prestasjoner nøye, gi umiddelbar bekreftende og korrigerende tilbakemelding, og levere økten i et raskt nok tempo representerer selve «kunsten å undervise» eksplisitt (Archer & Hughes, 2011, s. 131/197). Sølvi krever hyppige svar og overvåker elevenes prestasjoner gjennom sin undrende tilnærming i både samtaler mellom elev og lærer (funn 2) og i helklassesamtaler (funn 3). I elev-lærer-samtaler gir hun umiddelbar bekreftende og korrigerende tilbakemelding, mens i helklassesamtaler justerer hun tempoet for at alle skal kunne bearbeide innholdet for å nå målet, noe Archer og Hughes (2011, s. 3) beskriver som et viktig grep i eksplisitt undervisning. Slik sett bruker Sølvi flere instruerende undervisningsgrep, men hun bruker også utforskende grep i sin undervisningspraksis.

Misoppfatningen hun oppdager adresseres på en måte som kan utvikle sosiale og sosiomatematiske normer, samtidig som hun utfordrer elevene på hennes autoritet. Å endre lærerens rolle fra å være en matematisk autoritet til å være en tilrettelegger som trekker frem og bygger på elevenes tenkning er en viktig del av DMIC sin undervisningsmodell (Hunter et al., 2018, s. 26), og det kan det være at læreren har «plukket opp» denne utjevningen av autoritet som er så viktig i New Zealand sin store satsning innenfor undervisning. I begge øktene bruker Sølvi feilsvar som læringsmuligheter, og i intervjuet forteller hun at dette er noe hun ofte gjør. At læreren i dette tilfellet selv produserer feilsvaret gir det flere dimensjoner enn matematisk læring og blir et verktøy for å bygge opp selvtillit og utvikle en sosiomatematisk norm om at matematisk rettferdiggjøring er viktigere enn autoritet.

4.4 Likheter og forskjeller mellom lærerne

I de tre første delkapitlene presenterte og diskuterte vi hver enkelt lærers kjennetegn. I dette delkapittelet drøftes likheter og forskjeller mellom lærerne, der TRU (se kapittel 2.2.1) brukes som et rammeverk for drøftingen. Schoenfeld (2016, s. 1-3) poengterer at rammeverket ikke er en oppskrift for hvordan et «powerful classroom» skal se ut, men heller at de fem dimensjonene er fremtredende i alle slike klasserom. Det er med andre ord mange veier til Rom, og det at vi skal kunne «finne TRU» i de tre anerkjente lærernes klasserom er årsaken til at vi har valgt det som rammeverk for å sammenligne kjennetegn mellom tre svært forskjellige lærere. Som nevnt tidligere har vi oversatt de fem dimensjonene i TRU til innhold; kognitive krav; lik tilgang til innhold; mestringstro, eierskap og identitet; og formativ vurdering. Lærerne drøftes innenfor hver av de fem dimensjonene for å tydeliggjøre likheter og forskjeller, selv om dimensjonene er nært knyttet til hverandre (Schoenfeld, 2016, s. 5-12).

Innhold – Dimensjon 1

Ved bruk av variasjonsteori og eksplisitte undervisningsgrep skaper Eskil et fokusert og sammenhengende innhold. Den lille variasjonen bryter ned innholdet, og lærerens stadige hvorfor-spørsmål synliggjør viktigheten av matematiske begrunnelser, der bruken av regler er sentrale for å løse oppgavene. Læreren guider elevene til å utvikle matematikkfaglig kompetanse ved å forme innholdet som en «ramp» (heller enn steg) og stille spørsmål som ansvarliggjør elevene til å finne velbegrunnede løsninger. Når elevene selv ikke klarer å løse en oppgave oversiktlig og korrekt, er Eskil en «leverandør» av innholdet, der han bruker eksplisitte grep (som modellering) for å klargjøre forbindelser.

I Derek sin DMIC-undervisning er valget av problem, valg av kontekst til problemet og å bearbeide konteksten sammen med elevene det sentrale i øktens innhold. Læreren plasserer elevene i en realistisk kontekst, og elevene skal først og fremst selv oppdage forbindelsene mellom prosedyrer og konsepter. Derek kan sees på som en «fasilitør» av innholdet, fordi hans overvåkning av elevarbeid og planlegging av plenumssamtalen skal medføre at elevene presenterer en sekvens av forskjellige løsningsstrategier i en gunstig rekkefølge. Logistikken legger til rette for at elevene skal se sammenhenger og utvikle sin kompetanse basert på elevgruppens egne forklaringer, og elevene ansvarliggjøres til å hjelpe hverandre om noe er uklart. Lærerens avsluttende rolle er å klargjøre og koble sammen elevenes løsninger i en plenumsgjennomgang.

Oppgavene i Sølvi sin undervisning er ofte differensiert og skal tydeliggjøre viktige disiplinære ideer (som regnerekkefølge), der hennes undrende tilnærming og plenumssamtaler adresserer sammenhenger mellom prosedyrer og konsepter. Hun legger til rette for at elevene skal utvikle sin matematikkfaglige kompetanse ved å møte elevers spørsmål og forklaringer med spørsmål som skal klargjøre eller ros som skal bekrefte. Hennes «skuespill» oppfordrer til begrunnelser og forklaringer som legger ansvaret for å gjøre tenkningen og begrunne en løsningsstrategi over på elevene. Det er elevene selv som får rollen i å presentere matematikken oversiktlig og korrekt, og lærerens ros kan etablere og vedlikeholde sosiomatematiske normer for hva som er akseptable forklaringer.

Eskils bruk av variasjonsteori i eksplisitt undervisning medfører at innholdet i økten er mange oppgaver som har en liten variasjon mellom dem. Han legger til rette for at elevene skal lære gjennom mengdetrening med små nyanser, og hans spørsmål og tilbakemeldinger guider elevene til øktens sentrale mål. Dersom det ikke er tilstrekkelig, fungerer han som en slags back-up og klargjør innholdet på en ny og eksplisitt måte. Med DMIC sine prinsipper som undervisningstilnærming, bruker Derek på sin side et større problem med få deloppgaver. Elevene skal streve med problemet i grupper – uten særlig innblanding fra lærer – der han guider elevene mot øktens mål ved å velge en gunstig rekkefølge for presentasjonen av løsningsstrategier. Der Eskil sin klargjøring *kan* inneholde elevers løsninger og koble dem sammen, tar den avsluttende plenumssamtalen til Derek *utgangspunkt* i å klargjøre og koble sammen elevenes løsninger. Sølvi har ofte en differensiert undervisning, og bruker i likhet med Eskil også mengdetrening som et middel for læring. Hennes undrende spørsmål guider også elevene mot øktens sentrale mål, men vi observerte ikke at Sølvi endte opp med å opptre som en slags fasit. Hun vek aldri fra sin «skuespillende» tilnærming, og elevene skulle være dem som løste oppgaven – enten selv eller med hjelp fra medelever.

Kognitive krav – Dimensjon 2

Eskil sin nøye utvalgte variasjon bryter ned innholdet og fungerer som et læringsgrep for å få med alle elevene helt fra start. Det stilles gradvis høyere kognitive krav utover økten, hvor innholdet formes som en «ramp». En liten variasjon legger til rette for at elevene skal bygge videre på det de kan og klare å gripe tak i og gi mening til viktige matematikkfaglige ideer og bruksområder. Variasjonsteori kombineres med formativ vurdering (herunder Desmos) for å justere de kognitive kravene, noe læreren også opprettholder ved å stille spørsmål og gi tilbakemeldinger preget av hvorfor det er slik. Eskil utfordrer først elevene til å streve med innholdet og finne løsninger og begrunnelser for dem, for så å levere innholdet på en ny og eksplisitt måte dersom elevenes «productive struggle» ikke er fruktbar.

Derek sitt valg av problem for økten legger listen for hvilke kognitive krav som stilles. I planleggingsfasen jobber læreren sammen med kolleger for å finne oppgaver og kontekst som er meningsfylte og treffer elevene med tanke på graden av utfordring. Mens elevene jobber i grupper, trekker læreren seg litt unna for å la dem streve med det utvalgte problemet. På avstand overvåker Derek elevene slik at de skal hjelpe hverandre, og involverer seg i elevenes arbeid først og fremst for å aktivere elever som er passive. Uten å fortelle elevene nøyaktig hva de skal gjøre, kommer læreren med «hintende» spørsmål som skal koble eleven på gruppearbeidet.

Sølvi bruker ofte differensierte oppgaveark, der elevene selv til en viss grad kan justere de kognitive kravene. Ved siden av valget av selve innholdet, skaper læreren muligheter for elevene til å gripe tak i og gi mening til innholdets matematikkfaglige ideer og bruksområder gjennom sin undrende og «skuespillende» tilnærming. Denne tilnærmingen fremstår som en type «scaffolding», fordi spørsmålene er rettet mot elevenes tankeprosess og får elevene til å bygge videre på det de kan (uten å fortelle dem nøyaktig hva de skal gjøre), noe som opprettholder de kognitive kravene.

Eskil former de kognitive kravene som en «ramp», der elevene justerer seg selv etter hvor langt de kommer. Oppgavene får en naturlig progresjon som elevene skal streve med, mens i Dereks undervisning skal et større problem bearbeides i et gruppesamarbeid. De skal hjelpe hverandre mens de strever, og sammen skal de løse problemet og presentere sin løsningsstrategi. At elevene hjelper hverandre mens de strever er også en sentral del i Sølvi sin undervisning. Ofte bruker hun differensiert undervisning, slik at elevene selv til en viss grad får justere de kognitive kravene. Ingen av lærerne senker de kognitive kravene ved å komme med en umiddelbar forklaring på elevenes spørsmål eller fortelle elevene nøyaktig hva de skal gjøre. Lærerne får elevene til å tenke selv ved å stille spørsmål som rettes mot begrunnelser og koblinger mellom prosedyrer og konsepter.

Lik tilgang til innhold – Dimensjon 3

I Eskil sin undervisning er variasjonsteori et viktig verktøy for lik tilgang til innhold. Han bruker variasjonsteorien til å forme innholdet som en «ramp», som begynner med noe alle elevene kan få til – der selve kunsten er å gradvis utfordre dem mer, samtidig som de tar med seg noe fra tidligere oppgaver. Læreren sjekker elevenes forståelse jevnlig (som å «skanne» dem i Desmos), og kritiske deler av innholdet adresseres både direkte med enkeltelever og gjennom plenumssamtaler. I plenumsgjennomgangene kan Eskil samle elevene rundt viktige læringspunkt for økten, hvor han bruker flere samtalegrep for å skape en bred og meningsfull matematisk deltakelse blant elevene.

Læring gjennom samtaler er sentralt i Derek sin undervisningstilnærming. Selve plenumssamtalene og bruken av kontekst til problemet (samt måten konteksten bearbeides på) skal gi alle elevene lik tilgang til innholdet. I oppstartsfasen bearbeides oppgavens kontekst, der de får gjøre seg kjent med problemet før de skal forsøke å løse det. Først bearbeides konteksten i plenum, så i gruppene, for så å samle elevene rundt en ny plenumssamtale – en trinnvis gjennomgang som gir elevene et likt utgangspunkt før de skal angripe selve problemet. I den avsluttende fasen samler læreren elevene på ny, denne gangen rundt et viktig læringspunkt. Rekkefølgen i elevenes presentasjon av deres løsningsstrategi er nøye utvalgt for å skape en bred og meningsfull deltakelse, der elevgruppenes tilnærminger lett kan sammenlignes. Lærerens rolle er å koble løsningsstrategiene sammen og klargjøre sammenhengene, noe som gir flere elever mulighet til å oppnå målet med økten.

Sølvis bruk av differensiering tar i seg selv utgangspunkt i å gi elevene lik tilgang til innhold. I undervisningen bruker hun samtalegrep som får frem elevenes tanker – et formativt grep som får betydning for videre undervisning. Hennes bruk av feilsvar er fremtredende og noe hun ofte gjør. Når hun adresserer elevers misoppfatninger, gjør Sølvi grep for å involvere elevene på meningsfulle måter. Gjennom bruk av samtalegrep og en «skuespillende» rolle ansvarliggjøres elevene til å selv rydde opp i misoppfatningene. Den «skuespillende» rollen virker naturlig og gjør undringen (og dermed også elevenes bidrag) mer genuin. Det er elevene som gjør tenkningen, og tilnærmingen blir et praktisk grep nettopp med tanke på å oppnå bred og meningsfull matematisk deltakelse blant elevene.

Alle tre lærerne velger oppgaver som i seg selv baseres på lik tilgang til innhold. Både Eskil og Sølvi velger en form for mengdetrening av oppgaver, der starten av «rampen» er Eskil sitt utgangspunkt for å få alle med, mens differensiering og elevmedvirkning i valget av oppgaver er en tilnærming Sølvi ofte bruker for å få alle med. Derek på sin side bruker tid på finne en gunstig kontekst og bearbeide denne grundig sammen med elevene for å få med alle fra start. I tillegg bruker alle lærerne plenumssamtaler for å samle elevene rundt viktige læringspunkt, som også er et grep for å gi elevene lik tilgang til innhold. Til tross for forskjellige overordnede undervisningstilnærminger, bruker lærerne flere lignende samtalegrep for å strukturere sine plenumssamtaler med et mål om bred og meningsfull deltakelse blant elevene.

Mestringstro, eierskap og identitet – Dimensjon 4

I Eskil sin bruk av variasjonsteori skal starten av «rampen» medføre tidlig mestring, og sekvensen av oppgaver bygger på hverandre og skal i seg selv medføre en tro på videre mestring. Hans eksplisitte undervisning kjennetegnes også av høy grad av elev-lærer interaksjon, der elevene både i lærer-elev-samtaler og plenumssamtaler oppmuntres til å bidra med egne ideer. Han «skanner» etter misoppfatninger og bruker ofte nesten riktige feilsvar når han skal adressere dem, noe som kan ufarliggjøre feilsvar og motvirke tanken om at feil er negativt. Eskil bruker samtalegrep for å få frem elevenes tanker og få elevene til å bygge videre på medelevers bidrag. Han anerkjenner deres bidrag i plenum, og når klassen konstruerer sin kollektive forståelse, tilskriver Eskil elevene eierskap når han ser behov for å klargjøre deres bidrag.

Derek starter sine undervisningsøkter med å bearbeide en kontekst sammen med elevene. Med en realistisk kontekst er inngangsterskelen for å delta lav, og læreren oppmuntrer elevene til å dele sine tanker fra start til slutt i hver økt. Derek følger DMIC sine prinsipper for undervisning, som tar utgangspunkt i elevbidrag og bygge videre på deres ideer når klassen konstruerer sin kollektive forståelse. Under gruppearbeid inntar han en aktiverende rolle for å få holde hele elevgruppen engasjert i matematikken, der elevene oppfordres til å stole på sine egne resonnementer. I avslutningsfasen bruker Derek flere samtalegrep for å få frem elevenes ideer og orientere elevgruppens fokus mot det medelevene presenterer, blant annet for å tilrettelegge for at de rydder opp i hverandres feilsvar. Læreren tar utgangspunkt i elevenes presentasjoner og tilskriver dem eierskap når han kobler sammen deres løsningsstrategier for å klargjøre større matematiske ideer.

Sølvi sin tilnærming til undervisning gjennomsyres av hennes fokus på å bygge opp elevenes selvtillit og snu negative elevidentiteter. Utvikling av mestringstro er sentralt for valget av differensierte oppgaver, der elevene selv tilskrives eierskap i valget. I samtaler er hennes stadige undring rettet mot elevenes tankeprosesser med en lav terskel for å besvare. Vi observerte aldri at læreren gikk bort fra en elev uten å gi en form for ros, noe som virker å være et sentralt grep for å bygge positive matematikkidentiteter. Sølvi bruker ofte feilsvar i sin undervisning – både for å ufarliggjøre feilsvar og for å vise at bruk av feilsvar kan medføre viktig læring. Med sin «skuespillende» tilnærming er alltid elevenes egne resonnementer det sentrale og noe de selv skal avgjøre om de vil stole på, heller enn å være avhengig av henne som matematisk autoritet (noe hun også eksplisitt utfordrer dem på). I en klasse med lav selvtillit velger læreren å adressere en fremtredende misoppfatning ved å selv produsere og ta eierskap til et feilsvar hun anser gunstig å diskutere, noe som omgår en potensielt uønsket situasjon med hensyn til elevenes selvtillit og identitet.

Alle de tre lærerne ser ut til å være svært bevisst på å utvikle elevenes mestringstro, tilskrive dem eierskap og skape positive matematikkidentiteter. Flere grep er like mellom lærerne, og bruken av feilsvar ser ut til å være et viktig tilbakevendende trekk. Alle har et mål om å ufarliggjøre feilsvar og vise at de kan føre til læring, men selve bruken av feilsvarene er svært forskjellig. Eskil bruker «nesten riktige» feilsvar når han skal adressere misoppfatninger, fordi de åpner for bedre undersøkelser enn de som er «helt feil». Derek på sin side registrerer at elevene gjør feil og legger til rette for at de selv skal rette opp i dem, noe som er en faktor i hans valg av løsninger og rekkefølgen de skal presenteres i. Sølvi bruker ofte feilsvar i sin undervisning – både som en del av oppgavene elevene jobber med og som en del av viktige læringspunkter i plenumssamtaler. Sølvi ser også ut til å bruke «nesten riktige» feilsvar, samtidig som det er elevenes oppgave å rette opp i dem.

Formativ vurdering – Dimensjon 5

Eskil bruker særlig oppgaver i Desmos og plenumssamtaler i sin orkestrering av klasseromsaktiviteter for å avsløre elevenes nåværende matematiske forståelse og tankemønstre. I Desmos kan han enkelt bla mellom elevene, noe han kombinerer med å systematisk oppsøke elevene under arbeid for å hente ut informasjon om dem. I plenumssamtaler krever Eskil hyppige svar, der han bruker hvorfor-spørsmål og andre samtalegrep for å få frem elevenes tanker, noe som spiller en stor rolle for videre klasseromsaktivitet. Dersom deres forståelse ikke er tilstrekkelig, leverer han innholdet på en ny måte for å klargjøre og «møte elevene der de er».

Ved å bruke DMIC som undervisningstilnærming, tar hele undervisningsøktene til Derek utgangspunkt i å «møte elevene der de er», i alt fra valg av problem i planleggingsfasen til å koble sammen elevenes løsninger i avslutningsfasen. I mellomtiden orkestreres elevene til gruppearbeid, der læreren overvåker samarbeidet for å komme med eventuelle hint, aktivere passive elever og planlegge den avsluttende plenumssamtalen. Elevenes egne løsningsstrategier er utgangspunktet når klassen skal konstruere sin kollektive forståelse, der

Derek fungerer som en back-up dersom det ikke er tilstrekkelig material for å koble sammen elevenes løsningsstrategier til større matematiske ideer.

Sølvi sin undrende og «skuespillende» tilnærming fungerer som formative vurderingsgrep, fordi det er elevene som utfører den matematiske tenkningen og tilnærmingen avslører deres forståelse. Under elevenes oppgavearbeid søker hun de forskjellige elevene for å hente ut informasjon, og i plenumsdiskusjoner bruker hun flere samtalegrep for å få frem elevenes tanker. Informasjonen hun henter ut får stor betydning for videre klasseromsaktivitet. Blant annet adresserer læreren en fremtredende misoppfatning ved å først tilpasse innholdet, for så å produsere og ta eierskap til et feilsvar som kan rette opp i misoppfatningen.

Bruk av formativ vurdering er et fremtredende trekk blant alle de tre lærerne. I sin systematiske tilnærming, henter både Eskil og Sølvi ut informasjon om elevenes forståelse ved å stille hvorfor-spørsmål og ha undrende samtaler med enkeltelever mens de arbeider med oppgaver. I tillegg bruker Eskil det digitale verktøyet Desmos for å overvåke elevene og gi dem tilbakemeldinger. Derek på sin side legger hele undervisningsøkten opp til å «møte elevene der de er», der det først og fremst er gruppens forståelse som overvåkes. Der Eskil på sin side kan sees på som en «leverandør» av innholdet dersom elevenes arbeid ikke var fruktbart nok, tar både Derek og Sølvi utgangspunkt i å være «fasilitører» av innholdet, hvor elevene i større grad ansvarliggjøres til å rydde opp i misoppfatninger og nå øktens mål.

5 Lærerne i norsk kontekst

For å styrke studiens overføringsverdi omhandler dette kapittelet en drøfting av lærernes undervisningspraksis i norsk kontekst, med hovedvekt på læreplan for matematikk 1.-10. trinn (Kunnskapsdepartementet, 2019). Schoenfeld (2015, s. 162) argumenterer for at matematikkundervisning som skårer høyt på de fem dimensjonene i TRU vil skape kompetente elever innenfor matematikk og at det er grunn til å tro at rammeverket er komplett (ingen flere dimensjoner skal være nødvendige). I sammenligningen mellom lærernes undervisningspraksis (kap. 4.4) ser vi at alle de fem dimensjonene er fremtredende i de tre lærernes klasserom, selv om de er svært forskjellige. Det kan i seg selv tyde på en overføringsverdi, fordi selve målet for matematikkundervisning er å skape kompetente elever, uansett om en underviser i Norge (der læreren jobber mot kompetansemål) eller New Zealand (der lærerne jobber mot achievement objectives).

I sin oppsummering av de viktigste endringene i matematikk sier Utdanningsdirektoratet (2020) at de har lagt vekt på utforsking og problemløsing, og at kompetansemålene i matematikk er bygget opp rundt fagets seks kjerneelementer. Kjerneelementene skal prege innhold og progresjon (Utdanningsdirektoratet, 2020), og vi finner kjerneelementene i LK-20 svært sentrale for drøftingen av lærernes undervisningspraksis. Ett av dem er «utforsking og problemløsing». Ifølge Kunnskapsdepartementet (2019, s. 2) handler utforsking i matematikk «[…] om at elevene leter etter mønstre, finner sammenhenger og diskuterer seg fram til en felles forståelse». Innenfor matematikk handler problemløsing «[…] om at elevene utvikler en metode for å løse et problem de ikke kjenner fra før» og «[…] å analysere og omforme kjente og ukjente problemer, løse dem og vurdere om løsningene er gyldige» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2). Utdanningsdirektoratet (2020) har også en ambisjon om at elever skal snakke mer matematikk, fordi dette bidrar til bedre forståelse i faget.

Vi begynner med Derek i drøftingen av lærernes relevans til norsk kontekst, fordi hans tilnærming virker åpenbart relevant med tanke på den nye læreplanens vektlegging av utforsking, problemløsing og matematikksamtaler. Derek sin undervisning gjøres ut fra Developing Mathematical Inquiry Communities (DMIC) sin modell – en storsatsing i New Zealand. DMIC-undervisning er blant annet basert på «five practices», der læreren skal bruke «talk moves» som grep for å sikre bred deltakelse og tilgjengeliggjøre resonnement for elevene (Hunter et al., 2018, s. 28/30). Med DMIC som tilnærming følger læreren en slags oppskrift for strukturert utforsking. Derek bruker et nøye utvalgt problem og kontekst, hvor elevene skal løse problemet gjennom matematikksamtaler i grupper og presentere sin løsningsstrategi, før læreren til slutt kobler dem sammen.

I sin undervisningspraksis er det viktig at Derek er svært bevisst på å ikke hjelpe elevene for mye, fordi det kan ødelegge deres «productive struggle». Samtidig kan det være nødvendig å hjelpe elevene for at de i det hele tatt skal ha noen løsninger og strategier å presentere i den viktige plenumssamtalen. Men selv om dette er en del av oppskriften, kommer en bare et stykke på vei med å bruke DMIC sine undervisningsprinsipper. For å kunne balansere mellom å involvere seg akkurat nok til å holde hele gruppen aktiv og holde igjen på graden av hjelp for å opprettholde de kognitive kravene, og for å kunne *velge ut* hvilke løsninger som er gunstige å trekke frem og hvilken *rekkefølge* de skal presenteres i for å gi elevene best mulig læringsutbytte, må Derek ha en bred kompetanse, være fleksibel og «føle seg litt frem» i hver økt – noe som ser ut til å være selve kunsten å undervise i et DMIC-klasserom. Disse 'små' grepene Derek gjør underveis i sin utforskende undervisningstilnærming virker også relevant i norsk kontekst, blant annet fordi det ikke begrenser elevene i sin utforskning og forsøk på å løse problemet, samtidig som han sørger for at elevene ikke faller av og det faktisk er noe å presentere og koble sammen i avslutningen. Å finne Dereks utforskende tilnærming relevant for den nye læreplanens vektlegging av utforsking er kanskje en selvfølge, men kan den mer instruerende tilnærmingen til Eskil dekke det utforskende behovet?

Eskil kjennetegnes først og fremst av sin eksplisitte undervisning og bruk av variasjonsteori. Variasjonsteori handler om å presentere sekvenser av ulikheter (varation) og likheter (invariance) for å innarbeide bestemte mønstre og eksplisitt adressere mønstrene i undervisningen (Kullberg et al., 2017, s. 566-567). Ifølge Kunnskapsdepartementet (2019, s. 2) handler utforsking i matematikk «[…] om at elevene leter etter mønstre, finner sammenhenger og diskuterer seg fram til en felles forståelse». Bruk av variasjonsteori handler om å legge til rette for at elevene skal kunne oppdage *utvalgte* mønstre. Kombinasjonen av variasjonsteori og eksplisitt undervisning kan dermed – ifølge Kunnskapsdepartementet (2019) sin nevnte definisjon – fremdeles være utforskende, fordi bruken av variasjonsteori blir et eksplisitt grep for å lede elevene til å lete etter *bestemte* mønstre og *bestemte* sammenhenger mellom dem, slik at de kan ha større sjanse for suksess. Eskil er åpen for at elevene kan diskutere seg mellom, og han legger til rette for at elevene diskuterer seg frem til en felles forståelse, eksempelvis med sitt «hva nå»-spørsmål i en plenumssamtale (se funn 3).

Eskil sitt «hva nå»-spørsmål ansvarliggjør elevene til å finne løsningen og argumenter som støtter den, samt vurdere medelevers tankerekke på veien frem til riktig svar. Spørsmålet består bare av to ord og en overvåkende stillhet fra lærerens side, men likevel fører det til et mylder av samtaler og argumentasjon mellom elevene. To kjerneelementer i LK-20 vi finner særlig relevante for denne sekvensen er «resonnering og argumentasjon» og «representasjon og kommunikasjon». Ifølge Kunnskapsdepartementet (2019, s. 3) handler resonnering i matematikk om «[…] å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker», og «argumentasjon i matematikk handler om at elevene begrunner fremgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige». «Kommunikasjon i matematikk handler om at elevene bruker matematisk språk i samtaler, argumentasjon og resonnementer» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3). Lærerens spørsmål kan virke som et lite samtalegrep, men det får stor betydning fordi det blant annet medfører at elevene aktivt jobber med de to nevnte kjerneelementene. Selv om Eskils eksplisitte undervisning i høy grad er instruerende, ser vi at hans undervisningstilnærming også inneholder utforskende elementer og matematikksamtaler, og 'små' grep (som «hva nå-spørsmålet») i hans undervisning gjør at elevene jobber med flere kjerneelementer.

En annen sentral del av Eskil sin eksplisitte undervisning er hans bruk av Desmos for å enklere overvåke og «skanne» elevene etter misoppfatninger, og fungerer som et effektivt verktøy for å velge gunstige oppgaver å diskutere. Kanskje er ikke et engelskspråklig verktøy like relevant i norsk kontekst, men hans kombinasjon av å bruke et digitalt verktøy for å enklere overvåke elevenes forståelse og systematisk vandre mellom dem er relevant. En annen formativ tilnærming som virker relevant er Sølvi sin undrende og «skuespillende» tilnærming til undervisning, der hun kontinuerlig overvåker og henter ut informasjon om elevenes forståelse. Når hun later som at elevene kan lære henne noe, virker det naturlig og elevene ser ut til å respondere utelukkende positivt til det. Vi har selv merket utfordringer i denne sammenheng, fordi vi ikke alltid klarer å få vår undring til å virke genuin når vi spør elever om noe som vi allerede vet svaret på. Hennes undrende undervisningstilnærming legger til rette for utforsking og samtaler, der hun alltid ansvarliggjør elevene til å selv gjøre tenkningen og begrunne sine fremgangsmåter. Slik sett er Sølvi sin tilnærming og grep i plenumssamtaler (funn 3) relevant for alle de tre nevnte kjerneelementene.

Sølvi sin undrende og «skuespillende» tilnærming i samtaler under elevarbeid og plenumsarbeid er særlig relevant for arbeid med nevnte kjerneelement «representasjon og kommunikasjon», fordi hun hele veien presser for argumentasjon og resonnering. Når hun skal adressere en misoppfatning rundt regnerekkefølge, henter hun ut løsningsforslag fra elevene og presenterer et feilsvar hun ønsker å diskutere. Det at hun selv tar eierskap til feilsvaret – samt argumenterer for hvorfor det er riktig – kan virke som et lite grep, men det fører til en ny dimensjon i samtalen. «Kritisk tenkning i matematikk omfatter kritisk vurdering av resonnementer og argumenter […]» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2), og ved å ta eierskap til et feilsvar og la elevene motbevise henne, ansvarliggjør hun elevene til å tenke kritisk og utfordre henne. Her viser læreren eksplisitt at en løsning ikke nødvendigvis er riktig fordi en autoritet sier det, men heller at matematisk argumentasjon og resonnering er måten de skal vurdere gyldigheten i løsninger. Sølvis grep for å bygge selvtillit og positive matematikkidentiteter virker å være universelt relevante – særlig med tanke på læreplanens overordnede del om sosial læring og utvikling, som eksplisitt tar for seg viktigheten av å jobbe med elevenes identitet og selvbilde (Kunnskapsdepartementet, 2017, s. 10).

De tre lærerne anvender teori om undervisning i sin undervisningspraksis, og når de forteller om undervisningen i intervjuene, brukes fagbegreper og de er meget reflektert rundt sin undervisningstilnærming. Likevel er lærerne svært forskjellige, nesten så forskjellige som de kan være ifølge disputten mellom instruerende og utforskende undervisning (kap. 2.3). Men selv om Eskil både sier og viser at han i høy grad underviser instruerende, bruker han også utforskende elementer. Som belyst tidligere i kapittelet er måten han bruker eksplisitte undervisningsgrep og variasjonsteori både instruerende og utforskende.

En legger derimot ikke til rette for utforsking i den såkalte 'instruerende' formen for matematikkundervisning vi har erfart som elever i vår skolegang, der læreren starter opp økten ved å demonstrere noe på tavlen, for så å skrive opp noen sidetall og oppgaver vi skal jobbe med i vår mattebok, noe vi jobber med til det ringer ut til friminutt. At flere setter likhetstegn mellom en slik undervisning og instruerende undervisningstilnærminger (herunder eksplisitt undervisning) er misledende, noe som kan skyldes en oppfatning om at det dreier seg om «chalk and talk» eller å forelese (Barton, 2018, s. 93). Eskil sin eksplisitte undervisning var alt annet enn en forelesning eller det vi har erfart gjennom vår skolegang. Faktisk virket det heller som undervisningen vi *burde* ha erfart med tanke på hvordan såkalt 'instruerende' tilnærminger har dominert vår erfaring med matematikk i grunnskolen.

Selv om Derek sin DMIC-undervisningstilnærming er utforskende, er den svært strukturert og det er mulig å argumentere for at Rosenshine (1987, s. 35) sine prinsipper for eksplisitt undervisning også er gjeldende her, særlig med tanke på hvordan læreren bryter ned innholdet i oppstarten og den lærerstyrte avslutningen rundt et kritisk læringspunkt for økten. Det negative stempelet for instruerende undervisning virker å være like misvisende som at all utforskende undervisning er å la elever 'utforske' et problem uten noen som helst struktur eller oppfølging, for så å kalle det «learning by doing». Dewey mente selv at flere «educational 'reformers'» misbrukte slagordet «learning by doing», fordi det ikke er grunnlaget for all læring, men *tidlig* læring – som å lære å lese gjennom å lese og å lære grunnleggende regning gjennom å regne (McLelland & Dewey, 2008, s. 45). For å oppnå et høyere nivå av læring må handling kombineres med kunnskap, og det fulle sitatet er: «*Learn to know by doing, and to do by knowing*» (McLelland & Dewey, 2008, s. 182).

Tanken om at et høyere nivå av læring må kombinere handling med kunnskap virker direkte relevant til at lærere også bør kunne anvende både instruerende og utforskende tilnærminger til undervisning. Kanskje er det også tanken til Sølvi som har «plukket opp litt her» og fremdeles prøver ut nye ting i sin tilnærming til undervisning, der hun anvender en kombinasjon av instruerende og utforskende undervisningsgrep. I likhet med Eskil er innholdet i Sølvi sine økter en mengdetrening med oppgaver og hun adresserer misoppfatninger umiddelbart – noe som er eksplisitte undervisningsgrep. På en annen side opptrer hun aldri som en slags fasit, der hennes undring og «skuespillende» tilnærming kan sees på som en måte å legge til rette for utforsking. På denne måten fremstår hun mer som en utforskende «fasilitør» av innholdet, heller enn en instruerende «leverandør» av innholdet. Der Eskil og Derek kan sees på som to motsetninger i sin tilnærming til undervisning, er Sølvi en mer tydelig kombinasjon og det er 'små' grep som gjør at hun pendler mellom instruerende og utforskende undervisning.

Kanskje foregår utforsking i instruerende undervisning mer på *tross* av tilnærmingen enn *på grunn* av den. Uansett viser vår (begrensede) studie at 'små' grep kan gjøre en instruerende undervisning utforskende og at skillet mellom instruerende og utforskende undervisning er alt annet enn tydelig. Alle tre lærerne kan faktisk sees på som en kombinasjon av instruerende og utforskende, og vi mener Kilpatrick et al. (2001, s. 315) har et poeng når de sier at debatten rundt instruerende vs. utforskende undervisning i seg selv er misledende, fordi disse merkelappene gjør retoriske distinksjoner som ofte går glipp av poenget med hensyn til kvaliteten på undervisningen. Effektiv undervisning kan forekomme i varierte former, alle med hver sine muligheter og begrensninger (Kilpatrick et al., 2001, s. 8-9), og det virker gunstig for lærere å ha både instruerende og utforskende undervisningskompetanse i sin didaktiske verktøykasse, fordi de kan komplementere hverandre.

6 Konklusjoner

Masteroppgavens problemstilling er: «*Hva kjennetegner matematikkundervisningen til tre anerkjente lærere på 7.- 10. trinn i New Zealand?*». Med formål om å avdekke, beskrive og lære av grepene lærerne gjør, besvares problemstillingen på to nivåer (kap. 4): Kjennetegn ved de tre anerkjente lærernes matematikkundervisning hver for seg (nivå 1), for så å drøfte likheter og forskjeller mellom dem med TRU som rammeverk (nivå 2). Til slutt (kap. 5) drøftes lærernes undervisningspraksis i en norsk kontekst for å øke studiens overføringsverdi.

Eskil kjennetegnes først og fremst ved å anvende en kombinasjon av eksplisitt undervisningsteori og variasjonsteori i sin instruerende undervisningstilnærming, der han bruker den digitale læringsarenaen Desmos for å effektivisere den formative vurdering av elevene. Derek på sin side kjennetegnes ved å planlegge og gjennomføre undervisning i tråd med DMIC-modellen, der problemløsing og matematikksamtaler er sentralt i hans utforskende tilnærming til undervisning. Sølvi kjennetegnes av sitt fokus på å bygge matematikkfaglig selvtillit og sin undrende og «skuespillende» tilnærming til elevene, der elevene alltid ansvarliggjøres til å gjøre tenkningen og komme med begrunnelser.

I sammenligningen gjennom TRU-rammeverket kommer det frem at lærerne tilpasser innholdet og de kognitive kravene i undervisningen til elevene, og å bruke plenumssamtaler for å samle elevene rundt viktige læringspunkter er en gjenganger. Alle de tre lærerne ser ut til å være svært bevisst på å utvikle elevenes mestringstro, tilskrive dem eierskap og skape positive matematikkidentiteter. Bruk av formativ vurdering er et sentralt trekk blant lærerne og de er alle opptatt av å ufarliggjøre feilsvar og vise at de kan føre til læring, selv om deres konkrete tilnærminger for å «møte elevene der de er» og adressere feilsvar er forskjellige. De fem dimensjonene i TRU er fremtredende i de tre lærernes undervisningspraksis, og kanskje er det nettopp det som gjør deres tilnærminger til undervisning relevant for norsk kontekst.

Når Derek «føler seg litt frem» i hver økt med tanke på gunstige løsninger og rekkefølge, når Eskil stiller «hva nå»-spørsmålet og Sølvi gjør et bevisst valg med å ta eierskap til et feilsvar i plenum, kan de virke som noen 'små' undervisningsgrep, men det er nettopp i bruken av disse 'små' grepene vi finner Hattie (2009, s. 22) sitt «what teachers *do* matters»-budskap som treffende. Kjennetegn for alle de tre lærerne er at deres kompetanse kommer til syne når de spiller på sine styrker, føler seg frem og utfører en rekke justeringer underveis for å best mulig oppnå øktens mål – uavhengig av sin undervisningstilnærming.

7 Implikasjoner for praksisfeltet

Arbeidet med masteroppgaven har gitt oss dypere innsikt i hvordan instruerende undervisning, utforskende undervisning og en kombinasjon av dem kan legge til rette for å skape kompetente elever i matematikk. Studien impliserer at det er gunstig å ha kompetanse innenfor forskjellige undervisningstilnærminger og at det de ‘små’ tingene lærerne gjør kan bety svært mye. «God» undervisning kan forekomme i varierte former (eks. Hattie, 2009; Kilpatrick et al., 2001; Schoenfeld, 2016), og da Ball et al. (2008) identifiserte seks viktige kunnskapsområder for lærere med hensyn til elevers læring, la de ikke begrensninger for i hvilken grad læreren bør undervise instruerende eller utforskende. Likevel opplever vi som matematikklærerstudenter en sterk vektlegging av utforskende tilnærminger i utdanningsløpet og at instruerende tilnærminger mer eller mindre ignoreres.

Flere undervisere i matematikkemnene på instituttet for lærerutdanning og pedagogikk ved UiT sier at vi er inne i en periode hvor utforskende undervisning «er i vinden». Selv om læreplanen for matematikk 1.-10. trinn (Kunnskapsdepartementet, 2019) ikke begrenser lærerens autonomi med tanke på undervisningstilnærming, registrerer vi at å «utforske» og «utforsking» til sammen nevnes 77 ganger. Til sammenligning nevnes «utforske» og «utforskning» totalt 11 ganger i LK-06 (Kunnskapsdepartementet, 2013), noe som støtter undervisernes påstand. Men at utforsking er en sentral del av den nye læreplanen er ikke det samme som at den overordnede undervisningstilnærmingen må være utforskende, og vår (begrensede) studie viser at en også kan legge til rette for utforsking i en instruerende undervisning, og at det er mulig å kombinere instruerende og utforskende tilnærminger.

Den ene læreren i studien beskrev hvordan han hadde beveget seg fra utforskende til eksplisitt undervisning, mye på grunn av at flere elever ofte mangler den grunnleggende forståelsen for å få et skikkelig utbytte av utforskende økter. Matematikk er et fag hvor det er viktig at elevene bygger sin kompetanse steg for steg, slik at de opparbeider en solid grunnmur (Utdanningsdirektoratet, 2020). I en mer instruerende undervisning la han til rette for at elevene skulle opparbeide seg en solid matematisk grunnmur gjennom sin eksplisitte undervisning og bruk av variasjonsteori for å forme innholdet som en «ramp» (heller enn steg for steg). Han er kjent for svært gode resultater, og det kan tyde på at det er noe med denne «rampen» og hans kombinasjon av variasjonsteori og eksplisitt undervisning.

Det er som nevnt mye forskning som tilsier at en eksplisitt undervisningstilnærming kan være effektiv (eks. Archer & Hughes, 2011; Hattie, 2009; Rosenshine, 1987), og Baskoro (2021) mener at bruk av variasjonsteori i matematikkundervisning er en effektiv læringsmetode. De fleste har nok opplevd en slags bruk av variasjonsteori i Norge også, fordi oppgaver i lærebøker og på oppgaveark ofte bruker flere variasjonstrekk i sin stegvise oppbygning. Hvor vidt lærere bruker variasjonsteori bevisst er noe annet. I Røsseland (2019, s. 9-10) sin doktoravhandling om hva som karakteriserer læreres utvikling med ny didaktisk teori, fant lærerne variasjonsteorien som et verdifullt bidrag, men utover dette virker teoriens utbredelse og bruk i Norge svært begrenset.

Blant tilhengerne av utforskende tilnærminger stilles det spørsmål rundt verdien av å sammenligne tilnærminger basert på hvor effektive de er, fordi det ikke tar hensyn til større mål med utdanningen som går utover fagets innhold (Hmelo-Silver et al., 2007, s. 105). Disse større målene er argumenter for utforskende undervisning som vi kjenner igjen fra lærerutdanningen ved UiT. Det er vanskelig å finne solid forskning som støtter slike argumenter – og kanskje er det umulig, nettopp fordi det folk kaller 'instruerende' undervisning ikke egentlig er det, akkurat som at utforskende undervisning ikke bare er «learning by doing». Uansett er det spesielt at den solide forskningen som støtter effektiviteten til instruerende undervisningstilnærminger (som eksplisitt undervisning) av en eller annen grunn ikke vektlegges i vårt studium, og kanskje er det lignende opplevelser innenfor andre matematikklærerstudier, forskningsprosjekter eller utviklingsarbeid i skolen.

Å velge å fokusere nærmest utelukkende på utforskende tilnærminger til undervisning virker – om ikke annet – naivt. I hvert fall med argumenter som «fordi de er i vinden» og «at en jobber med mye annet og større mål enn instruerende undervisning». Sistnevnte argument impliserer at instruerende tilnærminger ikke gjør det, et argument vi sliter med å finne forskningsgrunnlag for å kunne påstå. Vi ønsker med dette å oppfordre til en mer likestilt vektlegging av instruerende og utforskende undervisningstilnærminger, fordi det virker gunstig for lærere å ha både instruerende og utforskende undervisningskompetanse i sin didaktiske verktøykasse.

Referanseliste

Andersson-Bakken, E. & Dalland, C. (Red.). (2021). *Metoder i klasseromsforskning: Forskningsdesign, datainnsamling og analyse*. Universitetsforlaget.

Archer, A. L. & Hughes, C. L. (2011). *Explicit Instruction: Effective and Efficient Teaching*. Guilford Press.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Barton, C. (2018). *How I Wish I'd Taught Maths: Lessons learned from research, conversations with experts, and 12 years of mistakes*. John Catt Educational Ltd.

Baskoro, I. (2021). Variation theory-based mathematics teaching: The new method in improving higher order thinking skills. *Journal of Physics: Conference Series, 1957*(1), 12016. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1957/1/012016

Bjerkeli, K. (2017). *Kunsten å snakke matematikk: En kasusstudie om hvordan en flink lærer praktiserer den matematiske samtalen i klasserommet* [Mastergradsavhandling NTNU]. NTNU Open. http://hdl.handle.net/11250/2454651

Bjørndal, C. R. P. (2017). *Det vurderende øyet: Observasjon, vurdering og utvikling i pedagogisk praksis* (3. utg.). Gyldendal akademisk.

Boaler, J. (2015). *The Elephant in the Classroom: Helping Children Learn and Love Maths* (2. utg.). Souvenir Press.

Bourassa, M. (2020). TECHNOLOGY CORNER: BUILDING COMMUNITY WITH DESMOS. *Ontario mathematics gazette*, (1), 15-18.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology*, *3*(2), 77-101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Bass, H. & Ball, D. L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Heinemann.

Chapin, S. H., O'Connor, C. & Anderson, N. C. (2013). *Talk moves: A Teacher's Guide for Using Classroom Discussions in Math. Grades K-6* (3. utg.). Math Solutions.

Chorney, S. (2022). Classroom practice and craft knowledge in teaching mathematics using Desmos: challenges and strategies. *International journal of mathematical education in science and technology*, *53*(12), 3203-3227. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1931974

Clarke, D., Keitel, C. & Shimizu, Y. (Red.). (2006). *Mathematics Classrooms in Twelve Countries: The Insider's Perspective*. Sense Publishers.

Cohen, L., Morrison, K. & Manion, L. (2018). *Research methods in education* (8. utg.). Routledge.

Drageset, O. G. & Ytreberg, J. (2017). *NOTED 2017: Application for four-year funding*.

Dweck, C. (2009). The Perils and Promises of Praise. I M. Scherer (Red.), *Challenging the Whole Child: Reflections on Best Practices in Learning, Teaching and Leadership* (s. 301-310). ASCD.

Geertz, C. (1973). *The Interpretation of Cultures: Selected Essays*. Basic Books.

Gleiss, M. S. & Sæther, E. (2021). *Forskningsmetode for lærerstudenter: Å utvikle ny kunnskap i forskning og praksis*. Cappelen Damm akademisk.

Hattie, J. (2009). *Visible Learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. Routledge.

Hattie, J. (2012). *Visible Learning for Teachers: Maximizing impact on learning*. Routledge.

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of educational research, 77*(1), 81-112. https://doi.org/10.3102/003465430298487

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (Bd. 2, s. 1-27). Lawrence Erlbaum Associates.

Hmelo-Silver, C. E., Duncan, R. G. & Chinn, C. A. (2007). Scaffolding and Achievement in Problem-Based and Inquiry Learning: A Response to Kirschner, Sweller, and Clark (2006). *Educational psychologist*, *42*(2), 99-107. https://doi.org/10.1080/00461520701263368

Hunter, R., Hunter, J., Anthony, G. & McChesney, K. (2018). Developing mathematical inquiry communities: Enacting culturally responsive, culturally sustaining, ambitious mathematics teaching. *Set: Research Information for Teachers*, 25-32. https://doi.org/10.18296/set.0106

Jensen, F., Pettersen, A., Frønes, T. S., Kjærnsli, M., Rohatgi, A., Eriksen, A. & Narvhus, E. K. (2019). *PISA 2018: Norske elevers kompetanse i lesing, matematikk og naturfag*. Universitetsforlaget. https://www.udir.no/contentassets/2a429fb8627c4615883bf9d884ebf16d/kortrapport-pisa-2018.pdf

Johannessen, A., Christoffersen, L. & Tufte, P. A. (2021). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (6. utg.). Abstrakt forlag.

Kazemi, E. & Hintz, A. (2019). *Målrettet samtale: Hvordan strukturere og lede gode, matematiske diskusjoner* (K. B. Birkeland, Overs.). Cappelen Damm Akademisk. (Opprinnelig utgitt 2014)

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Red.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Kirschner, P. A., Sweller, J. & Clark, R. E. (2006). Why Minimal Guidance During Instruction Does Not Work: An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching. *Educational psychologist*, *41*(2), 75-86. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4102_1

Kjærnsli, M., Lie, S., Olsen, R. V. & Roe, A. (2007). *Tid for tunge løft: Norske elevers kompetanse i naturfag, lesing og matematikk i PISA 2006*. Universitetsforlaget. https://www.udir.no/globalassets/upload/forskning/internasjonale_undersokelser/5/tid_for_tunge_loft.pdf

Kullberg, A., Runesson Kempe, U. & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics? *ZDM Mathematics Education*, *49*(4), 559-569. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0858-4

Kunnskapsdepartementet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Kunnskapsdepartementet. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2006. https://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf?lang=http://data.udir.no/kl06/nob

Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen/id2570003/

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn (MAT01-05)*. Kunnskapsdepartementet. Fastfsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nob

Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T. M. & Rygge, J. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Gyldendal akademisk.

Livers, S. D. & Elmore, P. (2018). Attending to Precision: Vocabulary Support in Middle School Mathematics Classrooms. *Reading & writing quarterly*, *34*(2), 160-173. https://doi.org/10.1080/10573569.2017.1370624

Marton, F., Tsui, A. B. M. & Chik, P. P. M. (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Lawrence Erlbaum.

McLelland, J. A. & Dewey, J. (2008). *Applied Psychology: An Introduction To The Principles And Practice Of Education (1914)*. Kessinger Publishing.

NESH. (2021). *Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora (NESH) - Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora* [52]. Hentet 5 fra https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Polya, G. (1963). On Learning, Teaching, and Learning Teaching. *The American mathematical monthly*, *70*(6), 605-619. https://doi.org/10.1080/00029890.1963.11992076

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode: En innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier* (2. utg.). Universitetsforlaget.

Postholm, M. B., Jacobsen, D. I. & Søbstad, R. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm akademisk.

Rosenshine, B. (1987). Explicit Teaching and Teacher Training. *Journal of Teacher Education*, *38*(3), 34-36. https://doi.org/10.1177/002248718703800308

Røsseland, M. (2019). *Hva karakteriserer læreres utvikling med ny didaktisk teori?* [PhD, Universitetet i Agder]. AURA. https://hdl.handle.net/11250/2983940

Schoenfeld, A. H. (2013). Classroom observations in theory and practice. *ZDM Mathematics Education*, *45*(4), 607-621. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0483-1

Schoenfeld, A. H. (2014). What Makes for Powerful Classrooms, and How Can We Support Teachers in Creating Them? A Story of Research and Practice, Productively Intertwined. *Educational Researcher*, *43*(8), 404-412. https://doi.org/10.3102/0013189X14554450

Schoenfeld, A. H. (2015). Thoughts on scale. *ZDM Mathematics Education*, *47*(1), 161-169. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0662-3

Schoenfeld, A. H. (2016). Teaching for Robust Understanding Project. *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework.*, 1-28. https://www.map.mathshell.org/trumath/intro_to_tru_20161223.pdf

Schoenfeld, A. H. & Floden, R. E. (2014). The Algebra Teaching Study and Mathematics Assessment Project. *The TRU Math Scoring Rubric*. https://www.map.mathshell.org/trumath/tru_math_rubric_alpha_20140731.pdf

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20-26.

Skovsmose, O. (2022). Entering Landscapes of Investigation. I M. Penteado & O. Skovsmose (Red.), *Landscapes of Investigation: Contributions to Critical Mathematics Education* (s. 1-20). Open Book Publishers. https://doi.org/10.11647/OBP.0316

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2018). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions* (2. utg.). National Council of Teachers of Mathematics.

Sousa, D. A. & Tomlinson, C. A. (2011). *Differentiation and the Brain: How Neuroscience Supports the Learner-Friendly Classroom*. Solution Tree Press.

Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*. Free Press.

Tomlinson, C. A. (1999). *The Differentiated Classroom: Responding to the Needs of All Learners*. Association for Supervision & Curriculum Development.

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Hva er nytt i matematikk?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagspesifikk-stotte/nytt-i-fagene/hva-er-nytt-i-matematikk/

Van de Walle, J. A., Bay-Williams, J. M., Lovin, L. H. & Karp, K. S. (2018). *Teaching Student-Centered Mathematics: Developmentally Appropriate Instruction for Grades 6-8* (3. utg.). Pearson.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477. https://doi.org/10.2307/749877

Vedlegg 1 – Informasjonsskriv til rektor og lærer

Participant Information Sheet

Mathematics teaching in Aotearoa New Zealand Years 7-10

Dear xxxx

We are two Norwegian students who are travelling to New Zealand as a part of our masters study. We are working together on a small thesis project as the last step of our 5-year long teacher education programme at University of Tromsø.

My name is Christer Tungland Bergo. I was born on the ambulance-boat 31 years ago, on my way to the nearest hospital in the South-Western part of Norway. My dad was a flight mechanic for 20 years, mum works in a kindergarten, my older brother works in primary school and my two younger siblings are both students. I'm from a small place called Jørpeland, which is surrounded by beautiful nature, like Preikestolen, Kjeragbolten and Lysefjorden. At the age of 18, I started working on an oil rig, which allowed me to enjoy hobbies like hiking and travelling, enjoying Norway and other country's nature and cultures on my time off. After being laid off in the oil crisis in 2015, I started working at a school. I loved it and decided to re-educate myself to become a teacher. I'm very excited to visit your beautiful country, a dream I've had since I watched the first Lord of the Rings movie in 2001!

And my name is Sivert Vatnehol Fjørtoft. I am 25 years old and grew up in a small town called Molde on the North-West coast of Norway. Molde is located by Moldefjorden surrounded by beautiful mountains and islands. My father is a teacher, and my mother works for the child services with foster care. I also have two older brothers; one is an engineer and the other one is a teacher. After finishing school, I moved to the Northern part of Norway, where I have lived for about 6 years. Before I started studying, I had two gap years attending an outdoor school where the main activities were mountain biking and ski touring. After that I moved to Tromsø and started studying. Outdoor life is still an important hobby of mine, as well as playing handball for the local team here in Tromsø. (the picture is of Molde).

Page 1 of 4

Participant Information Sheet

Mathematics teaching in Aotearoa New Zealand Years 7-10

Purpose of the project
You are invited to participate in a research project where the main purpose is to observe what characterizes the teaching of mathematics teachers in Aotearoa New Zealand in Years 7-10, mainly for our own learning. As it also is our Masters thesis, the research project could contribute to learning for others and cross-cultural research of teaching.

We are interested in how different teachers approach teaching mathematics, as every great teacher has their own way of teaching successfully. The main goal is to learn from you and hopefully become successful teachers of mathematics ourselves. When we are in your classroom we would like to make notes so we can write about what we saw.

The data collected will only be used as a part of our masters thesis, where we will try to explain the context and intention of mathematics teaching in Aotearoa New Zealand, and write about what we saw as case studies of practice.

Which institution is responsible for the research project?
Professor Ove Gunnar Drageset at the University of Tromsø (UiT) is responsible for the research project, cooperating with Associate Professor Fiona Ell at the University of Auckland. The University of Tromso has given consent for this project to take place. Their approval number is 43107.

Why are you being asked to participate?
The University of Tromsø, the University of California (Berkeley) and University of Auckland are cooperating to make connections internationally in teacher education. The project is moving to including students in exchanges. We are the first students coming to Aotearoa New Zealand to work on our Masters thesis.

Like everybody else who went to school, we truly appreciated successful teachers. Since we started our teacher education, we have always been eager to learn from great teachers and have a goal of becoming one ourselves. We wanted to make this into our masters thesis, and since there is a cooperation between our university and University of Auckland, we asked if we could collect the data from great teachers in New Zealand. Dr Ell was then contacted to find some great math teachers for us to observe. You are receiving this inquiry because you fit that description.

What does participation involve for you?
Participating in this study means that you allow us to observe at least one of your lessons. We will take notes during the lesson (on paper and/or laptop), which will be the data we use for our thesis. The notes are mainly focused on what characterizes your teaching. It will also include anonymized responses from students. No personal information about you or your students are necessary for the thesis.

If it is agreed upon beforehand, we would also like to have an informal conversation and/or an interview with you. The length of this conversation/interview is up to you. If it takes place, the notes from that conversation/interview will be taken and stored just like the notes from the lesson. The topic will be your teaching. Again, no personal information is necessary.

We will provide a short summary of our conclusions for you in English. If you would like to receive this please put your email address on the consent form.

Participation is voluntary
Participation in the project is voluntary. If you chose to participate, you can withdraw your consent at any time without giving a reason. If you withdraw, please contact Dr Ell as soon as possible. There will be no negative consequences for you if you chose not to participate or later decide to withdraw.

Your personal privacy – how we will store and use your personal data
The data collected from our observation and discussion will be handled in accordance with Norwegian data protection legislation (the GDPR). Consent forms will be stored separately from the data.

We will use a pseudonym for you from the beginning of data collection. We will preserve confidentiality by not using your name or any identifiable information such as school names, location or size in our writing. The data collected will be stored on our computers as we write the thesis, and no others will have access to this information. We will permanently delete the data when our work is finished.

Participant Information Sheet

Mathematics teaching in Aotearoa New Zealand Years 7-10

Where can I find out more?
If you have questions about the project, or want to exercise your rights, contact:

Sivert Vatnehol Fjørtoft / Masters student
Email: sfj017@uit.no
Phone number: +47 45231085

Christer Tungland Bergo / Masters student
Email: cbe057@uit.no
Phone number: +47 47866322

Ove Gunnar Drageset / Responsible for the project
Email: ove.gunnar.drageset@uit.no
Phone number: +47 91723314

Jan Nyquist Roksvold / Supervisor
Email: jan.n.roksvold@uit.no
Phone number: +47 77646141

Fiona Ell / Local faciltiator for the project
Email: f.ell@auckland.ac.nz
Phone number: 3737599 extension 89847

Joakim Bakkevold / Data protection officer
Email: personvernombud@uit.no
Phone number: +47 97691578

Yours sincerely,

Ove Gunnar Drageset	Sivert Vatnehol Fjørtoft	Christer Tungland Bergo
Project Leader	Student	Student

Vedlegg 2 – Samtykkeskjema til rektor

Consent form for the participating teachers' principal

Mathematics teaching in Aotearoa New Zealand Years 7-10

I have received and understood information about the project 43107 "Mathematics teaching in Aotearoa New Zealand Years 7-10" and have been given the opportunity to ask questions. I give consent:

- ☐ to allow one of my teachers to participate in the project
- ☐ to the data gathered during those lessons can be used in the master's thesis
- ☐ to allow one the participating teacher to have a conversation/interview regarding the observed lesson(s)

I understand that:

- Participation is voluntary
- I can withdraw my data at any time without penalty by contacting Fiona Ell
- Data will be stored until the project is complete in May 2023 and then destroyed
- All data storage, use and reporting will be confidential

(Signed by participant, date)

If you would like a short summary of our conclusions in English, write down your email here:

Vedlegg 3 – Samtykkeskjema til lærer

Consent form for the participating teacher

Mathematics teaching in Aotearoa New Zealand Years 7-10

I have received and understood information about the project 43107 "Mathematics teaching in Aotearoa New Zealand Years 7-10" and have been given the opportunity to ask questions. I give consent:

- ☐ to being observed by the two students in at least one lesson
- ☐ to the data gathered during those lessons can be used in the master's thesis
- ☐ to having a conversation/interview regarding the lesson

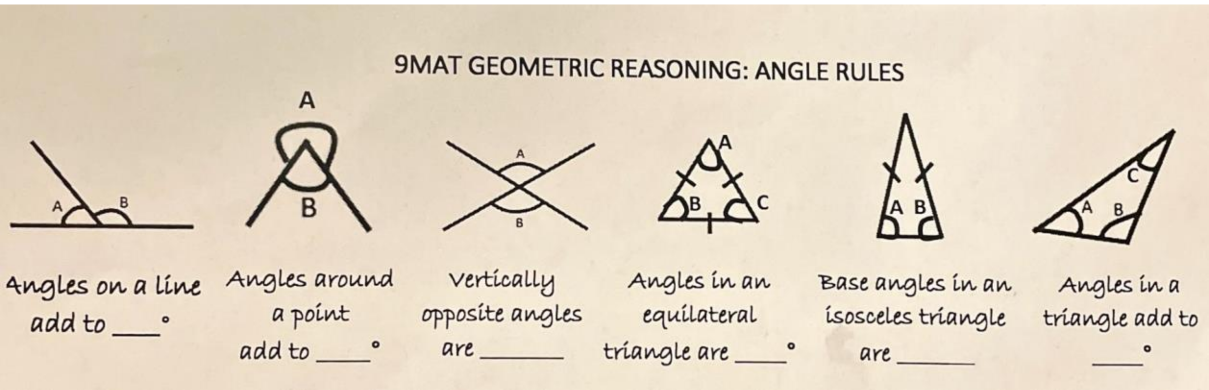
I understand that:

- My participation is voluntary
- I can withdraw my data at any time without penalty by contacting Fiona Ell
- Data will be stored until the project is complete in May 2023 and then destroyed
- All data storage, use and reporting will be confidential

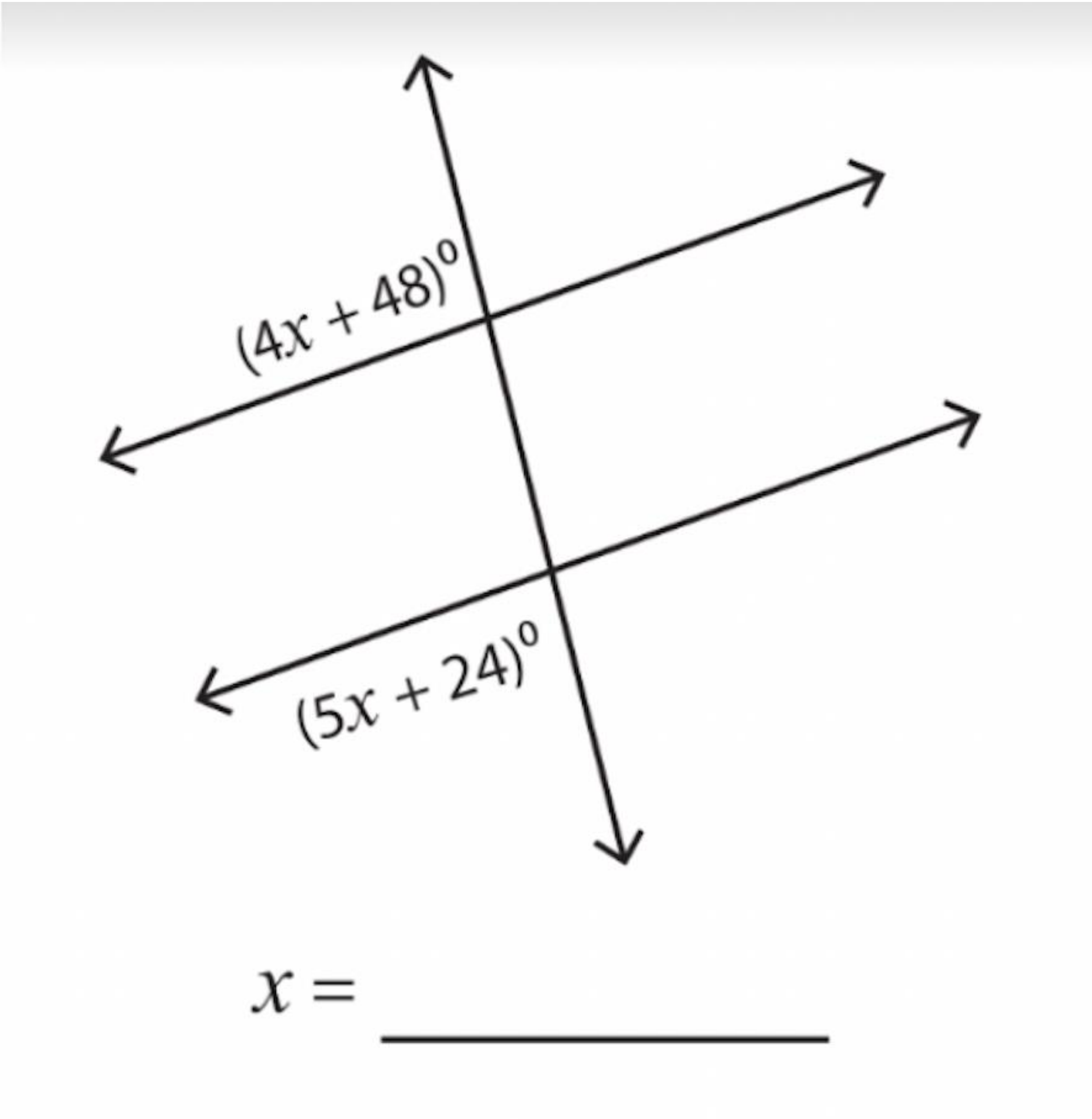
(Signed by participant, date)

If you would like a short summary of our conclusions in English, write down your email here:

Vedlegg 4 – Huskeregler for vinkler (Eskil)



Vedlegg 5 – Oppgave Eskil: Parallelle linjer



Vedlegg 6 – Planleggingsdokument for Derek sin undervisning

TASK 9	Link to Reflections
Curriculum Links NA3-1: Use a range of additive and simple multiplicative strategies with whole numbers, fractions, decimals, and percentages. NA3-4: Know how many tenths, tens, hundreds, and thousands are in whole numbers. NA3-5: Know fractions and percentages in everyday use. NA3-6: Record and interpret additive and simple multiplicative strategies, using words, diagrams, and symbols, with an understanding of equality. NA4-2: Understand addition and subtraction of fractions, decimals and integers. NA4-3: Find fractions, decimals, and percentages of amounts expressed as whole numbers, simple fractions and decimals. NA4-4: Apply simple linear proportions, including ordering fractions. NA4-5: Know the equivalent decimal and percentage forms for everyday fractions. NA4-6: Know the relative size and place value structure of positive and negative integers and decimals to three places.	**Big Ideas** - A decimal is another name for a fraction and thus can be associated with the corresponding point on the number line. - A percent is another way to write a decimal that compares part to a whole where the whole is 100 and thus can be associated with the corresponding point on the number line. - Percent is relative to the size of the whole. A percent is a special type of ratio where a part is compared to a whole and the whole is 100. Benchmark fractions like 1/2 (0.5) and 1/4 (0.25) can be used to estimate calculations involving fractions and decimals. - If two quantities vary proportionally, the quantities are either directly related (as one increases the other increases) or inversely related (as one increases the other decreases). - The effects of operations for addition and subtraction with fractions and decimals are the same as those with whole numbers. - A ratio is a multiplicative comparison of quantities; there are - different types of comparisons that can be represented as ratios. - Ratios give the relative sizes of the quantities being compared, not necessarily the actual sizes. - Ratios can be expressed as units by finding an equivalent ratio where the second term is one.
Learning Outcomes - Students will be able to; • Find equivalent ratios. • Represent reasoning using different forms of notation, including symbols and words. • Use multiplicative understanding of place value to solve multiplication and division problems with decimal numbers. • Represent reasoning to explain and justify place value involving decimal	**Mathematical Language** Percent, percentage, whole, fraction, fractional number, decimal number, rational number, equal, equivalent, ratio 45

Vedlegg 7 – Oppgave Derek: Beregne forhold

Task 9

Our local pizza restaurant makes a large quantity of dough which they cool store ready for use, using 36 cups of flour.
The ratio of cups of flour to cups of water they use is 9:4.
How much water should they use?

What if they use 50 cups of flour?
The ratio of cups of flour to cups of water they use is 10:5.
How much water should they use?

What if they use 66 cups of flour?
The ratio of cups of flour to cups of water they use is 12:7.
How much water should they use?

43

Vedlegg 8 – Oppgaveark Sølvi: Finne riktige svar fra venstre til høyre

You will need 2 colours – one for brackets that have been expanded correctly, and one for brackets that have not. Try to find a path going from left to right that only goes through correct squares. You cannot move diagonally.

$6(x+5)$ $= 6x+30$	$2(2x+3)$ $= 4x+6$	$4(5x-9)$ $= 45x-49$	$4(6t+1)$ $= 24x+4$	$9(6x-2)$ $= 54x-18$	$3(7t-5)$ $= 21x-15$	$5(1-x)$ $= 5x+1$	$x(x-1)$ $= x^2-x$
$4(x+2)$ $= 4x+2$	$5(2x-3)$ $= 10x-3$	$3(8-b)$ $= 24-b$	$5(5x+2)$ $= 25x+10$	$2(7x-3)$ $= 14x-6$	$9(5-b)$ $= 45-9b$	$4(3x+6)$ $= 12x+24$	$3(4t+3)$ $= 12x+9$
$5(x+4)$ $= 5x+20$	$x(x+5)$ $= x^2+5x$	$7(3x-2)$ $= 21y-14$	$t(t+3)$ $= t^2+3t$	$6(2x+5)$ $= 12y+30$	$8(x+4)$ $= 8x+32$	$6(8x+3)$ $= 46x+18$	$9(6-x)$ $= 9x-54$
$3(x+7)$ $= x+21$	$2(6x-1)$ $= 12x-2$	$3(x-3)$ $= 3x-9$	$8(3-x)$ $= 24-8x$	$x(x+6)$ $= 2x+6x$	$x(x-11)$ $= x^2-11x$	$7(6x-9)$ $= 42x-61$	$x(x-9)$ $= 2x-9x$
$5(x-6)$ $= 5x+30$	$7(2-x)$ $= 7x+14$	$8(7-h)$ $= 56-8h$	$5(x-8)$ $= 5x-8$	$4(4x-3)$ $= 16x-12$	$3(6x+5)$ $= 18x+15$	$6(y-1)$ $= 6y-6$	$2(5x-3)$ $= 10x+6$
$3(5c-1)$ $= 15c-3$	$6(7-x)$ $= 42-6x$	$9(3x+5)$ $= 24x+45$	$7(x-2)$ $= 7x+14$	$x(x+3)$ $= x^2+x^3$	$3(3x+7)$ $= 9x-21$	$9(2y+1)$ $= 18y+9$	$p(p+4)$ $= p^2+4p$
$x(x-7)$ $= x^2-7x$	$2(3x+1)$ $= 23x+21$	$3(y-7)$ $= 3y-18$	$2(5-g)$ $= 10-2g$	$5(4x+1)$ $= 20x+1$	$3(9x-8)$ $= 27x-8$	$5(x+5)$ $= 5x+25$	$6(2t+8)$ $= 12x+48$

Vedlegg 9 – Oppgaveark Sølvi: Finne samsvarende uttrykk

Expand and Simplify Matching Pairs

Expand and simplify $3(a + 5) + 2a$	$5a + 11$
Expand and simplify $4(2a + 3) + 5$	Expand and simplify $2(b + 6) - 2(b - 2)$
Expand and simplify $3a(5 + 2a) + 5b$	$8a + 17$
$2a^2b + 8ab$	Expand and simplify $a(a + 2b) + ab$
Expand and simplify $ab(2a + 3) + 5ab$	$5a + 15$
$a^2 + 3ab$	$6a^2 + 15a + 5b$
16	Expand and simplify $3(2a + 5b) + 3a$
$9a + 15$	Expand and simplify $3(a - 1) + 2(a + 7)$

www.greatmathsteachingideas.com

Vedlegg 10 – Oppgaveark Sølvi (tosidig): Ring rundt riktig løsning

Name: ____________________________ Date: ______________ Per: ________

Simplifying Algebraic Expressions

Directions: Solve each problem and circle your answer. Find the problem number on the coloring page and color each section with the appropriate color.

#	Question	Answer 1	Answer 2	Answer 3
1	$4(x+3)$	$x+12$ Purple	$4x+7$ Yellow	$4x+12$ Red
2	$8(2x-5)$	$16x-40$ Yellow	$10x-13$ Green	$16x-13$ Dark Blue
3	$7x+2+3+4x$	$11x+5$ Purple	$11x+6$ Orange	$10x+5$ Red
4	$9-5x+2x-8$	$-3x+17$ Pink	$-3x+1$ Green	$7x-1$ Light Blue
5	$2(3x-1)+x$	$7x-2$ Light Blue	$7x+2$ Yellow	$6x-2$ Pink
6	$8+3(x-5)$	$3x+7$ Green	$3x+22$ Red	$3x-7$ Dark Blue
7	$7(4x-2)+8x+9$	$19x-5$ Red	$36x-5$ Pink	$36x+23$ Yellow
8	$4+5(3x+2)-2x$	$13x+10$ Purple	$13x+14$ Red	$17x+10$ Dark Blue
9	$-4(x-9)-3+7x$	$3x+33$ Light Blue	$3x-39$ Red	$3x-36$ Pink
10	$9(2x+3)+4(x-10)$	$22x+13$ Yellow	$22x+67$ Purple	$22x-13$ Red
11	$6(x-7)-2(x+5)$	$4x-52$ Green	$8x-32$ Dark Blue	$4x-32$ Purple
12	$8-4(3x+9)-2(x-7)+x$	$-9x-42$ Green	$-13x-14$ Yellow	$-13x+58$ Light Blue

Name: ___________________________ Date: _____________ Per: _______

Simplifying Algebraic Expressions Coloring Sheet

Directions: Use your question sheet to help you to color in the shape below. The number in the design corresponds with the question number on the previous page.