STEINAR THORVALDSEN

Matematisk kulturhistorie

EUREKA NR 4 • 2002

Høgskolen i Tromsø
EUREKA FORLAG

S T E I N A R   T H O R V A L D S E N

Matematisk kulturhistorie

Artikkelsamling

EUREKA 4/2002

Tidligere utgivelser på Eureka Forlag:

1/2001 Marianne Aars og Nina Emaus: Læring gjennom praksisfeltet. Evaluering av en-dag-i-uka-praksis ved fysioterapeututdanningen i Tromsø. Kr 80,-

2/2001 Jorun Høier Kjølaas: Språk- og kommunikasjonsvansker. Språkvitenskapelig tenkning i det spesialpedagogiske fagfeltet. Kr 180,-

3/2001 Mia Lervik: Hus og stil. En guidet og interaktiv tur gjennom noen sentrale stilarter (CD). Kr 170,-

4/2001 Liv-Berit Knudsen: "Æ har nokka å fortell!" Å arbeide med studentenes egne yrkesfortelliger. Kr 60,-

5/2001 Tore Morten Andreassen og Karsten Andersen: Gitarkompbok 1. Populærmusikk for fingerspillsgitar. Kr 250,-

6/2001 Johannes Sørensen og Lev Levit: Babusjka forteller. Eventyr og folkelivsfortellinger fra Nordvest-Russland. Kr 125,-

1/2002 Tore Morten Andreassen og Karsten Andersen-. Gitarkompbok 2. Latinamerikansk musikk for fingerspillsgitar. Kr 250,-

2/2002 Britt-Vigdis Ekeli: Evidensbasert praksis. Snublestein i arbeidet for bedre kvalitet i helsetjenesten? Kr.100,-

3/2002 Olav-Kansgar Straum: Fra åsatro og høvdingedømmer til kristendom og rikssamling. Kristningen av Norge - en religionshistorisk innføring til perioden 800-1050. Kr. 115,-

Det må ikke kopieres fra denne boka i strid med åndsverkloven eller i strid med avtaler om kopiering inngått med Kopinor, interesseorganisasjon for rettighetshavere til åndsverk.

1. opplag 2002
2. opplag 2003
Utgiver: Eureka Forlag, Høgskolen i Tromsø
9293 Tromsø
Sentralbord: 77 66 03 00
Telefaks: 77 68 99 56
E-post: eureka@hitos.no
http://www.hitos.no

Layout: Steinar Thorvaldsen
Omslagdesign: Lundblad Media AS, Tromsø
Trykk: Lundblad Media AS, Tromsø

Eureka nr 4/2002
ISBN 82-7389-045-7
ISSN 1502-8933

Forord

Alle kulturer har behov for å fortelle sine historier – ved festtaler eller rundt leirbålene som samlet folk om varmen i gamle dager. Den store vestlige kultur – *vår* kultur – med all sin teknikk og vitenskap, er intet unntak. Matematikken var en av de første og største historier vår kultur fortalte da den gradvis, for vel 300-400 år siden, startet omformingen til den verden vi kjenner med sin moderne naturvitenskap. Derfor er matematikkhistorien en sentral del av menneskets kulturhistorie.

Tall er ikke alltid enkle å forstå og bruke. Matematikken har som andre vitenskaper strevd lenge med det klassiske spørsmål om sammenhengen mellom helheten og delene. Ord og de vanlige tallene er – som menneskene som bruker dem – atskilte og diskrete, mens endringer som solens og stjernenes bevegelse over himmelen gjennom dager, måneder og år er en kontinuerlig og glattflytende prosess lik vannets bevegelse nedover elven. Delene i prosessen kan ikke atskilles, og hvordan kan da tall brukes til å beskrive det som ikke kan deles opp? I matematikken måtte man skape et nytt "instrument" som var i stand til å gjøre denne jobben. Byggverket består av matematiske modeller, begreper og et formelspråk som på mange områder overgår menneskets evne til å undre seg. Matematikken gir konkrete svar. I sin stil beskriver den deler av den verden som omgir oss i form av klassisk mekanikk, relativitetsteori, atomfysikk og kvanteteori. Alt dette er blant menneskehetens intellektuelle "mirakler" og har gitt oss det vi kjenner som det moderne samfunn.

Men alle historier har sin slutt. Så også med matematikken som har sin begrensning. Dette kalles matematikkens ufullstendighetsteorem og regnes ofte som et av 1900-tallets viktigste resultater.

Ordet *kultur* kan som kjent ha mange betydninger. En av ordbokbetydningene er "intellektuell utvikling, tankemessig utvikling". Denne boka forsøker å fortelle en del av den matematiske kulturhistorie. Historieskrivning skal vanligvis gjøres i et nøkternt og beskrivende språk, men jeg har ikke i særlig grad fulgt denne normen i disse artiklene. Etter mitt skjønn innbyr stoffets særpreg ofte til en noe malerisk språklig beskrivelse. Noen steder er også matematisk tekst gjengitt, uten at dette trenger å bli noen nedtur. Deler av stoffet er tidligere presentert som foredrag og utgitt i tidsskrifter som Naturen, Normat, Astronomisk Tidsskrift og andre. I denne boka presenteres artiklene i en bearbeidet og samlet form.

Boka er ikke et forsøk på å gi en samlet matematikkhistorie, men heller en framstilling av viktige elementer, hovedsakelig hentet fra anvendt matematikk, som har fått betydning i ettertiden. Samtidig prøver jeg å skrive en "populær" historie som også er ment å være rimelig pålitelig. Men jeg har ikke hatt mulighet til å oppsøke primærkildene på alle områder, så det er fullt mulig at enkelte myter blir brakt videre.

De enkelte artikler kan leses noenlunde uavhengig av hverandre, selv om det naturligvis er kryssreferanser. Det er mitt håp at de kan være til nytte i matematikkundervisningen i forbindelse med skolereformene, ved at et kulturhistorisk perspektiv kan gi en større motivasjon, dybde og forståelse av matematikkens egenart og natur. Ingen ungdom tar skade på sitt sinn ved å måtte svette noen timer i uka med å trene sitt hode til å få en gryende forståelse av et av menneskets fremste kulturprodukter.

Jeg vil spesielt få takke Otto B. Bekken ved Høgskolen i Agder som har lest gjennom manuskriptet og kommet med verdifulle kommentarer. Kapittel 2 er i stor grad et resultat av forskning han har utført om Nordens eldste matematikktekst (fra rundt år 1307). Jeg takker for tillatelsen til å bruke hans materiale. Takk går også til min kollega Alv Birkeland og til Gyldendal forlag, og deres tegner Tom Nordli, for tillatelse til å bruke en del illustrasjoner de tidligere har laget til stoffet i appendikset. Min kjære Signe har ellers laget de fleste håndtegningene, og min sønn Mathias har hjulpet til med å oversette kapittel 5 fra engelsk.

Det er ellers med spesiell glede jeg daterer denne boka nøyaktig 200 år etter at Niels Henrik Abel ble født!

Tromsø 5.8.2002

Steinar Thorvaldsen

I andre opplag av boka er det foretatt noen språklige rettelser og justeringer i layouten.

Tromsø februar 2003

Forfatteren.

Innhold

Merk at boka har egen hjemmeside der aktuelle lenker og referanser på internett er tilgjengelig:

http://www.afl.hitos.no/mahist/bok/

1. Tallene fikk navn

Navn er viktige og navn på tall er noe vi bruker daglig som en naturlig del av språket vårt. For oss er det nærmest utenkelig å ikke ha et så nøyaktig og effektivt tallbegrep som det vi har. Men det tok menneskene lang tid å bygge opp disse navnene og systemet rundt, med vitale bidrag fra mange ulike kulturer.

Når vi i det følgende skal tale om tall, må vi skjelne mellom tallnavnet (f. eks. fem), talltegnet (5), de abstrakte tall og tallsystemet. Navn er noe vi vanligvis skjønner ved å knytte dem til bestemte situasjoner - det kan være bilder eller andre konkrete forestillinger. Men slik er det ikke med navn på tall. Vi kan nok forstå *fem* ved å ha et bilde av fem konkrete ting, men med *ett tusen* er dette vanskelig og det går slett ikke med *en milliard*. For å teste dette kan du uten betenkningstid prøve å anslå hvor mange år en milliard sekunder er.

Likevel har vi navn på en stor mengde tall. Her er noen av de første:

	1	2	3	4	10	11	12
Norsk	Første	Andre	Tredje	Fjerde	Tiende	Ellevte	Tolvte
Norsk	En	To	Tre	Fire	Ti	Elleve	Tolv
Engelsk	One	Two	Three	Four	Ten	Eleven	Twelve
Tysk	Ein	Zwei	Drei	Vier	Zehn	Elf	Zwölf

Navnene i disse språkene likner mye på hverandre, og det er ingen tilfeldighet. Som de fleste vet skyldes det at de har et felles opphav - det ur-indoeuropeiske språk.

Men vi kan også legge merke til at vi på norsk egentlig har to måter å telle på, og den som står på øverste linjen i tabellen er den eldste. Vi hører av og til om folkegrupper som teller slik: en-to-mange, dvs. enheten, paret og mengden. Det var også slik vi startet, noe vi fortsatt har bevart en gammel ordmessig indikasjon på ved de to spesielle navnene *første* og *andre*. Språklig sett har disse ikke noe med tallene *en* og *to* å gjøre. Fra og med tredje, fjerde osv. har vi et system med direkte sammenheng med tallene.

Tallet *tre* har ellers samme opphav som det franske *tres* som betyr mye, eller det latinske *trans* (hinsides).

Vi vet ikke hva som fikk våre forfedre i historien til å tenke ut og ta i bruk tallene. Som oss ønsket de nok å forstå naturen og dens veksling mellom natt og dag, årstider og klima, stjernehimmel og formørkelser, storm og stille, regn og tørke. Var det slike mer astronomiske interesser som månefaser, kalendere, året osv? Eller var det ganske enkelt praktiske behov som fulgte av livet i et samfunn?

Bruk for mange hender

Etter å ha tellet en-to-mange kom behovet for å ha egne navn på småtallene. Det er mange teorier om hvordan dette ble gjort. Tall kunne bli knyttet til deler av menneske-kroppen som nese, øyne, armer, føtter og spesielt fingrene. En har prøvd å knytte det til fingertelling der tallene *ti-elleve-tolv* er de spesielt slående. *Ti* betyr rett og slett To-hender, noe man lettest ser på tyske Zehn. Når nå begge hendene er brukt opp blir det noe til overs:

Ti: To hender

Elleve: En [finger] til overs

Tolv: To [fingre] til overs

Etter dette begynner systemene og vi setter navnene oppover i tierskritt.

I noen europeiske språk som dansk og fransk har man brukt skritt på lengde tjue, men det ser ut til å være en relativt ny tellemåte. Opprinnelig ble det der også da brukt tierskritt. Videre fortsetter navnene slik:

Hundre: To hender av to hender

Tusen: Stor hundre

Million: Stor tusen

Disse navnene kom gradvis i bruk etter som man hadde bruk for større og større tall. Navnene ble laget på ulike vis. Noen sto for bilder av ting, andre for skritt i prosessen og andre for ting hinsides prosessen. Tusen har trolig samme forstavelse som tusmørke (!) Og millionen ble tatt i bruk i forbindelse med bankvesenet i renessansen.

Av nyere dato har vi navnene:

Milliard
Billion
Billiard
Trillion
….
Kvintillion (med 30 nuller)

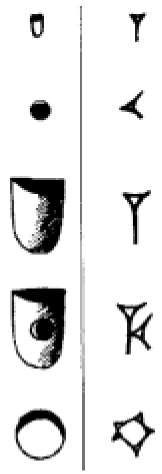
Disse brukes ennå ikke felles for hele verden og kan fort skape forvirring. For eksempel har vi at en amerikansk billion = en norsk milliard.

Talltegnene

Siden alle begynte med å telle på fingrene, er de fleste av tallsystemene som finnes ti-tallssystemer. Men andre grunntall ble også brukt. Mayaene, aztekerne, kelterne og baskerne hadde funnet ut at man kunne fortsette tellingen på tærne, og tok dermed tjue som grunntall.

Sumererne, som oppfant den eldste kjente skrift, og babylonerne, tellet med seksti som grunntall, uten at vi helt har klarhet i hvorfor. Det er av dem vi har arvet den velkjente tradisjonen med inndelingen av tiden i timer, minutter og sekunder. De står også bak den merkelige inndelingen av sirkelen i 360 grader, med inndeling av gradene i 60 bueminutter og minuttene i 60 buesekunder. Sekstitallsystemet var komplisert, men til gjengjeld kunne man skrive store tall med få sifre. Dette var nok en stor fordel når man skulle skrive på leirtavler, slik de foretrakk. Tallet 60 har også uvanlig mange faktorer og er derfor enkelt å dele opp i ulike deler.

Innen disse kulturene i nedre Mesopotamia og ved Den persiske bukt dukket historiens første kjente tallskriving opp på 3000-tallet f.Kr. En dag må noen av de som førte regnskaper ha fått den gode idé å bytte ut de vanlige regnesteinene med bestemte gjenstander i tørket leire av ulik størrelse og med vedtatte former, der størrelsen og formen svarte til en enhets orden i et eget system. En liten kjegle symboliserte 1, en kule symboliserte 10, en stor kjegle symboliserte 60, en stor gjennomhullet kjegle 600, en ball 3600. Se figuren (Ifrah, 1997). Dette regnskapssystem viste seg svært nyttig og man begynte å gjemme gjenstandene i kuleformede leirkapsler. Slik fikk man dekket behovet for å kunne bevare minnet om lagerbeholdninger og transaksjoner. Så en dag fikk man ideen å framstille gjenstandene i kapselen ved symboler påskrevet utenpå denne. En liten kjegle ble avbildet med et lite innsnitt, en liten kule med et lite sirkelformet hull, en stor kjegle med et bredt innsnitt, en større kule med en sirkel osv. Slik oppsto trolig de første kjente talltegnene selv om detaljene rundt dette for lengst har gått over i den historiske glemmeboka. I de områder der alfabet og skriftspråk var tilgjengelig ble tall gjerne også skrevet som den bokstaven som tilsvarte bokstavens nummer i alfabetet, slik grekerne gjerne gjorde.



”Våre” moderne talltegn, de såkalte ”arabiske” talltegn, ble oppfunnet i India rundt år 400 e.Kr. som et uhyre vellykket møte mellom flere store ideer. Inderne skrev på tørkede palmeblader. De grafiske symbolene vi alle kjenner i dag kom ganske seint og utgjør bare én av utallige mulige framstillinger av de indiske tallene. Første gang vi finner de omtalt utenfor India er av biskop Severeus Sebokt i Syria i år 662 e.Kr., og første gang vi finner tallene på en mynt er i Sicilia i 1134. Deres historie går parallelt med utviklingen av den skriftlige regning knyttet til papiret som regnemedium. I Europa ble jo romertallene og regning på kulerammer brukt mest helt fram til ca. 1500-tallet.

Would you like to have instructions in English?
Call 800 32 032.

اُردو میں مزید معلومات کیلئے
اس نمبر پرفون کیجئے 80032032

إن كنت في حاجة الى إرشاد إتصل
برقم الهاتف التالي : ٨٠٠ ٣٢.٣٢

Haddii aad warbixin af-soomaali ah u baahan tahay,
soo wac teleefoonka 800 32 032.

Si desea orientación en idioma español,
llame al número 800 320 32.

Nếu bạn cần chỉ dẫn bằng việt ngữ ?
Hãy điện thoại số 800 32032

Deshironi udhezime ne gjuhen shqipe?
Telefononi ne numrin 800 32 032!

Za dodatna obavestenja na srpskohrvatskom nazvati
broj 800 32 032.

Türkçe bilgi almak için 800 32 032 numaralý telefona
baþvurabilirsiniz.

در صورت نیاز به راهنمائی به زبان فارسی
با شماره تلفن 80032032 تماس بگیرید.

படிவத்தை நிரப்ப தமிழில் உதவி அவசியமா?
தொலைபேசி 800 32032 இல் தொடர்புகொள்ளவும்

I motsetning til skriftspråkenes babelske forvirring, framstår i dag det vi bare kaller *tallene* som et nær sagt globalt felleseie, selv om symbolene fortsatt kan variere noe. I figuren vises teksten som ble sendt til alle norske husstander i forbindelse med folketellingen i 2001. Tallene framstår som helt like, botsett fra i ett av språkene (nr 3 ovenfra). Ved nærmere ettersyn kan man se at også i dette språket er tallsystemet det samme, bortsett fra bruk av andre grafiske symboler.

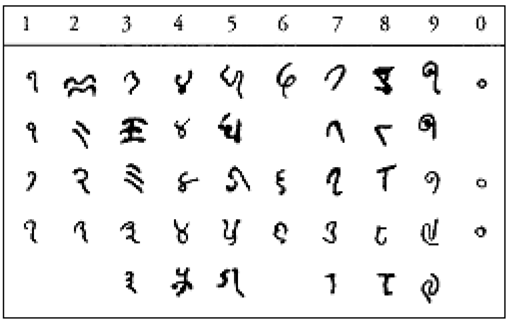
Posisjonsprinsippet og null

Vårt desimale posisjonssystem er en av menneskehetens fineste oppfinnelser. Men oppfinnelsen av plassverdisystemet er den store tanken som gikk de fleste av historiens kulturer forbi. Et posisjonssystem er et system der f.eks. en femmer ikke har samme verdi når den står på plassen til enheter av første orden, enheter av annen orden eller enheter av tredje orden osv.

Dette grunnleggende prinsippet ble bare utviklet *fire* ganger i historien. Den oppstod første gang rundt år 2000 f.Kr. hos de lærde i Babylon. Deretter ble den gjenoppdaget av kinesiske matematikere litt før vår tidsregnings begynnelse, så av mayaenes astronomer i Amerika mellom 200- og 400-tallet e.Kr. og til slutt av indiske matematikere omkring 400-tallet e.Kr.

Utenom disse fire kulturene var det selvfølgelig ingen som følte de hadde særlig behov for et nulltegn. Begrepet null ble imidlertid nødvendig fra det øyeblikk posisjonsprinsippet ble tatt i praktisk bruk. Likevel var det bare tre folkeslag, babylonerne, mayaene og inderne, som klarte å komme fram til den fullstendige abstraksjonen. Kineserne innførte den bare i sitt system etter indisk innflytelse. Mayaenes symbol for null regnes som det aller eldste og var noe så talende som et *tomt skjell*.

Men hverken babylonernes eller mayaenes null ble imidlertid oppfattet som et tall. Det var bare den indiske null som ga tilnærmet de samme muligheter som den null vi bruker i dag. Det var denne nullen som ble overlevert oss europeere av araberne sammen med talltegnene som bærer deres navn, og som i virkeligheten bare er indiske talltegn som har blitt litt modifisert av bruken og tidens mange spor som vist i figuren under (Ifrah, 1997). Vi kjenner bare deler av denne vandringshistorien, men systemet er nærmest identisk med det tallsystemet vi bruker i dag, og som altså har spredt seg til alle kulturer.



Dersom man skulle forenkle tallenes historie, kunne man kanskje si at det viktigste som har skjedd er det gigantiske skrittet fra en til null. Fra null til enheten er det bare ett skritt, noe vi i skolene i dag gjerne lærer ved å si at det tomme alltid må komme før enheten. Men vi kan i ettertid neppe forestille oss at det i virkeligheten er et ganske stort sprang, både i abstraksjon og tid, som skiller oppdagelsen av tallet ”en” - det første av de naturlige tallene - og oppfinnelsen av tallet ”null”.

Negative tall

Negative tall var også helt fraværende i matematikken i lange tider, bortsett fra enkel indirekte bruk. De ble ikke brukt i verken den babylonske eller den greske kultur. Her var inderne også først ute. På 600-tallet e.Kr. ble negative tall brukt i forbindelse med *regnskaper*, slik at positive tall betydde tilgodehavende, og negative sto for *gjeld*. Den indiske astronomen Brahmagupta viste en klar forståelse for negative tall i et arbeide om astronomi fra ca. 630 e.Kr. Men slike tall forble kontroversielle da mange mente de var falske og ikke kunne eksistere. Første gang negative tall ble brukt i Europa var på midten av 1500-tallet. De viste seg etter hvert nyttige i regningsmessig sammenheng, og på 1700-tallet ble de generelt akseptert og tatt i bruk i matematikken. Prosessen hadde da vart i rundt 1000 år og må karakteriseres som en meget trang fødsel.

Innen matematikken har man i dag videreutviklet tallbegrepet i mange retninger. Vi har fått ulike regningsarter, desimaltall, transcendente tall, komplekse tall og mye annet. Fagmatematikerne har tatt styringen og utviklet omfattende teorier. Men det matematikere fortsatt holder på med er på mange måter i tråd med det våre anonyme forfedre i historien en gang gjorde, nemlig å videreutvikle spesielle deler av språket vårt for bedre å kunne beskrive og forstå den verden vi lever i.

Litteratur:

Bekken, Otto B.: ”*Tallsystemets røtter*”. Agder distriktshøgskole, Skrifter 1984: 6.

Gullberg, Jan: “*Mathematics: From the Birth of Numbers*.” W.W.Norton & Company, 1997.

Holme, Audun: ”*Matematikkens historie*.” Fagbokforlaget 2001.

Ifrah, Georges: ”*All verdens tall. Tallenes kulturhistorie*”. Pax forlag 1997.

Jervell, Herman Ruge: ”*Hvordan tallene fikk navn*”. I avisserien Gløtt fra Universitetet i Tromsø, november 1979.

Johnsen, Ben: ”*Kryptografi – den hemmelige skriften*”. Tapir Akademisk Forlag, 2001.

Snow, C.P.: ”*De to kulturer*”. Cappelen Akademisk Forlag, 2001.

Øksendal, Bernt: *”Tall og tallsystem”*. Gyldendal Norsk Forlag 1991.

2. Nordens første regnetekst anno 1300.

Nordens eldste regnetekst kalles *Algorismus i Hauksbok* og er fra ca. år 1307. Boktrykkerkunsten ble først oppdaget rundt 1440, så alle bøker måtte før den tiden skrives for hånd. På ett av bladene navngir hovedskribenten seg som *Haukr Erlendsson (1265? -1334)*. Så langt vi kan spore håndskriftets historie tilbake i tida, har det derfor båret navnet *Hauksbok*. Det er på mange måter en tverrfaglig allkunnebok med tekster om historie, filosofi, teologi, naturhistorie og matematikk. Vi vet ikke nøyaktig når Hauk ble født, men vet at han ble lagmann på Island i 1294 og kom til Norge ca. 1301. Han bodde for det meste i Bergen, og ble etter hvert en sentral person i norsk offentlighet. I brev fra 1311 kalles han Gulatings lagmann og ridder. Fram mot 1322 ser det ut til at han har fungert som lagmann på tinget. Den matematiske delen av Hauksbok er en ganske liten del som kalles *Algorismus* og utgjør bare rundt 6 sider av håndskriftets over 200 sider. Dette er den eldste regnetekst med "våre" tall på et nordisk språk.

Slik var Hauks bumerke eller segl. Det har bildet av en hauk som viser fram sine vinger i midten. Innskriften rundt sier "Haukonis Filii Erlendi" Som betyr "Hauk sønn av Erlend". (Bekken 1995, s.8)

Kildene

Algorismus er ikke Hauks eget matematiske verk, men snarere en gjenfortelling av andre tekster. For å finne fram til kildene trenger vi først litt bakgrunnskunnskap. Historikeren P.A. Munch (1847) kalte tallene i Algorismus for "arabiske tall", slik som det var vanlig på 1800-tallet. Araberne kalte imidlertid alltid tallsymbolene og regnemetodene for indiske. Deres første systematiske møte med dette tallsystemet som vi kjenner til, fant sted i Bagdad under Khalif al-Mansur i 773. I India går bruken av det desimale posisjonssystemet i hvert fall tilbake til ca. 300 e.Kr.

Den fremste matematikeren i Bagdad på 800-tallet var *Muhammed Al-Khwarizmi*. Bildet viser et sovjetisk frimerke gitt ut i 1983 til minne om hans 1200-års fødselsdag. Han er mest kjent for sin bok *Aljabr w'al muqabalah*, opphavet til vårt ord og emne *algebra*. Al-Khwarizmi skrev også ei regnebok. Originalversjonen er gått tapt, men boka ble oversatt til latin i Toledo omkring 1130 med tittel: *Algoritmi de numero Indorum*. En versjon finnes i dag i Cambridge, og teksten begynner slik (Vogel, 1963, s. 9):

> *Algorizmi sier: La oss gi Gud, som styrer og forsvarer oss, en ham verdig lovprisning ... at han ved sin gode vilje hjelper oss i dette vi har besluttet å legge fram og klargjøre:* ***Om indernes tall ved IX tegn*** *...*
>
> *Algorizmi sier: Da jeg så at inderne i hele sitt tallunivers gjennomførte bruken av de IX tegn ... De laget altså IX tegn hvis form er:*

Disse ni tegn mangler i Cambridge-handskriftet, og er her gjengitt fra det eldste eksempel vi kjenner i Europa, Codex Vigilanus fra 976 (Vogel 1963, s. 5l). Som vi senere skal se tar Algorismus i Hauksbok også med et tegn for null slik som var vanlig på 1300-tallet.

Ellers kan vi legge merke til at *Al-Khwarizmis* navn er blitt latinisert til *algorizmi*. Herfra har vi fått ordet *algoritme*, og herfra kommer Hauksboks betegnelse *Algorismus*, som navn på det araberne kaller hinduisk regning.

I middelalderens Europa finner vi rundt denne tiden fire typer handskrifter om tall og tallregning:

- Tallteoretiske verk som bygger på en gresk tradisjon fra Euklid og Nikomakos via Boëthius til Jordanus Nemorarius (ca. 1225).
- Abakus-verk om handelsregning på regnebrett med *calculi*, *jetons* eller *counters*, og med romertall.

- Computi ecclesiastici, dvs. veiledning i kirkekalenderen, for å regne ut påske og andre flyttbare helligdager.
- Algorismer - om grunnleggende regneteknikker i et desimalt, posisjonelt tall-system, som bygger på Al-Khwarizmis tekster.

Her i Norden finner vi bare de to siste typene representert. De tre algorismetekstene som framfor andre fikk utbredelse i Europa, ble skrevet på 1200-tallet:

- Leonardo Fibonacci fra Pisas *Liber Abaci* fra 1202.
- Alexander de Villa Dei's *Carmen de Algorismo* fra tida etter 1200
- Johannis de Sacroboscos *Algorismus Vulgaris* fra ca. 1230.

I det lange løp var det Fibonaccis verk som fikk størst betydning, fordi mange trykte aritmetikkbøker fra Italia ca. 1500 bygget på dette. Men i den perioden som vi nå ser på, rundt 1300, hadde de to andre størst utbredelse.

Smith og Karpinski (1911, s. 99) framholder at det snarere var handelsmannen enn vitenskapsmannen som brakte de hindu-arabiske tall til Europa. Økt handel førte til større behov for effektive regnemetoder. Fibonaccis *Liber Abaci* og de første trykte italienske matematikkverkene har et slikt praktisk siktemål. Dette er imidlertid ikke tilfelle når det gjelder algorismene til Villa Dei og Sacrobosco. De skrev lærebøker for universitetsstudenter.

Skriftet *Carmen de Algorismo* ble av historikerne allerede rundt midten av 1800-tallet utpekt som den primære kilde for Algorismus i Hauksbok. Forfatteren av *Carmen de Algorismo*, *Alexander de Villa Dei* (? -1240), kom fra byen Villedieu i Normandie. Han underviste i Paris i 1209. Alle hans verk, også en latinsk grammatikk, ble skrevet på vers. Selv om de indiske regnemetodene er effektive ved regning på tavle eller papir, stiller de også store mentale krav. Det ble derfor nødvendig å huske verdien av flere tallsymbol, å memorere addisjons- og multiplikasjonstabellene for disse symbolene, å huske de posisjonelle prinsippene og å automatisere regneoppsett for de ulike regningsartene ut fra dette. Det er lettere å pugge og å huske slike ting på vers, noe som forklarer denne uvante formen. En typisk læreboksform var derfor verseformen, selv om også dialogformen ble brukt.

Historikerne er videre enige om at alle algorismemanuskriptene bygger på en eller annen versjon av Al-Khwarizmis regnetekst fra 800-tallet, men de avviker også på vesentlige punkter fra det Cambridgemanuskriptet som vi har nevnt foran. Al-Khwarizmi behandler vanlige brøker og seksagesimalbrøker slik som andre indiske og arabiske kilder. Alt om brøkregning mangler hos Villa Dei, Sacrobosco og også i Hauksbok.

Kampen mellom de to tallsystemer

...intet ville ha forbauset en gresk matematiker mer enn at hele den europeiske befolkning var i stand til å utføre divisjon… Vår moderne mulighet til effektiv regning er resultat av en perfeksjonert skrivemåte.
(A.N. Whitehead)

Algorismus i Hauksbok er altså ei lærebok i regning med posisjonssystem. Det konkurrerende tallsystemet i Europa på Hauks tid var det enkle additive romertallsystemet der regningen foregikk på abakus, regnebrett. På Hauks tid var utfallet av kampen mellom de to systemene på ingen måte klart. Det tok nye 300 år, fram til ca. 1600, før regnebrettmetodene forsvant, til tross for de fordelene vi med våre etterpåkloke øyne kan se ved posisjonssystemet når det gjelder å effektivisere regneprosessene på papir. Vi må se Algorismus i Hauksbok også mot denne bakgrunnen. Omleggingen gikk tregt da det var snakk om en fullstendig endring av teknologi og prinsipper.

Enkelte steder finnes regnebrett fortsatt i praktisk bruk. Som her på en klesbutikk i Murmansk i år 2000.

Allerede ca. år 800 fantes det papirmøller i Bagdad. Først i 1154 kom de til Spania. De første trykte aritmetikkbøker kom ut i Italia i 1478 og 1484. Tilgangen på papir og utviklingen av boktrykking førte til gradvis standardisering mot våre skrive- og regnemåter. Abakusregningen ble mer eller mindre borte i Europa, og dobling/halvering forsvant fra lærebøkene etter hvert som en innså at dette bare representerte spesialtilfeller av multiplikasjon/divisjon og ikke lenger hadde egen verdi.

Bortsett fra addisjon og subtraksjon, ble regneprosessene ansett som vanskelige. Fra denne tida finnes en anekdote om en ung tysker som fikk det råd at addisjon og subtraksjon kunne han nok lære seg i Tyskland, men for å lære multiplikasjon og divisjon burde han dra til Italia.

Det vokste fram et regnemester-laug som ledet skoler i handelsregning. To av de mest populære bøkene herfra var Jacob Köbels *Rechenbuch auff linien und Ziffern* (1514) og Adam Rieses *Rechnung auff der Linihen und Federn* (1525).

Det var disse to som i 1552 dannet grunnlaget for den første trykte regnebok på dansk av Herman Veigere: "En Kaanstelig och nyttelig Regne Bog faar Schriffuere, Fogeder, Købmend, Och andre som bruge Købmandskaff, paa Linyerne met Regne pendinge, och Zifferne udi heelt och brødit tal..." Av fortalen framgår det at det dreier seg om både "danske tal" = romertall, og om "Figurer (som menig Mand kalder ziffer), hvilket navn egentlig kun tilkommmer 0" (Larsen 1952, s 7f). Altså holdes både regning med sifre og med romertall i hevd.

Teksten i Hauksbok sier oss noe om læring og forståelse av regning i katedral- og klosterskolene på Hauks tid. De første trykte matematikkbøkene hadde et rent praktisk siktemål. Men dette var trolig ikke tilfelle når det gjelder algorismene til Hauk. På hans tid var dette en "ny" og vanskelig lærebok - skrevet for "universitetene" - beregnet brukt sammen med tavle og griffel. Tavlene var nok ikke store veggtavler, men heller de små og bærbare av "laptoptypen". For oss bør det være av spesiell interesse å se hvordan vår tids regnemetoder så ut da de første gang kom til landet.

Algorismus

Hér byrjar algorismum. List þessi heitir algorismus. Hana fundu fyrst indverskir menn ok skipudu med .x. stofum þeim er svá eru ritnir:

Algorismus i Hauksbok starter med å forklare posisjonssystemet. Boka navngir bare de to første plassene. Enerne kalles *finger* og tierne kalles *ledd*, mens de andre kalles sammensatte tall. Dette har bakgrunn i fingerregningssystemet som var vanlig i middelalderen, der tall opp til ti ble vist med fingre, mens tierne ble angitt ved at tommelen i tillegg pekte mot et ledd (prøv!). Hauksbok har også med et eget tegn for null slik som var vanlig på 1300-tallet. Vi finner her også norrøne navn på 7 regningsarter:

vidrlagning	**= tillegging**	**= addisjon**
afdráttr	**= fratrekking**	**= subtraksjon**
tvifaldan	**= tofolding**	**= fordobling**
helmingaskipti	**= halvdeling**	**= halvering**
margfaldan	**= mangfolding**	**= multiplikasjon**
skipting	**= deling**	**= divisjon**
taka rót undan	**= ta rot av**	**= rotutdraging**

Ingen indiske kilder behandler dobling og halvering som egne regningsarter, men disse kom til i arabiske kilder. Overgangen fra addisjon og subtraksjon til multiplikasjon og divisjon var så stor at det ble vanlig å ta med fordobling og halvering.

En typisk læreboksform på denne tiden var som vi har nevnt verseformen, selv om også spørsmål/svar formen ble brukt. Hauksbok er mest på prosaform, men vi kan tenke oss at verseformen kan ha vært omtrent slik:

Denne kunstens deler er sju, ikke flere
å addere, subtrahere, doble, halvere
den sjette er å dividere
men den femte er å multiplisere.
Å trekke ut rota sies å være den sjuende.

Selv om regnemetodene er effektive ved regning på tavle og papir, stiller de også store krav når det gjelder gangetabell, menteoverføring og liknende. Det ble derfor nødvendig å automatisere regneoppsett for de ulike regningsartene ut fra dette. Det er lettere å pugge og å huske slike ting på vers. Algorismenes metoder til å finne kvadratrøtter og kubikkrøtter er helt avhengige av posisjonsskrivemåten for tall.

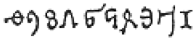
Det er ikke enkelt å gjøre seg bruk av metodene i teksten fra Algorismus i Hauksbok. Regnemetodene gis stort sett uten regneeksempler. Man bør kanskje være glad for at man ikke går på skole for 700 år siden, da våre metoder er mye enklere enn den gang. Her følger en oversettelse av starten på den gamle norrøne teksten, med forklarende noter til slutt:

Algorismus

Av Haukr Erlendsson.
Manuskript på gammelnorsk fra ca. år 1307.

Oversatt til moderne norsk av Otto B. Bekken og Marit Christoffersen.
Agder Distriktshøgskoles skriftserie, 1985 nr.1.

1. Her begynner algorismus

Denne kunsten heter algorismus. Den ble først funnet av inderne, som utformet den med x [dvs. ti] tegn som blir skrevet slik [1)] 

På enerplass [2)] står det første tegnet for én, det andre for ij [dvs. to], det tredje for tre og så videre bortetter, like til det siste, som heter cifra (null). Disse tegnene skal en begynne med fra høyre og skrive mot venstre som på hebraisk.

2. Om tegnenes betydning

Hvert av disse tegnene står for sin verdi på enerplass. Men hvis det settes på neste plass i forhold til der det står, betegner det x [dvs. ti] ganger seg sjøl, og på hver nye plass du setter tegnet i forhold til der det stod før, betegner det alltid x ganger mer på plassen mot venstre enn på nærmeste plass før. Cifra betegner ingenting i seg sjøl, men det markerer plass og gir de andre sifrene verdi. [3)]

3. Om tegnenes inndeling

Dernest hører det til å kjenne den tregreina inndelinga av tegnene og alle tall, fordi hvert tall mindre enn x heter finger, men hvert tall som svarer til et antall tiere heter ledd, enten det er stort eller lite. Men det tallet som består av både ledd og finger, heter et sammensatt tall.

4. Om finger og siffer

Vil du skrive et tall, så tenk over om det bare er en finger, og skriv så på enerplass det sifferet som trengs, på følgende vis: 8. Men hvis du vil skrive et ledd, så sett null før [4)] sifferet på dette vis: 70. Vil du skrive et sammensatt tall, så sett fingeren før leddet, som her: 65.

5. Hvordan et tall blir jamt eller ujamt [5)]

Ethvert tall som du skriver, er jamt hvis det svarer til et antall tiere eller i tillegg inneholder en jamn finger. Men tallet er ujamt hvis det i tillegg inneholder en ujamn finger. Av jamne fingre er det fire: 2,4,6,8, og av ujamne fire andre: 3,5,7,9. En er verken det ene eller det andre, fordi det ikke er et tall, snarere opphavet til alle tall.

6. Regningsartene

I sju er denne kunstens greiner delt: den første heter tillegging, den andre fratrekking, den tredje tofolding, den fjerde halvdeling, den femte mangfolding, den sjette deling, den sjuende å ta rot av. Og denne greina går i to retninger: den ene er å ta rot av firkanta [6)] tall, den andre er å ta rot av åttehjørna tall som har terningform.

7. Hvordan du skal trekke fra og legge til

Fra høyre skal du trekke fra, legge til og halvdele, men fra venstre skal du tofolde, dele, mangfolde og trekke ut begge slags røtter. [7)]

8. Her sies det hvordan et tall legges til et annet

Hvis du vil legge et tall til et annet, så skriv det største tallet øverst og sett det minste tallet like langt til høyre, og legg først det sifferet som står lengst til høyre, til tallet. Hvis hele det tallet til sammen er en finger, så skriv den ned på samme plass. Men hvis tallet blir sammensatt, så skriv fingeren ned på enerplass, og legg leddet til det tallet som står på neste plass fra før. Men hvis det blir et ledd av tilegginga på enerplass, så skriv null der, og legg leddet til det tallet som står nærmest, hvis det er noe tall der, eller skriv det der aleine. Men hvis det står null der, så ta den bort og sett leddet der. Legg siden de andre sifrene til på samme måte. [8)]

9. Om fratrekking

Hvis du vil trekke et tall fra et annet, så skriv de to tallene som når du legger til, og sett alltid det minste tallet under, og dessuten like langt til høyre. [9)] Så trekker du fra det første sifferet det tallet som står under, hvis det går, og skriv det ned på samme plass, om det er noe igjen, eller sett null der.

Men hvis du ikke kan trekke fra det første sifferet fordi det som står under, er større, så tar du en fra neste siffer. Pass på at det betyr x på forrige plass. Trekk så fra dette hele det tallet som står under, og skriv på samme plass det [10)] som blir igjen. Hvis det står nuller øverst, så ta én fra det sifferet som står nærmest nullene og skriv ni der nullene var, like til du kommer til den plassen der du vil trekke fra. Og trekk fra tallet fra de ti som trengs på den plassen, og skriv på samme plass det som blir igjen.
…….

Noter:

1) I oversettelsen har vi valgt å følge originaltekstens inkonsekvente tallbruk. Vi skriver romertall der teksten har romertall, tallord der teksten har tallord osv. Vi har sløyfet punktumene rundt tallene.

2) Her står det egentlig **fyrsta stað**, i betydningen førsteplass når en begynner fra høyre. Vi oversetter med enerplass.

3) Her forklares posisjonsprinsippet med ti som grunntall og betydningen av null (=cifra).

4) Husk at **før** betyr til høyre for, jf. kap. 1 og 2.

5) Vanligere terminologi i dag er **jamn** som motsetning til **odde**, og **like** som motsetning til **ulike**. Vi har likevel valgt å følge teksten her.

6) Firkanta tall betyr kvadrattall, åttehjørna tall kubikktall. Det er egentlig snakk om å ta kvadratrot, henholdsvis kubikkrot, av disse.

7) Her beskriver en fra hvilken retning de sju regneprosessene skal utføres, siffer for siffer.

8) Eksemplet nedenfor viser framgangsmåten ved noen av de tilfellene som teksten tar opp, illustrert på de forskjellige plassene, slik at vi ser prosessen i regnestykket samtidig. Dette vil også gjelde de andre regneprosessene vi gir eksempler på.

Hvis du vil legge tallet 365 til tallet 2674, skriver du:

2 6 7 4 <-- det største tallet øverst
3 6 5 <-- det minste like langt til høyre

Addisjon foretas fra høyre, siffer for siffer. Sifrene i det nedre tallet legges trinnvis til hele det øvre tallet som viskes ut og erstattes med nye sifre som nedenfor.

2 6 7 $\boxed{4}$ … blir til sammen en finger, 9, som skrives på
3 6 $\boxed{5}$ samme plass istedenfor 4.
↓

2 6 $\boxed{7}$ 9 … blir et sammensatt talt, 13. Skriv fingeren 3
3 $\boxed{6}$ 5 istedenfor 7 og legg leddet 1 til 6, som står på
↓ neste plass fra før.

2 $\boxed{7}$ 3 9 … blir et ledd, 10. Skriv null der istedenfor 7 og
$\boxed{3}$ 6 5 legg leddet 1 til 2 som står nærmest.
↓

3 0 3 9 … Endelig resultat
3 6 5

9) Regneeksempel

2 0 1 3 8 6 …	Skriv tallene som ved addisjon, det største
3 5 8 2	øverst, det mindre under, like langt til høyre.
2 0 1 3 8 $\boxed{6}$ …	Du trekker fra sifferet over: 6, det tallet
3 5 8 $\boxed{2}$	som står under: 2, hvis det går, og skriver
↓	4, som er igjen, på samme plass,
2 0 1 3 $\boxed{8}$ 4 …	eller sett null der.
3 5 $\boxed{8}$ 2	
↓	
2 0 1 $\boxed{3}$ 0 4 …	Hvis tallet under er større, ta én fra sifferet
3 $\boxed{5}$ 8 2	foran, som er 1. Det betyr 10 på □ - plassen. Nå
↓	kan hele tallet, 5, trekkes fra dette, som da er
	13. Det som blir igjen, 8, settes på denne plass
2 0 $\boxed{0}$ 8 0 4 …	Hvis det står nuller øverst, så ta én fra det
$\boxed{3}$ 5 8 2	sifferet som står nærmest nullene (én tas altså
↓	her fra 2).
1 9 7 8 0 4 …	Skriv 9 der nullene var, til du kommer til
3 5 8 2	□- plassen Trekk sifferet 3 fra de 10 som trengs
	på den plassen, og skriv der det som blir igjen,
	nemlig 7, og du har resultatet

10) Ðeim = det; nemlig lånet pluss det som står igjen på plassen fra før.

Resten av Hauksbok finnes på internett: http://www.afl.hitos.no/mahist/hauksbok/

Takk
Jeg vil takke Otto B. Bekken ved Høgskolen i Agder for tillatelse til å bruke det stoffet han har skrevet om Hauksbok. Se litteraturlisten.

Litteratur:

Bekken, O. B. & Christoffersen, M.: *Algorismus i Hauksbok*. Agder Distriktshøgskoles skriftserie, nr. 1, 1985.
Bekken, O. B.: Algorismus i Hauksbok. *Nordisk matematikkdidaktikk*, Vol. 3, nr 1, 1995, s.7-15.
Brun, V.: *Regnekunsten i det gamle Norge*. Oslo-Bergen 1962.
Helgason, J.: Hauksbok. I *Manuscripta Islandica*, Vol. 5. København 1960.
Johansen, N.V. og Ellingsrud, G.: Denne kunsten heter Algorismus. *Tangenten* nr. 1, 2002, s. 11-13.
Larsen, L. M.: Træk af regnekunstens historie i Danmark. *Matematisk Tidsskrift A*, 1952, s.1-21.
Munch, PA.: Om Ridderen og Rigsraaden Hr. Hauk Erlendssøn, Islands, Oslo og Gulatings Lagmand, og om hans literære Virksomhed. I *Annaler for Nordisk Oldkyndighed og Historie*, s.169-216. København 1847.
Munch, PA: Algorismus, eller Anviisning til at kende og anvende de saakaldte arabiske Tal, efter Hr. Hauk Erlendssøns Codex meddelt og ledsaget med Oversættelse af P.A. Munch. I *Annaler for Nordisk Oldkyndighed og Historie*, s.353-375. København 1848.
Smith, D. E. & Karpinski, L. C.: *The Hindu-Arabic Numerals*. Boston and London 1911.
Vogel, K.: *Muhammed ibn Musa Alchwarizmi's Algorismus*. Aalen 1963.

3. Geometri og det gylne snitt

Fra de tidligste tider har menneskene lagt merke til geometriske former i naturen. Det gjelder solens sirkelform, månens faser, stjernehimmelens bevegelse, bikubecellenes form, edderkoppens nett osv. Men geometrien som *fag* har en praktisk opprinnelse. Herodot (ca 500 f.Kr) skriver: "Egypterne betalte årlig en skatt til kong Sesostris beregnet ut fra hvor mye land de eide. De som mistet land på grunn av at Nilen gikk over sine bredder, måtte rapportere det til kongen. Han sendte så en av sine oppsyns-menn som målte hvor mye av landet som var igjen. På grunnlag av dette ble det beregnet ny skatt."

Vi regner med at ordet geometri stammer fra denne tiden. Ordet betyr nemlig *måling av jord*. Egypterne og babylonerne kjente korrekte metoder for å finner arealet av trekanter, rektangler og trapeser for 4000 år siden.

1. Euklid

Grekerne gjorde geometrien til en formell vitenskap med presise definisjoner og regler ca år 300 f.Kr. Dette ble gjort i verdens mest berømte matematikkbok som heter *Elementene* der store deler er forfattet av Euklid. Verket består av 13 bøker og inneholder det meste av den matematiske viten grekerne satt inne med. Euklids bøker ble brukt i europeiske skoler i nærmere 2000 år. Bortsett fra Bibelen er det ikke noe bokverk i historien som har blitt mer undervist, sitert og studert enn dette. Geometriens systematiske oppbygging og logiske presisjonskrav ble en trendsetter som senere dannet mønster for resten av matematikken. Grekerne var også de som krevde at geometriske konstruksjoner skulle utføres ved hjelp av passer og linjal.

Men hvorfor valgte Euklid ut nettopp *geometrien* som grunnleggende for sin matematikk? Hovedårsaken til dette var at tallæren, som Pytagoras hadde studert så grundig, hadde gitt opphav til selvmotsigelser og paradokser, f.eks. når man skulle gjøre noe så enkelt som å finne lengden av diagonalen i et kvadrat. Dette var den første store krisen i matematikkens utvikling, og førte til at geometrien ble regnet som mer fundamental enn tallæren. Siden tallene (dvs. de rasjonale tallene) ikke var sterke nok til å beskrive forholdene i geometrien, måtte det være en mangel ved disse. Geometrien hadde den beste forklaringskraft og ble valgt som basis for hele matematikken.

Den greske kultur omfatter større områder enn det som i dag er Hellas. Euklid ble utdannet ved Platons akademi og levde og arbeidet i byen Aleksandria ved Nilens munning. Vi vet ikke om Euklid selv har utviklet ny matematisk teori, for det er som lærebokforfatter han har hatt størst betydning. Det er kopier av *Elementene* som er bevart i dag og disse er ofte utvidet med kommentarer eller nye setninger. Bokverket ble første gang trykket i 1482, og har etter dette kommet i over 1000 utgaver. En dansk oversettelse opprinnelig laget for ca. 100 år siden (Eibe 1897-1917) er nå trykket opp på nytt.

Elementene bygger på tidligere matematikeres arbeider, og omhandler følgende tema:

Bok I - VI : Plangeometri
Bok VII - IX : Aritmetikk
Bok X : Teori om proporsjoner
Bok XI - XIII : Bl.a. romgeometri

Vi kan se litt på oppbyggingen til bøkene ved å se litt nærmere på bok I. Euklid bygger opp teorien ved hjelp av logiske slutninger fra et grunnlag av definisjoner, postulater og aksiomer. Hans såkalte *aksiomatiske metode* går ut på å starte med å presentere noen få grunnsetninger om geometriske objekter som verken blir forklart eller bevist. Han begynner hver bok med slike definisjoner. I bok I starter han med 23 *definisjoner*. Her er noen eksempler på geometriske begreper som blir innført:

1. Et punkt er det som ikke har noen del.
2. En linje er en lengde uten bredde.
3. En rett linje ligger utstrakt mellom sine endepunkter.
5. En flate er det som har bare lengde og bredde.
8. En plan vinkel er åpningen mellom to linjer som møtes i et plan, men ikke faller sammen.
15. En sirkel er en plan figur innesluttet av en linje på en slik måte at alle rette linjer fra et av punktene inne i figuren til linja er like store.
23. Parallelle rette linjer er rette linjer som ligger i samme plan, og om de forlenges ubegrenset i begge retninger, så møtes de ikke i noen retning.

Euklids *postulater* er "selvinnlysende, grunnleggende sannheter". Her er de fem i bok I :

1. En rett linje kan trekke fra et vilkårlig punkt til et vilkårlig annet punkt.

2. Når vi har ei rett linje er det mulig å utvide den i begge retninger.

3. Det er mulig å tegne en sirkel med vilkårlig sentrum og vilkårlig radius.

4. Alle rette vinkler er like store.

5. Dersom en rett linje skjærer to rette linjer og de innvendige vinklene på samme side (av overskjæringslinja) er mindre enn to rette vinkler, så vil de to rette linjene møtes om de forlenges ubegrenset til denne siden.

Euklids *aksiomer* er generelle sannheter som også kan brukes i andre sammenhenger enn matematikk. Vi kan kalle dem for *slutningsregler* eller *common sense*. Her er de fem i bok I :

1. Ting som er like den samme tingen er også like hverandre.

2. Hvis like legges til like, så er også summene like.

3. Hvis like trekkes fra like, så er også restene like.

4. Ting som faller sammen (dekker hverandre), er like.

5. Det hele er større enn delen.

Med bakgrunn i dette aksiomgrunnlaget utledet Euklid alle kjente resultater innen geometrien på en systematisk og resonnerende måte. Fra punkter og linjer, til mangekanter, sirkler og romlegemer. Den danske kunnskapsarkeologen Jens Høyrup har karakterisert verket som skoledannende for den institusjonaliserte matematikkundervisning (Høyrup 1979). Som tidligere nevnt, fungerte også verket som trendsetter for mye av forskningen som senere kom innen matematikk og naturvitenskap. På 1800-tallet ble det avklart at metoden med hell også kunne brukes innen andre områder av matematikken, og de fleste fagområder fikk en formalisert aksiomatisk framstilling.

Metodens begrensninger ble først oppdaget på 1900-tallet da matematikeren Kurt Gödel beviste at det i de aller fleste aksiomsystemer kan formuleres setninger som er sanne uten at de kan utledes av aksiomene. Det vil altså finnes relevant kunnskap som ikke fanges opp av aksiomsystemet, og som verken kan bevises eller motbevises innenfor teorien. Alle aksiomsystemer vil dermed være ufullstendige. Dette kalles *Gödels ufullstendighetsteorem* og regnes som en av de viktigste matematiske oppdagelser fra forrige århundre.

Noen vil hevde at Euklid på mange måter også gjorde geometrien en bjørnetjeneste. Hvordan kunne det skje at et av matematikkens mest spennende og visuelle emner kunne få en så ensformig framstilling som i den klassiske geometri? På en måte koblet Euklid faget mest til filosofi og gjorde det til et mønstereksempel på hvordan vi kan begrunne sannheten. Resultatet har også vært at geometrien etter hvert har fått en redusert betydning i våre skoler, mens den egentlig kunne vært brukt som brobygger mellom elevenes erfaringsverden og matematikken. Først med Læreplanen fra 1997 gjøres det et forsøk på å "rehabilitere" geometrien i norsk skole. Den estetiske dimensjonen og skapergleden skal igjen komme inn i faget.

2. Det gylne snitt 1,618...

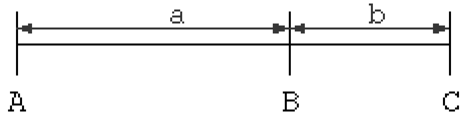
Det gylne snitt er en underlig forhold vi ofte finner i geometrien og naturen. Allerede Euklid omtaler dette forholdet i sin bok II og VI. Sammenhengen kan brukes til å kombinere ulike fagområder som matematikk, arkitektur, billedkunst og biologi.

Det gylne snitt bygger på en harmonisk deling av et linjestykke. Snittet deler linjestykket slik at forholdet mellom den lengste og den korteste delen er like stort som forholdet mellom hele linjestykket og den lengste delen av det.

Matematisk kan dette uttrykkes slik: Hvis linjestykket AC er delt i et punkt B slik at

$$(a+b)/a = a/b$$

sies B å dele AC i *det gylne snitt*



Dersom vi setter linjestykket (a+b) lik 1 og den lengste delen av det (a) lik x, blir den korteste delen (b) lik 1 - x. Settes dette inn i likningen over, og multipliseres begge sider med x(1-x), får vi følgende annengradslikning:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Løser vi denne likningen og ser bort fra den negativ løsningen, får vi:

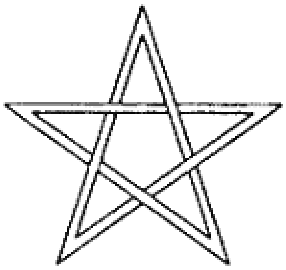
$$x = (-1 + \sqrt{5})/2 = 0{,}618034\ldots$$

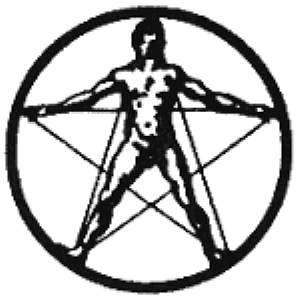
Det gir for det gylne snitt: $(a+b)/a = 1/x = (1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}618034...$

Merk at alle desimalene er de samme for det gylne snitt og det inverse snitt.

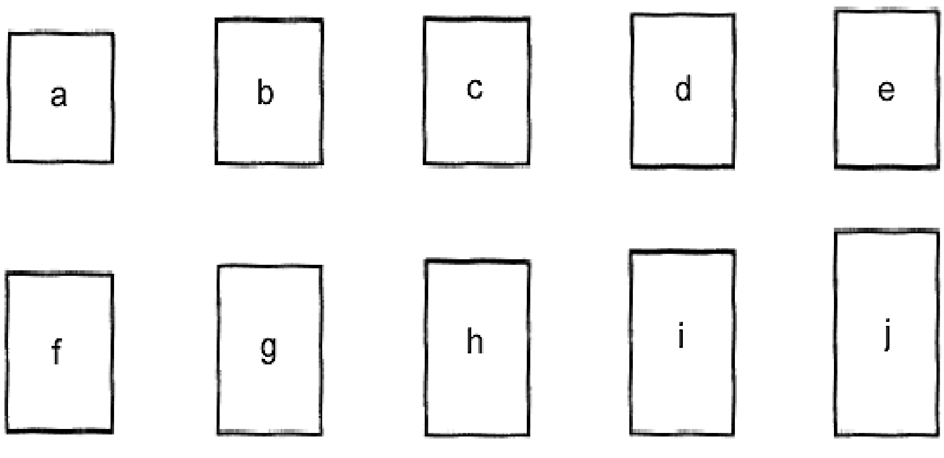
Leonardo da Vinci (1452-1519) åpnet en av sine bøker med følgende utsagn: "La ingen som ikke er matematiker lese mitt arbeid!" Denne spissformuleringen viser kunstnerens interesse for matematikkfaget. Ved siden av å interessere seg for geometri, studerte han menneskekroppen meget inngående. Han fant mange forhold på menneskekroppen som, ifølge ham selv, burde være lik det gylne snitt for at det skulle være en perfekt kropp. Da Vinci hevdet at forholdet mellom høyden fra navlen og ned og høyden fra navlen og opp bør være lik det gylne snitt. Det betyr at en person på 150 cm, skal ha en navlehøyde på ca 93 cm. Dette kan skape mye moro og sterk motivasjon hos elevene, både til målinger og evt. løsning av likninger på høyere klassetrinn.

Lærere har etter slike timer opplevd at elever hevder med stor overbevisning at deres kropper, som kanskje er både butte og stutte, er langt mer "perfekte" enn de syltynne reklamemodellenes kropper med alt for lange bein!





Femkantstjerna kalles gjerne *pentagrammet*. Den avbildes gjerne inne i en sirkel, og gir oss en estetisk følelse av balanse og harmoni. I en regulær femkant finnes også det gylne snitt som forholdet mellom diagonalen og siden. Det var dette som var Euklids motiv.



Det gylne snitt finnes igjen i mange sammenhenger i arkitektur, kunst og billedkunst. Et *gyllent rektangel* er et rektangel der forholdet mellom den lengste og korteste siden er tilnærmet lik 1,62. Hvis man ber en gruppe elever finne hvilket av rektanglene over som er "penest" eller mest harmonisk, så vil vanligvis rektangel g være det foretrukne. Nabofigurene f og h vil også skåre høyt i en slik statistisk undersøkelse. Her er det figur g som er et gyllent rektangel, mens f har forholdstall 1,5 og h 1,7. I utformingen av bygninger, gårdsanlegg og tun har det gylne snitt ofte vært et bærende konstruksjons-prinsipp helt opp mot slutten av 1800-tallet. Da overtok andre prinsipper i arkitekturen, men fotografer og designere tenker fortsatt på det gylne snitt når de skal komponere bildene sine. Et fotografi blir aldri pent hvis man lar f.eks. lar horisonten komme midt på bildet.

En av de mest kjente tallrekkene kalles *Fibonacci-tallene* og er slik:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

De har fått navn etter Leonardo av Pisa (1170-1240) som gjerne også kalles Fibonacci som igjen er en forkortelse for *Filius Bonacci* eller sønn av Bonacci. Rekken stammer fra boka *Liber abaci*. Det Fibonacci gjorde var å lage et tenkt kaninforsøk der han starter med to kaniner som får to unger hver måned. Men alt avkommet får også to unger fra de er en måned gamle (en av hvert kjønn). Slik får vi flere og flere kaninpar, og hvert ledd i rekka framkommer som summen av de to foregående ledd.

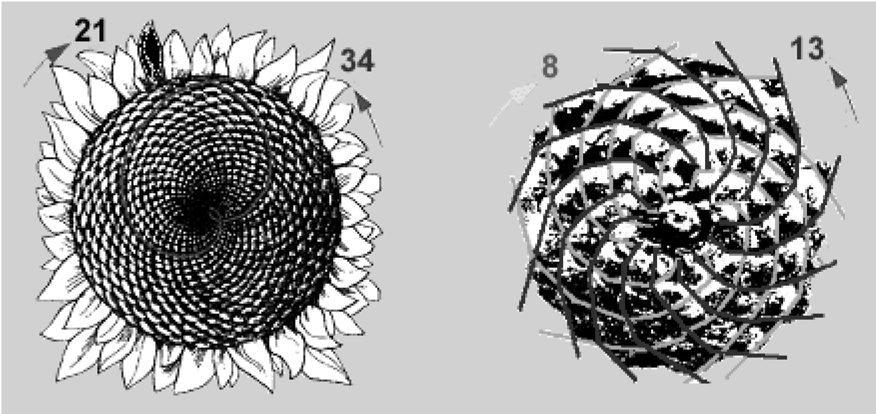
Plakat som ble laget til verdens matematikkår i år 2000.

Hvis vi nå regner ut forholdet mellom to etterfølgende tall, finner vi dette:

2/1= 2,00 3/2=1,50 5/3=1,67 8/5=1,60 13/8=1,63 21/13=1,615
34/21=1,619 55/34=1,617 ...

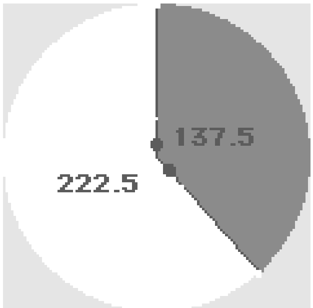
Forholdstallet ser altså ut til å nærme seg det gylne snitt, noe som også viser seg å kunne bevises når Fibonacci-tallene går mot uendelig.

Noe av det mest spennende og forunderlige med Fibonacci-tallene er at vi også kan finne igjen disse tallene i *biologien* (Stewart 1999). Når vi ser inn mot blomsten i en solsikke ser det ut som det stråler spiraler ut fra sentrum. Det samme gjelder for en kongle og for en ananasfrukt, der spiralene sprer seg ut fra stilken. På vår mer hjemlige løvetann er det verre å se spiralstrukturen når den står i full blomst, men plukker vi av de gule kronbladene, ser vi tydelige spiraler i vekstområdet. Disse spiralene går henholdsvis mot venstre og mot høyre. Dersom vi teller spiralene som går mot høyre, og deretter de som går mot venstre, vil vi finne ut at antallet er forskjellig og lik to etterfølgende Fibonacci-tall. På konglen under er tallene henholdsvis 13 og 8, og på solsikken 34 og 21:



Solsikkeblomst og kongle med Fibonacci-tall (Bygger på Rossing 1999).

På et innsamlet materiale med 281 kongler var det bare 5 som ikke tilhørte Fibonacci-tallene. Ved å telle kronbladene på prestekrager, skal det på samme måte være mulig å finne opphopning rundt Fibonacci-tall, men jeg har ikke noe statistisk materiale som kan dokumentere dette.

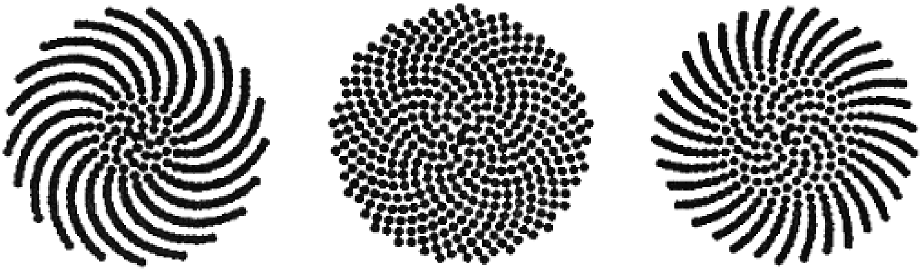


Lenge har man lurt på hvilke lover som lå bak naturens preferanse for Fibonacci-tall. På 1970-tallet fant botanikerne nærmere ut av systemet for celledeling i vekstsonen hos blomsterskudd. Denne celledelingen skjer nemlig ikke vilkårlig, men følger et spesielt mønster. Knoppskytningen skjer så og si alltid i en bestemt vinkel i forhold til den sektoren der forrige knoppskytning skjedde. Denne vinkelen ble bestemt til å være 222,5 grader, og var stort sett konstant fra celle til celle etter hvert som planten vokste. Ser vi nærmere på denne vinkelen, finner vi:

222,5/360= 0,62

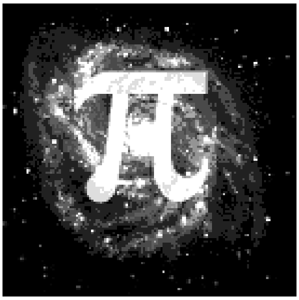
som er meget nær det inverse av det gylne snitt. Vinkelen kalles gjerne *den gylne vinkel*. Dette matematiske regelverk som mange planter bruker, er altså i samsvar med det gylne snitt og framkommer i kombinasjonen mellom plantenes genetikk og de omliggende randbetingelser.

Matematikere har også studert hvordan frøene bør pakkes for å oppnå *optimal komprimering* innen en sirkulær rand med minst mulig glippe mellom dem. Hvis vi lar frøene være representert som små skiver, er løsningen på dette at frøene da må plasseres i spiraler med påfølgende rotasjonsvinkel på nettopp 222,5 grader, dvs med 0,62 omdreininger per nytt frø. Dette ble vist matematisk av H. Vogel i 1979 (Stewart 1998, s. 126). Dette var også den eneste plassering som ga bilde av spiraler som gikk i begge retninger. I referanselisten til slutt i denne artikkelen kan man finne simuleringer på Internett av ulike vekstmønstere, og hvordan den gylne rotasjonsvinkelen gir optimale design. Bildene nedenfor viser at små avvik fra den gylne vinkel gjør at det dobbelte spiralmønsteret forsvinner:



222.7°   222.5°   222.4°

3. Tallet pi 3,14...



Sirkelen og dens egenskaper har fascinert mennesker fra de tidligste tider. Forholdet mellom omkrets og diameter har alltid stått sentralt i matematikken, og er vel den enkeltsak som har opptatt faget mest gjennom tidene. Lenge trodde man at dette forholdstallet - π - kunne uttrykkes som en brøk. Den egyptiske matematiker Ahmes (ca 1700 f.Kr) skriver i problem nr 41 i Rhindpapyrusen at en sirkel og et kvadrat har samme areal dersom kvadratets sidekant er 8/9-deler av sirkelens diameter. Det er lett å vise at dette gir en verdi for π på:

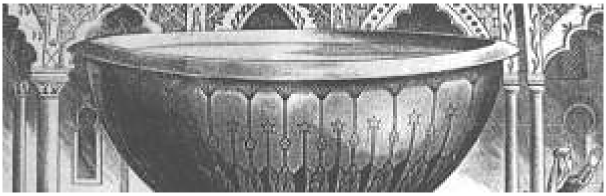
$$\pi = 256/81 = 3{,}1605...$$

Noe som avviker mindre enn 1% fra den virkelige verdien. Hvordan de har funnet fram til dette er usikkert. På en babylonsk leirtavle funnet i 1936 finnes verdien 3 og 1/8, dvs. 3,125.

I Det gamle Testamente står det en mye omtalt beskrivelse av et stort renselseskar i Kong Salomos tempel (950 f.Kr) som ble laget av kunstneren Hiram (1.Kongebok kap. 7):

"Så laget han det støpte hav. Det var helt rundt og målte ti alen fra kant til kant. Høyden var fem alen, og det trengtes en snor på tretti alen for å nå rundt det."

Her kan det synes som at man opererer med en såpass unøyaktig verdi som $\pi = 3$. Men dette forutsetter at den store vannbeholderen hadde sylindrisk form. Den kan meget vel også ha hatt skrå vegger og tallerkenrand rundt, og dermed kan ikke Hiram avsløres som en unøyaktig matematiker. Han har bare ikke gitt oss alle de geometriske detaljene, selv om han riktignok nevner at karet var en håndsbredd tykt, hadde "kant som på et beger og var formet som en lotusblomst". Med disse opplysningene er det fult mulig å realisere kunstverket innen de gitte rammer. Vi bør være varsomme med å tolke gamle tekster inn i en eksklusiv euklidsk tradisjon, slik de fleste lærebøker fortsatt gjør på dette punkt.



Karet i kong Salomos tempel hadde form som en lotusblomst, var 10 alen fra kant til kant og hadde omkrets 30 alen.

Arkimedes (250 f.Kr) beregnet verdi for π ved å innskrive og omskrive mangekanter i sirkelen. I sitt arbeide *Om målinger av sirkelen* brukte han 96-kanten til å finne en verdi på π mellom 3 1/7 og 3 10/71, noe som gir tre korrekte desimaler etter komma. Arkimedes' beregningsmetode var i nesten 1000 år den eneste kjente.

Den kinesiske astronomen Tsu Chung-chih (ca 500 e.Kr) benyttet en mangekant med 24576 sider, og kom fram til brøken 355/113 som stemmer med 6 desimaler etter komma.

Senere fortsatte man å øke antall sider i mangekantene, og i 1610 klarte Ludolph van Ceulen å finne π med 35 desimaler. Han brukte 32 milliarder sider i sin mangekant og regnet i flere år på saken. På 1600-tallet fant man også nye metoder til å beregne π ved at tallet framkom som grenseverdi for diverse tallrekker. Bokstaven π ble introdusert av William Jones i 1706 som den første greske bokstav i det greske *perimetros* (=omkrets). Symbolet ble allment akseptert da matematikeren Leonard Euler tok det i bruk noe senere.

Matematikerne slet lenge med å finne ut av problemet om hva slags natur tallet π kan tillegges. Det ble først avklart i 1882 av den tyske matematiker Ferdinand Lindemann (1852-1939) . Han viste at tallet π er et ikke-algebraisk tall, det vil si at det ikke er løsning i noen polynomlikning med rasjonale koeffisienter. Slike tall kalles *transcen-dente*.

Med datamaskinenes inntreden, økte mulighetene for å regne, og den første datamaskin, Eniac, fant 2037 siffer i 1949. Ved årtusenskiftet innehar Dr. Kanada ved Universitetet i Tokyo rekorden med 206 milliarder siffer. Men ennå mer imponerende er vel rekorden satt i 1995 av den 23 år gamle Hiroyuki som hadde lært de 42000 første desimalene av π utenat! Det tok over 9 timer å si fram regla.

Ingen har til nå funnet noe system i desimalene i π. Siden π er et tall av typen transcendent, vil man aldri finne en tallsekvens som repeterer seg selv utover resten av tallrekka, noe som også gjelder for irrasjonale tall. Allikevel spekulerer forfattere som Carl Sagan på om sifrene langt ute i tallrekka får en eller annen mening. Dette er en av grunnene til at noen fortsatt bryr seg om å regne. Blant de 1 million første sifrene finner vi ikke sekvensen 0123456, men 12345 finner vi hele 8 ganger. Blant de 200 milliarder første siffer finner vi sekvensen 01234567890 to ganger (rundt plass 53 milliarder og 148 milliarder), mens sekvensen 01234567891 finner vi hele 5 ganger. En sekvens på 13 etterfølgende 3-tall finner vi rundt plass 55 milliarder. Desimalene i π synes å være utmerket dersom man ønsker en rekke med tilfeldige tall til bruk i lotto og liknende.

4. Etnomatematikk

Det er mye spennende å finne om matematikk i ulike kulturer. Interessen for etnomatematikk har først og fremst vokst fram i den 3. verden og synliggjør matematikken bak lokalt håndverk og religiøse ornamenter. Med *etnomatematikk* mener vi den matematikk som ligger innebygget, nedtegnet og bevart i menneskers kultur og dagligliv. Man er ofte ikke klar over at dette er matematikk i det hele tatt. Matematikken er intuitivt bevart i form av tekstilkunst, veving, fletting, lek, eventyr, sanger, regler, bygninger, matlaging osv. Ved at elevene blir bevisste på dette, kommer matematikkfaget nærmere og berikes. Det bygges bro mellom matematikken og den hjemlige kultur.

Detalj fra stolrygg med inntegnet Kvervelrose, også kalt 6-blads rose. Stolen står på Marnadal museum og er trolig fra rundt år 1700-1750. Utformingen har hentet inspirasjon fra Øst-Europa.

I en amerikansk bok om multikulturell matematikk, finner vi også et eksempel fra Norge (Krause 1983):

Julekurv

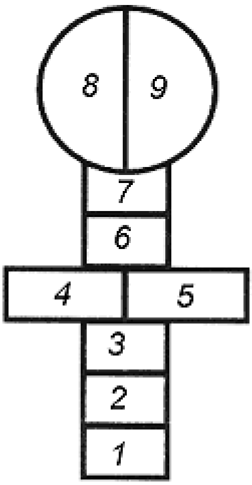
"Norway is a mountainous country extending to the Arctic Circle. Most of Norway borders Sweden, but in the north it borders Finland and the USSR. The coastline of Norway is indended by many beautiful fjords - narrow inlets of the sea between high banks of cliffs. The julekurv is a Norwegian Christmas basket. The basket is usually made from a flexible high-gloss paper that comes in many colours. Norwegians hang these baskets filled with sweets on their Christmas trees."

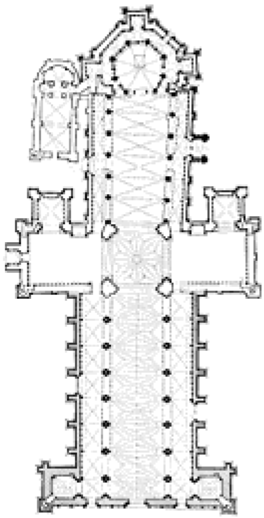
Det er vel få av oss som har tenkt på julekurver som matematikk, men kanskje er det fordi vi har lært det av våre foreldre og besteforeldre?

Paradislek

Hoppeparadiset har klare geometriske former og er svært utbredt i Nord-Europa, spesielt i Norden. Dermed er det naturlig å sette denne form for "geometrisk lek" inn i en kulturell og etnomatematisk sammenheng.

Den geometriske form på paradiset kan variere noe. Det som er mindre kjent er at når man tegner opp et slikt paradis, så tegner man samtidig opp grunnformen til en katedral. Sett ovenfra er paradiset og en katedral av korskirkeform ganske like. Figuren viser Domkirken i Trondheim (Rossing 1999, s.54). Paradiset har sin opprinnelse i katedralens arkitektur, der vandringen gjennom kirkerommet er tenkt som en vandring mot alteret og Guds paradis. Slike geometriske former lever i folketradisjonen.





Liknende leker var på 1200-tallet i bruk i franske katedraler. Firkantene symboliserer det jordiske, mens sirkelen er symbolet på evigheten. Det er egne regler for hvordan steinen skal kastes. Noen paradiser har også dødsruter, og dette med hinking på en fot, kan settes i sammenheng med pilgrimmen som er på vei mot målet for å bli helbredet.

Litteratur:

Blatner, David: *The joy of Pi*. (http://www.joyofpi.com/)
Dalvang, Tone og Rohde, Vetle: *Matematikk for alle*. Landslaget for matematikk i skolen, Landås 1998.
Eibe, Thyra: *Euklids Elementer*. Oversat af Thyra Eibe. København, Gyldendal ; 1897-1917. En engelsk utgave er på internett: (http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html)
Høyrup, Jens: *Sub-Scientific Mathematics*. History of Science, vol 28, 1979.
Jama, Jama Musse: *Ethnomathematics*.(http://www.dm.unipi.it/~jama/ethno/)
Knott, Ron: *Fibonacci Numbers and the Golden Section*. (http://www.ee.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/)
Krause, M.: *Multicultural mathematics material,* NCTM 1983.
Levin, Eddy: *The Golden Proportion*. (http://www.goldenmeangauge.co.uk/)
Rossing, Nils Kr.: *Den matematiske krydderhylle.* Midt Nordisk Vitensenter, 1999.
Selvik, Bjørg K. (red): *Matematiske sammenhenger: Geometri*. Caspar forlag, 1999.
Stewart, Ian: *Life's other secret - The new Mathematics of Living World*. Penguin books, 1998.

4. Algebraens opprinnelse.

Ordet *algebra* har vi fått fra det arabiske ordet *al-jabr*, som betyr å *gjenopprette* eller *gjøre fullstendig*. Den arabiske matematikeren Al-Khwârizmî (ca. år 800 e.Kr), brukte ordet om en operasjon han utførte for å forenkle likninger. Algebraen vokste fram som et resultat av søking etter løsninger av likninger, og er fra gammelt av *læren om likninger*. Ordet har senere fått en mye videre betydning, men i grunnskole og videregående skole brukes ordet algebra først og fremst om manipulering av bokstavuttrykk og løsning av likninger.

For mange er det ukjent at dagens bokstavregning og formelspråk faktisk er en ganske ny oppdagelse som det tok lang tid å gjøre. Algebraens historie deles gjerne inn i tre stadier : *1. Retorisk algebra*, *2. Synkopert algebra* og *3. Symbolsk algebra*. I den første fasen ble matematikken beskrevet verbalt i *vanlig språk* med ord og setninger. I den synkoperte fasen ble ordene mer og mer *forkortet*, mens i den symbolske fasen ble forkortelsene erstattet med mer abstrakte symboler og et *formelspråk*. Vår form for algebra er altså bare noen få hundre år gammel. Til slutt i denne artikkelen vil vi se litt på forskning som er gjort på elevenes utvikling i algebra.

1. Retorisk algebra

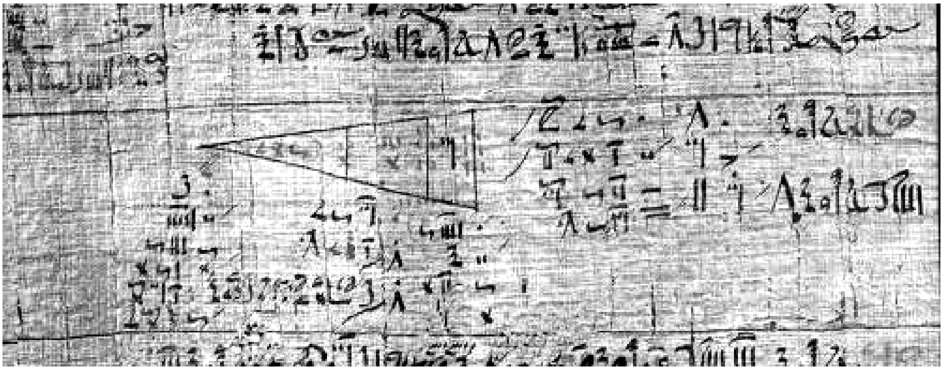
Denne perioden går fram til Diofantos (250 e.Kr), men strekker seg ennå 1000 år lengre i de fleste kulturer. Før Diofantos ble alle matematiske oppgaver beskrevet ved hjelp av vanlige ord, og fulle språklige setninger ble brukt for å uttrykke sammenhengene. Av og til ble den ukjente størrelsen erstattet med navn som "lengde" og "bredde", men aldri med bokstaver slik vi gjør. Den retoriske algebraen har sin opprinnelse i Egypt og Mesopotamia (ofte referert til som Babylonia) for nesten 4000 år siden. Skriftlig dokumentasjon fra Egypt stammer vesentlig fra to kjente papyrusruller: Moskvapapyrusen og Rhindpapyrusen. I Babylonia ble det utviklet mye interessant matematikk som ble bevart på leirtavler og som nå er dekodet og tolket. Av de tusenvis av leirtavlene som er funnet er det rundt 400 som inneholder matematiske tekster eller tabeller.

1.1. EGYPTISKE PAPYRUSER

I Nil-dalen og rundt Nilens delta vokste det fram en sivilisasjon ca. 3000 år f.Kr. De gamle egypterne kalte landet for Kemet eller Kemi som betyr *svart jord*. Egypt lå gunstig til skjermet for invasjon, og jorden var svært fruktbar og ga gode avlinger. Menneskene utviklet et velordnet samfunn og bygde vanningssystemer, pyramider, templer osv. Det oppsto dermed et behov for kunnskaper i matematikk.

Egypterne skrev på *papyrus*. Papyrus er et skjørt materiale, men en del tekster er bevart, takket være det tørre klimaet. Det som er funnet om matematikken i det gamle Egypt, kommer hovedsakelig fra de to nevnte papyrusrullene. Den ene kalles *Moskva papyrusen* fordi den oppbevares i et museum i Moskva. Den andre kalles *Rhindpapyrusen* etter den skotske arkeologen som fant den. Den kalles også - med større rett - *Ahmes' regnebok* etter den skriveren som laget den. Denne oppbevares nå i British

Museum i London. Begge disse tekstene er oppgavesamlinger med løsninger. Der er til sammen 110 oppgaver. Noen oppgaver er rent matematiske, mens andre handler om kornforbruk til brød og øl, fórblanding til husdyr, lagring av korn osv. Mange av de praktiske problemstillingene leder til enkle lineære likninger.



Den største av de bevarte papyruser er "Rhindpapyrusen" som er 5,44 meter lang og 33 cm bred. Bildet over viser en del av den. Vi kan kjenne igjen geometriske figurer som vitner om det matematiske innholdet i teksten. Vi regner at denne papyrusen er skrevet i ca. år 1700 f.Kr.

"Gjett og juster"

Egypterne kunne løse lineære likninger og annengradslikninger. Det er også funnet eksempler hvor det arbeides med likningssystemer. Alt ble beskrevet med ord, og en satte ikke opp likninger slik vi ville gjøre i dag.

Egypterne hadde en metode som de ofte brukte når de skulle løse litt vanskeligere lineære likninger. Metoden ble kalt *regula falsi* som vi kan oversette med "gjett og juster". Typisk er den såkalte *Hau-regning*. Vi vil si at det er likninger med en ukjent.

Eksempel (problem 26 fra Rhindpapyrusen):
En "hau" og en kvart gir tilsammen 15. Regn med 4, legg til 1/4 dvs 1 og tilsammen 5. Del ut 15 med 5 og får 3. Endelig multipliser 4 med 3 og får 12. Den søkte "hau" er 12.

Hvordan ble regnestykket egentlig utført? Hvorfor var det nødvendig å gjøre det så vanskelig, sett fra vår synsvinkel? Jo, egypterne manglet en del av vårt matematiske språk. Vi ville sette opp likningen slik:

$$x + x/4 = 15$$

og løse den direkte:

$$5/4\, x = 15$$
$$x = 60/5$$
$$x = 12$$

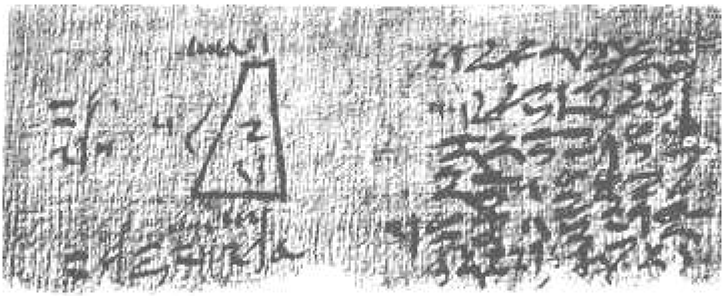
I den egyptiske teksten er den opprinnelige formuleringen beholdt så lenge som mulig. En foreslår først svaret 4, antakelig fordi det er så lett å finne 1/4 av. Regner en ut som om 4 var svaret, får en tilsammen 5. Det er 1/3 av det svaret skulle være, og en må multiplisere alle tall med 3. Denne regnemåten ble lært langt opp mot vår tid under navnet *regula falsi*. Vi kan nå lett se at den bare vil gjelde for likninger av første grad med en ukjent. Vi synes ikke det er nødvendig å ha en spesialregel for dette tilfellet. I Egypt var det annerledes - der manglet de et formelspråk, og tilfellet med en likning med en ukjent, inngikk ikke som spesialtilfelle av noe mer generelt.

Grunnen til at metoden fungerer, er den lineære sammenhengen mellom størrelsene. Metoden bygger på en forståelse av linearitet, og går ut på at en gjetter på en verdi for den ukjente og regner gjennom oppgaven med denne. (Vi ville si at vi setter denne verdien inn i likningen.) Vanligvis stemmer ikke det resultatet en får, men en kan vurdere "hvor feil" svaret blir, og så justere verdien en gjettet tilsvarende. I vår tid er denne gamle metoden videreutviklet til en måte å løse vanskelige likninger ved hjelp av datamaskiner. Fagområdet går under navnet *numeriske metoder*.

Man kan også stille spørsmålet om de egyptiske papyrusene rett og slett presenterer den matematiske teori i form av *algoritmer* (Holme 2001, s. 129). Det kan tenkes at den matematiske teori og sammenheng var mer eller mindre underforstått, og at dette var deres måte å presentere matematikken.

Den avkuttede pyramiden

Egypterne er jo kjent for sine pyramider. Det mest avanserte matematiske problem i de egyptiske tekstene er det følgende fra *Moskvapapyrusen*:



Problemet er å regne ut volumet av en rettavkuttet pyramide med kvadratisk grunn- og toppflate. Her er et fotografi av selve papyrusteksten.

Figuren viser pyramiden sett fra siden. Rundt figuren er det en rekke tall - tall som brukes til mellomregninger og gir pyramidens størrelse. Pyramidens grunnflate har side 4 alen, høyden er 6 alen og toppflaten har side 2 alen. Figuren er ganske unøyaktig. Det kan bety at det ikke var viktig og vi var kommet til et abstraksjonsnivå over det å tegne en nøyaktig figur og så måle på den.

La oss se hva teksten sier:

1. Legg sammen 16
2. med 8 og med 4
3. Du får 28. Regn så
4. 1/3 av 6. Du får 2.
5. Regn så 28 2 ganger. Du får 56.
6. Se - det er 56.

Du har funnet svaret.

Vi ser at det hele er formulert som et regnestykke for en spesiell rettavkuttet pyramide. Ikke i noen tekster fra Egypt eller Mesopotamia har en gått ut over slike spesielle regnestykker. Hvilken "formel" ligger bak regnestykket? Jo den korrekte:

$$V = (a^2 + ab + b^2)\, h/3$$

Kjente opphavsmannen til regnestykket denne formelen? Det er klart at en slik formel finner en vanskelig ved bare prøving og feiling. Men verken den generelle prosedyren eller formelen er nevnt i teksten. De regnet trolig uten formler og uten bevis. Babylonerne har på samme tid regnestykker som bruker den gale oppskriften:

$$V = (a^2 + b^2)\, h/2$$

Babylonernes "formel" ville gitt svaret 60 for volumet av den rettavkuttede pyramiden. Feilen er på under 10% og for mange praktiske formål akseptabel.

1.2. BABYLONSKE LEIRTAVLER

Rundt byen Ur ved elva Eufrat vokste det fram et velordnet samfunn før år 2000 f.Kr. Etter hvert spredte samfunnet seg til større områder rundt Eufrat og Tigris, og maktsentret flyttet til Babylon i nåværende Irak. Som tallsystem brukte de et 60-tallsystem som vi fortsatt har spor av i moderne tid når vi måler timer i 60 minutter og minutter i 60 sekunder.

Babylonerne utviklet tidlig en teknikk for å prege skrifttegn i leirtavler ved hjelp av spesielle pinner. Tavlene ble etterpå brent og ble dermed like holdbare som murstein. I løpet av de siste hundre år har arkeologer funnet flere hundre tusen bruddstykker av slike tavler. Skrifttegnene er blitt tydet. Det viser seg at de fleste tekstene er dikt, brev, dokumenter og liknende, men det finnes også flere matematiske tekster med tabeller og matematiske oppgaver hentet fra det praktiske liv. Figuren under viser en gammel babylonsk leirtavle, (Plimpton 322), som er datert til mellom 1900 og 1600 f.Kr. Den inneholder en oversikt over pytagoreiske talltripler, dvs tall a, b, c, slik at: $a^2 + b^2 = c^2$. Dette er trolig det eldste tallteoretiske dokument som eksisterer.

Rundt 2000 f.Kr. hadde babylonere utviklet en retorisk algebra. De løste annengradslikningen ved å lage et fullstendig kvadrat. Nedenfor ser vi den retoriske stilen de brukte og metoden med "gjett og juster". Eksemplet viser et relativt avansert nivå innen babylonsk algebra.

Problem
La oss si at summen av lengde og bredde av et rektangel er 32 og at arealet av det er 252. Vi vil finne lengde og bredde. Vi følger metoden:

> Ta halvparten av 32, det er 16. Deretter
> $16 \cdot 16 = 256$
> $256 - 252 = 4$
> Kvadratrota av 4 er 2.
> $16 + 2 = 18$ det er lengden.
> $16 - 2 = 14$ det er bredden.
>
> Kontroll: Jeg har multiplisert lengden 18 med bredden 14 og fått 252, og dette er arealet.

På babylonske leirtavler er det funnet tabeller over de 30 første kvadrattallene, fra 1^2 til 30^2, like mange kubikktall, og en tabell over tall på form $x^3 + x^2$. Denne ble brukt av babylonerne til å løse tredjegradslikninger av enkel type. De hadde også tabeller over inverse tall som ble brukt ved divisjon.

1.3. KINESERNE

Det er funnet spor som tyder på at det har eksistert sivilisasjoner i Kina for ca. 5000 år siden. Men den første sivilisasjonen en har sikre opplysninger om, er den som vokste fram rundt elva Huang ca. år 1600 f.Kr.

En av de eldste matematiske skriftene som er funnet i Kina er *Jiuzhang suanshu* som betyr "Ni kapitler om matematikkens kunst". Forskere har ikke klart å finne ut nøyaktig når matematikken en finner her ble nedtegnet, men den matematiske utviklingen i Kina ligger flere hundre år etter utviklingen i Egypt og Babylonia. Det er ikke kjent om kineserne har mottatt impulser fra disse områdene.

Det meste av det som er funnet om likningsløsning i det gamle Kina, stammer fra perioden 200 f.Kr. til 200 e.Kr. Vi skal se på et eksempel som er hentet fra *Jiuzhang*:

Problem
Prisen på 1 acre med godjord er 300 gullmynter, og prisen på 7 acres med dårlig jord er 500 gullmynter. En person har kjøpt til sammen 100 acres til en pris av 10000. Hvor mye god og hvor mye dårlig jord ble kjøpt? (Acre er en måleenhet.)

Skrevet med moderne formler, svarer problemet svarer til å løse likningssystemet:

$$x + y = 100$$
$$300x + \tfrac{500}{7}y = 10000$$

Kineserne løste problemet retorisk ved å bruke denne tankegangen: De gjettet på løsningen x = 20 og y = 80 som passer i den første likningen og som innsatt i den andre likningen gir:

$$300x + \tfrac{500}{7}y = 300 \cdot 20 + \tfrac{500}{7} \cdot 80 = 10000 + 1714\tfrac{2}{7}$$

- dvs. et "overskudd" på $1714\tfrac{2}{7}$

Deretter prøvde en med x = 10 og y = 90 som passer i den første likningen og som innsatt i den andre likningen gir:

$$300x + \tfrac{500}{7}y = 300 \cdot 10 + \tfrac{500}{7} \cdot 90 = 10000 - 571\tfrac{3}{7}$$

- dvs. et "underskudd" på $571\tfrac{3}{7}$

Kineserne fant så x, ved å regne ut det vi ville kalle et veid gjennomsnitt med hensyn på "overskuddet" og "underskuddet" beregnet over:

$$x = \frac{20 \cdot 571\,\tfrac{3}{7} + 10 \cdot 1714\,\tfrac{2}{7}}{571\,\tfrac{3}{7} + 1714\,\tfrac{2}{7}} \qquad \underline{\underline{x = 12\,\tfrac{1}{2}}}$$

1.4. GREKERNES GEOMETRISKE ALGEBRA

Vi skal her se på perioden ca. 600 f.Kr. til ca. 250 e.Kr. Det finnes komplette tekster først fra ca. 300 f.Kr., men vi har henvisninger til og fragmenter av tidligere tekster. Den greske kulturkrets omfattet større områder enn det som i dag er Hellas. Den retoriske algebraen utviklet seg videre i den greske kulturen med bl.a Pytagoras og Euklid.

Den før-greske matematikk hadde vært praktisk beregnende, gjerne formulert som oppskrifter for problemløsning. Matematikken var algoritmisk med bestemte løsnings-metoder. Noen var riktige, andre var gale. Men en ny holdning til matematikk vokste fram hos grekerne. Grekerne vil nemlig vite *hvorfor* og ikke bare *hvordan*. De krevde *eksakte beviser*. Dette har blant annet blitt forklart med at et utviklet sosialpolitisk og kulturelt liv krevde at diskusjonskunsten ble høyt utviklet, slik at man kunne forsvare sine påstander i kamp med motstanderen. Bevisene dere var ofte geometriske og visuelle, så det passer å kalle grekernes bidrag til algebraen for *geometrisk algebra.*

Pytagoras (ca.572-497 f.Kr.) kom fra Samos og reiste mye bl.a. til Egypt og Babylonia før han slo seg ned i Sør-Italia. Her samlet han en gruppe disipler rundt seg, senere kjent som pytagoreerne som både var en religiøs orden og en filosofisk skole. Matematikk var en del av pytagoreernes religion. De naturlige tall sees på som basis for universet, og alt kan telles.

Pytagoreerne studerte både tallteori (aritmetikk) og geometri. I aritmetikk fant de en rekke resultater om tall og deres faktorer. De undersøkte bl.a. "vennlige tall", "perfekte tall", og "overflødige tall". De studerte også såkalte "figurtall": trekanttall, firkanttall, femkanttall osv. I geometri må vi nevne Pytagoras læresetning som vi vet var kjent minst 1000 år før Pytagoras, men som han trolig ikke hadde noe generelt bevis for.

Euklid (ca 300 f.Kr.) levde og arbeidet i Aleksandria. Vi vet ikke om Euklid selv har utviklet ny matematisk teori, men som lærebokforfatter har han hatt en avgjørende betydning. Den mest kjente er Euklids *Elementene*, et verk på 13 bøker som har vært brukt som lærebøker og mønster for lærebøker helt fram til vår tid. Det er kopier av Elementene som er bevart i dag. Disse er ofte utvidet med kommentarer og tilføyelser.

Elementene bygger på tidligere matematikeres arbeider, og omhandler følgende temaer:

Bok I - VI : Plangeometri
Bok VII - IX : Tallteori
Bok X : Teori om proporsjoner
Bok XI - XIII : Romgeometri

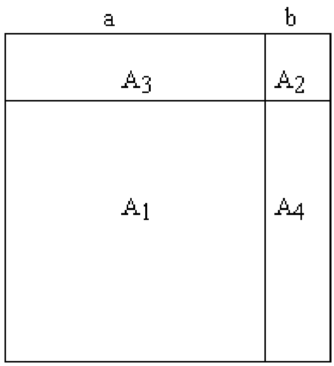
I Bok II begynner den geometriske algebraen for alvor, og denne vil i det følgende være mest interessant for oss. Etter to innledende definisjoner formuleres og bevises en rekke geometriske resultater som vi i våre dager finner det naturlig å formulere ved hjelp av algebraiske symboler og formler.

Definisjon 1 :
Ethvert rektangel sies å være utspent av de to rette linjene som danner en rett vinkel i rektangelet.

Vi vil nå se nærmere på to av proposisjonene i bok II.

Proposisjon II-4:
Hvis en rett linje deles tilfeldig vil kvadratet på hele linja være lik kvadratet på de to delene og to ganger rektangelet utspent av de to delene.

Figuren som følger etter proposisjonen ser slik ut :

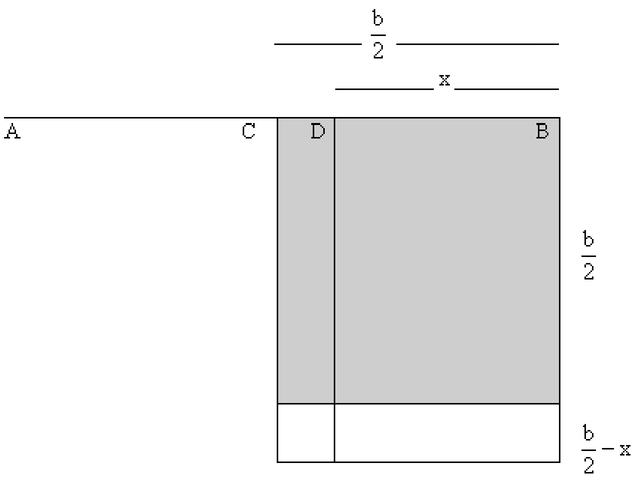


A_1 er kvadratet av den største delen
A_2 er kvadratet på den minste delen
A_3 + A_4 er to rektangler

Proposisjonen svarer til 1.kvadratsetning : $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Proposisjon II-5:
Hvis en rett linje er delt både i like og i ulike deler, er rektangelet utspent av de ulike delene av linja sammen med kvadratet på linjestykket mellom delingspunktene lik kvadratet på det halve linjestykket.

Figuren vil se slik ut :



I figuren settes : AB = b, AC = BC = b/2, BD = x

A_1 er rektangelet utspent av de ulike delene (dvs. x og (b - x))
A_2 er kvadratet av linjestykket mellom delingspunktene (dvs. $(b/2 - x)^2$)
A_3 er kvadratet på det halve linjestykket (dvs. $(b/2)^2$)

Setningen sier altså at: $A_3 = A_1 + A_2$

Med moderne formler sier proposisjonen :

$$(b - x)\, x + (b/2 - x)^2 = (b/2)^2 \qquad (1)$$

Ved hjelp av denne formelen fra proposisjon II-5 er det mulig å løse 2.gradslikningen :

$$bx - x^2 = c$$
$$x(b - x) = c$$

Dersom vi setter dette inn i likning (1) får vi :

$$c + (\frac{b}{2} - x)^2 = (\frac{b}{2})^2$$
$$(\frac{b}{2} - x)^2 = (\frac{b}{2})^2 - c$$
$$\frac{b}{2} - x = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c}$$
$$x = \frac{b}{2} - \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c}$$

Som er lik vår moderne formel for løsning av 2. gradslikning. Denne metoden er også kjent fra babylonerne.

1.5. ARABERNE

Den greske kulturen fortsatte i flere århundrer i Romerriket, mest fordi museet i Aleksandria fortsatt eksisterte. Romerrikets regjering så ikke på forskning i matematikk som en viktig nasjonal interesse. Ved ødeleggelsen av biblioteket i slutten av 400-tallet ble den matematiske aktivitet mindre og mindre. Etter Romerrikets fall på 500-tallet gikk europeisk kultur på mange måter inn i en passiv "mørketid" i mange hundre år.

I mellomtiden blomstret matematikken i andre deler av verden. Araberne kom etter profeten Mohammeds tid (ca. 570-632 e.Kr.) til å spille en stor rolle i matematikkens historie. Det muslimske riket strakte seg på begynnelsen av 700-tallet fra Spania i vest til India i øst. Fra 766 var hovedstaten i Bagdad. Der ble det bygd et bibliotek og vitenskapsakademi hvor greske og indiske verker ble oversatt og bearbeidet videre. Vitenskapsakademiet ble kalt Bait el-hikma som betyr *Visdommens hus*. Araberne ble formidlere av gresk, indisk, kinesisk og babylonsk matematikk, og de gikk også videre enn sine læremestere.

Araberne er kjent for å ha utviklet det desimale posisjonssystemet til også å omfatte desimaler og brøker, og de er kjent for sine arbeider i geometri og algebra. Tre meget brukte ord i matematikken kommer fra araberne, nemlig siffer, algoritme og algebra. Ordet siffer kommer fra indernes ord for null som araberne oversatt til "as-sifr". Det gav også opphav til ordet "deschiffrere" fordi de indiske tallene flere steder ble bannlyst fra offentlige dokumenter. Når de likevel ble brukt privat måtte de "dechiffreres". Ordet algoritme er en forvanskning av navnet Al-Khwârizmî (ca. år 800 e.Kr). Ordet algebra har vi tidligere sett at kommer fra "al-jabr" som betyr å gjøre fullstendig. Al-Khwârizmî brukte "al-jabr" om metoden å flytte ledd over fra en side til den andre i en likning, samtidig som det skiftes fortegn.

Al-Khwârizmî kom fra byen Khwarezm ved Aralsjøen. Som matematiker arbeidet han innenfor den retoriske tradisjonen. Han brukte ikke bokstavsymboler i sin matematikk, men anvendte ofte geometriske betraktninger som støtte for sine resonneringer. Det indiske tallsystemet gjorde gradvis sitt inntog i den arabiske verden. I skrifter av Al-Khwârizmî fra ca. 800 finnes en introduksjon til det indiske tallsystemet og en gjennomgang av hvordan vi regner med disse tallene. I bøkene tar Al-Khwârizmî avstand fra den "greske lærdhet". Han ville skrive en lettfattelig bok for enkle folk.

I en av bøkene sine gir Al-Khwârizmî annengradslikninger en grundig gjennomgang. Han deler disse inn i 6 typer. De 6 typene er :

1) $ax^2 = bx$
2) $ax^2 = c$
3) $bx = c$
4) $ax^2 + bx = c$
5) $ax^2 + c = bx$
6) $bx + c = ax^2$

Merk at $ax^2 + bx + c = 0$ ikke ville hatt noen løsning siden a, b og c er forutsatt og være *positive* tall. Det er kun positive løsninger som blir betraktet. Løsningen av de tre første likningene er rett fram, men $x = 0$ i likning 1) oppfattes ikke som løsning. De tre siste tilfellene er de samme som vi har møtt hos babylonerne og grekerne. Al-Khwârizmî har ingen motforestillinger mot å addere tall av "ulik dimensjon", slik grekerne hadde det.

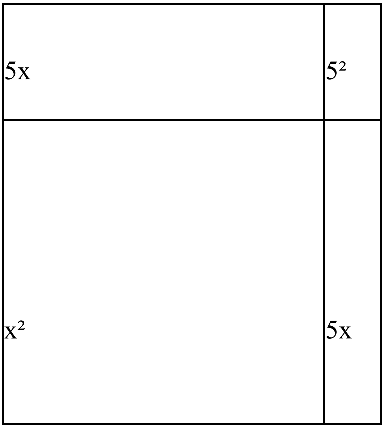
Eksempel
Løsning av type 4): $x^2 + bx = c$:

Al-Khwârizmî angir "formelen" retorisk (dvs med ord) :

$$x = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c} - \frac{b}{2}$$

for den positive løsningen. Han begrunner "formelen" geometrisk slik babylonerne og grekerne også gjorde.

F.eks $x^2 + 10x = 39$ begrunnes slik:



$$\begin{aligned} x^2 + 10x + 5^2 &= 39 + 5^2 \\ (x+5)^2 &= 64 \\ x + 5 &= 8 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Metoden er altså vår "halvere-kvadrere og addere" metode.

For likninger av typen 5) : $x^2 + c = bx$ angir han begge røttene (som er positive) :

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c} \quad \text{når} \quad (\frac{b}{2})^2 - c \geq 0$$

Etter at Al-Khwârizmî har gitt en grundig behandling av annengradslikningene, bruker han teorien til å løse praktiske problemer særlig knyttet til handel og økonomi. Han behandler også likningssystemer med 2 ukjente. Dette gjorde han ved å overføre likningssystemene til annengradslikninger med en ukjent. Han tok også for seg likningssystemer Diofantos hadde drøftet, men kjente neppe arbeidene til Diofantos. Noe nytt hos Al-Khwârizmî var at han aksepterte irrasjonale løsninger på likningene sine. Dette forekommer ikke ofte og det er som regel enkle likninger som løses, f.eks : $4x^2 = 20$ som har løsningen $x = \sqrt{5}$.

Araberne gjorde store fremskritt i algebra. De bygde stort sett på tidligere arbeider av babylonerne. Deler av deres arbeider ble etterhvert kjent i Europa, spesielt av Fibonacci, og fikk dermed betydning for den videre utvikling der.

1.6. EUROPA I MIDDELALDEREN.

Europa i tidlig middelalder (ca.400-1000) er preget av Romerrikets fall og oppretting av nye stater og grenser. I denne perioden finner vi liten matematisk aktivitet i Europa. I det føydale samfunn som nå oppsto, konsentrerte en seg om jordbruket. Jordbruksteknikkene var tradisjonsbundne og krevde ingen innsats fra matematikk og naturvitenskap.

I sen middelalder ble det så en fornyet interesse for matematikk. Gjennom kontakt med araberne på 1000 og 1100-tallet fikk europeerne kjennskap til greske og arabiske verker. Samarbeidet mellom kristne, arabere og jøder blomstret især i Spania. Toledo ble etter hvert sentrum for flere oversettelser av greske og arabiske verker.

Leonardo av Pisa (Fibonacci)

Leonardo (1170-1240) ble født i Pisa. Hans far var handelsmann og sørget for at sønnen lærte seg grunnleggende regneferdigheter slik at også han kunne bli handelsmann. Under sine omfattende handelsreiser fikk Leonardo kjennskap til arabisk matematikk.

I 1202 utga Leonardo sitt viktigste verk, *Liber abaci* (regnebok). Den består av 15 kapitler på 459 sider og regnes som sin tids viktigste matematiske skrift. Boka bygger på arabiske arbeider og inneholder regler for regning med de nye hindu-arabiske tallene (mest vanlig på denne tida var romertall) og praktiske problemer blant annet fra handel. Den inneholder også problemer som leder til annengradslikninger og diofantiske likninger. Framstillingsformen er fortsatt retorisk.

Den tysk-romerske keiser Friedrich II hadde sterke kulturelle interesser og han spredte arabisk kunnskap til Europa. Han innkalte Leonardo til å ta del i en matematisk turnering, hvor keiseren var til stede (1224). Leonardo ble av keiserens filosof forelagt denne oppgaven:

Problem:
Finn tre kvadrattall med innbyrdes avstand 5.

Dvs. finn x, y, z slik at : $x^2 + 5 = y^2$ og $x^2 - 5 = z^2$ (1)

Leonardo angriper det mer generelle problemet:

$$x^2 + n = y^2 \text{ og } x^2 - n = z^2 \qquad (2)$$

og innfører det han kaller fornuftige tall definert ved:

$$n = \begin{cases} ab(a+b)(a-b) & ,a+b \text{ er partall} \\ 4ab(a+b)(a-b) & ,a+b \text{ er oddetall} \end{cases}$$

Han viser at slike tall alltid er delelig med 24, og at likning (2) er løsning bare dersom n er et fornuftig tall (han leter kun etter heltallige løsninger). Videre sier Leonardo at n = 5 ikke er fornuftig, men $720 = 12^2 \cdot 5$ er fornuftig. Da er a = 5 og b = 4. Velger så x = 41 og får :

$$41^2 + 720 = 49^2 \text{ og } 41^2 - 720 = 31^2$$

$$(\frac{41}{12})^2 + 5 = (\frac{49}{12})^2 og (\frac{41}{12})^2 - 5 = (\frac{31}{12})^2$$

Det gitte likningssystem (1) har den rasjonale løsningen:

$$x = \frac{41}{12}, y = \frac{49}{12}, z = \frac{31}{12}$$

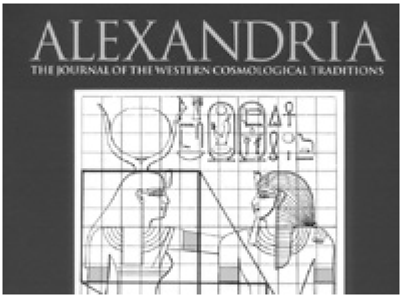
Leonardo fikk også denne oppgaven:
Løs tredjegradslikningen: $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.

Leonardo beregnet en rot med en nøyaktighet som svarer til 11 desimaler. Han beviste også at løsningen ikke kan være rasjonal og heller ikke kvadratroten av et rasjonalt tall.

Liber abaci og Leonardos øvrige verker var for vanskelige for hans samtid, og det gikk 200 år før hans verker fikk betydning for matematikkens videre utvikling. I denne perioden ble andre matematikere som ikke på langt nær nådde så langt som Leonardo mer populære.

2. Synkopert algebra

Denne perioden går fra Diofantos (250 e.Kr.) til Francois Viète (slutten av 1500 tallet). Diofantos innførte symboler for en ukjent størrelse og potenser av denne. Symbolene var en slags forkortelser, ikke operativ bokstavregning på vår måte. På grunn av bruken av ordforkortelser i en ellers retorisk framstilling, har Diofantos' algebra blitt kalt *synkopert*. Den blir gjerne plassert som en overgang mellom den eldre og helt retoriske formen, og den moderne symbolske algebraen, selv om ren retorisk algebra ble brukt lenge etter Diofantos' tid.



Diofantos (ca. 200-285 e.Kr) var den siste virkelige betydelige matematiker i den greske matematikks kultur. Han bodde i Aleksandria. Diofantos' hovedverk *Aritmetika* består av 13 bøker. Seks er bevart på gresk (I - VI) og fire er nå funnet i arabisk versjon (A,B,C og D). Aritmetika handler om løsning av likninger. Diofantos søker rasjonale løsninger til sine likninger som også har rasjonale koeffesienter. Når det er snakk om polynomlikninger kan man ved å multiplisere med et passende tall gjøre de rasjonale løsningene til heltallsløsninger. Likninger hvor man ønsker heltallige løsninger kalles også i dag **diofantiske likninger**.

Diofantos' symboler:

ζ - symbol for ukjent størrelse x

Δ^y - symbol for x^2

K^y - symbol for x^3

$\Delta^y\Delta$ - symbol for x^4

ΔK^y - symbol for x^5

K^yK - symbol for x^6

Diofantos kunne reglene for multiplikasjon med negative tall og han løste likninger ved å addere eller subtrahere samme uttrykk på begge sider av likhetstegnet. Mange av Diofantos' problemer har flere løsninger. Ofte finner han fram til bare en løsning, men bruker en metode som kan generaliseres til å finne flere løsninger. Vi vil nå gjengi noen av Diofantos' problemer fra Aritmetika. For å ikke gjøre det for vanskelig vil vi bruke vår "moderne notasjon".

Problem I-1
Å dele et gitt tall i to tall med en oppgitt differanse.

Diofantos løser problemet når tallet er 100 og differansen er 40.

Dersom x er det minste av de to tallene er:

$$x + (x + 40) = 100$$
$$2x + 40 = 100$$
$$x = 30$$

Metoden fungerer også for et gitt tall a og en differanse b med $b < a$. Vi får $2x + b = a$ og da blir

$$x = (a - b)/2$$

Problem I-27
Å finne to tall slik at deres sum og produkt er gitte tall.

Gitt summen 20. Gitt produktet 96. 2x er den ønskede differansen. Derfor er tallene 10+x og 10-x. Da blir $100-x^2$ lik 96. Da blir x lik 2 og de ønskede tallene er 12 og 8.

Problem II-8
Å dele et gitt kvadrattall i to kvadrater.

Dvs. å bestemme x og y slik at $x^2 + y^2 = b^2$

Diofantos løste problemet når $b^2 = 16$.
Han satte $y^2 = 16 - x^2 = (2x - 4)^2$ dvs at $x = 16/5$

Generelt settes $y = ax - b$, a kan velges fritt men b velges $\sqrt{b^2}$.
Da kan vi få så mange løsninger vi måtte ønske.

Problem A-25
Å finne to tall, det ene et kvadrat og det andre en kube, slik at summen av kvadratene deres er et kvadrat.

Dvs. at vi skal finne x, y og z slik at $(x^2)^2 + (y^3)^2 = z^2$

Diofantos finner en løsning ved å sette $x = 2y$:

$$16y^4 + y^6 = z^2 = \text{kvadrattall som settes lik } (ky^2)^2$$
$$16y^4 + y^6 = k^2y^4$$
$$y^6 = (k^2 - 16)y^4$$
$$y^2 = k^2 - 16$$

F.eks gir $k = 5$: $y = 3$, $x = 6$, $x^2 = 36$ og $y^3 = 27$.
Generelt kan vi sette $x = ay$ for å finne flere løsninger.

Vi bør her også ta med noen ord om *Hypatia* (ca. 370-418 e.Kr.), siden hun er den første kvinnelige matematikeren som er nevnt i historien. Hennes far var også matematiker, og hun var lærer i filosofi i Aleksandria. Hun skrev flere matematiske verker og kommentarer til andre verker bl.a Diofantos' Aritmetika. Ingen av disse eksisterer i dag. Hypatia ble myrdet av religiøse fanatikere. Vi kan si at dette markerer slutten på den greske storhetstid.

I de neste 1300 år fortsatte matematikere å utvikle en begrenset form for symbolbruk. Spesielt Johan Gutenbergs oppdagelse av boktrykkerkunsten rundt 1440 ga fart til denne utviklingen. Her følger noen eksempler:

1. I India brukte Brahmagupta (født 598 e.Kr) og Bhaskara (født 1114) forkortelser slik: **ya** er forkortelse for x, **yav** er forkortelse for x^2, **yagh** er forkortelse for x^3, **yavv** er forkortelse for x^4 og **ru** er forkortelse for konstantledd.

2. I Europa i renessansen (1400-1700) begynte symbolbruken å utvikle seg noe raskere. Tidlig på 1400-tallet begynte abacistene (matematikklærere) å ta i bruk forkortelser for *ukjente*: **C** er forkortelse for cosa som betyr ting/ukjent (x), **Ce** er forkortelse for censo som betyr kvadrat (x^2), **Cu** er forkortelse for cubo som betyr kube (x^3). Tegnet **R** ble brukt som forkortelse for Radix som betyr *kvadratrot*, da de arabiske matematikere hadde betraktet et kvadrattall som vokst ut fra en "rot".

3. På slutten av 1500-tallet var symbolene **p** (piu) og **m** (meno) for *pluss* og *minus* mye brukt i Italia.

4. Tyskeren Johannes Regiomontanus var trolig den første som brukte symbolene + og **-** i et upublisert manuskript fra 1456. Symbolet + er sannsynligvis en forkortet skriveform for det latinske ordet *et* som betyr *og*.

5. Det moderne *rottegnet* $\sqrt{}$ ble innført av tyskeren Christoff Rudolff i hans algebrabok fra 1525.

6. I 1557 innfører Robert Recorde to parallelle linjer $=$ som tegn for *likhet*.

7. Kryssymbolet $\times$ for *multiplikasjon* ble innført av engelskmannen William Oughtred i 1631. Leibniz innførte prikksymbolet $\cdot$ i 1686.

8. Det første *divisjonstegnet* i en trykt bok ble brukt av Johann Henrich Rahn i 1659. Dette symbolet hadde lenge vært i bruk som minustegn i Skandinavia og deler av Europa. Men tegnet $\div$ har sin symbolske bakgrunn i to tall som adskilles av brøkstrek, og i engelsktalende land og på lommeregnere har tegnet alltid stått for divisjon.

3. Symbolsk algebra og formelspråket

Vi har sett hvordan interessen for matematikk vokste i siste del av middelalderen. Den europeiske matematikken var preget av en langsom tilegnelse av tidlige tiders verker. Først i renessansen lyktes det å slå ut de gamle grekerne, inderne, kineserne og araberne. I Nord-Italia lykkes det i denne perioden å løse både tredje- og fjerdegradslikninga. Symbolbruken i denne perioden utvikler seg gradvis fram mot våre "moderne" notasjoner.

Det matematiske tyngdepunktet flyttet seg gradvis også lenger nord i Europa, og det tredje stadiet av algebraens utvikling regner vi starter med den franske juristen *Francois Viète* (1540-1603). Inntil nå hadde bokstaver i algebra kun stått for den ukjente. Viète utvider nå symbolbruken slik at han bruker bokstaver også for koeffesienter i en likning. Viète er altså den første til å innføre et system med parametre i likninger. Han brukte konsonanter B, C, D,... for kjente størrelser og vokaler A, E, I,... for ukjente størrelser.

Dermed var Viète i stand til å vise formler i stedet for oppskrifter, f.eks for å finne røttene i en likning.

Viète var jurist og i sin fritid studerte han matematikk og astronomi. Han gjorde et omfattende arbeid innenfor likninger og løste blant annet tredjegradslikninger ved hjelp av proporsjoner og trigonometri. Viètes abstraksjon og symbolbruk, sammen med den øvrige utviklingen i bruk av notasjon, gjorde algebraen mye lettere å behandle for de kommende matematikere. Den symbolske algebraen førte til store framskritt i utviklingen av funksjonsbegrepet og analytisk geometri. Det karakteristiske *formelspråket* har siden den tid vært en viktig og effektiv del av faget matematikk.

Viètes bok *In artem analyticem isagoge*, utgitt i 1591, er det første arbeidet i symbolsk algebra eller, som Viète foretrakk å uttrykke det, analyse. Viète generaliserer her det greske tallet, "arithmos". Det nye objektet kaller han "species", eller "tingens form", og beregningen "logistice speciosa". Boka består av åtte kapitler. På slutten av kapittel 5 bemerker Viète at Diofantos, selv om han arbeidet med species, likevel presenterte sine beregninger ved hjelp av tall "for at hans intelligens og dyktighet mer skulle kunne beundres av andre". Viète generaliserer Diofantos' metoder og lar de gitte tallene bare i prinsippet være gitt, dvs. han introduserer *bokstaver (parametre)* for disse "species". Med disse bokstavtegnene utfører han sine beregninger, som altså gikk under navnet "logistice speciosa".

Viète generaliserer altså både begrepet tall og størrelse og skaper et nytt matematisk objekt som man kan utføre beregninger med. Viète hevdet at når man startet med å introdusere de gitte tallene som bare i prinsippet er gitt får man etter utregning parametriserte uttrykk for de søkte "species" (vokalene), uttrykt ved de gitte (konsonantene). Ved til slutt å tildele de gitte "species" relevante verdier, får man de søkte tallene.

La oss, for å se det nye i Viètes metode, sammenlikne med hvordan Diofantos løste følgende problem (Problem I-27 fra Diofantos' Aritmetika, se avsnitt 2 over). Vi lar, som hos Viète, konsonant være kjente og vokalene ukjente tall:

Problem:
Finn to tall der summen og differansen er gitt.

Når Diofantos løste dette problemet, velger han to vilkårlige tall som han lar være henholdsvis summen og differansen. Viètes løsning ser imidlertid slik ut:

Oppstilling av likninger:

La de gitte tallene være D (summen) og B (differansen).
La de søkte tallene være A og A + B. Likningen blir da:

$$A + (A + B) = D$$

En parametrisert løsning blir dermed:

$$A = (l/2)D - (1/2)B$$

$$A + B = (1/2)D + (1/2)B$$

Beregning av konkrete tall framkommer ved å sette inn kjente verdier for D og B.

Det moderne symbolske tallbegrep er dermed introdusert, noe som også muliggjør formler og representerer et stort skritt mot den abstrakte algebra.

Senere modifiserte *René Descartes* (ca. 1630) Viètes skrivemåter noe, og innførte de første bokstavene i alfabetet, a b c ..., som tegn for de kjente størrelsene og de siste bokstavene, z x y ..., som tegn for de ukjente. Det er slik vi fortsatt gjør det.

4. Elevenes utvikling i algebra

Dersom vi tar i betraktning den beskrevne lettelse og effektivisering i behandlingen av algebra, så ville det være rimelig å anta at straks elever lærer denne symbolbruken så ville de ta den i bruk i enhver mulig kontekst. Flere undersøkelser viser at dette ikke er tilfelle. Alle data viser at selv elever med flere år med symbolsk algebra kan gjøre det bedre med verbale metoder enn symbolske metoder. Undersøkelser viser at elever ofte velger retoriske metoder dersom de ikke er nødt til å bruke symbolsk algebra (Harper i 1987). I sine eksperimenter ber Harper elever løse et av Diofantos' problemer. Han fant at ikke bare blant de yngste, men også blant eldre elever, foretrakk de fleste verbale forklaringer. Harper sier videre at resultatene ikke kan forklares ved klasseromserfaring siden elevene aldri ble trenet i å finne verbale forklaringer på tekstoppgaver. Altså ble de retoriske metodene brukt spontant, uavhengig av instruksjon.

Harpers undersøkelser viser også at elever har problemer med å bruke Viètes variable. Elever ble bedt om å vise om det er mulig å finne to tall dersom summen og differansen er gitt. Halvparten av de eldste elevene i eksperimentet valgte diofantiske (synkoperte) metoder framfor Viètes (symbolske) metoder. Elevene valgte nemlig tilfeldige konkrete tall for summen og differansen. Elevene løser ofte problemer bedre ved å bruke tall og dagligspråk, enn ved å bruke algebra. Det algebraiske språk blir ikke uten videre en del av elevenes naturlige måte å tenke på. Problemene ser ut til å måtte ha en viss vanskelighetsgrad før elevene synes det er hensiktsmessig å bruke algebra.

Det som også er interessant er at de tre stadier som algebraens historie har gjennomgått, finner vi igjen i elevenes løsningsstrategier. Grunnlaget for å regne med symboler er elevenes erfaringer i å regne med tall. Forskningen viser at elevene går fra retoriske løsningsmetoder til synkoperte (diofantiske) og videre til symbolske løsningsmetoder. Viètes bruk av symboler for gitte størrelser blir tatt opp ganske sent av elevene. Skrittet fra synkopert til symbolsk algebra tok over 1300 år. I klasserommet forventer vi at samme skritt skal tas i løpet av mindre enn fem år. Algebraen må karakteriseres som en krevende, men vellykket pedagogisk teori for en stor del av elevgruppen i skoleverket. Et annet område der man har mislyktes, var den såkalte "moderne matematikk" på 1960-tallet. Da prøvde lærere å introdusere mengdelære og logikk i skolene ved hjelp av formelle symbolske teorier. Dette falt ikke heldig ut. Logikken ser altså ut til å være nærmere knyttet til det naturlige språk enn likningene er det.

Takk:
Elna Svege ved Høgskolen i Agder fortjener en stor takk for samarbeidet om denne artikkelen.

Litteratur:

Andersen, K. (red.): *Kilder og kommentarer til ligningernes historie*. Trip forlag, Danmark, 1986.
Bekken, O.B: Algebraens utvikling i kultur- og skoleperspektiv. Se B.K.Selvik, C.Kirfel, M.Johnsen Høines (Red.): *Matematikk i samfunnsmessig, historisk og kulturelt perspektiv*, Høgskolen i Bergen, rapport nr 2/2000 s.85-104.
Cajori, F.: *A history of mathematical notations*. New York: Dover Publications, 1993.
Holme, A.: *Matematikkens historie*. Fagbokforlaget, 2001.
Harper, E.: Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics*, vol 18, 1987.
Onstad, T.: *Fra Babel til Abel. Likningenes historie*. NKS-forlaget, 1994.
Svege, E. *Affektive sider ved undervisning og studenters læring av matematikk*. Hovedoppgave Høgskolen i Agder, 1996.
Van der Waerden, B.L.: *A History of Algebra*. Springer-Verlag, 1985.

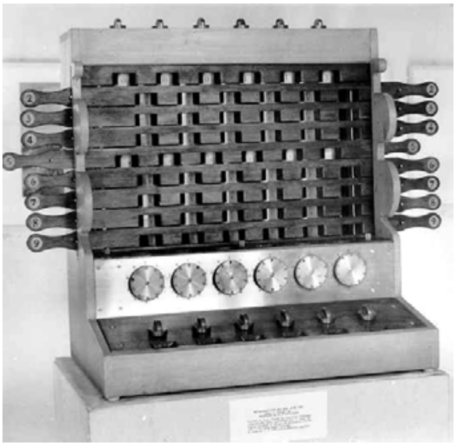
5. Kepler og den første regnemaskinen

1. Innledning

I vitenskapshistorien er Johannes Kepler (1571-1630) mest kjent for sitt arbeid innen astronomi. Hans prestasjoner i himmelmekanikk nådde fram til de tre lovene for planetbevegelser, og det er hovedsaklig derfor han er berømt i dag. Vi bør huske på at Kepler var aktiv før den såkalte matematiske analyse var oppfunnet av Newton og Leibniz, men selv uten hjelp av dette gode matematiske verktøy hadde han evne til å komme fram til mange viktige og varige resultater for naturvitenskapen.

Den drivende kraft i Keplers forskning var å finne den strukturen han trodde Gud hadde skapt i universet. Kepler var den første vitenskapsmannen som nådde fram til *naturlover* i ordets moderne betydning: de var fysisk-empirisk basert og formulert i matematiske termer, snarere enn filosofiske eller rene matematiske ideer. Videre kom han fram til mange interessante problemer som var utfordrende for ettertiden. Å formulere et problem er ofte like viktig som senere å løse det.

Mindre kjent er det vel at Kepler i sitt arbeid utviklet og brukte numeriske metoder og algoritmer når han løste sine likninger. Han hadde et stort behov for datakraft, og hans venn og kollega, *Wilhelm Schickard* (1592-1635) konstruerte den første mekaniske kalkulatoren tjue år før Pascals velkjente addisjonsmaskin. Tegningene ble gjenfunnet blant Keplers papirer i Russland så sent som i 1957. Men på grunn av krig og uheldige omstendigheter var Kepler aldri i stand til å bruke denne oppfinnelsen. I denne artikkelen vil jeg prøve å vise at Keplers vitenskapelige metoder like mye bør bli betraktet som et bidrag til numerisk analyse og informatikk som for den senere integral og differensialregning. Denne innsikten kan gi oss viktig bakgrunnsstoff i diskusjonen om utvalg av matematiske emner i skolene våre.



Rekonstruksjon av den første mekaniske regnemaskin fra 1623.

Ordet *numerisk analyse* ble tatt i generell bruk så sent som i 1947, da *Institutt for Numerisk Analyse* ble grunnlagt ved University of California i Los Angeles. Med numerisk analyse mener vi teorien om konstruktive metoder og algoritmer, dvs. prosedyrer som tillater oss å oppnå løsningen på et matematisk problem med en vilkårlig presisjon etter et endelig antall trinn som blir gjennomført rasjonelt. Ordet algoritme ble opprinnelig brukt innen algebra først og fremst for å betegne framgangsmåter som stopper etter et endelig antall steg, men i numerisk analyse er algoritmene i utgangspunktet uendelige.

En *mekanisk kalkulator* er en maskin som automatisk kan gjøre aritmetiske operasjoner. I Keplers tid lagde professor Wilhelm Schickard slikt utstyr. Moderne kalkulatorer er etterkommere av regnemaskiner som ble utviklet av Schickard, Pascal og Leibniz. Noen har ment at Leonardo da Vinci (1452-1519) gjorde et tidligere forsøk. I 1967 ble noen av notatene hans funnet i Nasjonalmuseet i Spania, som inneholdt en beskrivelse av en maskin med visse likhetstrekk med deler av Pascals maskin. En modell av da Vinci`s maskin ble til og med laget ferdig med hjelp fra disse notatene og moderne teknologi. Men Leonardo's tegning av maskinen med 13 hjul var sannsynligvis ikke en kalkulator, men representerte en slags "oppgiringsmaskin.". En omdreining på den første aksen, ville føre til 10 omreininger på den neste aksen og 10 opphøyet i 13 potens på den siste aksen. En slik maskin kunne ikke bli laget på hans tid, på grunn av de enorme mengdene friksjon det ville føre til. Men ut fra tegningene i brevene til Schickard, har det vært fullt mulig å rekonstruere en komplett og funksjonell mekanisk kalkulator (Freytag-Löringhoff 1987, Kistermann 2001).

Kepler skrev for det meste på latin som fungerte som datidens akademiske språk. Men i dag er arbeidene hans samlet og mye er oversatt til tysk og engelsk. Det tilgjengelige materialet er tilstrekkelig til at vi kan forstå historien og hvordan de nye ideene utviklet seg. Deler av historien er riktignok borte, og det er fortsatt mulig å finne nytt materiale, som f. eks. de gamle, og meget interessante tegningene av Schickards datamaskin som ble gjenoppdaget i 1957 (Se Hammer 1958 og figuren side 60).

For hans numeriske arbeide var det Keplers praksis å bruke en sirkel med radius 100000 - den såkalte hjelpesirkelen - som sin enhet, og definere en sinus-funksjon som er 100000 ganger større enn den moderne typen. Alle desimalene ble neglisjert, fordi observasjonene ikke hadde større nøyaktighet. Dette valget hadde stor betydning for det astronomiske arbeidet hans. Kepler uttrykket også arealer som forhold til arealet av sirkelen, arealet kunne måles som 360 grader eller 21600 bueminutter (360x60), eller 1296000 buesekunder (360x60x60). Hans tankegang på dette tidspunktet er enkelt å omgjøre til moderne standarder med bruk av vår enhetssirkel og radianer.

2. Numerisk likningsløsning

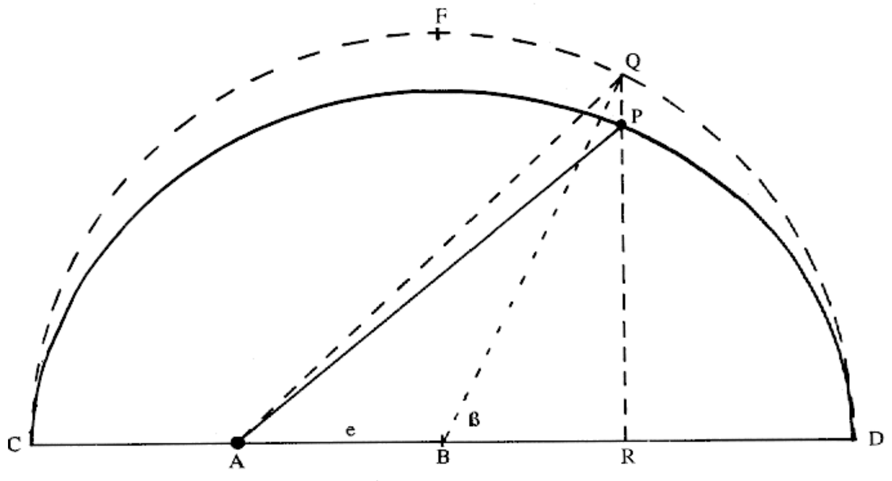
I 1618-21 publiserte Kepler en lærebok *Epitome* om sin nye teori for solsystemet. Boka er skrevet som en dialog med spørsmål og svar, og forsøker å gi en samlet framstilling av hans astronomi. Der presenterer han sin andre lov slik, når solen ligger i ellipsens brennpunkt i A:

> *Derfor er det totale arealet i ellipsen, som ved A har blitt delt opp i trekanter - fordelt mellom vinkelbuene i det samme forhold som den totale tidsperioden er fordelt mellom dem. Derfor er de enkelte trekantene de forholdsmessige riktige mål for de enkelte vinkelbuer.*

Keplers utledning av den andre loven er ikke generell, men påvises kun i spesialtilfeller, selv om metodene hans senere har vist seg å kunne generaliseres (Davis 1982, kapittel 7). Vi bør kanskje se på Kepler's andre lov som en slags beregningsmetode.

Å beregne arealer inne i ellipsen er ikke enkelt, og det var faktisk den omskrevne hjelpesirkelen som reddet Kepler på dette punktet. Se figuren under der planeten P beskriver ellipsebuen, og Q er projeksjonen av en "virtuell planeten" på hjelpesirkelen. En av de viktige matematiske egenskapene til ellipsen er at forholdet

QR/PR = konstant for alle QPR loddrett til CD.



Keplers lov sier at tid er proporsjonal til ellipsearelalet ADP. Dette området er sammensatt av trekanten ARP og segmentet RDP. Ved likningen over er trekanten proporsjonal med trekanten ARQ og segmentet er proporsjonal med segmentet RDQ. Tiden er dermed proporsjonal med sirkelarealet ADQ som er lik β + e sin β. Her er e konstanten AB og β vinkelen QBD. Dette fant Kepler ut at ga likningen

$$M = \beta + e \sin \beta$$

hvor M er et måltall brukt til å angi tid. Kepler målte M som del av arealet av hele sirkelen. M er proporsjonal med tiden som har løpt, og det er som funksjon av tiden vi ønsker å finne posisjonen til planeten P. Så det viktige problemet er å finne β når M og e er gitt. Denne transcendente likningen er kalt Keplers likning og har vist seg grunnleggende i astronomien. Slike vanskelige likninger er det umulig å finne en enkel løsningsformel for, og Kepler kunne bare løse den i enkelttilfeller ved en bruk av en tilnærmingsmetode.

I *Etipome*, bok 5, del 2, kapittel 5 (Kepler 1995, side 158-159) gir han et numerisk eksempel med tre steg i løsningsprosessen som vist i tabellen. Den såkalte eksentrisiteten e er bestemt av arealet av trekanten ABF, som han tidligere sier han hadde utregnet til å være 11910 buesekunder. Sannsynligvis hadde Kepler byttet om to siffer her, fordi i det foregående eksemplet seks sider tidligere brukte han tallet 19110, et tall som korresponderer til e=0,09265, det beste estimatet Kepler hadde for planeten Mars. Men uansett, det nye tallet vil fungere like godt som et eksempel, og bestemmer e=0,05774.

Keplers likning: $\beta_n = M - e \sin \beta_{n-1}$

Konstanter:

eksentrisitet e = 0,05774

tidsparameter M = 50° 9' 10" =0,87533 (i radianer)

Kepler:		**Datamaskin:**	
Grader	*Radianer*	*Radianer*	*Iterasjon #*
44° 25'	0,77522	0,77522	β_0
46° 44'	0,81565	0,83492	β_1
47° 44' 6"	0,83313	0,83253	β_2
47° 42' 17"	0,83260	0,83262	β_3

Keplers numeriske løsning på likningen hans i Epitome, med tre iterasjoner. Som sammenlikning er vist en datamaskiniterasjon med bruk av Excel basert på $\beta_n = M - e \sin \beta_{n-1}$

Keplers metode kan best beskrives som en enkel numerisk fiks-punkt metode, dvs. en iterativ (gjentagende) algoritme som utvikler en konvergerende tallsekvens med grenseverdi lik løsningen til det framlagte problem:

$$x_n = f(x_{n-1})$$

Han kalte sin metode til å løse likninger *regelen for innsetting*, sannsynligvis en hentydning til en klassiske metoden for likningsløsning *regelen for falsk innsetting* (regula falsi). Men han gjorde ingen nærmere undersøkelser av feilgrenser eller konvergenshastighet, men observerer bare at nøyaktigheten blir bedre og bedre.

Fra et historisk synspunkt er det interessant å stille spørsmål om hvem som egentlig oppfant den iterative metoden med etterfølgende tilnærming. Dette spørsmålet har vi i dag ikke tilfredsstillende svar på. Både greske, indiske og arabiske vitenskapsmenn brukte utregninger av etterfølgende tilnærminger (Kennedy og Transue 1956, side 83). Kepler var altså ikke den første som tydelig brukte metoden.

Heron av Alexandria (50 e.Kr), brukte allerede denne strategien for å regne ut kvadratrøtter. (Chabert 1999, side 202). Og den arabiske astronomen og matematikeren Jamshid al-Kashi (1380?- 1429) brukte også en iterativ metode for å regne ut $sin\ 1°$ ut fra $sin\ 3°$ (Aaboe 1954, Chabert 1999, side 218). Den iterative metoden al-Kashi benyttet var en av de fremste prestasjonene i middelalderens algebra.

Kepler var ikke engang den første som arbeide med sin spesielle likning, og numeriske måter å løse den på. Til vår overraskelse er den samme likningen viktig i å beregne den såkalte astronomisk parallellakse, f.eks. månens posisjon sett samtidig fra ulike steder på jordoverflaten. Den arabiske astronomen og matematikeren Habash al- Hasib (?-870), som bodde i Bagdad og Damaskus, arbeidet i forbindelse med sin teori om formørkelser og problemer med månens parallellakse. Han kom fram til tabeller for sinus, tangens og andre astronomiske funksjoner (Kennedy og Transue 1956). Kepler kjente trolig ikke til hans arbeid, selv om vår viten om hva som var kjent av arabiske tekster i 1600- og 1700- tallets Europa er utilstrekkelig.

Senere viste Newton (1642-1727) interesse for Keplers likning, og han la fram tre løsninger av den i ulike utgaver av Principia og andre publikasjoner (Colwell 1993, side 51). I den første utgaven av Principia (1687), bok 1, demonstrerer Newton hvordan "man finner posisjonen på ethvert tidspunkt til et legeme som beveger seg i en gitt ellipse". I sin kommentarer til dette vanskelige problemet kommer han fram til en geometrisk løsning, som er vanskelig å følge. I de senere utgavene så kuttet han ut denne upraktiske metoden, og presenterte en iterativ framgangsmåte. Denne beskrivelsen er Newtons første publisering av det vi i dag kjenner som *Newton- Raphsons metode* (Whiteside 1974, side 316-319).

Den generelle *Newton-Raphson* numeriske metode har en historisk forbindelse til Keplers problem. I nesten hvert eneste tiår etter dette har det kommet avhandlinger som handler om Keplers likning og dens løsning (Colwell 1993). Men problemet har aldri hatt samme tiltrekning som Fermats siste teorem, eller den dybde og utilgjengelighet som flerlegeme problemet i astronomien. Det siste av disse er fortsatt uløst, selv om tilnærmingsløsninger eksisterer. Med nye oppfinnelser som kalkulatorer og datamaskinener, så er det ingen begrensning når det gjelder å finne raske løsninger med stor nøyaktighet på Keplers likning. I våre dager så kan en skoleelev løse den numerisk ved å bruke programvare som Excel, Derive, Mathematica, Maple eller MathCad. Tabellen foran ble laget med Excel.

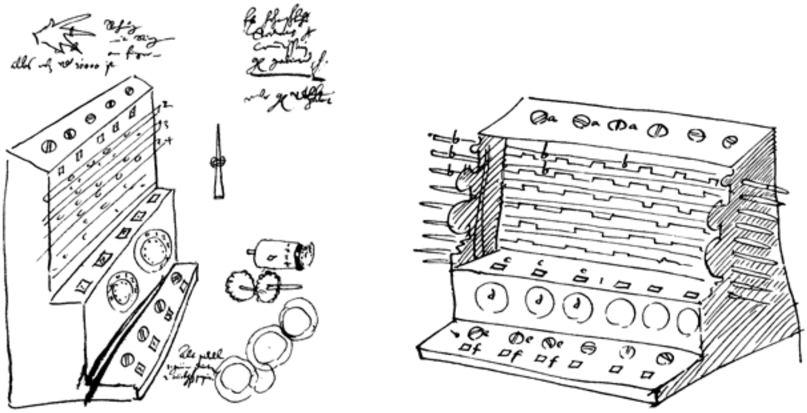
3. En mekanisk kalkulator

I årene 1614 -1630 spredte oppdagelsen av Napiers logaritmer seg hurtig innen matematikken og ble tidlig brukt av vitenskapsmenn som Kepler for å kunne gjøre utregninger raskere. Fra 1630-årene var logaritmene vanlig i Europa. Men Napier oppfant også mekaniske utstyr som ble brukt i hans utregninger (Williams 1983, s. 280-283), de såkalte Napier-beinene, en forløper for regnestaven. Navnet bein er forbundet med at det beste materialet å bruke til dette var elfenbein. De ble brukt til å gjøre multiplikasjoner og til å trekke ut kvadratrot og kubikkrot.

Wilhelm Schickard var den første som modifiserte Napiers bein og gjorde dem til en del av den første virkelige kalkulerende maskin. Schickard var professor i hebraisk, matematikk, astronomi og andre fagfelt ved Universitetet i Tübingen. Han var også kjent for å være en flink mekaniker og hadde bl.a. laget noen av illustrasjonene i Keplers bøker. De møttes først i Tübingen i 1617 og de ble kjent med hverandre og samarbeidet ved flere anledninger (Williams 1983, s. 284) bl.a. i forbindelse med Keplers egen logaritmebok *Chilias logarithmorum*, som ble skrevet i 1621-22 og trykket i 1624.

Et annet av disse prosjektene resulterte i at Schickard produserte den første mekaniske kalkulatoren i 1623. I mekanismer som dette, så er det et problem som må løses, nemlig overføring av mente og låning i forbindelse med addisjon og subtraksjon. Schickard løste dette ved at han tok i bruk et innviklet system med tannhjul. Schickard informerte Kepler om den mekaniske maskinen i brev skrevet 20. september 1623 og 25. februar 1624. (Freytag-Löringhoff 1987, s. 11-13):

> *Det du har gjort ved beregninger har jeg prøvd å gjøre på en mekanisk måte. Jeg har konstruert en maskin bestående av elleve fullstendige og seks ufull-stendige tannhjul, som kan kalkulere...*
>
> *[Den] regner ut de gitte tallene umiddelbart, adderer, subtraherer, multipliserer og dividerer. Naturligvis vil du stråle når du ser hvordan [den] av seg selv akkumulerer menten mot venstre med tiere hundreder, eller ved subtraksjon tar bort tilsvarende.*
>
> *Jeg hadde bestilt en maskin hos en lokal mann, Johan Pfister, for å konstruere en maskin til deg, men da den var halvferdig, ble den sammen med andre av mine ting, spesielt flere metallplater, offer for en brann som brøt ut usett om natten… Jeg tar tapet meget tungt, spesielt nå, fordi det ikke er tid til å lage en erstatning med det første.*



Schickards tegning av den mekaniske regnemaskin. (Freytag-Löringhoff 1987 s. 12 og 14). Tegningen til venstre er trolig laget til verkstedet som bygde maskinen, mens det til høyre viser den ferdige maskinen slik den ble tegnet i brevet til Kepler. I mellomtiden er maskinen økt fra fem til seks siffer. Regnemaskinen var så og si ukjent fram til 1957.

Det siste av brevene ovenfor inneholdt også en postkortliknende tegning av konstruksjonen, se figuren. Men tegningen var savnet inntil Keplereksperten Franz Hemmer fant den i biblioteket i Pulkovobservatoriet i nærheten av St. Petersburg, og presenterte dem på en liten kongress i 1957 (Hammer 1958). På den samme kongressen var også professor Bruno Baron von Freytag-Löringhoff, en ekspert når det gjaldt teknikker brukt av gamle urmakere, og han var i stand til å lage en rekonstruksjon i 1960 (Freyteg- Löringhoff 1987 s. 4). Addisjon og subtraksjon ble utført i den mekaniske delen av maskinen. Men et sett med Napiers bein er også innebygget i den øvre delen av maskinen som gjør det mulig å forenkle multiplikasjoner og divisjoner til addisjoner og subtraksjoner. Divisjon kunne ikke bli utført direkte, men måtte gjøres ved multiplikasjon med den inverse verdi av divisoren. Tabeller med inverse verdier eksisterte for slik bruk.

Brevet ovenfor er den siste korrespondanse fra Schickard angående oppfinnelsen hans som han kalte en *kalkulerende klokke*. På grunn av kriger var det en ubeleilig tid for å videreutvikle og raffinere oppfinnelser som dette, og prototypen forsvant før eller senere i historien. Den var mer komplisert enn Pascals maskin, som kom ca 20 år senere, og bare kunne utføre lineære operasjoner som addisjon og subtraksjon. Schickards maskin var en tre-operasjoners kalkulator med en seks-sifrede tall og en liten bjelle som ringte hver gang overflyt i tallene forekom.

Grensen på seks siffer har å gjøre med mekaniske begrensninger i tannhjulene sum ble produsert på den tiden. Kepler ville uten tvil trengt mer når tallene ble større. Til dette ble det brukt utstyr i form av messingringer som kunne bli dratt over fingrene til operatøren hvis maskinen ringte. Store tall måtte bli splittet opp i mindre deler, og disse behandles separat. I prinsippet kunne dette fungert, selv om det aldri ble tatt i konvensjonell bruk. Ingen spor etter denne mekaniske regnemaskin har blitt funnet. Den viste seg å bli en urealiserbar blindgate i deres vitenskap, selv om det etter det vi nå vet, var det den første oppfinnelsen der man ville få en maskin til å regne.

4. Logaritmiske og astronomiske tabeller

Kepler ble dypt imponert av oppdagelsen av logaritmene da han fikk en kopi av Napiers bok i 1619, og i 1624 publiserte han sin egen logaritmetabell. Keplers logaritmer var forskjellige fra Napiers arbeid. I 1627 fullførte han sitt livslange arbeid med planettabeller som ble kalt *Tabulae Rudolphinae*. Tabellene gjorde bruk av hans logaritmer, og gjorde det mulig til å kalkulere posisjonen til enhver planet hundrevis av år fram eller tilbake i tid. Kepler regnet selv disse tabellene som sitt viktigske forskningsresultat som gjorde alle hans teorier testbare. I begynnelsen hadde han planlagt å forklare i detalj hvordan han hadde regnet ut tabellene. Men han kuttet ut dette, det var jo delvis gjort i Epitome.

I europeisk historie var disse tabellene den tredje virkelige nye oppsett av planettabeller, etter Ptolemeus' og Kopernikus' tabeller, og det viste seg snart at Keplers arbeide var langt mer nøyaktig.

Keplers teori i Epitome hadde forvirret en god del av hans kolleger. I 1622 skrev Peter Crüger i Danzig (Russel 1963 s.8):

> *Jeg har mottatt den fjerde boka av Keplers astronomi... Jeg har mere enn en gang lest hva han sier om proporsjonen til banene og de planetene på stedene du henviser til. Poeten sier at å lese en ting ti ganger er glederikt. Men etter å ha lest dette hundre ganger så forstår jeg det ikke. Forfatteren ser ut til å formørke saken på en utspekulert måte. Uansett, jeg vil studere alle disse tingene ved anledning senere så godt jeg kan, selv om jeg ikke tror det har noen nytte. Disse teoriene er basert på uklart grunnlag, og er bare gjetting. Kanskje vil vi finne klarere prinsipper i den danske astronomi [av Logomentanus].*

Fem år senere, da Kepler publiserte sin meget nøyaktige tabell om planetenes posisjoner Tabulae Rudolphinae, så ble Crüger overbevist av teoriens praktiske resultater. Han prøvde etter dette å forstå grunnlaget som Rudolphine-beregningene og tabellene var basert på.

Den 7. November 1631 ble den nye teorien satt på en prøve, da planeten Merkur var forventet å passere framfor solen. I 1629 publiserte Kepler en brosjyre på åtte sider om dette sjeldne fenomenet og en solpassasje for Venus en måned senere, selv om den siste ikke ville kunne observeres fra Europa siden den fant sted om natten. Astronomene i Europa ble bedt om å observere og tidfeste Merkurpassasjen.

Kepler døde før dette, men hans forutsigelse viste seg ganske nøyaktig, avviket var på rundt 10 bueminutter. Wilhelm Schickard var en av de som arbeidet med dette. Han kom fram til at Keplers tabell var minst 20 ganger mer presis enn alle de andre, og han konkluderte med at Keplers teori var den mest korrekete. Det neste året publiserte Schickard en brosjyre hvor han ga en kortfattet framstilling av Kepler`s astronomiske teori (Russel 1963, s. 11).

5. Konklusjoner

Kepler var i siste del av sin forskningsvirksomhet en av de aktive pådriverne for det nye fagfeltet med beregningsorientert matematikk. Hans lojalitet til de tradisjonelle prinsippene i gresk fysikk og matematikk måtte i stor grad vike for behovet for reformer innen faget. Keplers likning var en av de første transcendente likninger som ble studert. Vi vil beskrive hans numeriske algoritme som en "fiks punkt metode". Senere utviklet Newton en teknikk som kalles Newton-Raphsons metode for å løse den samme likningen.

Schickards og Keplers innovative mekaniske kalkulator forble trolig en testversjon som aldri ble tatt i praktisk bruk. Uansett er det interessant å merke seg at den første kalkulatoren ble laget i en klart naturvitenskapelig kontekst, selv om Schickards seks-sifrede kalkulator ble glemt. Teknisk sett var jo heller ikke tiden moden for omfattende bruk av slike regnemaskiner. Men Schickard og Kepler var genuine oppfinnere på dette området, ikke bare bleke forgjengere for Pascal og Leibniz. På samme tid ble logaritmene oppdaget, og disse bidro til å forenkle regnearbeidet vesentlig.

Mangelen på regnekraft må ha vært et av de store problemene da den nye naturvitenskapen ble grunnlagt. Og i denne sammenhengen kan vi betrakte Newtons og Leibniz' matematiske analyse som en elegant, men abstrakt, snarvei forbi problemet med å gå seg fast i beregninger. Den primære og generiske måten å behandle disse problemene på ser ut til å være numerisk.

Og situasjonen er ofte lik i dagens vitenskapelige arbeid. Når vi vil løse våre differensiallikninger, så kan ofte bare de lineære tilfeller bli løst analytisk. For de ikke-lineære tilfellene må vi ty til numeriske metoder på datamaskiner. Naturen ser ut til å være ett steg framfor våre eksakte metoder. Så når vi introduserer numeriske metoder i vår undervisning, er vi nær koblet både til framgangsmåten i matematikkhistorien og til moderne vitenskapelige praksis.

Litteratur

Aaboe, A., "*Al-Kashi's Iteration Method for the determination of sin1*", Scripta mathematica, vol. 20, 1954, s. 24-29.

Chabert, J. et al., *A History of Algorithms*, Springer-Verlag, 1999.

Colwell, P., *Solving Kepler's equation over three centuries*, William-Bell, 1993.

Davis, A.E.L., *A Mathematical Elucidation of the Bases of Kepler's Laws*, doctoral dissertation, Univ. of London, 1982.

Davis, A.E.L., “*Kepler's Resolution of Individual Planetary Motion*”, Centaurus, vol. 35, 1992, s. 97-191.
Freytag-Löringhoff, B. Baron von, *Wilhelm Schickard und seine Rechenmaschine von 1623*. Attempto, Tübingen, 1987.
Goldstine, H.H., *A History of Numerical Analysis from the 16th Through the 19th Century*, Springer-Verlag, New York, 1977.
Hammer, F., “*Nicht Pascal sondern der Tübinger Professor Wilhelm Schickard erfand die Rechenmaschine*!“ Büromarkt, 1958, no. 20, s. 1023-1025.
Kennedy, E.S. and Transue, W.R., A medieval iterative algorism, *The American Mathematical Monthly*, vol. 63, 1956, s. 80-83.
Kepler, J., *Epitome of Copernican Astronomy* (book 4 and 5), 1620-1621. Translated by C.G. Wallis and reprinted by Prometheus Books, New York, 1995.
Kistermann, F.W., “How to use the Schickard calculator”, *Annals of the History of Computing,* vol. 23, no. 1, 2001, s. 80-85.
Nill, B.: *Java 3D-Simulation of the Schickard Calculator from 1623*.
Se: http://www.gris.uni-tuebingen.de/projects/schickard/
Russel, J.L., “Kepler's Laws of Planetary Motion: 1609-1666”, *British Journal for the History of Science*, vol. 2, 1964, s. 1-24.
Stephenson, B., *Kepler's Physical Astronomy*, Princeton University Press, 1994.
Thorvaldsen, S., “*Beviste Kepler planetlovene*?” Nordisk matematisk tidsskrift, vol. 33, no. 2, 1985, s. 76-87.
Whiteside, D.T. (ed.), *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, vol. 6, Cambridge University Press, 1974.
Williams, M.R., “From Napier to Lucas: The usage of Napier’s Bones in Calculating Instruments”, *Annals of the History of Computing*, vol. 5, no. 3, 1983, s. 279-296.
Williams, M.R., *History of Computing Technology*, IEEE Computer Society Press, second edition, 1997.

6. Framveksten av den matematiske analyse

1. Innledning

Kaster vi et blikk omkring oss, ser vi gjerne ting som biler og motorer, mikrofoner og mikrobølgeovner, telefonlinjer og satellitt-TV. Mye av dette har de fleste av oss vokst opp med, og vi regner det som helt hverdagslig. Men alle disse store oppfinnelsene har faktisk sin bakgrunn i det vitenskapelige gjennombruddet som startet i Europa for omtrent 400 år siden. Ved hjelp av den vitenskapen som da ble grunnlagt har vi til nå klart å konstruere datamaskiner, telekommunikasjonssystemer og brakt 12 mennesker til månen tur/retur.

Av alle matematiske oppdagelser fra hele det forrige årtusen vil mange si at den *matematiske analyse* (engelsk: calculus) er den aller største faglige prestasjonen. Denne teorien ble tidligere kaldt den "høyere matematikk" og er fortsatt et av ingeniørenes viktigste teoretiske verktøy. Oppdagelsen skjedde i siste halvdel av 1600-tallet og ble gjort av de to store matematikerne Isaac Newton og Gottfrid Wilhelm Leibniz, uavhengig av hverandre.

Den matematiske analyse studerer ulike fenomeners forandringsprosesser eller dynamikk. Dette kan være alt fra forandring i form av bevegelse i fysikken, til vekst i biologien, eller kostnader i økonomien. Slike størrelser beskriver vi ved hjelp av matematiske *funksjoner*. I tillegg innfører vi to viktige begreper. For det første den *deriverte* funksjonen som beskriver hvor raskt endringen skjer hvert øyeblikk, og for det andre den *integrerte* funksjon som beskriver den akkumulerte forandring. Derivasjon er et lokalt fenomen, mens integrasjon er et mer globalt begrep. De som har tatt fordypning i matematikk i gymnasiet eller videregående skole har jobbet mye med detaljene i denne matematiske teorien. Hovedresultatet er at derivasjon og integrasjon er motsatte regneoperasjoner slik som pluss og minus er det. Den matematiske analyse inngår i dag som en vesentlig del i mange grener av matematikken, og i vitenskaper som fysikk, biologi, statistikk og sosialøkonomi. Analysen er både en stor og begrepsmessig teori og et sett med praktiske beregningsregler, noe som gjør teorien lettere å anvende enn det ellers ville ha gjort. I dag finnes mange av de praktiske verktøyene tilgjengelig på en lommeregner.

Integral- og differensialregningen har vokst fram over en lengre tidsperiode - spesielt på 1600-tallet - og har blitt sammenliknet med et tre med røtter i både geometri, astronomi, fysikk og algebra. Utviklingen skjedde ved bruk av et intuitivt begrep om *infinitesimaler*, eller uendelig små tall. Derav navnet infinitesimalregning. Disse infinitesimalene klarte man verken på 17- eller 1800 tallet å få til "å høre hjemme" i en stringent matematisk teori, og begrepenes gyldighetsområde var uklar. Regneteknikker som virket godt i noen sammenhenger brøt fullstendig sammen når de ble anvendt på andre typer problemer. På midten av 1800-tallet ble *grenseverdibegrepet (limes)* i stedet innført som grunnleggende begrep i analysen, og først i 1960 lyktes det også å innføre infinitesimalene i en stringent matematisk teori (teorien for de hyperreelle tall, **R***). Den siste framstillingen har ikke slått igjennom i matematikkundervisningen og går derfor under navnet *Non-Standard* analyse.

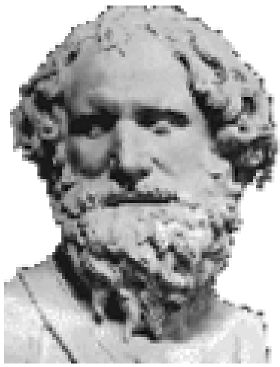
Et problem som oppstår når vi nå skal gå tilbake i historien, er at den notasjon de gamle matematikere brukte, ofte er svært fremmed for oss i dag. Her har jeg i en viss utstrekning valgt å "oversette" deres resonnementer til mer moderne matematisk notasjon. Enhver oversettelse må nødvendigvis bli en tolkning og er en vanskelig balansegang. Men det var nødvendig for å gjøre framstillingen lettest mulig lesbar.

2. Forspillet: grekernes bidrag.

Når vi i dag underviser matematisk analyse i den videregående skole (gymnaset), begynner vi vanligvis med derivasjon og lar integrasjon komme senere. Dette er en god og riktig framgangsmåte, da derivasjon er lettere enn integrasjon. Men historisk sett startet utviklingen med integrasjon og beregningen av arealer og volumer.

Arealbegrepet spiller en fundamental rolle i framveksten av grekernes geometriske modell for integralregningen. Det oppsto temmelig sikkert i forbindelse med empiriske metoder i landmålingen. Grekerne hadde ikke et tilfredsstillende tallbegrep, noe som kom av mangelen på irrasjonale tall. De greske matematikere ekskluderte også det uendelige fra sin matematiske tenkning. Grunnen til dette var åpenbart at intuisjonen aldri ga dem noe klart bilde av noe uendelig, og at det ikke hadde noe utgangspunkt og begrunnelse. Ut fra sin filosofi og Zenons paradokser forkastet grekerne også infinitesimalene, eller "de indivisible" (udelelige) som de kalte dem. Den *utfyllingsmetode* de utviklet reduserte i stedet problemene til formell logikk (såkalt dobbelt reduksjon ad absurdum). Metoden hadde den ulempen at for å brukes, måtte resultatet være kjent på forhånd. Resultatet måtte da finnes ved en annen metode.

Av de greske matematikere er det to som trer i forgrunnen, nemlig *Eudoxos* (408-355 f.Kr.) og *Arkimedes* (287-212 f.Kr., se bildet). Eudoxos arbeidet innen astronomi, geometri, jus og legevitenskap. Det var han som ga den første tilfredsstillende proporsjonslære for størrelser. Etter oppdagelsen av inkommensurable størrelser, fant grekerne det umulig å knytte tall til størrelser som diagonalen i et kvadrat, arealet av en sirkel, volumet av ei kjegle. Å sammenlikne forholdet mellom to volumer med forholdet mellom to arealer eller forholdet mellom to andre størrelser, var Eudoxos' måte å unngå innføring av irrasjonale tall. Alle Eudoxos' arbeider er tapt, men vi kjenner hans *utfyllingsmetode* gjennom Euklids store lærebok *Elementene* (ca. 330 f.Kr.).



Arkimedes anvendte utfyllingsmetoden på mange nye problemer og beregnet bl.a. en tilnærmingsverdi for π ved å bruke omskrevne og innskrevne mangekanter i sirkelen.

Han bestemmer også formelen for kulas overflate, arealberegninger for parabelen og volumer av en del omdreiningslegemer.

Er så den greske utfyllingsmetoden integralregning? Ja, i en viss forstand. Den inneholder integralregningens geometriske betraktningsmåte, men i praktisk problemløsning er moderne integrasjon utfyllingsmetoden overlegen. Muligheten for å danne generelle integrasjonsregler dukket ikke opp hos grekerne.

Hvordan oppdaget så grekerne de setningene de skulle bevise? l 1906 fant den danske historiker og spesialist i gresk matematikk, J. L. Heiberg, et til da tapt brev fra Arkimedes til en annen matematiker. Brevet gir oss deler av svaret på dette spørsmål. Det bærer overskriften *Metoden for mekaniske teoremer* og beskriver en ikke-stringent, men nyttig metode til å oppdage konkrete integrasjonsresultater. Metoden kan best betegnes som en mekanisk infinitesimalmetode. Elementer fra to ulike figurer veies mot hverandre som på en toarmet vektstang. Men Arkimedes' matematiske samvittighet kunne ikke akseptere denne metoden som noe bevis.

Med Eudoxos og Arkimedes var integralregningen født. Man skulle vente at de framskritt som de hadde gjort, ville danne skole og sette i gang en utvikling. Men kort tid etter Arkimedes gikk den greske analyse tilbake. Den matematiske analyse ble født med Eudoxos og Arkimedes, men gikk også i graven med dem, helt til den fikk liv igjen i Europa på 15-1600-tallet.

Grekerne hadde en udelt tillit til menneskets fornuft og mente at tanken hadde den egenskap at den kunne gjenkjenne sannhet. Sannhet var noe som kom fra menneskets intellekt. Geometrien var en del av denne sannhet. Ved å utforske naturen søkte ikke grekerne å beherske naturen, men heller å tilfredsstille sin tanke. De likte å tenke, og naturen ga dem en del store utfordringer på dette området. Grekerne hadde et klart skille mellom teori og anvendelse. I deres verden var matematikken nærmere forbundet med filosofien enn med den praktiske anvendelse. Riktignok kunne menn som Arkimedes, Hippark, Heron og Ptolemeos arbeide med astronomi, mekanikk og optikk. Men utgangspunktet for dette var mer filosofisk enn empirisk. Unionen mellom filosofi og matematikk illustreres godt ved at det over døren til Platons skole sto skrevet: "La ingen ukjent med geometrien stige inn her". Og Platon var en intellektuell aristokrat "purer than the purest of pure mathematicians". Aristoteles samlet all den greske naturfilosofi i en helhet, og ble Vestens første og største systematiker med en enorm innflytelse helt fram til slutten av middelalderen.

Til forskjell fra de fleste andre greske filosofer og vitenskapsmenn, så ikke Arkimedes nedverdigende på eksperimenter. Han grunnla naturvitenskaper som statikk og hydrostatikk. Dessuten hadde han i krigstider en viss interesse for militære våpen. Men til tross for dette, var Arkimedes i sitt sinn temmelig uengasjert i sitt forhold til anvendt vitenskap. Han la liten vekt på sine mekaniske oppfinnelser sammenliknet med det han kom fram til i sin tenkning. Selv når han arbeidet med vektstenger og andre enkle mekanismer, la han større vekt på generelle prinsipper enn på praktiske anvendelser. Til tross for denne begrensningen i sin tenkning, ble grekerne med sin demonstrasjon av fornuftens potensial og muligheter en av hovedkildene for hele vår vestlige sivilisasjon.

3. Startfasen: Kepler og Cavalieri

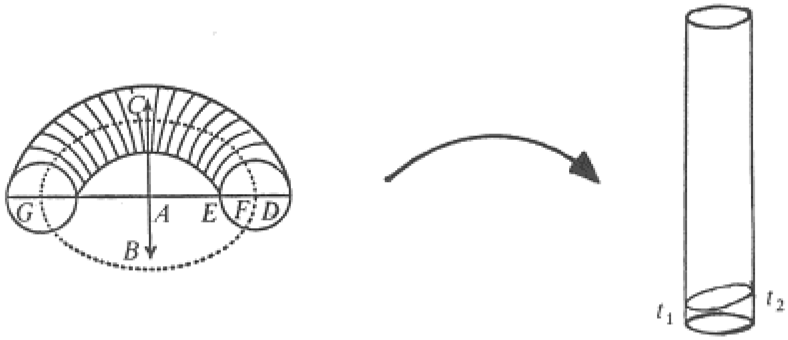
Johannes Kepler (1571-1630) ble en av pionerene for den nye naturvitenskapen. Han var blant de første matematikere som løsnet på grekernes strenge krav, og i stedet innførte en fri bruk av infinitesimaler i bestemmelsen av arealer og volumer. Kepler ble født i Weil der Stadt, en liten by vest for Stuttgart. Han var 13 år da han kom inn på den evangeliske klosterskolen i Adelberg. To år senere ble han overflyttet til en annen klosterskole hvor han skulle bli til han var moden for universitetet. Teologi hadde en bred plass i skolene, men også matematikk og astronomi hørte med til fagene. Atten år gammel begynte Kepler ved universitetet i Tübingen hvor han noen år senere tok magistergraden med glans. I 1594 ble han så kalt til lærer i matematikk ved det protestantiske gymnaset i Graz. Senere gikk det slag i slag for Kepler, og i 1601 ble han utnevnt i Praha til keiserlige hoffastronom og matematiker.

I sitt 59 årige liv ga Kepler ut et titalls større vitenskapelige arbeider. På 14- og 1500-tallet hadde det pågått en dyp forandring i den filosofiske og vitenskapelige tenkning i Europa. Aristoteles og hans regjerende filosofiske system var på vei ned av tronen. Vitenskapsmennene begynte nå på en ny måte å se på virkeligheten og de fakta som kunne leses ut av den. Her var det Kepler kom til å yte et vesentlig bidrag både til astronomien, optikken og den matematiske analyse. Han er mest kjent for sine tre lover for planetenes bevegelse rundt solen. Disse ble funnet som resultat av data samlet av den danske astronomen Tycho Brahe etter omtrent 22 års intense beregninger (uten hjelp av regnemaskiner!) og var de første naturlover i den moderne betydning av ordet. Med disse lovene var han med på å bygge broen over fra det gamle syn på universet som et uforanderlig kosmos, til det nye bildet av et dynamisk system underlagt matematiske lover. Keplers første lov publisert i verket *Ny astronomi* (1609), viser som et eksempel hvordan de nye lovene lød:

> *Planetene beveger seg rundt solen i ellipsebaner med solen i det ene brennpunktet.*

I motsetning til grekerne, sto Kepler for en matematisk empirisme. Kepler var talsmann for at menneskets erkjennelse av den riktige matematiske sammenheng i universet skjer gjennom de empiriske data. Sanne matematiske hypoteser må være verifiserbare i den observerte verden. Her skiller Kepler seg sterkt fra den greske tenkning. Kepler talte gjerne om å "lese naturens bok". "Hvor det er materie, der er det også geometri", sa han.

Keplers matematiske hovedverk er *Stereometria* (rommål, 1615). En kuriositet hører med til forhistorien. På grunn av urolige tider i Praha, ga keiseren i 1612 Kepler tillatelse til å flytte til den rolige byen Linz i Østerrike. Det året var det en uvanlig rik vinhøst i landet, noe som ga støtet til Keplers mest betydningsfulle rent matematiske arbeide. Kepler fant nemlig at vinhandlerne i Østerrike brukte bestemte vintønner og en spesiell metode til å finne volumet av disse. De stakk bare en målestav på skrå ned i tønna og leste av volumet på en skala (se figur). Kunne noe av dette rettferdiggjøres matematisk?



Før Kepler tar fatt på tønnene, behandler han noen enklere volumer. Det legemet som framkommer ved å rotere en sirkel om en linje BC i rommet (som ikke skjærer sirkelen), kalles en ring eller torus. Se figuren over. I setning 18 behandler Kepler volumet av en slik ring:

> *Setning.*
> *Enhver ring med sirkulært eller elliptisk tverrsnitt, har samme volum som en sylinder med høyde lik lengden av den sirkelbue som senteret til den roterte figur beskriver, og med grunnflate lik tverrsnittet av ringen.*

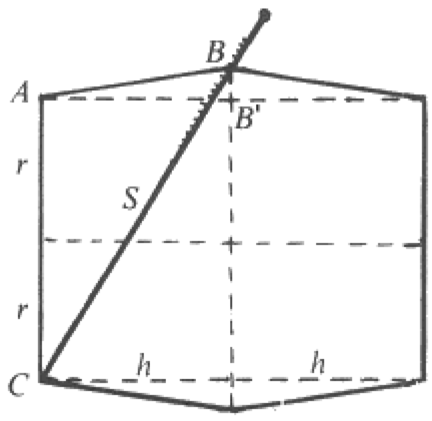
Keplers bevis bygger på ideen om infinitesimaler. Hvis vi kutter ringen GCD opp i et uendelig antall av infinitesimalt tynne skiver, vil hver av skivene bli tynnest, t_1, mot senteret A og tykkest, t_2, lengst bort fra A. Gjennomsnittykkelsen $t = (t_1 + t_2)/2$ oppnås midt på skiven. En skives volum kan altså skrives som $G \cdot t$, hvor G er arealet av snittet. Volumet av hele ringen er dermed gitt ved $G \cdot L$, hvor L er sirkelbuen som sentret i den roterende figur beskriver.

Dette teoremet er ekvivalent med et spesialtilfelle av et klassisk teorem etter Pappus, senere kalt Guldins regel.

Men Kepler tar også for seg til da ukjente omdreiningslegemer. Roteres sirkelen om en linje som skjærer bort en del av den, beskriver sirkeldelen et legeme som Kepler karakteristisk nok kaller "et eple" eller "en sitron", avhengig av hvor mye linjen skjærer bort av sirkelen.

Han stiller også opp og løser flere maksimums/minimumsproblemer. Videre returnerer Kepler til problemet med vintønnene. De *østerrikske tønnene* var alle pr. definisjon bygget slik at sidekanten AB = $r\sqrt{2}$ (se figuren, og husk at lengden $r\sqrt{2}$ er lett å konstruere for tønnesnekkerne som diagonalen i et kvadrat med sidekant r). I det spesialtilfellet hvor den østerrikske tønnen er en sylinder, kalles denne en *østerriksk sylinder*. At vinhandlernes målemetode ikke kunne være nøyaktig for de østerrikske tønnene, følger av at "midten" på en tønne kan gjøres bred uten at volumet øker tilsvarende. Kepler tok derfor i stedet for seg de østerrikske sylindere, og i praksis var tønnene omtrent sylinderformet. For en østerriksk sylinder vil altså AB'=$r\sqrt{2}$. Det han viser er

> *Setning.*
> *Av alle rette sylindere med fast lengde på målestaven B'C, har den østerrikske størst volum.*



Figuren viser snitt gjennom en østerriksk tønne sett fra siden. Målestaven S ble stukket inn gjennom et egnet hull ved B.

Kaller vi høyden i sylinderen 2h, blir AB'=h, og det skal vises at h=$r\sqrt{2}$ gir maksimalt volum. I sin løsning av dette problemet satte Kepler opp tabeller over volumet når h avvek fra $r\sqrt{2}$ med små verdier $\pm \Delta$ x, $\pm 2\Delta$ x, osv. Alle disse volumene ble mindre enn når h=$r\sqrt{2}$. Han bruker betegnelser som "inkrement" og "dekrement" nær maksimumpunktet, og merker seg også at når volumet nærmer seg maksimum, endrer det seg mindre og mindre selv om inkrementet er fast.

Som konklusjon skriver Kepler: "*Tønnesnekkerne har med sine gode og uten tvil geometriske anlegg gitt tønnene akkurat den form som for samme lengde avlest av målerne sikret dem det størst mulige volum. Da variasjonene er umerkelige i nærheten av maksimum, vil tilfeldige små avvikelser ikke utøve noen nevneverdig innflytelse på volumet. Den spesielle målingen er følgelig tilstrekkelig nøyaktig*".

Med moderne regnemetoder er det lett å bekrefte Keplers resultat. Setter vi lengden på målestaven B'C =1, blir volumet V

$$V = \pi r^2 \cdot 2h \qquad (1)$$

Bruker vi så Pytagoras' læresetning i trekanten AB'C, får vi

$$4r^2 = 1 - h^2 \qquad (2)$$

og vi kan skrive volumet som en funksjon av h

$$V(h) = \pi/2\ (h - h^3)$$

Derivasjon gir nå

$$V'(h) = \pi/2\ (1 - h^2)$$

Maksimalverdi får vi når V'(h)=0, dvs. når $3h^2=1$, som gir h= $1/\sqrt{3}$

Setter vi dette inn i formel (2), finner vi r

$$r = 1/\sqrt{6}$$

Ut fra dette finner vi

$$h = r\sqrt{2} \text{ qed.}$$

noe som tønnesnekkerne i Østerrike hadde funnet ut ved høvelbenken og Kepler av tabellene sine.

Stereometria ble lest av mange, og Kepler utga den også i en tysk oversettelse. Dette fikk stor betydning for dannelsen av den tyske matematiske terminologi. Keplers hovedbetydning for framveksten av integral- og differensialregningen ligger i at han frambrakte nye problemer og problemområder, selv om han ikke alltid maktet å trenge igjennom alt og gi matematisk eksakte løsningsmetoder. I sin store matematikkhistorie sier G. Cantor (med litt overdrivelse) at *Stereometria* er "kilden for alle senere arealberegninger" (Cantor 1894, bind II, s. 823).

Tyve år etter utgivelsen av *Stereometria* kom det i Italia ut et arbeid som snart overgikk Keplers bok i popularitet. *Bonaventura Cavalieris* bok *Geometria indivisibilibus* (1635) ble et av de mest innflytelsesrike verk fra denne perioden, og mange har med en viss rett hevdet at den nye analysen fra da av var begynt. Bokas fulle tittel var "Videreutvikling av geometrien ved en til nå ukjent metode: de kontinuerlige indivisibler".

Cavalieri (1598-1647) hadde møtt matematikken gjennom undervisningen i munkeordenen hvor han var medlem. Han gjorde slik framgang at læreren introduserte han for den store naturforskeren Galilei, og senere betraktet Cavalieri seg alltid som Galileis elev. I 1629 ble han ansatt som professor i Bologna, samtidig som han ble leder for sin munkeorden i byen.

Cavalieris arbeider er ordrike og ikke helt klare i framstillingen. G. Cantor nevner et ønske om at Cavalieri hadde fortjent "Dunkelhetsprisen" hvis en slik hadde eksistert (Cantor 1894, bind II s. 833).

Det grunnleggende begrep for Cavalieri er begrepet infinitesimal, eller indivisibel som han kaller det. Indivisibel betyr elementer av en gitt dimensjon som ved sin bevegelse genererer figurer av en høyere dimensjon. Slik kan et punkt generere en linje, en linje som parallellforskyves generere en flate og en flate generere et legeme. Cavaliero forsto at antallet indivisible som måtte til for å generere f.eks. et volum ville bli ubestemmelig stort, men han filosoferte ikke videre på dette. Han var mest opptatt av det som fungerte i praksis.

Cavalieri kom fram til resultater som trolig var de første i integralregningen som peker fram mot muligheten av generelle algebraiske regneregler. Når Cavalieri summerte sine indivisibler, brukte han ofte uttrykket "omnes lineae (*o.l.*)"=alle linjer. Forkortelsen *o.l.* var hans integrasjonssymbol. Leibniz brukte i begynnelsen også samme notasjon.

4. De første skritt: Fermat og Barrow

Mot midten av 1600-tallet ble integral- og differensialregningens problemer behandlet av flere. Et nytt hjelpemiddel som nå ble tatt i bruk var den *analytiske geometri*, eller koordinatgeometrien. Denne var utviklet av René Descartes (1596-1650) og Pierre Fermat (1601-1665). Den sentrale idé i analytisk geometri var forbindelsen mellom kurver/flater og algebraiske likninger. Algebraen var et bedre språk å formulere og løse problemene i enn geometrien.

De fleste nye matematiske metoder fra denne perioden ble skapt av *Pierre Fermat*. Han regnes som en av de største og første amatører i vitenskapens historie. Fermat dyrket nemlig matematikken som sin hobby, og oppdaget ikke sine matematiske evner før han var omtrent 30 år gammel. Av yrke var han jurist og hadde stilling som konsulent for det lokale parlament i Toulouse i Sør-Frankrike. Her levde han sitt stille liv og besøkte sjelden Paris. Alt sitt arbeide utførte han med verdighet og flid. Fermat var en stund medlem av *Academie Mersenne* i Paris. Leder for denne gruppen var Fader Mersenne, og Fermat hadde brevveksling med han fra 1636. De hadde møter en gang i uken. Blant medlemmene var Desargues, Roberval og Blaise Pascals far (som tidlig tok med sønnen).

Om Fermat var jurist av yrke, så var han matematiker av lidenskap. Mange matematikere på hans tid så sin matematikk først og fremst som et instrument til bruk for naturvitenskapelig forskning. Fermat derimot var sterkest opptatt av den rene matematikk og ytet bidrag til tallteori så vel som analyse. Han arbeidet med matematikken på fritiden og gjorde det av ren kjærlighet til den. Hans spesielle forhold til matematikken gjenspeiles godt i et brev til Mersenne:

> *Jeg vil dele mine resultater med deg når du måtte ønske det, og jeg vil gjøre det uten ambisjoner på egne vegne. Det er jeg frigjort fra og er fjernere for meg enn noe annet menneske i denne verden.*

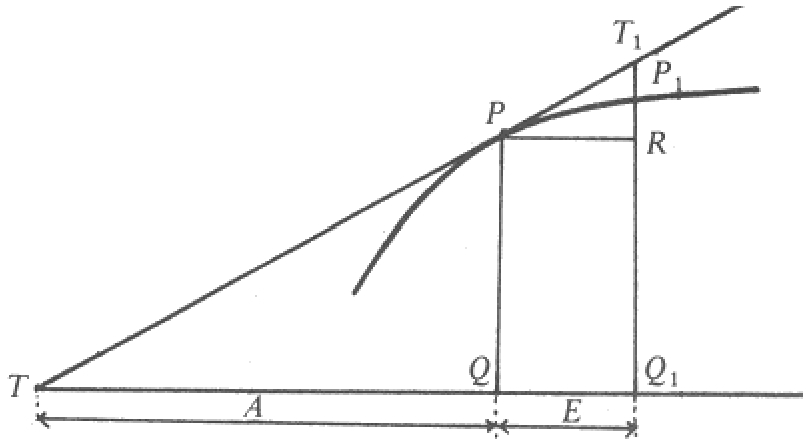
Nå må det legges til at Fermat også gjorde en del arbeide innen naturvitenskaper som f.eks. optikk. Noe som ennå i dag benyttes fra hans arbeide om maksimum og minimum, er Fermats prinsipp om korteste tid i optikken. Dette var det første av de større variasjons-prinsipper i fysikken. Naturvitenskapens behov var derfor også en motiverende faktor for Fermat.

Fermats arbeide med kurver startet med hans studier av den greske geometri. Det var en populær beskjeftigelse på hans tid å restaurere de gamle verker etter grekerne. Etter hvert tok Fermat også fatt på et generelt og metodisk studium av kurver, noe grekerne ikke hadde klart å få til. Innen integralregningen fant Fermat en ny metode til å finne integralet av x^n. Metoden besto i å omskrive rektangler med arealer som leddene i en geometrisk tallfølge. Når antall rektangler gikk mot uendelig, fikk han uttrykt arealet under kurven som summen av en uendelig geometrisk rekke.

Men Fermat er mer kjent for sin metode til å finne maksimum og minimum. Det spesielle med denne metoden er at det gjøres bruk av en tilvekst, E, av en størrelse. Metoden kunne bl.a. brukes til å bestemme tangenten til en kurve. Grekernes tangentdefinisjon hadde i lang tid vært rådende i matematikken. Det var statisk og basert på egenskapen at tangenten har kun ett punkt felles med kurven. Den nye tangentdefinisjonen som nå kom med Fermat var dynamisk og basert på sekantens grensestilling i tangeringspunktet.

Descartes hadde også utgitt en egen tangentmetode i *La géométrie* (1637). Hans metode var rent algebraisk, og bygde ikke på noe grensebegrep. Dessuten var den kun anvendbar på kurver av enkel polynomform. Fermat leste Descartes og fikk lyst til å bringe videre sin egen tangentmetode som han hadde kjent til fra 1629. Dette ble gjort i skrivet *Metoden til å finne maksimum og minimum*. Manuset er fra 1637, men ble først trykt i 1679. I mellomtiden sirkulerte det i håndskrifter.

Fermat tar her utgangspunkt i maksimums og minimumsbetraktninger noe som kan føres tilbake til Kepler. Fermats metode spiller imidlertid en spesiell rolle i integral- og differensialregningens historie, da det trolig er første gang det gjøres bruk av en tilvekst av en størrelse:



La PT være tangenten til kurven y =f (x) i punktet P, og la P_1 ligge på kurven i nærheten av P. Q og Q_1 er projeksjonene av P og P_1 ned på x-aksen. Nå skal vi finne lengden TQ (subtangenten) som gjør at T kan finnes og tangenten TP trekkes. La inkrementet QQ_1 være lik E. Trekanten TQP er formlik med PRT_1.

Dermed:

$$TQ : E = PQ : T_1R$$

Fermat setter så

$$T_1R = P_1R$$

Dermed blir:

$$TQ : E = PQ : (P_1Q_1 - QP)$$

Setter vi inn PQ =f (x) får vi

$$TQ : E = f(x) : (f(x + E)-f(x))$$

Altså

$$TQ = f(x) \cdot E /(f(x+ E)-f(x))$$

For de konkrete kurver Fermat behandlet, fikk han forkortet nevneren med E. Deretter "fjernet" han E, som han sa, (satte E= 0), og dermed var TQ funnet.

Det er lett å gjenkjenne uttrykket når vi omformer det til

$$\frac{f(x)}{TQ} = \left[\frac{(f(x+E)-f(x)}{E}\right]_{E=0}$$

Metoden har samme form som moderne derivasjonsbetraktning, selv om den gjør et lett sprang over hele teorien for grenser. Fermat lar nemlig ikke E gå mot null, han befaler bare E å være null på et visst punkt i resonnementet. Flere kom da også med sterk kritikk av Fermats metode, men Newton fikk senere ideer til sin differensialregning fra Fermat og fra studier av Descartes bok *La géométrie*.

En annen tangentmetode var også utviklet på denne tiden. Den bygde på hastighetsparallellogrammet og var utviklet av Roberval og Torricelli uavhengig av hverandre. Begge fant sine metoder på slutten av 1630-tallet, og Torricelli publiserte i 1644. Alle kurver lar seg imidlertid ikke beskrive av to slike matematisk uavhengige bevegelser.

Ved siden av Fermat var *Isaac Barrow* (1630-1677) den som kom nærmest oppdagelsen av den nye analysen, før gjennombruddet kom med Newton og Leibniz. Barrow ble utdannet ved Trinity College i Cambridge. Etter en tur omkring i Europa, kom han tilbake til England og foreleste i astronomi, geometri og gresk. I 1663 ble han så professor i matematikk ved universitetet i Cambridge. Denne stillingen overlot han til sin elev Isaac Newton i 1669. Barrow var også en berømt teolog.

I 1664 begynte Barrow en forelesningsrekke av generell og filosofisk karakter om "The usefulnesse of Mathematical Learning" der rom, tid, bevegelse, geometri og optikk ble tatt opp grundig. Newton gikk temmelig sikkert på disse. I 1670 utga Barrow 13 av forelesningene i *Lectiones geometricae*. Boka var en oppsamling av nesten all kjent kunnskap om integral- og differensialregning. Den inneholder metoder til å finne tangenter, setninger om derivering av produkt og kvotient av to funksjoner, derivering av potenser, bestemmelse av buelengde, variabelsubstitusjon i et bestemt integral og derivering av implisitte funksjoner. Alt dette hadde en geometrisk form.

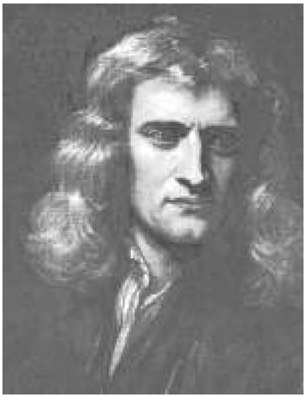
I sin 10. forelesning sier han så: "Jeg tar med enda et par teoremer som er av stor generell karakter og ikke er lette å komme utenom". Det teorem som følger er analysens fundamentalteorem (sammenhengen mellom integrasjon og derivasjon) i geometrisk form med bevis.

Som vi nå har vist, er analysens utvikling mer en kontinuerlig utvikling enn noe som skjer "over natta". På spørsmålet om Fermat og Barrow sto innenfor eller utenfor oppdagelsen av den nye analysen, må vi svare "utenfor". Hva var det så som manglet? Svaret her er at det behøvdes større generalitet i metodene og en bedre notasjon. Arbeidet som ble gjort i integral- og differensialregningen de første 2/3 av 1600-tallet hadde tapt seg selv av syne i detaljer. Det var utviklet en mengde begreper, metoder og teknikker. Men feltet var uoversiktlig og modent for en "begrepssanering" og en avklaring av hva som var kjerneideene og rekkevidden av disse.

5. Gjennombruddet: Newton og Leibniz

To store matematikere trer så fram på arenaen og gjør den store oppdagelsen: *Isaac Newton* (1642-1727) og *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716).

Newton (1642-1727) regnes som kjent blant de aller største i vitenskapshistorien. Han står som en av de drivende krefter som har formet hele vår naturoppfatning. I sin samtid oppnådde han en slik autoritet og innflytelse at han utfordret og beseiret grekernes Aristoteles. Ettertiden har ofte utropt han som det største vitenskapsmann som noen gang har levd.



I kontrast til dette står Newtons eget utsagn mot slutten av livet: "*Jeg vet ikke hva verden synes om meg, men for meg selv har jeg bare vært som en lekende gutt på strandkanten. Der gledet jeg meg over av og til å finne glattere steiner og penere skjell enn vanlig, mens hele sannhetens hav lå uoppdaget framfor meg.*"

Da Isaac kom til verden, var moren allerede enke. Den lille gutten ble født for tidlig og var så liten og spe, at han kunne fått plass i en litersmugge. Han vokste opp hos sin bestemor. Allerede som ung la han for dagen en stor interesse for å gjøre egne eksperimenter.

Nitten år gammel fikk han begynne ved Trinity College i Cambridge, takket være en onkel som var prest. Fire år senere avla han sin endelige eksamen.

Allerede i studietiden ser Newton ut til å ha nådd fram til grenseområdet for sin tids naturvitenskapelige og matematiske viten. Fra å lese matematikk gikk Newton så i gang med å skape matematikk. I 1665 ble Cambridge rammet av en stor pest, og universitetet måtte holde stengt et par år. Newton holdt seg hjemme i Woolsthorpe denne tiden, og der arbeidet han enormt. I tur og orden gjorde han alle sine tre store oppdagelser: Lysets brytning i ulike farger, integral- og differensialregningen og den generelle gravitasjons-teori.

Newton kom så tilbake til Cambridge i 1667, men holdt stort sett oppdagelsene sine for seg selv og publiserte lite. Dette hadde sammenheng med at Newton var redd for å få for mange kritikere på nakken. Men universitetet var klar over Newtons begavelse, og i 1669 overtok han professoratet i matematikk.

Newton la i sin naturvitenskap vekt på to ting: matematikk og eksperimenter. Strukturen som var nedlagt i universet gjorde at det var mulig å formulere eksakt kunnskap om det. Matematikken var det språk som best kunne uttrykke denne nøyaktige orden. Newtons håp var stadig at alle fenomener i naturen skulle kunne beskrives ved hjelp av matematikken. På den andre siden insisterte Newton også på at et eksperimentelt grunnlag og en empirisk verifisering måtte ledsage ethvert skritt i forskningsprosessen) Den matematisk formulerte teori måtte alltid bygges på eksperimentell erfaring. Slik ble Newton det felles møtested for de to viktige strømninger i naturvitenskapen: den empirisk eksperimentelle og den deduktivt matematiske. Naturvitenskap var for Newton den eksakte matematiske formulering av fenomenene i den fysiske verden.

Et sentralt begrep er som vi vet "stigningstallet" til en funksjon i et punkt, det vi ofte også kaller vekstraten til funksjonen ved et bestemt tidspunkt. Denne vekstraten vil kunne endre seg med tiden, og er altså også en funksjon. Den kalles den "deriverte" som betyr den avledede funksjon. Newton kalte den "fluxion", mens den opprinnelige funksjon gikk under navnet "fluent". En "fluent", y, er for Newton en kontinuerlig varierende størrelse. En partikkels *bevegelse* i tid og rom var det intuitive utgangspunk-tet som Newton brukte. Den hastigheten som y forandret seg med, kalte han y’s "fluxion" og skrev den med sin prikknotasjon: $\dot{y}$.

Newton var skeptisk til infinitesimalene og ønsket etter hvert å unngå bruken av dem. Han er tydelig på jakt etter et grenseverdibegrep, for han peker på at en fluxion aldri betraktes alene, men alltid som et *forhold* mellom to fluxioner. Når Newton skal innføre et stigningstall i et punkt, bruker han ordene "primary ratio" (som vi skriver $\Delta y/\Delta t$) og "ultimate ratio" som han skrev med prikknotasjon (og som vi ville skrive dy/dt). Noen egentlig definisjon av det siste begrepet har han ikke, men påpeker at det er det bare er "the ultimate ratio" (det finale forhold) som eksisterer (dvs dy/dt) ikke de utlimate størrelser (altså dy og dt). Det motsatte ville jo medføre at alle småstykker var sammensatt av infinitesimaler.

Om "ultimate ratio" sier han også i en kort formulering:

Og på samme måte med det ultimate forhold av de forsvinnende deler må du forstå, ikke forholdet før de forsvinner, og heller ikke etter, men forholdet mellom delene idet de forsvinner.

Det eneste som ser ut til å mangle for Newton, er en presis og anvendelig notasjon til å definere grensebegrepet. La oss også ta med et eksempel på hvordan Newton fører bevis for sine setninger. Teorien om "prime and ultimate ratio" brukes også for å begrunne følgende utregning av den deriverte (fluxion) til $y = x^n$.

Newton tenker seg at x frambringes ved en jevn bevegelse med hastighet 1. I løpet av et "øyeblikk" (an instante), o, vil x være i $x+o$. På samme tid blir x^n til $(x+o)^n$, og vi bruker binomialformelen:

$$(x+o)^n = x^n + no\, x^{n-1} + n(n-1)/2\; o^2 x^{n-2} + \ldots + o^n$$

Forholdet mellom endringene blir:

$$o : no\, x^{n-1} + n(n-1)/2\; o^2 x^{n-2} + \ldots + o^n = 1 : n\, x^{n-1} + n(n-1)/2\; o\, x^{n-2} + \ldots$$

Når endringen forsvinner, vil det ultimate forhold være $1 : nx^{n-1}$ Dette er forholdet mellom fluxionene av x og x^n. Da fluxionen av x var forutsatt å være 1, følger det at x^n har fluxionen nx^{n-1}.

Newton utleder mange derivasjonsformler, samt de generelle derivasjonsregler. Han finner også en rekke integraler, og har innsikt i den inverse natur av disse regneformene. Newton ser også på krumning og krumningssentra for algebraiske kurver. Dette er første gang annenderiverte (fluxions of fluxions) opptrer i matematikken.

Teorien om "The prime and ultimate ratio" er grunnleggende i hele Newtons oppbygning av analysen. Newton hevdet om sin framstilling at den var i harmoni med den klassiske geometri og unngikk infinitesimaler. I dag kan vi tolke Newtons begrep "ultimate ratio" som et viktig skritt i retning av det moderne grenseverdibegrep. Newtons "ultimate ratio" er imidlertid ikke et aritmetisk definert begrep, men et verbalt formulert begrep motivert av det fysiske bevegelsesbegrep. Newton maktet ikke å rive seg løs fra de geometriske forestillinger og formulere det aritmetiske og eksakte limesbegrep som vi i dag bruker:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Det skulle da også gå ett nytt århundre før noen klarte å formulere det eksakte grenseverdibegrepet.

Årene 1684-86 ble blant de viktigste i naturvitenskapens historie. Newton var da endelig blitt overtalt av venner til å utgi sine astronomiske og fysiske oppdagelser. Han arbeidet nesten dag og natt i to år med dette, og verket *Naturvitenskapens matematiske prinsipper* (kalt *Principia*) ble realisert. Dette mesterverket fikk straks sterk innflytelse i hele Europa. Framstillingen er elegant. Den er preget av en enorm systematikk og en imponerende dybde og bredde i de problemer som tas opp. Utgangspunktet er lovene som gjelder for legemers bevegelse, og ut fra dette forklarer han en hel rekke fenomener (bl.a. flo og fjære) som var kjent for jorden, månen og resten av vårt solsystem. Verket var en syntese av Keplers og Galileis teorier og var den første og største triumf for den nye matematiske analyse som Newton hadde oppdaget. Newton markerte innledningen til en helt ny epoke i naturvitenskapen. Men ser vi nøyere etter, finner vi at den matematiske analyse spiller en helt underordnet rolle i Principia. Alle de viktige utledningene er gjort ved å kombinere klassiske geometriske og koordinatgeometriske resonnementer med Newtons intuitive grensebegrep. På sine eldre dager fortalte Newton at ideene og deler av utledningene først ble gjort ved hjelp av hans nye matematiske analyse, og senere skrevet om til geometri for å bli forstått og godtatt. Men studier som senere er gjort av Newtons forarbeider til Principia, viser at han da valgte å jobbe rent geometrisk. Newton behersket alle deler av sin tids matematikk.

I 1696 flyttet så Newton til London etter 30 års intens virke ved Cambridge. Han utga flere nye bøker, men det meste av siste del av sitt liv brukte han til studier i teologi og historie. Newton hadde også brukt mye tid på dette i første del av sitt liv. Selv om hans skapende periode innen matematikken var slutt, så hadde han sine matematiske evner i behold og løste flere matematiske problemer som andre matematikere i Europa hadde gitt opp å løse. Fra 1703 til sin død var han også president i det engelske vitenskapsakademi, *The Royal Society*.

Selv om *G.W. Leibniz'* vei til analysen er ganske forskjellig fra Newtons, så rager Leibniz like høyt som bidragsyter til skapelsen av differensial- og integralregningen. Leibniz arbeidet også på mang andre fagfelter, og hans aktiviteter hadde en enorm spennvidde, og ha ga viktige bidrag til filosofi, logikk, geologi, mekanikk, optikk, hydrostatikk og matematikk. Han var kort sagt et universalgeni. Leibniz var også en produktiv skribent.

Leibniz begynte sine studier ved universitetet i Leipzig da han var 15 år gammel. Han studerte jus, logikk, filosofi og teologi. I 1666 skrev han sin doktorgrad *De arte combinatoria*. Her la han fram sin sentrale idé om å utvikle et *universelt symbolspråk* å tenke i, en slags tenkningens algebra. I dette språket ville alle feil kunne avsløres som en slags beregningsfeil, og alle filosofiske debatter ville gå mot sin avslutning. For matematikken ble dette nyttig ved at det førte Leibniz fram til flere store oppdagelser av matematisk notasjon. Han står som en av de store oppfinnere av matematiske symboler.

Leibniz kom også over noen matematiske arbeider i denne perioden av sitt liv. Bl.a. husker han å ha sett Cavalieris *Geometria indivisibilibus*. Men hans mangfoldige aktivitetstrang må ha gjort det vanskelig for han å få tid til mer enn en overfladisk gjennomlesning. Det meste av den matematikken Leibniz kunne, hadde han lært seg selv. Han kritiserte universitetene for bare å være formidlere av lærdom, uten å gi selvstendig dømmekraft. Leibniz ville at kunnskapen skulle anvendes i fysikk, kjemi, geografi, botanikk, zoologi og anatomi. Etter avlagt doktorgrad ble Leibniz tilbudt et professorat, men han avslo.

I årene 1670 og 71 skrev Leibniz sine første arbeider i mekanikk og laget sin regnemaskin. Han engasjerte seg også i diplomatyrket, og i årene 1672-76 bodde han i Paris som utsending for kurfyrsten av Mainz. I Paris møtte han mange framstående mennesker, deriblant Christian Huygens (1629-1695) som da var den ledende naturviter på kontinentet. Huygens ga Leibniz impulsen til å ta fatt på matematikkstudier. Før 1672 hadde han ikke vært i særlig berøring med dette faget. I perioden 1672-76 gjorde Leibniz også to reiser til London.

Der møtte han flere matematikere og fysikere, og var også til stede på noen møter i Royal Society. Leibniz ga seg så i kast med de matematiske arbeider av Descartes, Pascal, Fermat og Barrow. Parallelt med dette utviklet han også egne metoder, og årene 1672-76 ble hans mest kreative periode i matematikken. I løpet av disse årene oppdaget han sin form av differensial- og integralregningen.

Leibniz publiserte de fleste av sine arbeider i differensial- og integralregning i årene 1684-92. Til dette brukte han tidsskriftet *Acta eruditorum* som han og Otto Mencke hadde startet i 1682. Men mange av Leibniz' ideer er bare å finne i de hundrevis av sider med notater som han hadde gjort siden 1673. Da han i 1714 skrev *Historia et origo calculi differentialis* (Differensialregningens historie og opprinnelse), understreket han at det spesielt var to spor som førte han fram til den nye analysen: tallfølger og geometriske problemer.

I dette tilfellet er vi i den heldige situasjonen at selve originalnotatene der Leibniz oppfinner sin symbolbruk, er bevart. Den 29.oktober 1675 forandret Leibniz' arbeider karakter, og notasjon og symbolbruk ble satt i fokus. Dette skjedde i det berømte manuskriptet hvor han på sin jakt etter en effektiv representasjon av de grunnleggende operasjoner som inngår i infinitesimalregningen, skapte differensial- og integralregningens notasjon, slik den brukes den dag i dag. I utgangspunktet brukte Leibniz Cavalieris forkortelse "omnes lineae" (omn.) som forkortelse for sine integraler. Leibniz bemerker her at han har oppdaget følgende lov:

> *... hvis omn. settes foran et tall, en brøk, eller noe infinitesimalt, så framkommer en rett linje. Hvis omn. settes foran en linje fås en flate, og hvis foran en flate så fås et legeme, etc. i det uendelige. Det vil være nyttig å skrive* $\int$ *i stedet for omn., slik at*

$\int l = omn.l$ *eller summen av l-ene.*

Symbolet ∫ var på den tiden i bruk som S, og sto for den første bokstaven i ordet *summa*.

Leibniz ga seg straks i gang med å oversette sine gamle formler til det nye språket. Fra før hadde han kommet fram til en lang rekke resultater om summer. Fremgangsmåten han da hadde brukt var – uten å vite det - den samme som Arkimedes hadde brukt i sin oppdagelsesmetode (se avsnitt 2). En av formlene var slik:

$$omn.\,(x\,l) = x \cdot (omn.\,l) - omn.(omn.\,l)$$

Som nå kunne formuleres slik:

$$\int x\,l = x\int l - \int\int l$$

Settes for eksempel $l = x$ inn i denne likning fås:

$$\int x^2 = x\int x - \int\int x = x \cdot x^2/2 - \int x^2/2 \text{ , dvs.}$$

$$\int x^2 = x^3/3$$

Leibniz innså også fort at en så effektiv skrivemåte ville lede til nye regneregler - ja, til en ny gren av matematikken. Et problem han ga seg i kast med samme dag, var å finne en metode å komme fra $\int l$ til l på. Her gi han en første innføring av sitt d-symbol:

> *Gitt l og dens relasjon til x, bestem* $\int l$*. Dette må oppnås ved den omvendte beregning, dvs. la oss anta at* $\int l = ya$ *[a konstant]. La* $l = ya/d$*, så vil d forminske dimensjonen, liksom* $\int$ *forhøyer den [altså settes d i nevneren av dimensjonsgrunner].* $\int$ *betyr en sum og d en differens. For en gitt y kan vi alltid bestemme y/d eller l, dvs. differensen av y-ene. Altså kan en likning overføres til en annen som* $\int c \int l^2 = (c \int l^3)/3a^3$ *kan overføres til* $c \int l^2 = (c \int l^3)/3a^3 d$ *.*

∫ og d er altså inverse operasjoner for Leibniz. Dermed har Leibniz også innført et d-symbol, som av dimensjonsgrunner settes i nevneren. Vi bør merke oss at Leibniz kaller størrelsene med d foran for differenser, men likningen l = ya/d viser at hans første differenser ikke er infinitesimale størrelser. Fram til dette punktet har Leibniz egentlig betraktet l -verdiene som leddene i en tallfølge, og x-verdiene som leddenes nummer. Samtidig betraktet han $\int l$ som et areal og ikke som en uendelig lang linje. Det neste han gjør er å prøve og ordne opp i dette:

> *Alle disse teoremer er også sanne for følger hvor differansen mellom leddene forholder seg til leddene med et forhold som er mindre enn enhver valgt størrelse.*

Dermed kan teorien også benyttes for kontinuerlige kurver. Den 11.november 1675 innser han også at ∫ ikke øker dimensjonen og at d ikke senker den. ∫ fungerer som en summering av arealstriper, altså elementer av samme dimensjon som et areal. Leibniz flytter d-en opp foran den variabel den skulle virke på. Når han innfører betegnelsen y for kurven, får arealet altså skrivemåten $\int ydx$. Dermed gjorde han d og $\int$ til dimensjonsløse regneoperatorer. Han kalte regneoperasjonene for henholdsvis "calculus summatorius" og "calculus differentialis". Ordet integral ble innført noen år senere etter forslag fra en av Bernoulli-brødrene.

Leibniz understreker at dette er hans brudd med Cavalieris metode med indivisibler. Ifølge Leibniz så beregnet nemlig Cavalieri arealer som summen av en samling linjer (omn. *l*), mens Leibniz nå beregner arealer som en sum av arealdifferensialer. Dette får han fram ved å bruke notasjonen $\int ydx$.

Med denne effektive notasjon i bruk, går utviklingen slag i slag for Leibniz. I november 1676 viste han at

$$dx^n = n\,x^{n-1},\ n \in \mathbf{Q}\text{ ; og}$$

$$\int x^n = (x^{n+1})/(n+1),\ n \in \mathbf{Q}\backslash\{-1\}$$

Han bruker også kjerneregelen i beregning av differensialer.

I juli 1677 finner han riktige formler for differensialet av produkt og kvotient. Først hadde han ment at

$$d(x \cdot y) = (dx) \cdot (dy)\text{, men dette førte til motsigelser.}$$

I 1680 gir han et bevis for sin formel for differensialet av et produkt:

$$d(x \cdot y)=(x+dx) \cdot (y+dy) - xy = xdy + ydx + dydx$$

Her neglisjeres siste ledd fordi det er uendelig lite i sammenlikning med resten (slik argumenterte ofte også Fermat, Barrow og Newton), dvs.

$$d(x \cdot y) = xdy + ydx$$

Samme resonnement gir

$$d(y/x) = (xdy - ydx)/x^2$$

Senere gir Leibniz mange anvendelser av sin nye matematiske metode. Som betingelse for et maksimum eller minimum for en funksjon y, innfører han

$$dy = 0$$

Som betingelse for vendepunkt innføres betingelsen

$$ddy = 0$$

Som Newton gjorde fluxionsregningen til den grunnleggende metode i analysen, slik gjorde også Leibniz operasjonen differensiering til grunnlagsmetode i sin "differensial- og summasjonsregning". Siden Newton og Leibniz' tid, har denne framstillingsformen vært den vanlige. Differensiering betraktes som grunnleggende metode, mens integralet avledes som den inverse operasjon (antiderivasjon).

Det spørsmål som da naturlig reiser seg er å få avklart og definert differensialenes natur og eksistens. De fleste av Leibniz' etterfølgere godtok uten videre eksistensen av infinitesimale størrelser og benyttet disse flittig for å bevise sine resultater. For å summere opp kan vi si at Leibniz mente at infinitesimalregningen rettferdiggjorde seg ved sin praktiske anvendbarhet. Metodens "algoritmiske natur" og det at den var en god "modus operandi", var viktigere for Leibniz enn det ubesvarte spørsmål om infinitesimalenes egentlige natur og eksistens. Dette spørsmålet hadde da også en slik dybde at det først fikk en løsning nesten 300 år senere med den såkalte "Non-Standard analysen".

Leibniz var like mye filosof som matematiker, og hans bidrag til differensial- og integralregningen må forstås mot en slik bakgrunn. Det kom som et resultat av hans jakt etter et universelt symbolspråk for bevegelse og forandring generelt. Alle forandringer måtte etter hans tankegang kunne tilbakeføres til forandringer i det uendelig små. Dette ga Leibniz hans filosofiske motiv for å bruke differensialene. Universet skulle beskrives ved lovmessigheter for forandringer i det uendelig små. Det fortelles at differensial- og integralregningens generalitet gjorde et sterkt inntrykk på Leibniz. Det bør vel også legges til at Leibniz' visjon aldri har slått til med en slik bredde som han foreslo. Men hans idé om å lage en algebra for logikken spilte en betydelig rolle for 1800-tallets matematiske utvikling, spesielt George Booles (1815-1864) symbolske logikk.

Fra 1676 til sin død bodde så Leibniz for det meste i Hanover. Der hadde han en stilling som hovedbibliotekar hos hertugen som i 1715 ble Englands konge under navnet Georg I. Leibniz var også med å grunnlegge Berlins vitenskapsakademi i år 1700.

Med Newton og Leibniz var differensial- og integralregningen blitt etablert og anerkjent som matematiske disipliner. I 1696 ble den første lærebok i den nye analyse utgitt. Den var skrevet av Marquis G. de l'Hospital. Han var elev av Johann Bernoulli, og stort sett var det lærerens forelesningsnotater han utga i boka *Analyse des infiniment petits*.

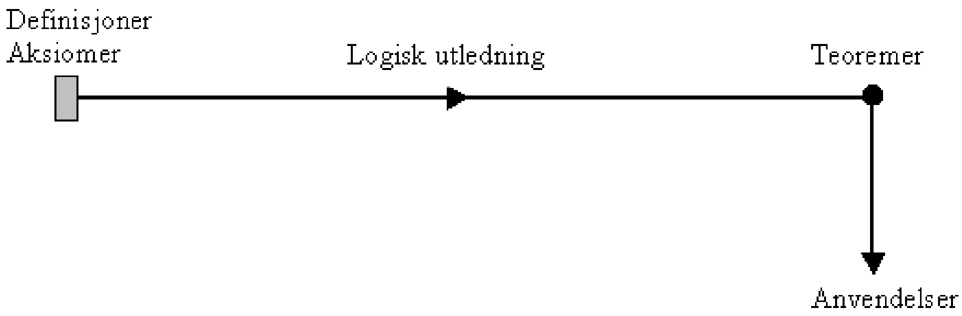
Men de nye metodene ble også utsatt for hard kritikk. Filosofen George Berkeley var Newtons hardeste kritiker. Han hevdet at Newtons teori om "prime and ultimate ratio" var like ubestemmelig som forholdet 0/0. Leibniz fikk sine hardeste angrep fra Bernard Nieuwentijt, borgermester i en by nær Amsterdam. Hollenderen innså gjerne at metoden hadde mange riktige anvendelser, men pekte på at den lett kunne føre til paradokser. En del av den kritikken som kom førte med tiden til konstruktive forsøk på å "reparere" Newtons og Leibniz' fundamenter og gjøre de matematisk stringente. Men det tok over 100 år før Newtons fundament var ferdigformatert og nærmere 300 år for Leibniz' vedkommende. Newtons fundament ble basert på *grenseverdibegrepet (limes)* der A. Cauchy (1789-1857), K. Weierstrass (1815-1897) og B. Riemann (1826-1866) ytet viktige bidrag. Mens Leibniz' fundament ble basert på *infintitesimalbegrepet* der M. l'Hospital (1661-1704) og A. Robinson (1918-1974) kom med de viktigste arbeidene.

Vi skal ikke ta opp til diskusjon den prioritetsstriden som oppsto mellom Newton og Leibniz - og deres tilhengere. Vi skal bare slå fast at den nesten allment aksepterte mening i dag, er at Leibniz oppdaget differensial- og integralregningen etter, men uavhengig av Newton. Det er også en betydelig forskjell mellom Newtons og Leibniz' vei fram til den nye analysen. Newton gikk primært ut fra det fysiske bevegelses- og hastighetsbegrepet, mens Leibniz begynte med studiet av tallfølger. Newton oppdaget differensial- og integralregningen først (Newton 1665-66, Leibniz 1673-76), men Leibniz publiserte den først (Leibniz 1684-86, Newton 1704-36).

6. Hovedfaktorene for framveksten

Selv om det var forhold av filosofisk og intellektuell karakter som spilte størst rolle for naturvitenskapens framvekst, så må vi heller, ikke glemme at det uten tvil også eksisterer viktige sosiale og økonomiske årsaker. Bare på et visst kulturelt nivå (skrivekunst, boktrykkerkunst, skoler osv.) er en vitenskapelig revolusjon mulig. De fleste kulturer gikk under før noen vitenskapelig revolusjon i det hele tatt kunne skje.

Men de forsøk som har vært gjort på å forklare den vitenskapelige revolusjon som resultat av samspillet mellom teknologiens krav og framskritt (hvor teknologien igjen er en funksjon av de sosiale behov), har aldri vært særlig overbevisende. For selv om denne sosiale og teknologiske bakgrunn er nødvendige forutsetninger for en vitenskapelig revolusjon, så er de langt fra tilstrekkelige forutsetninger.



Context of justification.

Når vi i dag presenterer et fagfelt innen matematikk ved våre universiteter, følger vi et ganske strengt deduktivt skjema bestående av aksiomer, definisjoner, teoremer med bevis og til sist anvendelser. Dette kalles gjerne *"context of justification"* (Suppe 1974, s. 125). Men *"context of discovery"* kan ha vært helt annerledes. Nye fagfelter i matematikken starter ofte på et intuitivt grunnlag. Etter denne intuitive fase, må det imidlertid følge en kritisk gjennomarbeidelse av fagfeltet hvor det hele gjøres eksakt og framstilles deduktivt. Formaliseringen fjerner alle vage forestillinger og lar bare symboler som representerer de abstrakte matematiske forhold stå igjen. En slik formalisering av teorien gir til gjengjeld avkall på å framstille forbindelsen mellom de inngående begreper og sanseerfaringer. Man glemmer at den aksiomatiske konstruksjon bygger på f.eks. et empirisk grunnlag.

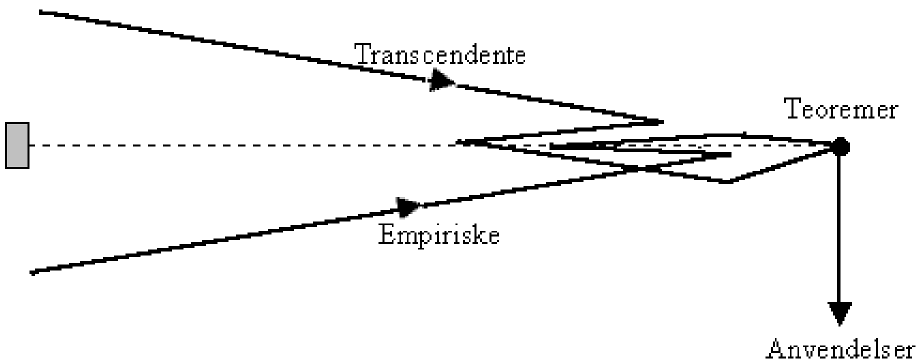
I min hovedoppgave i matematikk har jeg arbeidet spesielt med opprinnelsen til integral- og differensialregningen. I disse studiene har jeg kunnet påvise tre kreative faktorer som bidro til å etablere det nye fagfeltet. Med en *kreativ faktor* menes et forhold som beriker matematikken med fruktbare ideer og skaper faglig framgang.

Logisk tenkning er uansett et nødvendig grunnlag for enhver matematisk virksomhet. Den første kreative faktor er altså *logikken*. Denne har vi som kjent arvet fra grekerne. Grekerne var opptatt med å komme fram til sannhet, og spesielt den platonske skole la vekt på at sannhet bare kunne nås ved matematiske abstraksjoner og resonnementer. Leibniz og hans "characteristica generalis" kan spesielt settes i forbindelse med den greske tenkning, men alle matematikere som var med å skape den nye analyse benyttet seg av gresk tankegods som en viktig del av sitt "mentale arbeidsredskap."

I den greske matematikk avspeiler dette seg i exhaustion-metoden og Euklids geometri.

Men en slik formal beskrivelse av matematikken er ikke fullstendig. Matematikerne må også oppdage hva de skal bevise. Denne prosessen er også en del av den samlede matematiske virksomhet, men den er ikke deduktiv.

Grekerne hadde imidlertid vært så konsekvente i sitt krav om eksakthet, at alle upresise ideer ble forkastet fra matematikken. De kunne fort ende i tankekors av typen *Zenons paradokser*. Et resultat av dette var at uendelig små størrelser ble forkastet. Infinitesimalbetraktninger ikke ble benyttet. På 1600-tallet søkte imidlertid matematikerne etter nye metoder som kunne gi muligheter til å angripe de oppståtte problemer mer direkte. Av slike problemer som matematikerne sto ovenfor, var de fleste av fysisk og astronomisk natur (tangent, areal og volumproblemer). Disse problemene ga forslag og retning til matematiske metoder, og komplisert matematikk ble skapt for å mestre dem. Matematikken fikk støtet til en dynamisk måte å tenke på.



Context of discovery.

De fleste matematikere på denne tiden trodde av religiøse grunner at det eksisterte en tilnærmet isomorfi (strukturlikhet) mellom den ytre verden og matematikken. De innså nok at det inngikk uklarheter i de matematiske metodene de benyttet, men de våget å bevege seg langt på usikker matematisk grunn fordi metodene ga riktige fysiske resultater. Matematikk og fysikk var så nær forbundet at fysikkens styrke støttet matematikkens svakhet. Denne kreative faktoren kan det passe å kalle den *empiriske*. Et godt eksempel her er Newtons teori om *grenseverdier* ("primar and ultimate ratio") som er hentet fra fysisk empirisme.

Men matematikerne innførte også begreper som ikke hadde noen bestemt fysisk betydning. Dette kan vi kalle den *transcendente* faktor og består altså av begreper som ligger utenfor erfaringens område. Et eksempel her er begrepet infinitesimal. Det dukker opp flere steder i historien, f.eks. hos en jødisk filosof, hos flere av middelalderens skolastikere, hos Leonardo da Vinci, Kepler osv. Leibniz' begrep infinitesimal hadde også sin bakgrunn i en transcendent idealisme. Begrepet uendelig ble også anvendt, og det å tenke i uendelige prosesser ble tillatt. Det har vært antydet at grekernes forkastning av det "aktuelt uendelige", spesielt slik Aristoteles uttrykte det, var en av de viktigste årsaker til at de ikke klarte å forene aritmetikk og geometri. Det dreide seg her om å innføre begreper som matematikerne så med sitt "åndelige øye". Denne dristighet i begrepsdannelsen har nok mye av sin forklaring i filosofi og religion, og har ført til at store deler av matematikken i vår tid har kunnet beskrives som *The Science of the Infinite*, slik Hermann Weyl har uttrykt det.

Nye fagfelter i matematikken starter ofte på et intuitivt grunnlag. Etter denne intuitive fase, må det imidlertid følge en kritisk gjenomarbeidelse av fagfeltet hvor det hele gjøres eksakt og framstilles deduktivt. Formaliseringen fjerner alle vage forestillinger og lar bare symboler som representerer de abstrakte matematiske forhold stå igjen. En slik formalisering av teorien gir til gjengjeld avkall på å framstille forbindelsen mellom de inngående begreper og sanseerfaringer. Man glemmer at den aksiomatiske konstruksjon bygger på f.eks. et empirisk grunnlag. Forsøkene på å presse formalismen i matematikken til det ytterste, har ført til et studium hvor det ikke lenger er enighet om hva matematikk egentlig er. Her er det flere skoler blant matematikerne, og de to største har vært den formale (Hilbert o.a.) og den intuitive (Kronecker, Brouwer, H. Weyl).

Det vi altså har prøvd å gjøre i denne artikkelen er å beskrive det intuitive stadiet i utformingen av den matematiske analyse. På dette stadiet har vi sett at teoriene var ikke-stringente. Men det ser ut til at de fleste matematiske teorier må gjennom et slikt stadium før de kan gjøres stringente. Både Newton og Leibniz måtte overlate til sine etterfølgere å gjøre de nyutviklede teoriene stringente.

I analysens opprinnelseshistorie ser møtet mellom matematikk, fysikk, filosofi og religion ut til å være av avgjørende betydning for matematikken. Innen kulturhistorien anerkjennes nå også religionen som en nøkkel for å forstå hva som skjedde i 1600-tallets Europa. I disse vekselvirkningene stilles nye problemer og reises nye synspunkter. Senere i sin utvikling har analysen også stadig blitt utdypet og videreutviklet ved samspillet mellom ren og anvendt matematikk. Selv om den gamle oppfatning om at matematikk var sannhet om naturen har bleknet i våre dager, så viser matematikken seg til stadighet å være overraskende nyttig i studiet av naturen. Felter som gruppeteori, ikke-euklidsk geometri og sannsynlighetsregning viser seg å være av nøkkelbetydning for å forstå den fysiske verden rundt oss.

Det generelle bildet som til slutt tegner seg for oss er et intellektuelt gjennombrudd, med sin indre dynamikk, som skjer under de rette vitenskapelige, religiøse, kulturelle og sosiale forhold. Hver av de inngående elementer spiller sin rolle, og uten et av elementene kunne begivenhetene ha skjedd ganske annerledes. Her passer det å avslutte med et sitat fra Albert Einstein (Einstein 1950, s. 244):

> *Vitenskapelig språk og begrepers internasjonale karakter skyldes at de skarpeste hjerner fra alle land og fra alle tider har laget dem. I ensomhet, og likevel med felles krefter om det endelige mål, skapte de det åndelige verktøy for den tekniske revolusjon som har omformet menneskenes levesett de siste århundrer. Deres system av begreper har vært en fører gjennom det forvirrende kaos av inntrykk, slik at vi lærte å få tak i den virkelige sammenheng ut fra enkelte iakttagelser.*

Litteratur:

Atiyah, M.F.: Utviklingslinjer innen ren matematikk. *Nordisk matematisk tidsskrift* nr. 1, 1979.
Berlinski, D.: *A Tour of the Calculus.* Mandarin Paperbacks, 1996.
Birkeland, B.: Newton og matematikken. *Nordisk matematisk tidsskrift*, nr. 2, 1988, side 61-75.
Brynhildsen, Aa.: *Johannes Kepler*, Oslo 1976.
Cantor, G.: *Vorlesungen uber Geschichte der Mathematik,* Vol. I-IV, Leipzig 1894-1908.
Edwards, C.H.: *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag, 1979.
Einstein, A.: *Tanker og meninger*. Oslo 1950.
Holton, G.: *The Thematic Origins of Science*. Cambridge, Mass 1973.
Hooykaas, R.: *Religion and the Rise of Modern Science*. Edinburgh and London 1972.
Kline, M.: *Mathematics: A Cultural Approach*. New York 1962.
Kline, M.: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York 1972.
Koestler, A.: *The Sleepwalkers. A History of Man's Changing Vision of the Universe*. Penguin 1964.
Lindstrøm, T.: *Kompletthet og kontinuitet*. Temahefte i matematikk 2, Gyldendal Norsk Forlag, Oslo 1992.
Smestad, B.: *Foundations for fluxions*. Hovedoppgave i matematikk, Univ. i Oslo, 1995. Internett: http://www.hifm.no/~matematikk/ansatte/bjorns/hovedoppg.htm
Suppe, F. (ed): *The Structure of Scientific Theories*. Univ. of Illinois, 1974.
Thorvaldsen, S.*: Opprinnelsen til den matematiske analyse*. Hovedoppgave i matematikk, Univ. i Trondheim, 1979.
Thorvaldsen , S.: *Integral- og differensialregning før Newton og Leibniz*. Nordisk matematisk tidsskrift, nr. 2, 1982, s. 49-63.
Thorvaldsen, S.: *Keplers vei til planetlovene*. Nordisk matematisk tidsskrift, nr. 2, 1983, s. 49-58.
Wilder, R.L.: *Evolution of Mathematical Concepts*. John Wiley and Sons, 1968.

7. Et teoriskifte for verdensrommet

Sol, måne, stjerner og kometer har hatt stor innvirkning på oss mennesker og vår måte å tenke på. Viktige begivenheter som sterke kometer eller totale solformørkelser, kunne bli husket i generasjoner. Dette var selvsagt i generasjonene før gatelysenes tid. Med kometen *Hale-Bopp* (1997) friskt i minne, kan det være av interesse å ta et historisk tilbakeblikk. I dag vet vi at kometer er små legemer som beveger seg inn i det interplanetariske rom. Men det tok lang tid og mye bekymring før astronomene kom fram til denne erkjennelsen. I det følgende skal vi bruke kometene som illustrasjon på det store teoriskiftet som fant sted i naturvitenskapen fram mot det moderne verdensbildet.

1. Klassisk katastrofeteori

Få himmelfenomener har opp gjennom historien fanget så mye oppmerksomhet som kometene når de en sjelden gang dukker opp på himmelen med sitt fakkel-liknende lys. Kometene har ikke alltid vært sett på med velkomstglede. Gjennom århundrer var det en vanlig oppfatning at de var budbringere om store ulykker som krig, pest, dyrtid, uår og hungersnød. En slik illevarslende tolkning av fenomenet var rådende hos alle folkeslag både i øst og vest, og det engelske ordet *"disaster"* betyr egentlig "ond stjerne".

Noen påstår at kometer har påvirket historiens gang. Keisere skal ha gått av på grunn av kometers trussel og store slag er blitt vunnet under deres innflytelse. To slag som ble utkjempet i England høsten 1066 skal ha blitt påvirket av kometer: i slaget ved Stanford bro falt den norske kong Harald Hårdråde, og i slaget ved byen Hastings falt den engelske kong Harald Godvinsson da Vilhelm Erobreren beseiret engelskmennene. Ryktene hadde visstnok svirret blant engelskmennene om at Vilhelm ble ledet i sitt angrep av en komet som ved påsketider før slaget hadde vist seg hver natt. Og den overnaturlige makten bidro - hevdes det - til å svekke kampånden hos de engelske krigerne.

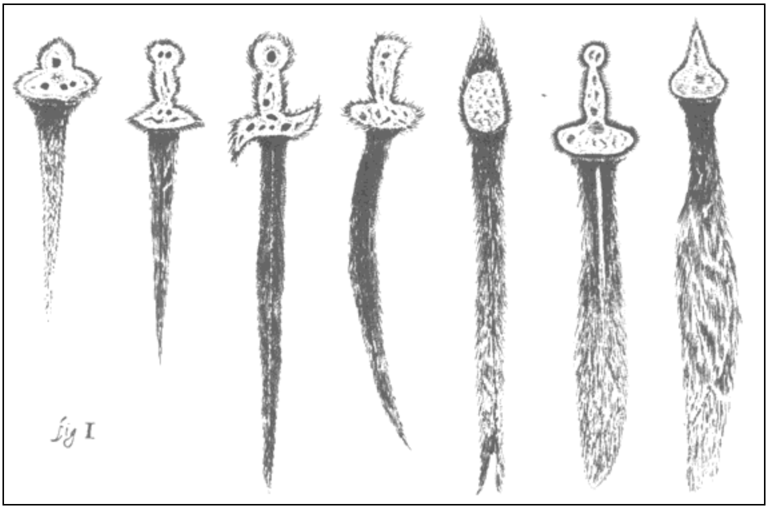
Bayeux-teppet viser Halleys komet anno 1066 oppe til venstre. Islandske kilder beretter at de så en komet i påsken det året, og at denne varslet kong Harald Hårdrådes fall ved Stanford bro.

Krigshistorikeren general Montgomery vurderte imidlertid det engelske tapet på en helt annen måte: engelskmennene tapte fordi de gjorde taktiske feil og var dårlig ledet av sin konge, og først etter at slaget var tapt fant historieskriverne ut at kometen hadde signalisert nederlag for engelskmennene.

Den frykt og redsel kometer kunne skape blant folk er temmelig vanskelig å beskrive. En komet i 1182 ble faktisk tatt for å være en slange eller en drage som ålte seg fram over himmelhvelvingen. Historikeren Nicetus skrev: *"Av og til, til befolkningens skrekk, åpnet den en enorm kjeft som om den grådig tørstet etter menneskeblod!"* En fransk lege ga følgende beskrivelse av kometen som viste seg i 1528: *"Denne kometen var så skummel og fryktinngytende, og den skapte slik frykt i befolkningen, at noen døde av skrekk og andre ble syke... Kometen hadde blodets farve. Øverst på kometen kunne vi se en arm som holdt et svært sverd som om den var klar til å stikke oss ned. På begge sider av kometen var det flere økser og blodige kniver med menneskehoder liggende innimellom".*

I William Shakespeare's (1564-1616) skuespill *Julius Cæsar* omtales også en komets rolle, dog i mer poetiske ordelag:

> *When beggars die, there are no comets seen:*
> *The heavens themselves blaze forth the death of princes.*



Johannes Hevelius tegnet kometer som truende sverd på disse tegningene fra 1668.

2. Stjerne med ris

Fra Norden finner vi også gamle kometbeskrivelser. I kong Håkon Håkonsons saga blir det fortalt om en komet som viste seg i året 1240: *"Ni netter etter jul [15. januar] gikk kongen ut om kvelden, og det var klart vær. Da så han en underlig stjerne som var mye større enn de andre og rent uhyggelig, og ut fra den gikk det liksom et skaft. Kongen lot* *kalle til seg mester Vilhjalm, og da han kom og fikk se stjerna, sa han: Gud hjelpe oss! Dette er et merkelig syn. Denne stjerna heter Kometa, og den viser seg når en stor høvding skal dø, eller før store slag. Dette var vinteren før Skule jarl falt. Denne stjerna ble sett i mange land om vinteren.".*

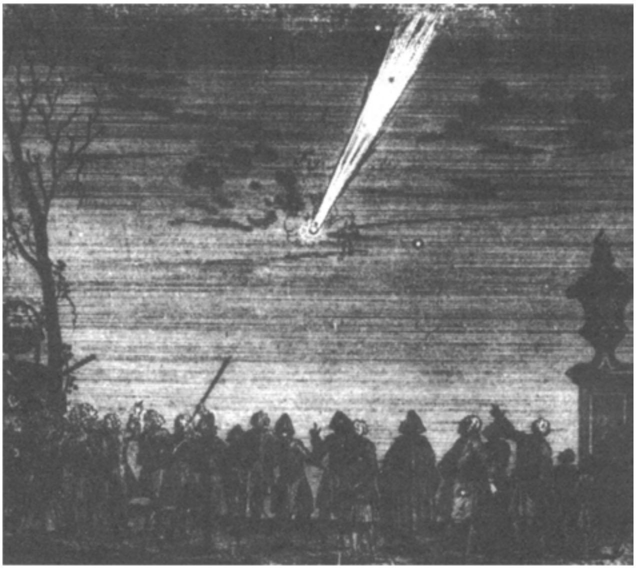
Mester Vilhjalms kunnskaper skriver seg fra de lærde i Europa. Navnet komet kommer av det greske *kométes* som betyr langhåret. I flere europeiske land blir kometer kalt hårstjerner eller halestjerner. I Norden var det også vanlig med rumpestjerne, risstjerne eller stjerne med ris. Moderne beregninger har bekreftet sagaens beretning, men tidsangivelsen er trolig upresis. Kongen befant seg i Bergen, og der var kometen først synlig i månedsskiftet januar-februar. Kronologien er ofte det svakeste punkt ved muntlige historie-overleveringer.

En klassiker blant svenske kometframstillinger er boka *Cometoscopia*, utgitt i 1613 av Laurentius Paulinus Gothus. Boka fremmer den klassiske katastrofeteorien, og relaterer denne til mange kometer og historiske hendelser. Laurentius hevder at det er minst tre faktorer som avgjør en komets virkning: dens figur, farge og størrelse. Kometens hastighet og bane har også stor betydning. Bevegelsesretningen blant stjernene indikerer hvilken himmelretning faren vil komme fra, og en retrograd bevegelse innevarsler særskilt farlige tider. Først med de to populærvitenskapelige bøkene til Anders Spole (1681) og Anders Celsius (1735) ble det utgitt banebrytende arbeider på svensk som brøt med den gamle kometteorien. Men kometfrykten lå fortsatt lenge over den vanlige mann og kvinne.

Forfatteren Johan Falkberget refererer i den kjente 1600-talls romanen *An-Magritt* til den klassiske komettradisjonen når han lar en av prestene si: *"Hr. Jens mente at de forrykende vintrer skyldtes stjernenes forkjærte stilling og kometenes plutselige og uformodede oppdukken.".*

I en nedtegnelse etter Ånund Jonson Lindås på Nordmøre, kan vi lese: *"Anno 1742 da begyndte en meget dyr tid og slette år, så at kornet frøs bort i 3 år efter hinanden, så at mange led stor hunger og nød. Anno 1743 såes en stjerne på himmelen som førte et ris op og frem for sig og bar tegn til hunger og dyrtid; men i denne tid opvakte Gud sin velsignelse så rigelig på søen med sild og fisk, så at mange blev opreist ved siøsiden."* Dette kan ha vært komet '*Grischow*' (1743 I) som nådde en lysstyrke som en middels stjerne i februar 1743, men denne hadde kort hale. Ved juletider samme år dukket det opp en enda større komet (ofte kalt 'De Cheseaux' eller 'Klinkenberg'). Denne skinte i februar 1744 sterkere enn Venus og hadde opptil 7 haler i vifteform med lengder på over 30 grader. Halen er også beskrevet som en "lyskåpe". Så det var vel heller denne kometen Lindås så.

Kometen 'De Cheseaux' kan sammenliknes med 'Hale-Bopp' kometen fra 1997. Det er den eneste kometen som har vært like klar som de sterkeste stjernene like lenge som Hale-Bopp, hele 7 uker.



En tysk illustrasjon som viser kometen i år 1743-44 (Hedberg 1985). Det var trolig denne Ånund Jonson Lindås så og beskrev.

Det er ikke så merkelig at noe så uforklarlig og mystisk som en komet kunne skape grobunn for frykt og skrekk. Hvordan kunne datidens mennesker være trygge på at dette som sakte gled over himmelhvelvingen samtidig som det forandret utseende (ofte fra dag til dag) kun var livløs materie?

I parentes kan vi her bemerke at den gamle teorien om kometer som budbringere om pest og ulykke, nå har blitt fremmet i en oppsiktsvekkende ny utgave. Den berømte engelske astronomen Fred Hoyle forestiller seg at flere sykdomsepidemier kan ha sin opprinnelse på kometer. Hoyle har tatt avstand fra utviklingslæren om at livet startet på jorden. Han mener i stedet at det må ha en kosmisk opprinnelse, og tilskrives en høyere intelligens. Kometene kommer da inn som mulige transportører av liv, inkludert ulike former for sykdomsvirus, som blir spredt utover i solsystemet langs kometenes baner. Når jorden senere passerer et slikt baneområde, skulle mikrobene overføres til vår planet. Hoyles hypotese har hittil fått liten støtte.

Under besøket av 'Hale-Bopp' kometen oppstod det også et hårdnakket rykte på Internett om at kometen ble fulgt av et mystisk, "saturnliknende objekt". Det tok lang tid før astronomene fikk overbevist folk om at dette mystiske objektet kun var en velkjent stjerne med strålemønster.

3. Newtons kometteori

De greske filosofer, med Aristoteles (384-322 f.Kr.) i spissen, hadde plassert kometene som et fenomen i de øvre luftlag. Aristoteles hevdet at tørre og varme gasser av og til steg opp til høyere luftlag og tok fyr, og dermed ble til kometer, stjerneskudd eller nordlys. Rundt år 1600 hadde utforskingen av solsystemet gjort store framskritt. Tycho Brahe (1546-1601) innledet på øya Ven mellom Sverige og Danmark den moderne kometvitenskap. Han fastslo at parallaksen (posisjonen sett fra ulike steder på jordoverflaten) til kometen som viste seg i 1577 var meget liten, og at kometene derfor befant seg et sted i rommet mye lenger borte enn månen. Dermed innledet han forskningen som på sikt skulle avlive mystikken rundt kometenes og stjernehimmelens rolle.

Johannes Kepler (1571-1630) hadde funnet lovene for planetenes bevegelser, men han tok ikke kometene med i dette bildet. I stedet mente han de var en slags raketter som antentes, akselererte rettlinjet og deretter sakket farten. Men Kepler var den første som fortolket komethalen korrekt ved å hevde at presset fra solstrålene feide materie bort fra skyen rundt komethodet. Kepler var forut for sin tid med ideen om at stråling fra solen kan utøve en kraft av denne type.

Grunnlaget for vår viten om kometers baner stammer fra Isaac Newton (1642-1727), som i 1687 publiserte en kometteori i sitt berømte verk 'Principia'. Newton så på solsystemets storslagne og eksakte oppbygning som et bevis for at det finnes en intelligent og mektig Skaper som styrer i universet. Etter flere års arbeid kom han fram til at kometer beveger seg etter samme lover som andre objekter i solsystemet. Etter store anstrengelser fant han en metode for å beregne kometers baner ut fra kun tre nøyaktige observasjoner. I 'Principia' viste han til godt samsvar mellom sine teoretiske beregninger og faktiske observasjoner av kometbanene. Newton gjorde imidlertid ingen forsøk på å beregne omløpstiden for kometene, men overlot dette til Edmond Halley.

4. Halleys teoritest

Den engelske astronomen Edmond Halley (1656-1742) var venn av den store Newton, som lærte ham å beregne baner i tyngdefelt. Halley samlet opplysninger om mange kometer. Han fant at den kometen han selv observerte i 1682 hadde omtrent samme bane som den kometen Kepler observerte i 1607, og som Apian fulgte i 1531. En stor komet så altså ut til å vise seg påfallende regelmessig hvert 76. år. Dermed konkluderte han med at det var samme komet som viste seg, og at den gikk i en langstrakt, men lukket bane rundt solen. Videre forutsa Halley at kometen ville vise seg igjen sent i 1758 eller tidlig i 1759.

Dette skulle bli en spennende test av Newtons teori, men Halley døde før den tid. Få vitenskapelige forutsigelser har fått slik oppmerksomhet, og kometen sviktet ikke. Den tyske bonden og amatørastronomen Johann Georg Palitzsch i Gdansk oppdaget den først med sin selvbygde stjernekikkert, før alle Europas astronomer. Det var julaften 1758.

Senere har en med temmelig stor sikkerhet klart å spore 'Halleys komet' tilbake i historiske kilder til år 240 f.Kr. I år 87 f.Kr. ble kometen sett av den senere keiser Cæsar, som da var 14 år gammel. Det var også 'Halleys komet' som skremte engelskmennene i år 1066. Vi bør vel legge til at Edmond Halley også gjorde et par andre forutsigelser om kometers gjenkomst. En skulle komme i 1790 og en annen i år 2255! Den i 1790 slo ikke til, og gjenkomsten i 2255 er også feilaktig etter senere beregninger.

I 1910 kom 'Halleys komet' ganske nær jorden, og i mai strakte halen seg 150 grader over himmelen, nesten fra horisont til horisont. Den 20. mai var det beregnet at den lange halen skulle sveipe over jorden. Enkelte ventet jordens undergang, også noen aviser. Astronomene hadde funnet spektrallinjene for den blåfargede og giftige gassen *dicyan* $(CN)_2$ i komethaler. Avisene kjørte ut dette, og noen fryktet masseforgiftning. Spesielt var angsten stor i mindre bygder, og noen selvmord ble rapportert fra Midt- og Øst-Europa. En historie forteller at budeiene på en gard ved Trondheim spiste opp rømmen kvelden før det skulle skje, de tok ikke sjansen på at alt det gode skulle gå til spille. Men natten gikk uten at noe uvanlig skjedde. Den morgenen får vi håpe at de siste restene av kometskrekk forsvant. Komethaler er sterkt fortynnet og har en nesten vakumliknende konsistens.

Sist 'Halleys komet' viste seg var i 1985-86. Denne passasjen var ugunstig sett fra jorden, men flere romsonder ble sendt opp til kometen. Den europeiske romfartsorganisasjonen sendte sonden 'Giotto', som var oppkalt etter den kjente italienske maleren Giotto de Bondone som malte 'Halleys komet' i 1301. Den 13. mars passerte sonden rett gjennom kometkomaen med en fart på bortimot 70 km/sek. 'Giotto' ga oss mange verdifulle måleresultater fra sine 10 vitenskapelige instrumenter, inkludert et fargekamera. Selve kjernen viste seg å være en mørk, avlang klump av vann, karbonmonoksid, karbondioksid og silikater med utstrekning på 8 x 16 km. Dens rotasjonstid var 7,4 døgn.

5. Kometer og meteorsvermer

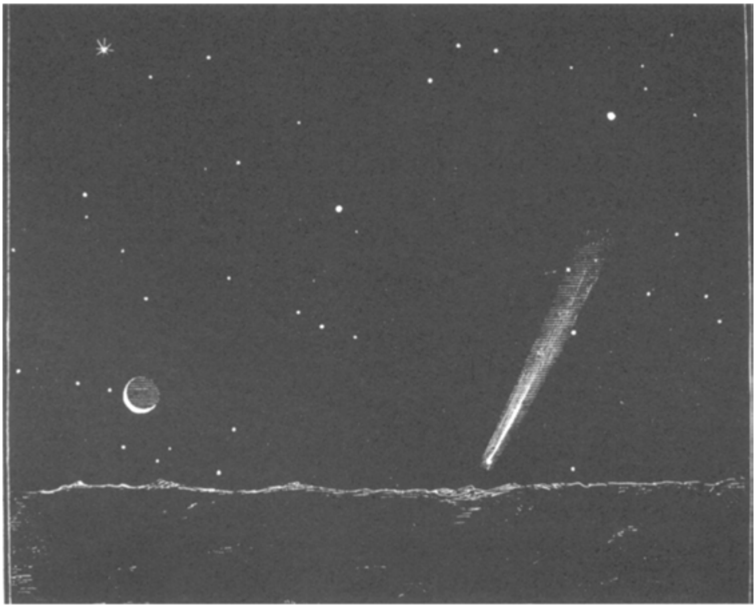
I 1826 oppdaget en østerriker med navn Biela en komet. Den viste seg å tilhøre gruppen av periodiske kometer med en rundetid på 6,7 år. Kometen ble sett igjen i 1832. I 1839 var den ikke synlig på grunn av ugunstige observasjonsforhold, men i 1846 ble den gjenoppdaget presis der en ventet å finne den. Så skjedde noe uventet: det vokste fram en kul på kometkjernen, og den sprakk i to biter. En tid kunne man se en dobbeltkomet på himmelen. Tvillingene kom tilbake igjen i 1852.

Denne merkelige kometen hadde flere overraskelser i bakhånd. I 1859 kunne den ikke sees av samme grunn som i 1839. De aller beste beregninger var gjort for å kunne gjenoppdage den i 1865, men til tross for intens leting ble kometparet ikke funnet. Det har faktisk aldri vært sett siden! Noen astronomer har ment at de fant den banen som kometparet kan ha kommet inn i, men fotografering med spesielle kameraer har ikke gitt resultater.

Forsvinningsnummeret ble imidlertid avslørt til slutt. Den 27. november 1872 - da jorden skulle krysse kometens bane - ble verden overrasket av et ildsprutende meteorregn. Stjerneskuddene falt i hundretusener som snøfiller! Bielas komet hadde rett og slett gått i oppløsning, og en mengde partikler har fortsatt å følge den gamle kometbanen. Kometen ble altså opphav til en meteorsverm

6. Septemberkometen i 1882

Kometen som går under navnet 'Septemberkometen 1882' er kanskje den mest lyssterke som noensinne er sett. Den var best synlig fra jordens sørlige halvkule, og er derfor mindre kjent her nord. Da den nådde sin største lysstyrke skinte den nesten like klart som fullmånen, så her er det tale om en virkelig kjempe. Man kunne se den ved høylys dag! Denne kometen gikk så nær solen at den nesten sneiet borti soloverflaten, avstanden var bare 430 000 km. Slike kometer kalles betegnende nok for "solskrapere" (engelsk: *sunscrapers*). Sett fra jorden passerte kometen først bak og så foran solen. Astronomene fulgte kometen like til solranden, men ingen spor av kometen kunne sees på solskiven. Dette forteller oss hvor uhyre tynt materiale kometer består av.



Den sterke Septemberkometen i 1882. Fra C. Flammarion: Populär Astronomi, Stockholm 1897 (Hedberg 1985).

Noen dager senere ble den synlig på morgenhimmelen kort tid før soloppgang. Den hadde en kraftig skinnende hale. Store omveltninger begynte så å skje i kometens kjerne. Tåkemasser rev seg løs, og kjernen forlenget seg og delte seg i fire-fem biter som en nyttårsrakett. Denne kometen var synlig med det blotte øyet i fem måneder og kommer etter beregningene tilbake om 700-1000 år.

7. Kometfysikk

Hva vet vi i dag om disse objektene på himmelen som har skapt slik frykt blant mennesker? Kometene kommer fra solsystemets grenseland - nøyaktig hvorfra vet vi ennå ikke. Her er det kaldt, ned mot det absolutte nullpunkt (-273° Celsius), og alle stoffer er i fast form. En komet består derfor av en isblanding, en kjerne av vann, støv og frosne gasser, med diameter 1-100 kilometer – en ”skitten snøball” (Fred L. Wipple, 1950). Kometkjernen kan betraktes som en dypfryst og uberørt del av den urmaterien som solsystemet opprinnelig ble dannet fra. De vanligste stoffene ser ut til å være vann, karbonmonoksid, karbondioksid og silikater. Fordi temperaturen er så lav foregår det ingen kjemiske reaksjoner.

Dersom tyngdekraften fra vår sol får kontroll over en slik kjerne, begynner den lange reisen inn mot vårt solsystem. Reisen kan ta århundrer, og farten øker stadig. Når kjernen kommer inn i vårt solsystem gir strålingsvarmen fra solen fordampning, og det dannes en tåke rundt den (koma). En komets lysstyrke er primært et resultat av sollysets refleksjon i kometens hode og hale. Kometen blir virkelig spennende å observere når den er i nærheten av solen og dersom den er ganske stor. Solstrålingen er da mest intens og kometens fart størst, opptil 500 kilometer i sekundet. Dersom du ser på kometkjernen gjennom en stjernekikkert, vil du se et stadig varierende fontene-skuespill. I varmen fra solen koker gasser sprutende opp fra kometkjernen. Strålingstrykket fra solen og den såkalte solvinden av elektrisk ladde partikler som strømmer utover fra solen, "blåser" det hele bakover til en hale. Derfor vender alltid komethalen bort fra solen. Etter å ha passert solen, slynges kometen ut av solsystemet mot det kalde og golde interstellare rom.

Avstanden fra kometen til solen er en kritisk faktor som avgjør om den skal bli en stor komet. En gjennomsnittlig komet har lysstyrke som varierer omvendt proporsjonalt med tredje potens av avstanden til solen. En stor komet passerer maksimum 1,3 astronomiske enheter fra solen, men er sjelden nærmere enn 0,5 astronomiske enheter (en 'astronomisk enhet' er lik avstanden mellom jorden og solen). Kometens avstand til jorden og kjernens størrelse, har også betydning for om den skal bli en "stor" komet.

Dersom kometen på sin vei kommer svært nær en av planetene, kan den få forandret sin bane slik at den blir værende innenfor solsystemet. Kometen blir da medlem i gruppen av såkalte ’kortperiodiske kometer’. Denne gruppen teller i overkant av 180 medlemmer, de fleste er små. De går i langstrakte ellipsebaner med rundetider 3-200 år. Kometkjernene mister litt masse ved hvert omløp, tapet er anslått til 0,5-1 prosent. Kometene har altså, kosmisk sett, kort levetid. Fra ca. år 2000 f.Kr. og fram til i dag, har vi nedtegnelser av flere tusen kometobservasjoner. I 1995 var det katalogisert 878 kometer med omtrentlig kjente bane-elementer. De siste årene er det blitt oppdaget omkring 30 kometer i året, de fleste er bare synlige i teleskoper. Gjennomsnittlig kommer en godt synlig komet bare hvert 5.-10. år. De siste var 'Bennett' i 1970, 'West' i 1976, 'Hyakutake' i 1996 og 'Hale-Bopp' i 1997.

Kometen Hale-Bopp på himmel med nordlys den 16. mars 1997 kl. 1.45 norsk tid. Bildet er tatt fra Ringvassøya i Troms (objektiv 50 mm, blender 1.4, eksponeringstid ca. 25 sek., 1600 ASA film). Den brede hvite halen er støvhalen, og den blå halen mer rett opp er plasmahalen. De gamle nordboere kalte kometene for "stjerne med ris".

8. Kometkollisjoner?

Vi har observert kometer som har sprukket i biter og kollidert. Sist det skjedde var i 1994 da kometen 'Shoemaker-Levy' kolliderte med planteten Jupiter. Merker etter disse kollisjonene var synlig på Jupiter i flere måneder. Grunnen til at kometer sprekker skyldes tidevannsskrefter i solens og Jupiters nærhet, og at det oppstår gasslommer i kometens indre når de mest lettfordampelige stoffene oppvarmes.

Til tross for naturvitenskapens gode kjennskap til kometers fysikk, ser det ut til at frykten for dem har en viss gjenklang i menneskets psyke. I vår tid er vel faren for en eventuell kometkollisjon den eneste rest av "trussel" som gjenstår fra disse objektene. Det er dette filmer som 'Deep Impact' og 'Armageddon' spiller på. Men solsystemet er stort og jorden liten, så en kollisjon er svært lite sannsynlig. Denne lille risikoen må vi leve med. Det nærmeste vi vet en komet har kommet jorden var 'Lexells komet' som passerte 2,3 millioner kilometer fra oss i 1770. 'Hyakutake' og 'Hale-Bopp' var på det nærmeste henholdsvis 15 og 197 millioner kilometer fra jorden. Sjansen for å få en komet i hodet er mye mindre enn risikoen for at en takstein skal falle ned samme sted.

Når det gjelder kometers natur har altså vitenskapen gått fra en mystikkpreget komettradisjon til mer og mer detaljerte naturvitenskapelige modeller: fra astrologi til astronomi. Men teoriskiftet tok som vi har sett, lang tid. Enkle fysiske målinger, som dem Tycho Brahe gjorde, kunne nok ryste den klassiske teorien i dens fundament. Større vitenskapelige datamengder, som dem Newton og Halley frambrakte, var imidlertid nødvendige for å imøtegå innvendingene fra tilhengere av den klassiske teorien. Enda større erfaringsmengder og nøyaktighet i målinger og modell var nødvendige for at den nye teorien skulle bli akseptert av alle.

Liknende historier kan også fortelles for andre himmellegemer. Solen gikk fra å være den dominerende Solgud til å bli en vanlig stjerne. Sol- og måneformørkelser har enkle, naturlige forklaringer og kan beregnes. Planeten Mars var en gang den blodrøde krigsguden som egget til kamp, men er bare vår nabo i solsystemet som passerer forbi oss annet hvert år. Det samme er Venus. Solsystemet er avmytologisert, og astronomien har vist seg å bli en meget vellykket teori i matematisk formulering basert på Newtons tre lover pluss gravitasjonsloven. Med dette som redskaper har vi både kunnet reise i verdensrommet og plassere moderne kommunikasjonsutstyr der ute.

Litteratur:

Andersson, C. & Bjørgo, N.: Kometen av år 1240 i Håkon Håkonssons saga. *Astronomisk Tidsskrift*, nr 1, 1986, side 9-15.

Bronowski, J.: *The Ascent of Man*. BBC 1973.

Hedberg, B.: *Kometer och kometskräck*. Bokförlaget Rubicon, 1985.

Koestler, A.: *The Sleepwalkers. A History of Man's Changing Vision of the Universe*. Penguin books 1964.

Thorvaldsen, S.: Kometer i historiens lys. *Astronomisk Tidsskrift*, sept. 1997, side 21-25.

Whitehead, A.N. *Science and Modern World*. Cambridge 1926.

8. Oppdagelsen av planeten Neptun.

Neptun er den ytterste av de store såkalte gassplaneter og den nest ytterste av de 9 planetene i solsystemet. Historien om hvordan oppdagelsen skjedde er en av de virkelige klassikerne i naturvitenskapens historie. To personer deler æren, selv om vi senere har funnet ut at ingen av dem var den første som så planeten.

Historien begynner faktisk med planeten Uranus. Etter at man helt fra oldtiden hadde kjent til seks planeter eller "vandrestjerner", ble den sjuende, Uranus, oppdaget ved en tilfeldighet i 1781. Oppdageren var den til da unge og ukjente *William Herschel*. Han lette egentlig ikke etter noen planet, men var i ferd med å foreta en systematisk gjennomgang av himmelen med speilteleskopet sitt. Da støtte han på et ukjent objekt som ikke kunne være en stjerne. Den så ut som en liten skive og beveget seg langsomt mellom stjernene fra natt til natt. Først trodde Herschel det var en komet, men etter hvert ble det klart for ham at han hadde oppdaget en ny planet langt utenfor Saturns bane.

1. Problemer med Uranus

Hadde planetene kun blitt påvirket av tiltrekningen fra solen, ville de beveget seg i nøyaktige ellipsebaner. Men planetene trekker også på *hverandre,* noe astronomene må ta hensyn til når det skal beregnes tabeller over planetenes posisjoner.

Etter oppdagelsen skulle det nokså snart vise seg at Uranus ikke beveget seg helt som ventet. Mot slutten av 1700-tallet begynte astronomene å få problemer med å beregne banen. På begynnelsen av 1800-tallet hadde Alexis Bouvard oppgaven å lage planetta-beller for de tre ytterste kjente planetene: Jupiter, Saturn og Uranus. For Jupiter og Saturn fant Bouvard at de moderne observasjonene stemte meget godt. Men Uranus viste uforståelige avvik. Dette var bare 40 år etter oppdagelsen av Uranus, men i virkeligheten hadde Bouvard 131 år av observasjoner til rådighet. Uranus hadde nemlig blitt observert et 20-talls ganger og forvekslet med en stjerne før William Herschel oppdaget den i 1781.

Bouvard regnet ut innvirkningen fra Jupiter og Saturn og prøvde så å legge en ellipse gjennom de punktene han fikk. Men punktene passet ikke. Siden han hadde det travelt med å publisere planettabellene, bestemte han seg for å ikke å ta hensyn til de gamle observasjonene. Han beregnet så den beste ellipsebanen ut fra bare de *nyeste* observa-sjonene, og skrev at "..framtida fikk finne ut om de gamle posisjonene var unøyaktige, eller om planeten var under innvirkning av en underlig og ukjent kraft".

Svaret på denne problemstillingen lot ikke vente på seg lenge. Allerede etter få år var avviket målbart. Etter 25 år var det kommet opp i en vinkel på over 1 bueminutt, og det ble pinlig klart for astronomene at de ikke greide å forutsi Uranus' bane ved hjelp av Newtons gravitasjonslov.

Noen astronomer begynte å tvile på om Newtons gravitasjonslov var nøyaktig. En av skeptikerne var George Airy, som på den tiden var Englands ledende astronom. Han hevdet at Newtons lover ikke var helt nøyaktige ved så store avstander fra solen. Andre mente Uranus var påvirket av en forstyrrende kraft. En henvendelse til Airy fra presten og amatørastronomen Thomas J. Hussey i 1834 om at Uranus ble påvirket av gravitasjonskrefter fra en planet utenfor Uranus' bane, ble kontant avvist av Airy med begrunnelsen at Hussey's teori ikke hadde fnugg av sjanse til å avsløre hvilke ytre krefter som påvirket Uranus. En slik hypotese holdt rett og slett ikke mål, hevdet han, og den kunne derfor ikke bidra til å løse problemet med avviket i Uranus' bane. Dermed gjorde ikke Hussey noe mer med saken.

2. En ukjent planet?

Men på 1830-tallet og utover spekulerte stadig flere på om problemet skrev seg fra gravitasjonsforstyrrelser fra en ukjent planet utenfor Uranus. Denne ville trekke merkbart på Uranus, men bare i liten grad påvirke Jupiter og Saturn.

Kunne man regne seg fram til hvor denne planeten måtte være? Letingen var teoretisk sett vanskelig. Til slutt tok den 23-årige Cambridge-studenten *John Couch Adams* fatt på utfordringen.

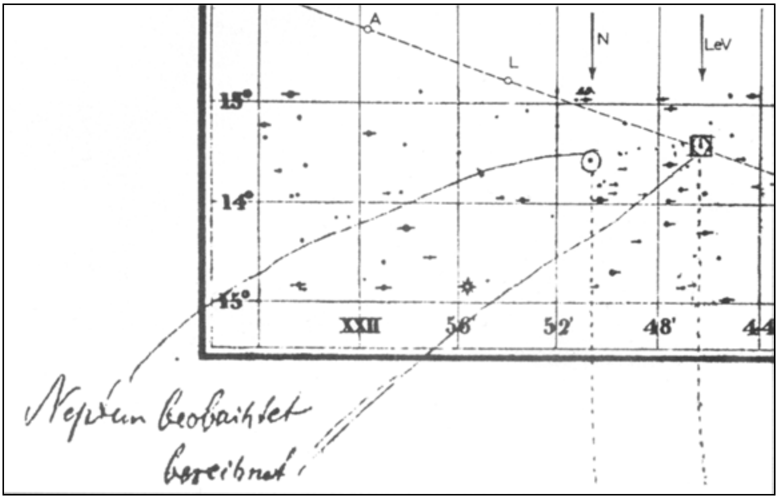
I 1843 hadde han en foreløpig løsning på problemet. To år senere gikk han på nytt igjennom beregningene, og fant at avviket i Uranusbanen kunne forklares ved en ny planet utenfor Uranus. Banen og massen til den nye planeten regnet han også ut og konkluderte med at Uranus hadde akselerert langsomt og innhentet og passert en ukjent planet. Etter passasjen avtok så akselerasjonen. Adams antok at den ukjente planeten måtte være å finne i stjernebildet Aquarius (Vannmannen).

Siden Adams selv ikke drev med praktisk astronomi, ble resultatene sendt til den 'Kongelige Britiske Astronom'. Airy mottok Adams sine kalkulasjoner i oktober 1845, men han reagerte kjølig som så mange ganger før, og ingen forsøk ble gjort på å se etter planeten selv om dette nå skulle være en enkel sak.

I Frankrike var arbeidet til Adams ukjent. Her begynte astronomen *Urbain Le Verrier* med tilsvarende beregninger sommeren 1845. Han fant flere feil i tabellene til Bouvard. Men disse var ikke store nok til å få teorien til å passe med observasjonene. Året etter hadde han beregnet data for en ny planet. Disse ble sendt til det 'Franske Akademi' ved Observatoriet i Paris. Men Le Verrier hadde ikke overdreven tro på den formelle saksgang. I tillegg til å sende beregningene sine til "hovedkvarteret", sendte han dem også til astronomen *Johann Gottfried Galle* i Berlin - en astronom han kjente fra før.

3. Oppdagelsen

Brevet ble mottatt den 23. september 1846, og Galle tok straks kontakt med observatorie-direktøren Johann Encke for å få bruke den utmerkete 23-centimeter Fraunhofer refraktoren de hadde der. Dette gikk i orden, og han fikk også tillatelse til å ta med en medhjelper ved navn Heinrich D'Arrest. Galle kunne derfor rette sin kikkert mot det beregnede stedet i stjernebildet Aquarius samme kveld som han fikk brevet. Han sammenliknet nøye det han så med et stjerneatlas som nettopp var kommet fra trykkeriet, og håpet enkelt og greit at utseende og posisjon ville avsløre den. Etter noen få minutter beskrev Galle en stjerne av lysstyrke 8 i posisjonen $21^{t}\ 50^{m}25^{s}$, og D’Arrest utbryter: - Den stjernen står ikke på kartet!



Galle og d’Arrest sin første observasjon av Neptun den 23. september 1846. Planeten ble funnet i posisjon N, Le Verriers beregnede posisjon er merket LeV, og Adams’ beregning er merket A. (Ref. Moore 1996)

Mindre enn 1 grad fra det beregnede punkt hadde Galle funnet det nye objektet som manglet på kartet. Søket var over og den 8. planeten i solsystemet var endelig oppdaget. Dagen etter hadde den flyttet seg litt, og Encke kunne skrive tilbake til Le Verrier og fortelle at den beregnede planet eksisterte. Ettersom Galle og D'Arrest hadde gode stjernekart til hjelp, hadde det egentlig vært en enkel oppgave for han å lokalisere den ukjente planeten i den oppgitte posisjonen. D'Arrest ble senere professor i Danmark.

Etter oppdagelsen kom det forslag om at planeten skulle kalles Le Verrier. Men tradisjonen med planetnavn fra mytologien slo igjennom. Planeten som svevde dypt ute i det store verdensrom fikk navnet *Neptun* etter guden til de gamle romere for de dype hav.

Grunnen til at astronomene i England ikke hadde gjort noe med Adams' arbeide, var bl.a. at de ikke hadde noe godt stjernekart over det aktuelle området. De måtte da eventuelt foreta det møysommelige arbeidet med å måle ut stjernenes posisjoner i det aktuelle området på himmelen for å avsløre om noen av dem beveget seg påtagelig.

I England hørte man også at Le Verrier hadde begynt sine beregninger, og dette fikk omsider fart på Airy som ga beskjed om å sette i gang en systematisk leting etter den ukjente planeten. Det var imidlertid ingen passende teleskoper ved Greenwich, så Airy kontaktet professor James Challis ved Universitetet i Cambridge. Han ble bedt om å bruke det beste teleskopet de hadde der, en 29-centimeter Northumberland refraktor. Under arbeidet ble mange nye stjerner oppdaget, så det gjaldt å finne ut hvilken som hadde planetliknende bevegelse i forhold til bakgrunnsstjernene. Challis hadde ikke særlig gode kart over det aktuelle området på himmelen. Han foretok derfor sveip-søk og sjekket alle stjernene som de fikk øye på. Adams hadde regnet ut at den ukjente planeten hadde en lysstyrke så svak som magnitude 9 (Neptuns magnitude var 7,8 på det aktuelle tidspunkt). Men Challis var ikke fullt så optimistisk, så han sjekket alle stjernene ned til lysstyrke 11. Dette gjorde selvsagt sitt til at søket tok tid, noe han meddelte Airy. Dermed løp tiden rett og slett fra dem, og nyheten fra Berlin ble trolig mottatt uten særlig begeistring...

Ved nærmere ettersyn viste det seg senere at astronomene i Cambridge hadde observert planeten flere ganger, men tatt den for å være en stjerne!

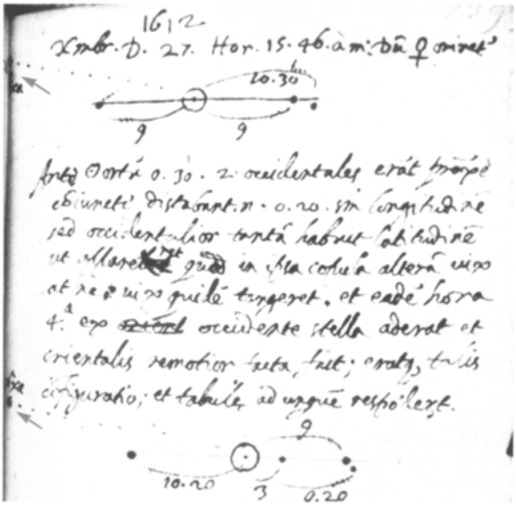
Nyheten om den nyoppdagede planeten ble fort kjent rundt i Europa, og allerede mindre enn en måned etter oppdagelsen ble "Le Verrier's planet" observert fra Oslo! Observasjonene ble behørlig publisert i tidsskriftet 'Astronomiche Nachrichten' det påfølgende året. I årene som fulgte fortsatte man med meridianobservasjoner for den nye planeten for å kunne bestemme en nøyaktig bane.

Etter flere års opphetede diskusjoner mellom engelske og franske astronomer, ble man til sist enige om å gi æren for oppdagelsen til *både* Adams og Le Verrier. Adams oppga en omtrentlig posisjon for Neptun allerede ett år før Le Verrier, men det var tross alt på grunnlag av beregningene til Le Verrier at Galle fant Neptun. Begges forutsigelser var basert på gode - om enn ulike - analytiske metoder og lå innen en feilgrense på omtrent 1 grad, som tilsvarer omtrent to ganger månens diameter sett fra jorden.

Avstanden ut til planeten hadde begge feilaktig antatt til 39 ganger avstanden mellom jorden og solen (= astronomisk enhet). I virkeligheten viste avstanden seg å være 30,1 astronomiske enheter. Neptun passer nemlig ikke inn i den såkalte Titius-Bodes lov om planetenes avstand fra solen. Denne loven ville plassert Neptun i en avstand på 39 astronomiske enheter, men "loven" stemmer altså ikke når det gjelder solsystemets ytterste områder.

4. Sett i 1612

I de senere årene har astronomene kommet over et nytt appendiks i historien om Neptun. Charles Kowal og Stillman Drake la merke til at Neptun må ha passert svært nær Jupiter i 1612/13. På denne tiden var det bare en dyktig stjerneobservatør med teleskop, nemlig *Galileo Galilei*. Ved ettersyn i hans observasjonsjournal har man funnet to tegninger med en "stjerne" nær Jupiter som ikke finnes på moderne stjernekart. Posisjonen stemmer godt med den beregnede for Neptun. Galilei har til og med notert at denne "stjernen" ser ut til å ha beveget seg litt i forhold til bakgrunnsstjernene. Så Galilei observerte trolig Neptun 233 år før Galle.



Galileis observasjon av Neptun i desember 1612. Neptun er til venstre markert med piler. Galilei trodde den var en fiks-stjene (fixa = fast på latin). (Beatty 1981)

5. Merkelige måner

Kort tid etter at Galle hadde funnet Neptun, oppdaget den engelske amatørastronomen *William Lassell* Neptuns store måne. Den fikk navnet *Triton*. Den beveger seg rundt planeten i en nesten sirkulær bane, og fra Neptun ser den ut omtrent som vår måne fra jorden. Men med en forskjell: Den går rundt Neptun "feil vei" - dvs. mot planetens rotasjonsretning - med en omløpstid på nesten 6 dager. Målinger viser at Triton har en tynn atmosfære.

Den andre månen, *Nereid*, ble oppdaget av astronomen *Gerhard P. Kuiper* i 1949. Den er liten og går i en meget langstrakt bane med omløpstid på 360 dager. I dag kjenner vi til ennå 6 mindre måner rundt Neptun, alle oppdaget av romsonden *Voyager 2* i 1989.

6. Ringer

I den umiddelbare nærhet av en planet, kan tidevannskreftene bryte opp store, faste legemer i små biter, og forhindre at små biter samler seg til store. Selv om vi ennå ikke helt forstår opprinnelse og endringer av planetringer, så er det allment godtatt at de er naturlige konsekvenser av tidevannskrefter og kollisjoner mellom partikler. Samspillet mellom de små bitene gjør at det dannes flate ringer i planetens ekvatorplan.

Allerede i 1846 mente William Lassell at han kunne se en svak ring rundt Neptun. Men tre år senere fant han ut at "ringen" skyldtes reflekser i teleskopet han brukte.

Først på 1980-tallet begynte astronomene igjen å søke systematisk etter ringsystemer rundt Neptun. Nå gjorde man det ved å følge med når planeten passerer forbi svake stjerner. Man observerte en rekke slike stjerneformørkelser for Neptun og dens nære omgivelser. I 90% av tilfellene så det ut som det ikke kan være noe ringmateriale som skygger for stjernen mens planeten gled forbi. I resten av tilfellene kunne man se at stjernen i perioder ble formørket. Ringen så altså ut til å bestå av flere mindre buesegmenter.

Data fra romsonden *Voyager 2* ga oss bedre svar på disse spørsmålene. Romsonden kartla flere ringer, som betegnende nok fikk navn som Galle, Le Verrier, Lassell, Arago og Adams regnet innenfra. Det viste seg å være klumper i den ytterste ringen (Adams) som forårsaket de spesielle okkultasjonsfenomenene som ble observert. Voyager fotograferte på sin lange tur ringer rundt Jupiter, Saturn, Uranus og Neptun.

7. Flere planeter?

Oppdagelsen av Neptun er et skoleeksempel på et vellykket samarbeid mellom matematisk teori og observasjon. Slik er den naturvitenskapelige metode "etter oppskriften". Men kunne framgangsmåten brukes til å finne flere planeter i solsystemet?

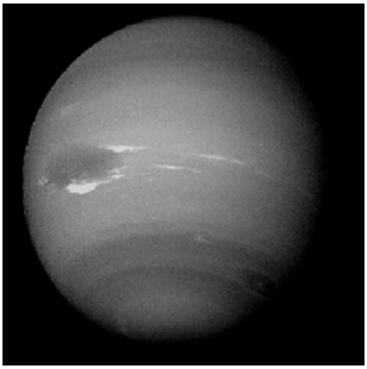
Selv om det var sparsomt med grunnlagsdata, mente enkelte at flere ukjente planeter var inne i bildet og skapte forstyrrelser hos de andre. William Pickering, og Percival Lowell publiserte forutsigelser av henholdsvis "Planet O" og "Planet X" rundt 1915. Men intet ble funnet.

Først i 1930 fant Clyde W. Tombaugh ved Lowellobservatoriet i Arizona en ny planet, Pluto, ved hjelp av fotografering. Pluto er svært liten, og den har derfor minimal innvirkning på de andre planetene. Oppdagelsen må i all hovedsak bedømmes som et resultat av nitidige og systematiske observasjoner og har ingen tilsvarende teoretisk bakgrunn som for Neptun. Det er ikke alltid at repriser fører til god naturvitenskap.

8. Kald klode

Neptun har vist seg å være temmelig lik Uranus. Begge er betydelig større enn jorden og har en diameter på ca. 50 000 km. Neptun er en smule mindre enn Uranus, men har til gjengjeld større tetthet. Atmosfæren på Neptun består av hydrogen, helium og metan. Temperaturen er på rundt 200 minusgrader, og planetens rotasjonstid er ca. 16 timer. Neptun bruker hele 165 år på å tilbakelegge en runde rundt solen.

Neptun kan nå opp i en lysstyrke på + 7,7, noe som gjør det mulig å se den i mindre teleskoper. På tross av dette så framtrer både Uranus og Neptun som tåkete og konturløse objekter selv i store, moderne teleskoper. Dette var nok en av årsakene til at det tok relativt lang tid før disse planetene ble oppdaget. Det er lett å forveksle dem med stjerner.

Bildet til venstre viser Neptun med sine to sterkeste måner. Nereid er markert med pil oppe til høyre, mens Triton er i nedkant av det overeksponerte bildet av Neptun. De fire "piggene" som stikker ut fra Neptun skyldes en optisk feil i stjernekikkerten og er ikke virkelige. Bildet til høyre viser Neptun med den svarte flekken fotografert av romsonden Voyager i 1989. (Beatty 1990)

Neptun er problematisk å observere fra Norge de nærmeste årene da den står lavt på himmelen - i det samme området som solen står når vi har vinter og korte dager på våre breddegrader. Planeten er blågrønn og har en utstrekning på bare 2,3 buesekunder. Det er nesten umulig å se noen detaljer. Den vakre fargen skyldes metan, et stoff som absorberer rødt lys meget effektivt og dermed frarøver det reflekterte sollyset sine røde komponenter. Overflatedetaljer fikk vi først i 1989 da romsonden Voyager 2 passerte Neptun. Mest uventet var den svarte flekken som ble funnet på den sørlige halvkule, men denne var borte igjen på bilder tatt av romteleskopet Hubble i 1994-95. Så det er fortsatt mye ukjent ved denne planeten, mest slående er vel det faktum at den har et varmeoverskudd som gjør at den stråler ut 2,6 ganger mer energi enn den mottar fra sollyset.

Ved begynnelsen av vårt århundre går Neptun i langsom bevegelse fra stjernebildet Capricornus til Aquarius. I år 2010 vil den være i samme område som den var da den ble oppdaget i 1846, siden omløpstiden er på 164,8 år. Da vil vel mange se om de kan gjenta den klassiske "oppdagelse" utstyrt med stjernekikkert og enkle kart med usikker posisjon for planeten. Det er alltid spesielt å føle seg som pionerer.

Takk

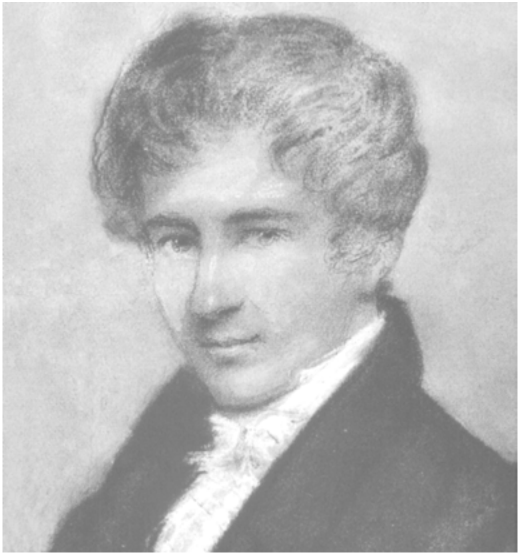
Svein Imsland fortjener en stor takk for bidrag til denne artikkelen.

Litteratur:

Beatty, J.K m.fl.: *The new Solar System*. Sky Publ. Corp., 1990.
Grosser, M: *The discovery of Neptun*. N.Y. 1979.
Moore, P: The hunt for Neptun. *Sky and Telescope*, Sept. 1996, s.42-43.

9. Abels matematikk og livsløp

Niels Henrik Abels dramatiske liv startet for rundt 200 år siden, nærmere bestemt den 5. august 1802, trolig på stedet Nedstrand ved Stavanger. Faren het Søren Georg og var prest i nabosognet Finnøy. Også farfaren hadde prestestilling i bygda Gjerstad i Aust-Agder. Han døde året etter at Niels Henrik var født, og Søren Georg ble da utnevnt som etterfølger. Familien flyttet dermed til Gjerstad der barna vokste opp. Niels Henrik kom til verden tre måneder for tidlig. Han vokste opp som den nest eldste i en søskenflokk på seks, fem brødre og en søster.



Niels Henrik Abel (1802 - 1829). Dette er det eneste portrettet av matematikeren som er bevart. Tegnet av Gørbitz i Paris i 1826. Gørbitz var en dyktig portrettmaler, men hadde en viss tendens til å forskjønne. I følge andre kilder så Abel i årene 1823 - 1824 ikke så godt ut. Han skal ha vært nokså mager og gråblek, sannsynligvis p.g.a. at han ikke levde spesielt sunt med arbeid utover nettene. Bildet henger nå i Abels Hus ved Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet, Universitetet i Oslo.

Niels Henrik Abel døde i en alder av bare 26 år. Etter vanlig målestokk er man da fortsatt meget ung og vil så vidt ha rukket å avslutte en universitetsutdannelse. Men det er forskjell på mennesker. I løpet av sitt korte liv utviklet Abel matematiske teorier som ble avgjørende for utviklingen av faget. I matematikken er det imidlertid ganske vanlig at det er de unge som gjør de største oppdagelsene, og den erfaring som kommer med årene ser ut til å ha mindre betydning enn ungdommens intuisjon og idérikdom.

I denne artikkelen skal vi gjenfortelle den klassiske historien om Abel. Andre har skrevet tilsvarende tidligere. For noen år siden kom det imidlertid en ny stor Abelbiografi forfattet av Arild Stubhaug. Vi henter derfor momenter fra disse nye kildene, og underveis avlegger vi faglige besøk til tre av de områdene i matematikken der Abel gjorde sine største oppdagelser: **Likningsteorien,** teorien om **elliptiske funksjoner**, og teorien for **uendelige rekker**.

Niels Henrik Abels liv er sterkt preget av en menneskelig dramatikk som har interesse langt ut over matematikernes rekker. Han opplevde både store triumfer og dype tragedier. De ytre vanskelighetene han møtte i livet, og den måten han mestret disse, er en historie som forteller om mye medmenneskelig omtanke og varme. Til tross for et liv med mye fattigdom og mange mørke sider, maktet han å bevare en urokkelig optimisme. De stadige problemene hans nærmeste familie kom opp i, og bekymringene for framtiden, ser ut til å ha mistet mye av sin negative makt ved den lykke og skaperglede han må ha kjent hos seg ved sitt skrivebord. Men til sist ble han selv rammet, og på sykeleiet må han etter hvert - mens han pleies av sin forlovede Christine Kemp - innse at døden vil komme. Abels tidlige død har dramatikk parallell med *Titanics* forlis.

Gustav Vigelands store monument av Abel står i slottsparken i Oslo. Monumentet skal være et symbol på Abels åndelige styrke. Det er også reist statuer av Abel andre steder, bl.a. på Gjerstad og i Froland ved huset der han døde.

Våre store nasjonale helter i Norge utenom idretten er ikke mange, og det er svært få av disse som teller utenfor landets grenser. Når vi nå markerer 200 års dagen for hans fødsel, blir dette markert både faglig, nasjonalt og internasjonalt. I 1902 var det 100 år siden Abel ble født. Stortinget besluttet den gang høytidelig å bevilge penger til markering av hundreårsdagen. Det var et stort nasjonalt jubileum, og en komité av universitetslærere under ledelse av professor Fridtjof Nansen hadde ansvaret.

Biørnstjerne Bjørnson fikk i oppdrag å lage en festkantate. I brev til Bjørnson hadde Nansen skrevet at: "For meg står det som vår plikt å gjøre mest mulig ut av begivenheter som en Abels fødsel...; men desværre har vi bare en Abel; leiligheden kommer ikke igjen på 100 år." En konkurranse for billedhuggere om Abel-statuer resulterte i de velkjente statuene av Gustav Vigeland i Slottsparken. Det ble laget festskrift og holdt minnesamlinger. Abels matematiske arbeider og etterlatte brev, og andre skriftlige kilder ble utgitt i bokform på norsk og fransk. Matematiske fagtidsskrifter over hele verden trykket minneartikler. I Gjerstad ble jubileet feiret med en folkefest over to dager. Det ble også besluttet å opprette en internasjonal "Abel-pris" som skulle finansieres av den svenske konge og utdeles hvert femte år. Men dette vedtaket gikk i oppløsning sammen med unionsoppløsningen med Sverige i 1905.

1. Bakgrunn

Bestefar Hans Mathias Abel ble i 1784 utnevnt til sogneprest i Gjerstad prestegjeld som bestod av Gjerstad og Vegårshei. Hans Mathias Abel var en kunnskapsrik og trofast prest som sørget for bedre organisering av både skole og fattigvesen. Av særlig betydning for ettertiden var det at han sammen med sønnen Søren Georg Abel, startet Gjerstad Læseselskab i 1794. Leseselskapet kjøpte inn bøker til utlån, og bidro slik til at vanlige folk fikk tilgang på samtidens litteratur. Leseselskapets litteratur var først og fremst av praktisk, populærvitenskapelig og samfunnsvitenskapelig art. Søren Georg Abel fungerte en tid som kapellan under sin far. Etter et fireårig mellomspill som sogneprest i Finnøy i Rogaland, kom han i 1803 tilbake til Gjerstad og overtok sognepresteembetet etter sin far. Niels Henriks far var som bestefaren svært interessert i utdanning og helsearbeid i sognet. I opplysningstidens ånd dannet han lesesirkler for å innføre lokalbefolkningen i den moderne europeiske litteratur. Selv skrev han også en katekisme til bruk i skole og konfirmasjonsundervisning. Han var en evnerik og foretaksom person med utpregede politiske interesser og ambisjoner. Han var med på forhandlingene om ny grunnlov i 1814, og kom senere på Stortinget.

Niels Henriks mor, Anne Marie Simonsen, var fra Risør. Hennes far var byens rikeste kjøpmann i begynnelsen av 1800-årene. Anne Marie var 19 år da hun ble gift med Søren Georg Abel. Hun var kjent som en svært pen kvinne med god borgerlig oppdragelse. Men hun levde stadig mer et karakterløst selskapsliv, og tok lite del i det praktiske livet. Hun fikk store alkoholproblemer, og tok seg etter hvert lite av sine barn. Som prestekone og ektefelle ble hun en katastrofe, og var senere en vesentlig årsak til familiens tragedier.

Tre andre kvinner var meget viktige i Niels Henrik Abels liv: Søsteren Elizabeth Magdalene som var 8 år yngre enn han, fru professor Hansteen, som han beskrev som sin andre mor, og Christine Kemp, hans forlovede. Inntrykk som han gir gjennom sine brev til dem, er at de må ha vært svært viktige for hans liv og utvikling som menneske.

Det er vanskelig å forklare hvorfor, men etter hvert begynte det også å gå raskt nedover bakke med stortingsmann Søren Georg Abel. Han støtte på problemer i sin politiske karriere, og etter en skandale på Stortinget i 1818 var hans muligheter som politiker slutt. Skandalen førte nesten til riksrett. Han kom i økonomiske vanskeligheter, mister populariteten i sognet sitt og begynte å drikke. Som nedbrutt og desillusjonert mann vendte han tilbake til prestekallet i Gjerstad. Han tok nå mer og mer til flasken og døde i 1820, bare 48 år gammel.

2. Skolegang og studier i Oslo

Allerede høsten 1815, bare 13 år gammel, ble Niels Henrik sendt til Oslo for å begynne på Katedralskolen. Året etter kom også hans eldre bror Hans Mathias til skolen. Niels Henrik fikk et stipendium p.g.a. at familien etter hvert fikk dårlig økonomi, og begge hadde friplass på skolen. Matematikklæreren het Hans Peter Bader. Han var kjent som en brutal bølle som både slo og plaget sine elever. En dag gikk Bader langt over streken ved å slå en av elevene (forøvrig sønn av en stortingsrepresentant) så kraftig at gutten døde en uke etterpå. Dette førte til at Bader øyeblikkelig ble suspendert fra sin stilling, og Katedralskolen ansatte *Bernt Mikael Holmboe* (1795-1850) som ny matematikklærer. Holmboe, som var bare 7 år eldre enn Abel, var en kunnskapsrik og god matematikklærer som lot elevene jobbe med oppgaver ut fra evner og interesse. Holmboe rettledet Abel på en mønstergyldig måte, og lot han få låne lærebøkene sine fra universitetet, spesielt L. Eulers innføringsverk i matematisk analyse. Matematikken åpnet en ny og spennende verden for Abel.

Abel leste i gymnasietiden arbeider av Euler, Poisson, Gauss og spesielt Lagrange. Men han studerte også anvendte matematikere som Newton og d'Alembert. Utvilsomt en imponerende og krevende kost for en 16-åring. Abel gjorde meget raske framskritt og begynte snart å angripe problemer som på den tiden var uløste. Holmboe var naturlig nok begeistret for sin nye elev og venn og brukte de sterkeste ord i eksamensprotokollen om han: *"Med det mest utmerkede geni forener han en utilfredsstillelig iver og interesse for matematikken så at han vissnok om han lever, vil bli en stor matematiker."* Niels Henrik Abel tok examen artium i juli 1821 med hovedkarakteren *Haud illaudabilis*. Han var nokså middelmådig i de fleste fag, men fikk 2 i fransk og geografi og 1 med slange i aritmetikk og geometri - en sjelden utmerkelse.

Da Abel startet studiene sine ved universitetet i Oslo høsten 1821, var han i en meget dårlig økonomisk situasjon. Faren var død, og moren var ute av stand til å sørge skikkelig for selv de minste barna,- langt mindre sende penger til studenten i Oslo. Det som reddet han, var at han fikk bo gratis på studenthjemmet, og at noen av professorene samt universitetets rektor, som kjente Abels sjeldne evner, gikk sammen om å gi ham en personlig støtte. I tillegg til dette fikk han også tillatelse til å ha sin yngre bror, Peder, boende på rommet sitt. Niels Henriks beskjedne *stipendium* måtte rekke til alt underhold for de to studentene. Peder fortalte senere at broren alltid gikk med et krittstykke i lomma, og ofte *tagget* matematikk på husveggene i byen.

Noen matematisk-naturvitenskapelig embetseksamen eksisterte ikke ved universitetet den gang, så han kunne nå mer eller mindre velge sin egen studievei. Som nybakt student kunne han trolig mer matematikk enn noen annen i landet. Hans første arbeider ble trykt i det nyopprettede populærvitenskapelige tidsskrift: *Magazin for Naturvidenskaberne* der matematikkprofessor *Christopher Hansteen* (1784 -1873) var redaktør. Hansteen måtte forsyne artikkelen med en unnskyldende innledning fordi et populærvitenskapelig tidsskrift publiserte en så vidt vanskelig artikkel. Interessant er det imidlertid å merke seg at Morgenbladet kommenterte heftet i detalj og skrev om Abels artikkel: *"En avhandling som berettiger til de skjønneste forhåpninger om denne unge matematiker"*. I denne tiden skrev også Abel et manus om "*Integration af differential-formler*" som beskrev en metode for å avgjøre om et ubestemt integral av en gitt funksjon kan uttrykkes ved de kjente elementære funksjoner. Hansteen fikk dette med hensikter å skulle trykke det. Men manuset forsvant ett eller annet sted - trolig i administrasjonen i departementet - og har siden aldri blitt gjenfunnet.

3. Femtegradslikningen

Et av de mest berømte problemene i datidens matematikk gjaldt muligheten for å løse femtegradslikninger ved samme type formeluttrykk som allerede var kjent for likninger av første, annen, tredje og fjerde grad. Det vil si å skrive røttene i en generell femtegradslikning:

$$x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$$

som et uttrykk i koeffisientene a_1, a_2, a_3, a_4 og a_5 bygget opp ved å anvende de fire elementære regningsartene addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon, samt rotutdragning. Allerede da han gikk på Katedralskolen hadde Abel kommet fram til en formel for røttene i femtegradslikningen som han mente var riktig. Verken Holmboe eller universitetsprofessorene Søren Rasmussen og Christopher Hansteen kunne finne noen feil i Abels metode. De foreslo derfor at hans avhandling skulle sendes til professor *Ferdinand Degen* (1766-1825) i København som var Skandinavias fremste matematiker på den tiden. Degen oppdaget heller ingen direkte feil i Abels resonnement, men han visste at mange berømte matematikere hadde prøvd å løse dette problemet uten å lykkes, og var derfor skeptisk. I denne sammenheng skrev Degen til Hansteen: *"Den (avhandlingen) viser, om enn målet ikke skulle være oppnådd, et ualminnelig hode og ualminnelige innsikter, især i hans alder... Dog må jeg som bønn tilføye den betingelse: at Hr. Abel sender en utførligere deduksion av sitt resultat og tillige et numerisk eksempel".*

Degen mente forøvrig at studiet av femtegradslikningen var et noe spesielt og "sterilt" problem, og anbefalte ham å studere funksjonene som ble kalt *de elliptiske transcendenter* og deres "smukke egenskaper". Dette ville åpne et stort "analytisk ocean" for Abel, mente Degen, noe han senere skulle vise seg å få helt rett i.

Da Abel fikk Degens svar, begynte han straks å regne på eksempler og kom snart til at hans formel ikke var generell og umulig kunne gjelde for alle femtegradslikninger. Abel ble skuffet, men stolte på sine evner og fortsatte i årene som kom å arbeide med femtegradslikningens løsning. Han var etter hvert blitt overbevist om at en slik løsning ikke fantes. Like før jul 1823 mente han å ha en overbevisende begrunnelse for uløsbarheten. Han hadde dermed nådd sitt første store mål som matematiker. Han skrev ned resultatene på fransk på 8 kortfattede sider for å spare utgifter til trykking som han måtte bekoste selv. Han fikk ikke plass til kommentarer og ekstra forklaringer, og beviset ble derfor vanskelig å forstå. Utkastet ble trykket på haugianeren Grøndahls forlag i Oslo. Han sendte avhandlingen til forskjellige matematikere, bl.a. til datidens største matematiker *Carl F. Gauss* (1777-1855) i Göttingen. Men Gauss la bare avhandlingen til side og glemte den blant sine mange papirer. Avhandlingen vakte påfallende liten interesse hos datidens matematikere. Selv om reaksjonen uteble, var Abel likevel ved godt mot. Han planla å bringe med seg en del eksemplarer av arbeidet på en senere utenlandsreise som en slags personlig introduksjon.

Abel var ikke klar over at italieneren Paolo Ruffinis allerede 25 år tidligere hadde utgitt et bevis for at den generelle femtetgradslikningen ikke kunne løses ved rotuttrykk. Ruffinis bevis hadde store svakheter. Det var skrevet på en svært komplisert og uklar måte, og møtte atskillig skepsis. Det viste seg også at det hadde en alvorlig mangel. Abels argumentasjon var heller ikke helt patent, noe han innrømmet senere ved å gi to utførlige bevis som er fullstendige og helt vanntette. I matematisk litteratur omtales nå allikevel resultatet ofte som Abel-Ruffinis teorem.

At femtegradslikninger og andre likninger ikke er generelt løsbare med rottegn, må ikke forveksles med å tro at de er uløselige. Alle slike likninger har løsninger (i de komplekse tallene). Dette heter "algebraens fundamentalteorem" og ble bevist av Carl F. Gauss før Abel ble født. Abel kjente selvsagt til dette, og hans arbeider tar for seg *hvorledes* løsningene må se ut. Allerede den store filosofen René Descartes hadde i avhandlingen La Géométrie fra 1637 studert antall løsninger i likninger. Han antydet der at antall løsninger kunne være lik graden av likningen. Men han understreket at ikke alle løsningene trengte å være virkelige (på fransk réel), noen av dem kunne være *imaginære*. Med sitt bevis påviste Abel at det må finnes andre tall enn de som framkommer ved vanlige regneoperasjoner og rotuttrykk. Dette gjør oppdagelsen viktig.

Senere prøvde Abel å bestemme den klasse av likninger der en algebraisk løsning med rottegn var mulig. Helt ut løste han ikke dette problemet. Den geniale franske matematiker *Evariste Galois* (1811-1832) videreførte og kompletterte Abels arbeider innenfor likningsteorien. Hans metode kalles i dag Galoisteori og har hatt stor betydning for algebraens utvikling. Galois regnes bl.a. som gruppeteoriens grunnlegger. Men Abel benyttet seg i sine arbeider også av gruppebegrepet uten å bruke denne betegnelsen. Det er derfor med god grunn at en såkalt kommutativ gruppe betegnes som en *abelsk* gruppe.

4. Til København

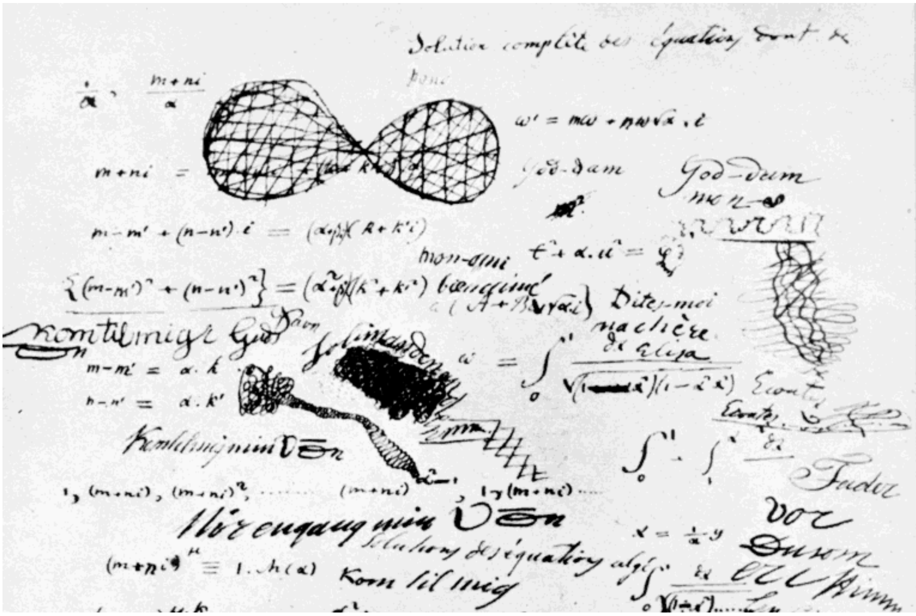
Abels første utenlandsreise var en tur til København sommeren 1823. For å finansiere turen, fikk han et stipend på 100 daler fra professor Rasmusen. Han møtte da den tidligere omtalte professor Degen som ga ham god støtte og inspirasjon. Abel arbeidet på denne tid mye med de transcendente elliptiske funksjoner, slik Degen tidligere hadde anbefalt. Han var ellers ikke særlig imponert over den matematiske aktiviteten i København, heller ikke over byen. I et brev til Holmboe skrev han: *"Allting er ringere her enn i Kristiania - damene her i byen er umåtelig stygge, men dog nette... Vitenskapsmenn her tror at det er et rent barbari i Norge, og jeg gjør all umake for å overtyde dem om det motsatte."* Det var imidlertid på denne turen at han traff Christine

Kemp som må ha gjort inntrykk på ham og som han senere forlovet seg med. De ble aldri gift, da Abels økonomi ikke tillot ham å stifte familie.

5. Elliptiske funksjoner

De velkjente trigonometriske funksjonene *sinus* og *cosinus* defineres til vanlig ved hjelp av sirkelen. Enkelt sagt kan vi si at elliptiske funksjoner er generaliseringer av de trigonometriske funksjonene. I beregning av buelengder for ellipser og svingetider for pendler, får man bruk for disse. Etter hjemkomsten til Norge, arbeidet Abel med slike funksjoner og deres integraler, et arbeid som senere skulle vise seg å være banebryten-de. Han sendte resultatene fra 1824 til professor Degen og skriv bl.a. i et ledsagende brev: *"Dette teorem og en avhandling derom har jeg tenkt å sende til det franske Institutt, da jeg synes det vil utbrede lys over de transcendente funksjoner i det hele."*

Abel angrep problemet på en ny måte. Han snudde så og si problemet på hodet, og studerte de *omvendte* funksjonene isteden. Abel var den første til å angripe det matematiske problem på denne måten, for dermed lettere å finne fram til løsninger. En av de overraskende egenskapene Abel fant, var periodisiteten. De elliptiske funksjonene har *to uavhengige perioder*, noe som viser litt av slektskapet med de trigonometriske funksjonene.



Eksempel på Abels skriblerier når han arbeider med kurven som heter lemniskaten. Nå i Universitetsbibliotekets brevsamling.

Integraler av generelle algebraiske funksjoner og elliptiske funksjoner var noe som Abel jobbet mye med. Han utviklet en omfattende generell teori som han regnet som sitt mesterverk og som kom til å bli et av hans betydeligste bidrag til matematikken. Han leverte i 1826 inn sin store avhandling om transcendente funksjoner til det franske akademiet. Det munnet ut i det som i dag gjerne betegnes som *Abels addisjonsteorem*. Abel var overbevist om dette arbeidets kvalitet, og framstillingen var klar. Men avhandlingen var lang, og inneholdt dessuten mange nye idéer som det trolig ville ta tid å forstå. Matematikerne i Paris la derfor Abels arbeid til side i håp om å få bedre tid senere. Abel hørte aldri et ord om avhandlingen og han purret heller aldri på saken.

I mars 1827 fullførte Abel en annen stor avhandling som ble påbegynt i Paris: *Recherches sur les fonctions elliptiques*. Denne avhandlingen var i sin endelige form på hele 120 sider. Da den store Gauss så denne, ble han rett og slett imponert: *"...han har gjort alle utviklinger med eleganse og skarphet"*. Gauss hadde tidligere jobbet med de samme problemene, men aldri tatt den nødvendige tid til å systematisere resultatene. Nå var hele jobben gjort av Abel! Bedre attest var det umulig å få i faget. Det bør også legges til at det var innenfor teorien for elliptiske funksjoner at kimen til løsningen av Fermats siste sats viste seg å ligge, noe som ble endelig bevist av Andrew Wiles i 1994.

Det bør også nevnes at den tyske matematikeren *Carl G.J. Jacobi* (1804-1851) på denne tiden også arbeidet med elliptiske funksjoner, uten at Abel i starten kjente til hans verk - eller omvendt. Det utviklet seg til et slags "kappløp" mellom disse to. Jacobi publiserte noen viktige formler, men manglet bevisene. Abel var så å si ferdig med hele teorien, og fryktet at Jacobi skulle slå han på målstreken. Han la derfor alt annet til side og skrev ferdig den store avhandlingen som han i et privat brev kalte "dødelsen av Jacobi". Noen "dødelse" ble det ikke, men det førte til at Jacobi ga Abel full kreditt for visse grunnleggende resultater han benyttet i sine egne avhandlinger etter å ha lest Abels arbeider. Abels teori og framstilling var i sitt fundament mer generell enn Jacobis.

6. Den store Europaturen

I september 1825 hadde Abel lagt ut på sin store utenlandsreise. Universitetet i Oslo sendte en del av sine unge lovende naturvitenskapsmenn ut i Europa for å studere og lære mer. I nesten to år reiste han rundt. Han besøkte mange av datidens store matematikere, bl.a. i Berlin og Paris.

Abel fant fort ut at det ikke sto så bra til med matematikken i Berlin som han trodde. Biblioteket var dårligere enn biblioteket i Oslo når det gjaldt matematisk litteratur. Men noe svært positivt hendte for Abel i Berlin. Han traff *August L. Crelle* (1780-1855) som egentlig var vei- og bygningsingeniør, men som fulgte godt med i hva som rørte seg innen matematisk forskning. Crelle var ingen stor matematiker selv, men han var svært godt orientert i litteraturen. Han fikk et eksemplar av Abels avhandling om femtegradslikningen, men stilte seg noe skeptisk til at den unge nordboer hadde løst dette berømte problemet. Han klarte heller ikke helt å følge beviset. Likevel skjønte Crelle nokså umiddelbart at Abel var en stor matematisk begavelse, og han kom fra da av til å spille en avgjørende rolle for Abels utvikling.

Abel uttrykte overfor Crelle sin forundring over at det ikke fantes noe eget matematisk tidsskrift i Tyskland. Crelle fortalte da at han i lengre tid hadde hatt planer om å utgi ut et slikt. Like etter så første nummer av: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* dagens lys. Hele fire av Abels avhandlinger ble trykt i det første nummeret av tidsskriftet, og seks nye kom før året var omme. Denne *Crelle's Journal* som den gjerne ble kalt, ble fort 1800-tallets ledende matematiske tidsskrift. Crelle selv oversatte Abels arbeider fra fransk til tysk, da Abel ikke var særlig kyndig i tysk. Disse arbeidene var av førsteklasses faglig kvalitet - et par av dem helt grunnleggende innen deler av faget. Alt dette skjedde mens Niels Henrik Abel bare var 23 år gammel.

Først i juli 1826 ankom Abel til Paris, det dominerende matematiske miljøet i verden og ett av reisens hovedmål. Etter noen måneders faglig pause, startet han nå opp med intense studier av noen av de tidligere interessene: Integraler av generelle algebraiske funksjoner og elliptiske funksjoner. Med hensyn til det siste utviklet han nå en omfattende generell teori. Dette kom til å bli et av hans betydeligste bidrag til matematikken. Abels reisevenner oppholdt seg bare en kort tid i Paris, og han følte seg noe ensom etter at de dro. Han hadde også litt vanskeligere for å få kontakt med franskmenn generelt enn med tyskere, til tross for at han behersket fransk bedre enn tysk. De franske matematikere var heller ikke lette å komme inn på livet. Av de mest kjente omtaler han Legendre som vennlig men "steinalt". Cauchy var både sær og arrogant, men Abel hadde selvsagt stor respekt for hans arbeider. Flere andre kjente navn, som Poisson, Fourier og Ampére beskjeftiget seg utelukkende med problemer fra fysikken på denne tiden. Laplace hadde avsluttet sin matematiske karriere, men Abel beundret arbeidene hans sterkt.

Abel leverte inn sin store avhandling om transcendente funksjoner til Akademiet i Paris, men Cauchy *"ville neppe kaste øynene på den. Og jeg tør uten bram si den er god. Jeg er nysgjerrig etter å høre Instituttets dom"*, skrev Abel i et brev til Holmboe. Den omtalte avhandlingen ble framlagt til trykking 30. oktober 1826 og Legendre og Cauchy ble oppnevnt som bedømmelseskomité. Han forventet å få en rosende innstilling fra de to kjente matematikere i løpet av noen få uker. Dessverre var Cauchy, som skulle skrive og framlegge komiteens anbefaling, svært opptatt med egne ideer. Det bør her bemerkes at dette ikke var den eneste gang Cauchy forsømte sine plikter - noe som kom til å få svært uheldige konsekvenser for et par av de mest geniale unge matematikere. Avhandlingen ble senere funnet igjen og behandlet etter vår matematikers død. Abel ble da tildelt en stor fransk pris, og pengene gikk til hans familie. Dette er kanskje det arbeid som virkelig har gitt Abel en plass blant de fremste i matematikkens historie. Selve Paris-avhandlingen ble imidlertid ikke trykket før i 1841, etter at den norske regjering hadde tatt affære. Originalmanuskriptet trodde man senere ble borte for alltid. Men det ble funnet igjen så sent som i 1952 av matematikeren Viggo Brun i et bibliotek nær Lorenzo-kirken i Firenze. Historien slutter imidlertid ikke med dette, for fortsatt viste det seg å mangle 8 sider. Så sent som i februar 2002 ble 4 av disse funnet av matematikeren Andrea Del Centina i et bibliotek i Livorno (Centina 2002). Men fortsatt mangler vi altså 4 sider før hele den originale Paris-avhandlingen er samlet.

Abel ble i Paris til slutten av året 1826, men da var økonomien så skral at han bestemte seg for å dra tilbake til Berlin. Her fikk han hjelp og støtte av Crelle og andre venner. Han hadde planlagt å stoppe i Göttingen for å prøve å treffe Gauss, men p.g.a. slunken reisekasse måtte han ta raskeste veien til Berlin. Han fikk aldri anledning til å treffe

Gauss senere - Gauss levde forøvrig svært tilbaketrukket og ville neppe ha vært lett å få i tale. I begynnelsen av februar 1827 var Abel syk en tid. Det er første gang i brev hjem til Norge at han nevner sykdomstegn. Det er grunn til å tro at det første alvorlige utslaget av lungetuberkulosen kom da.

Han forlot Berlin i slutten av april. Etter et opphold i København ankom han med dampskip til Oslo i mai 1827. Abel så nå fram til å jobbe i ro og fred. Han hadde ideer og materiale i massevis for flere års arbeid.

Reiseruten hadde vært anstrengende. Det meste foregikk med hest og trekkfulle vogner. Senere har en lurt på om påkjenningene under de lange reisene bidro til å svekke Abels helse og forsterke sykdomsprosessen som nå hadde begynt. Økonomien var også elendig, og etter mye om og men, og flere avslag fra departementet, endte det med at Abel ble bevilget et fast, men beskjedent beløp fra universitetets kasse. Dette var ikke nok til å betale gammel gjeld og til å leve anstendig. Også familien hans trengte økonomisk hjelp, og Niels Henrik måtte tre støttende til. For å kunne overleve ga han privatundervisning i matematikk.

7. Uendelige rekker

Abel var en stor beundrer av Euler. Under Berlin-oppholdet kom han sammen med en del unge matematikere som var svært opptatt av å gjenopprette logisk stringens i matematikken. Gauss og Cauchy hadde startet denne prosessen. De så et klart behov for å rydde opp i de holdninger og tendenser til å regne i vei uten omtanke for gyldighetsområder for formlene eller konvergens av de tallfølgene eller rekkene som dukket opp. Klassikere som Euler og andre ble derfor studert med skepsis. Abel fant kritikkverdige argumentasjoner hos disse. Han skrev bl.a. i et brev til Holmboe: *"Divergente rekker er i det hele noe fandenskap, og det er en skam at man våger å grunne noen demonstrasjon derpå. Man kan få frem hva man vil når man bruker dem, og det er dem som har gjort så megen ulykke og så mange paradokser. Kan man tenke seg noe skrekkeligere enn å si at:* $0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \ldots$ *når n er et helt positivt tall?"*

I samme brev skrev Abel: *"Selv binomialformelen er ennå ikke strengt bevist".* Han fortalte at han var i ferd med å skrive en avhandling om binomialformelen. Men arbeidet hans strakte seg langt videre, og ga en mønstergyldig framstilling av hvordan uendelige rekker skal behandles på en stringent måte.

I denne avhandlingen avslørte Abel også en feil (eller et "unntak" som han diplomatisk kaller det) i Cauchys *Cours d'Analyse* fra 1821. I denne boka hevdes det at en uendelig sum av kontinuerlige funksjoner selv er kontinuerlig. Men dette prinsippet er feilaktig, sier Abel. Han angir rekken

$$\sin x - 1/2 \sin 2x + 1/3 \sin 3x - 1/4 \sin 4x + 1/5 \sin 5x - \ldots.$$

som moteksempel. Denne er diskontinuerlig for

$x = (2m + 1)\,\pi$ der m er et heltall.

Så Cauchys setning gjelder ikke for alle typer funksjoner, selv om den gjelder for noen.

Abels måte å tenke på i matematikken var ut fra den stringente tradisjonen. Under disse kritiske betingelsene skulle hvert eneste skritt i utviklingen være logisk. Alt skulle bevisføres etter gyldige slutningsregler. Hvis man for eksempel arbeidet med grenseverdier, måtte man først fastslå at de eksisterte. Med uendelige rekker måtte det bevises at de hadde en sum, dvs. at de var konvergente, ikke divergente. Innen teorien for uendelige rekker var det mye som måtte ryddes på plass. I sin behandling ga Abel et bidrag i retning av formalisering, noe som siden har blitt stående som en faglig standard når det gjelder behandlingen av uendelige rekker. Andre, bl.a. Weierstrass, fullførte denne prosessen.

8. Tuberkulose

Allerede høsten 1825 ble det ledig et professorat i Kristiania etter Søren Rasmussen, og Abel var en mulig etterfølger. Men hans venn B. Holmboe var også kandidat til stillingen. Holmboe ble utnevnt til universitetslærer i januar 1826. Dette er trolig den største forbigåelse i Universitetet i Oslo sin historie. Universitetets administrasjon begrunnet det med at Abel ikke ville kunne gjøre seg forstått for vanlige studenter, noe som var helt tatt ut av luften. Abel var en utmerket lærer, vel verd å høre på. Dikteren Vinje beskrev opplevelsen av hans undervisning som å sette "Araberhesten framfor kjerra" når Abel ved hjemkomsten måtte livnære seg ved å undervise elever som skulle ta eksamen artium.

Etter ankomsten til Oslo i mai 1827, arbeidet Abel intenst fram til januar 1829 da han ikke lenger klarte å skjule den alvorlige sykdommen han var rammet av. Han fikk et av de eldre arbeidene sine trykt i Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Skrifter i Trondheim. Her ble han også innvalgt som medlem høsten 1827. Samlet skrev han 13 avhandlinger i denne perioden, den største på 126 store trykksider. Dette må ha kostet han masse krefter. Arild Stubhaug antyder i sin biografi at Abel kan ha fått sin sykdomsdiagnose allerede i Paris, og dermed hadde ant hva som lå foran... Økonomien bedret seg betraktelig våren 1828, da Hansteen dro på en vitenskapelig ekspedisjon til Sibir, og Abel gikk inn som vikar både på den militære høyskolen og ved universitetet. Han ble konstituert som dosent ved universitetet. For første gang i sitt liv hadde han regulær inntekt og kunne leve med noe mindre bekymring for det daglige brød.

Julen 1828 var Abel på besøk ved Froland verk ved Arendal, der forloveden Christine var guvernante. Men han hadde feber og hostet - og legen hadde før reisen frarådet ham å reise på den flere dager lange sledeturen. Etter julefeiringen i Froland, ble Abel så syk at han ikke kunne reise tilbake til Oslo. Han arbeidet fortsatt intenst med sin matematikk, men ble raskt dårligere og til sist sengeliggende. Med en kraftanstrengelse hadde han fått skrevet ned addisjonsteoremet, ett av hovedresultatene i Paris-avhandlingen, og sendte dette til Crelle. Dermed unngikk han at Paris-avhandlingen gikk i glemmeboka. Jacobi etterlyste den - post mortem. Abel døde i Froland den 6. april 1829. Noe av de siste tankene var for Christines framtid. Abel ba en av sine studievenner gifte seg med henne etter at han var gått bort, noe vennen også gjorde.

Matematikkinteressere kan fortsatt besøke Abels siste arbeidssted på Froland verk.

Abels sykeleie hadde strakt seg over 3 måneder, og var preget av fortvilelse over legevitenskapen og manglende forsoning med å skulle dø. Hvorfor skulle han dø, han som knapt hadde levd? Sterke følelser fra strevsomme dager, fattigdom og forbigåelser vellet fram i han med stor styrke. Denne livsfasen er en slående kontrast til måten dikteren Henrik Wergeland døde av samme sykdom noen tiår senere.

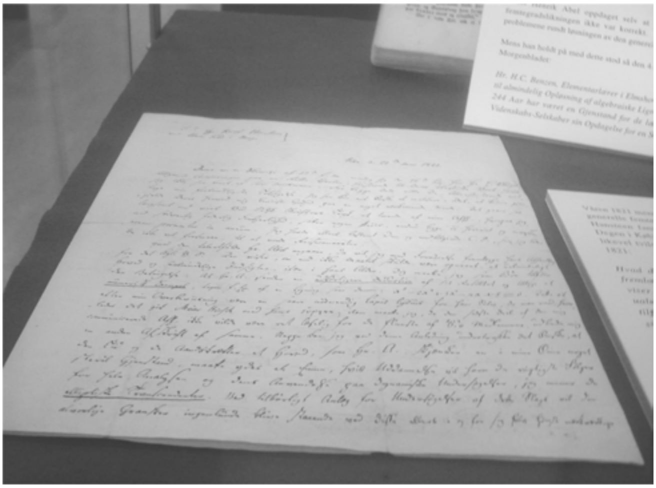
Pengesorger og bekymringer med hensyn til å få seg fast stilling, hadde forfulgt Abel helt til det siste. Til tross for flere henvendelser til norske og svenske myndigheter fra inn- og utland forble Abel uten noe sikkert løfte om fast stilling helt til han døde. Abels trofaste venn, Crelle i Berlin, kunne til slutt, etter stor pågåenhet og flere mislykkede forsøk endelig skrive til Abel at det var opprettet en stilling for han i Berlin og at han kunne forberede flyttingen: "....De kommer til et godt land, til et bedre klima, nærmere til vitenskapen og til oppriktige venner som setter pris på Dem og er glad i Dem." Men Crelles brev var datert 8. april, og da gjensto bare salmene ved reisens slutt på Froland. Abel ligger begravet på kirkegården der.

9. Grunnforskning

Matematikken fra 1600- tallet og fram til i dag har fungert som et viktig bidrag for utviklingen av dagens moderne samfunn. Selv om Abel ikke har grunnlagt noen egen teori i matematikken - slik som nordmannen Sophus Lie senere gjorde (Lie algebra) - regnes han som en av de fremste *problemløsere* innen faget. Sammen med Cauchy betraktes Abel som en av pionerene i moderne matematisk analyse. Franskmannen Hermite skal ha sagt at Abel har gitt matematikerne stoff å arbeide med i *fem hundre* år. Hvert år gis det fortsatt ut avhandlinger og artikler som refererer til has ideer. Dette er bemerkelsesverdig når vi tenker på at Abel drev sin egen forskning i kun *fem* år. Hans bidrag innen det vi kan kalle *matematisk grunnforskning* har vært en viktig veiviser for vår vitenskap og teknologi, og slik sett en av betingelsene for det vi kjenner som et intellektuelt og høyteknologisk samfunn.

Abel var internasjonal i sine faglige kontakter. Han var matematiker av anerkjent stort format alt mens han levde. Vurderingen av Abel i vår tid er at han rager blant de fremste matematikere som har levd. Han var også en viktig bidragsyter for å fundere faget mer begrepsmessig, reflekterende og resonnerende - framfor en rent regnemessig sjonglering med formler.

Norge utga frimerkeserie med Abel i 1929. Nye merker kom i 2002.



Et av Abels originalmanuskripter på utstilling ved Universitetet i Oslo i 2002.

Litteratur:

Karl Egil Aubert: *Niels Henrik Abel.* Tidsskriftet Normat, No 4, 1979.
Andrea Del Centina: *The Abel's Parisian Manuscript*. Firenze 2002.
Per Hag: *Ma 210, Matematikk fagdidaktikk.* Kompendium NTNU, 1995.
Øystein Ore: *Niels Henrik Abel, Et geni og hans samtid.* Oslo 1954.
Jon Reed og Johan Aarnes: *Matematikk i vår tid*. Universitetsforlaget 1967.
Leiv Storesletten: *Geniet Niels Henrik Abel. Eit 150-årsminne.* Tidsskriftet Syn og Segn 1979, side 415-425.
Arild Stubhaug: *Et foranskutt lyn. Niels Henrik Abel og hans tid.* Aschehoug 1996.

10. Mendels genetikk og matematikk

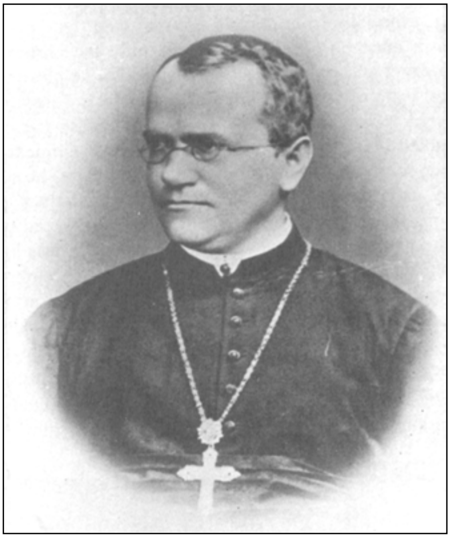
Gregor Mendel (1822-1884) regnes i dag som grunnleggeren for den klassiske arvelære og genetikk. Han var den første som brukte matematiske metoder i eksperimentell biologi da hans banebrytende forsøk med krysning av planter ble utgitt i 1866. Hans arbeider ble imidlertid oversett på hele 1800-tallet, og først rundt år 1900 ble han gjenoppdaget. Fra da av har begrepet *gen*, eller *celle-element* som Mendel kalte det, vært et begrepsmessig grunnlag i biologien. Dette utløste en hel serie forskningsarbeider, bl.a. innen planteforedling og matvareproduksjon. Mendels genetikk dominerte helt fram til 1950-årene. Da ble det gjort nye banebrytende forsøk som førte til en ennå dypere kjemisk forståelse av genetikken. Slik regner vi med at den moderne molekylærgenetikken startet med oppdagelsen av DNA-molekylets struktur i 1953. Deretter har det fortsatt med store framskritt innen genetikken, med et viktig høydepunkt i år 2001 da et foreløpig kart over menneskets arvemasse (genom) ble publisert (Dennis & Gallagher 2001).

Den gryende matematiske forståelsen av biologien ble altså innledet for omtrent ett århundre siden. Dette la en kvantitativ basis for genetikken. I denne artikkelen vil jeg presentere noen historiske forbindelseslinjer som relaterer genetikken og dens eksperimentelle utgangspunkt til matematikk og statistikk.

Så langt tilbake som i 1202 foreslo *Fibonacci* (1170-1240), i sitt verk *Liber abaci*, en modell for utvikling av en hypotetisk kaninbestand. I denne modellen startes populasjonen av ett enkelt kaninpar. Disse får etter en bestemt tidsperiode avkom, og kullet består av en hann og en hunn, som også vil reprodusere seg to tidsperioder etter fødselen. Populasjonens dynamikk (antallet par) beskrives av den velkjente Fibonaccio-følgen: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,89,144,... Denne følgen, hvor hvert tall er summen av de to foregående, har funnet anvendelser i mange forskjellige områder innen matematikk og naturvitenskap, selv om virkelige kaninbestander ikke følger Fibonaccis modell.

1. Livsløpet

Gregor Mendel var egentlig bondesønn, og fra faren fikk han et bredt kjennskap til praktisk fruktavl. Som 21-åring ble han munk og medlem av augustinerklosteret St. Thomas i Brünn (nåværende Brno i Tsjekkia). Blant munkene i klosteret var det anerkjente filosofer, matematikere og botanikere. Klosteret hadde også et omfattende bibliotek, en botanisk hage og en stor samling pressede planter. Alt dette bidro til å utvikle den naturvitenskapelige interessen hos Mendel. Han ble også satt til å undervise ved en videregående skole i nærheten. Men da han skulle ta den statlige eksamen som ville gi han formell godkjennelse som lærer, strøk han i geologi og zoologi. Mendel var rett og slett ekstremt plaget med eksamensnerver, og dette satte han ut av spill. Men sensorene må ha gjennomskuet hans nervøsitet og sett hans potensiale, og han ble anbefalt å ta videre studier ved universitetet.



Fra klosteret ble Mendel så sendt til universitetet i Wien for å studere kjemi, matematikk og biologi. Han klarte seg fint som student i disse årene, 1851-53. Han hørte bl.a. foredrag om eksperimentell fysikk av den kjente fysikeren Doppler. Mendels mest innflytelsesrike lærer var Andreas von Ettinghausen, professor i fysikk og matematikk. Han hadde skrevet en lærebok om sannsynlighetsregning og kombinatorikk (*Die kombinatorische Analysis*, Wien 1826), og Mendel plukket åpenbart opp noen av metodene han senere brukte i eksperimentene med planter her. Under arbeidet med plantearv, brukte Mendel kombinatorikk som sitt matematiske hovedverktøy. I løpet av sine siste leveår forsøkte Mendel sågar å anvende kombinatorikk på lingvistiske problemer ved å analysere lange sammensatte tyske etternavn.

Til tross for en god studietid ved universitetet, fikk han aldri tatt sin lærereksamen. Eksamensnervene slo han ut igjen, og Mendel forble deltidslærer uten formelle eksamenspapirer hele livet. I dag ville vi trolig forklart Mendels problem som situasjonsbestemt eksamensangst.

Kort tid etter at han vendte tilbake til klosteret, startet han med sine senere så berømte krysningsforsøk med erteplanter. Mendel tvilte på riktigheten av den rådende vitenskapelige holdning om at biologisk arv var en eller annen form for sammenblanding og fortynningsprosess av foreldrenes egenskaper. Etter dette skulle avkommet bli en middelverdi mellom faren og morens egenskaper, der disse fungerte som en slags "prototyper". Mendel mente at det aldri var framkommet eksempler som kunne dokumentere en slik teori. Til dette arbeidet fikk han bruke en del av klosterhagen. Han bestemte seg for å bruke den vanlige hageerten til eksperimentene. Ettersom den normalt er selvbefruktende, var det lett å manipulere krysningene.

Mendels arbeid med krysningsforsøkene varte i 8 år, og han kultiverte og testet minst 28000 planter. Våren 1865 la han la fram resultatene på to møter i Brünns naturvitenskapelige selskap. På det første møtet var ca. 40 av foreningens medlemmer til stede, men ingen skjønte at de var vitne til et viktig øyeblikk i biologiens historie. Foredraget ble tydeligvis ikke oppfattet som særlig spennende, for av møtereferatet går det fram at ingen stilte spørsmål, og at det ikke var noen diskusjon etter forelesningen.

Arbeidet ble deretter trykt på tysk i selskapets tidsskrift med tittel: *Forsøk med plantehybrider*. Dette ble sendt rundt til over 100 biblioteker som foreningen i Brünn hadde kontakt med. Dessuten sendte Mendel særtrykk av avhandlingen til mange av datidens kjente biologer, deriblant Charles Darwin. Men det viste seg at ingen forsto betydningen av augustinermunkens arbeid. Mendels forskningsmessige gjennombrudd ble en ensom opplevelse som ble liggende oversett i mer enn 30 år.

I 1868 ble Mendel valgt til abbed i St. Thomas klosteret, og han fikk derfor mindre tid til vitenskapelig sysler. De siste ti årene han levde, brukte han som åndelig og administrativ leder ved klosteret.

Så - i år 1900 - ble Mendel med ett verdensberømt. Hans arvelover ble "gjenoppdaget" av tre internasjonalt kjente botanikere som arbeidet mer eller mindre uavhengig av hverandre. Det var Hugo de Vries i Holland, Carl Correns i Tyskland og Erich von Tschermak i Østerrike. Alle disse var kommet fram til resultater som samsvarte med det Mendel hadde gjort 35 år tidligere. Dermed var "formørkelsen" av Mendel endelig slutt, og han fikk sin rettmessige vitenskapelige anerkjennelse. At "gjenoppdagelsen" i første omgang skulle ha skjedd uten forutgående kjennskap til Mendels arbeider blir imidlertid sterkt betvilt av dagens vitenskapshistorikere (Vollmann & Ruckbauer 1997, s. 55).

2. Planteforsøket

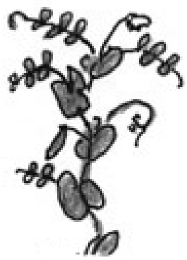
Hva gikk så Mendels forsøk ut på? Mendel valgte som nevnt vanlig hageert, *Pisum sativum*, til forsøkene. Det hadde mange fordeler å bruke denne planten. Den var lett å få kjøpt på det lokale markedet, lett å dyrke og vokste raskt. Dessuten fantes det mange varianter. Den største fordelen var kanskje at den normalt har selvbestøvning. Både pollenbladene og fruktemnet ligger helt innesluttet i de to kronbladene, noe som gjør det forholdsvis enkelt å holde kontroll med bestøvningen.

Kryssbestøvning kan skje ved hjelp av humler og andre insekter, men det er ganske sjeldent. Derimot er det relativt enkelt å utføre dette kunstig. Ved å fjerne plantens støvdragere før de var modne, og deretter bestøve med pollen fra en annen plante, kunne Mendel lage nøyaktig de krysninger han ønsket. Deretter dekket han planten med en liten pose. På denne måten kunne han føre kontroll med alle de krysninger han ønsket å utføre.

Ved å lese Mendels avhandling i dag, er det lett å bli imponert over hvor godt den er satt sammen og skrevet. Arbeidet er et vitenskapelig mesterstykke der alle forsøk er nøye planlagt og beskrevet. Videre konsentrerte han seg om å følge nedarvingen av bare én eller noen få egenskaper om gangen, og han undersøkte avkommet i flere generasjoner etter hverandre, førte nøye regnskap med alt avkommet og behandlet materialet matematisk. Enkle kvantitative metoder ble anvendt med stor effektivitet i den eksperimentelle biologi. Ut fra forsøksresultatene og den matematiske bearbeidelse av dem, kunne han sette opp en hypotese for hvordan egenskaper ble nedarvet.

Før forsøkene startet, måtte Mendel forvisse seg om at de plantene han skulle krysse var like fra generasjon til generasjon. Dette gjorde han ved å la plantene formere seg i noen generasjoner ved vanlig selvbestøving. Hvis avkommet da hele tiden var identisk med foreldrene, var han sikker på at de var konstante, dvs. at de tilhørte en ren linje. Vi ville kalle dette homozygote planter.

Selve forsøket startet ved at Mendel valgte ut 7 egenskaper og kryssbestøvet blomster fra to ulike rene linjer for hver av de 7 egenskapene. De egenskapene han undersøkte hadde alltid to alternative uttrykksformer som kun forekom i disse to distinkte formene, uten blandingsformer. Det kunne være gule eller grønne erter, runde eller rynkede erter osv. Alle de 7 egenskapene med sine to varianter er vist i tabellen.

Egenskap	**Utvalg *N* i F2-generasjonen**	**Dominant uttrykk**	**Recessivt uttrykk**
1 Frøform	7324	rund 	rynkete 
2 Frøfarge	8023	gul 	grønn 
3 Frøskallfarge	929	farget 	hvit 
4 Belgform	1181	hel 	bølget 
5 Belgfarge	580	grønn 	gul 
6 Plassering av blomster	858	sidestilt 	endestilt 
7 Stengellengde	1064	 høy	 lav

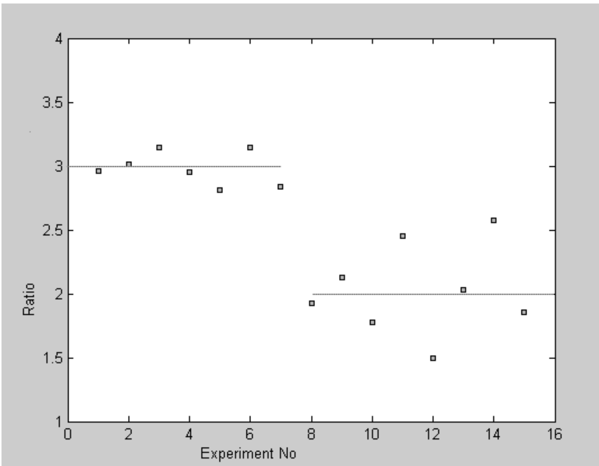
Mendels krysninger med erteplanter. Totalt undersøkte han nedarving av 7 egenskaper

3. Resultatene

I de første krysningsforsøkene undersøkte han bare nedarving av en enkelt av de 7 egenskapene om gangen. I løpet av høsten samlet han inn frøene i den første generasjonen eller filialgenerasjonen (Fl). Det viste seg at *alt* avkom fikk kun én av foreldrenes uttrykksformer. Mendel kalte den formen, som tydeligvis dominerte over den andre, for *dominant*. De dominante formene han fant er ført opp i tabellen. De andre formene kalte Mendel *recessiv*.

Året etter plantet han ut alle F1-ertene som han fikk, og lot plantene selvbefrukte på vanlig måte. Samme høst studerte han det nye avkommet (F2-generasjonen). Nå var de recessive formene i en viss grad dukket opp igjen.

Mendel fant at i F2-generasjonen var forholdstallet mellom dominante og recessive egenskaper omtrent lik 3:1. Dette var en lovmessighet som kunne forklare nedarvingen av de forskjellige egenskapene. Det måtte bety, mente Mendel, at arveegenskapene ble avgjort av bestemte *elementer*, eller gener som de senere ble kalt. For å forklare nedarvingen måtte han anta at hver arveegenskap ble bestemt av *to separate* gener, altså et genpar. Disse genene skiller lag i kjønnscellene. I den nye planten kommer to gener sammen igjen, men nå kanskje i nye kombinasjoner. Genene i genparet kan ha forskjellig virkning på utseendet, eller fenotypen som vi kaller det, avhengig av dominansen. Enkelte gener dominerer andre, og det undertrykte genet kan skjule seg til neste generasjon. Det betyr at en organisme kan være bærer av et gen vi ikke ser.



Forholdstall fra Mendels første to deler av planteeksperimentet med de 7 egenskapene han undersøkte. Eksperiment 1-7 angir dominant/recessiv-raten i F2-generasjonen. Størrelsen på utvalget her er ganske stort (se tabellen). I eksperiment 8-15 undersøkes kun de dominante videre ved å se på avkommet (F3-generasjonen) og derved finne om de dominante individene i F2-generasjonen hadde hatt to ulike gener eller var av rent dominant type. Størrelsen på utvalget er her mindre og ligger mellom 565 og 100. Eksperiment 12 ble gjentatt i eksperiment 15 da Mendel i første omgang ikke var fornøyd med resultatet.

Mendel brukte symboler for å illustrere genene, stor **A** symboliserer et dominant gen, og liten **a** det tilsvarende recessive. Foreldrene (P-generasjonen) var fra hver sin rene linje, og det betyr at den dominante hadde genparet **AA** og de recessive **aa**. Ved kryssbefruktning fikk alle individene i F1-generasjonen dermed genparet **Aa**. Ved den videre selvbefruktning i F2-generasjonen er det tre muligheter: **AA**, **Aa** og **aa**. Kun den *siste* kombinasjonen framtrer som et individ av recessiv type, mens de to første framtrer som dominant type.

P		**F1**		**F2**
AA (50%) **aa** (50%)	►	**Aa** (100%)	►	**AA** (25%) **Aa** (50%) **aa** (25%)

Mendels forholdstall 3 framkommer ved i F2-generasjonen å se på **AA+Aa : aa**, og forholdstallet 2 forklares ved å se på **Aa : AA**. I de videre seriene med eksperimenter kom Mendel også fram til at hver av de 7 forskjellige egenskaper ble nedarvet uavhengig av hverandre.

I sin forskning regnes Mendel som en god eksperimentator, samtidig som han tenker i kvantitative termer og undersøker eksperimentelle data gjennom statistiske metoder. Ved statistisk analyse av store tallmaterialer, lyktes han å utlede lover fra tilsynelatende tilfeldige fenomener. Metoden er ganske vanlig i dag, men var på Mendels tid fullstendig ny. Han var den første til å anvende den til å løse et grunnleggende biologisk problem, og å forklare betydningen av et slikt numerisk forhold (Gillispie 1974, vol IX s. 281). Han utledet at kjønnscellene på et eller annet vis gikk fra å ha dobbel dose arvefaktorer (det vi i dag kaller diploid) til enkel (haploid). Han kunne ikke forklare hvordan dette foregikk - ei heller kunne andre forklare dette før 25 år senere, da reduksjonsdeling av kjønnsceller først ble beskrevet. Mendel kjente likevel til at en slik prosess var nødvendig hvis matematikken skulle stemme. De moderne ordene *gen*, *genotype* og *fenotype* ble lansert så sent som i 1909 av den danske arvelighetsforsker og professor Wilhelm Johannsen.

I sin avhandling har Mendel også med en kommentar som sannsynligvis var rettet mot Darwins teori publisert 7 år tidligere (Stern & Sherwood 1966, s. 37 og 167):

> *Det blir gjerne hevdet at nye varianter frambringes ved kultivering og menneskets inngripen, som ellers ville gått under i vill tilstand. Dette alene berettiger ikke antakelsen om at tendensen til varianter øker så sterkt at arten snart mister sin selvstendighet og stabilitet, og avkommet oppløses i en endeløs rekke av høyst foranderlige former. Om endringer i vekstbetingelser var eneste årsak til variasjon, skulle man forvente at de kulturplanter som er dyrket fram gjennom århundrer, under nesten like vekstbetingelser, hadde gjennetablert en ny selvstendighet og stabilitet. Dette er som kjent ikke tilfellet. Akkurat blant disse finnes ikke bare de mest forskjellige, men også de mest variable formene.*

Etter 1871 utførte Mendel eksperimenter med bier, i håp om å utvide sin teori til å gjelde insekter og dyreriket. Men disse mislyktes pga. vansker med kontrollert befruktning av dronningbiene. Han tok også del i organisering av den første statistiske tjenesten for landbruket, og var til og med meget aktiv i meteorologiske studier, og publiserte 9 artikler på dette feltet.

Det har også kommet kritikk av Mendels avhandling, ikke av selve konklusjonene, men av tallmaterialet som han presenterer fra eksperimentene. Spesielt statistikeren R.A. Fisher hevdet på 1930-tallet at Mendel må ha pyntet på sine eksperimentelle data for å få de til å stemme med teorien. For å vise dette brukte Fisher den da nylig utviklede chi-kvadrat testen fra statistikken. Denne brukes for å undersøke om et tallmateriale følger statistisk spredning og andre lovmessigheter. Men Mendel sier da også i sin avhandling at han presenterer *deler* av sitt materiale. Noen planter har sikkert blitt ødelagt eller ubrukelige på annen måte. Fisher tar heller ikke med alt det Mendel rapporterer i sin test. Så de fleste vil avdramatisere dette og si at i praktiske eksperimentelle situasjoner vil det av og til skje noe som krever en eller annen form for subjektiv improvisasjon og vurdering. Selv i moderne eksperimenter under kontrollerte rammebetingelser, er det ofte vridninger i data som ikke tilfredsstilles helt og holdent av en fintfølende statistisk chi-kvadrat test (Stern & Sherwood 1966, s. 174). Det finnes intet statistisk eller botanisk grunnlag for å påstå at Mendel forfalsket sine data (Fairbanlks & Rytting 2001, s.743).

4. Matrisemodell

Ved bruk av matriseregning kan vi gi en mer matematisk framstilling av Mendels genetikk. Dette er et eksempel på det som nå kalles Markov-kjeder. *Andrei Markov* (1856-1922) var professor i matematikk ved Universitetet i St. Petersburg. I tillegg til denne funksjonen ble han regnet for en av storbyens beste sjakkspillere (Sheynin 1988, s. 341).
La oss først se på den matematiske definisjonen av Markov-kjeder. Markov-kjeder defineres som følger av tilfeldige verdier (x_1, x_2, x_3, x_4,. . .) - identifisert ved økende indeks (tid) - med egenskapen at enhver beregning av verdien x_n, der x_1, x_2,...,x_{n-1} er kjente, kan baseres på x_{n-1} alene. Variabelens framtidige verdi er altså bestemt av nåværende verdi alene.

Med definisjonen ovenfor kan det sees at de fleste prosesser i genetikk er Markov-prosesser. De tilfeldige variablene i Markov-følgen er åpenbart ikke uavhengige, men avhengige, og avhengigheten rekker én enhet tilbake i tid. Kjedens utvikling er beskrevet av en overgangsmatrise P med overgangssannsynligheter, eller Markov-kjedens stokastiske matrise. Kjeden kalles *homogen* hvis samme overgangsmatrise gjelder ved alle overganger i kjeden.

Vi kan nå lage en enkel modell for Mendels eksperiment vha. Markov-kjeder. Plantene kan på genotype-nivå være i en av tre tilstander, med sannsynligheter s_1, s_2, s_3, hvor $s_1+s_2+s_3=1$. Hvis A brukes som symbol for det dominante gen, og a for det recessive, er de tre tilstandene AA, Aa og aa. La S_m være søylevektoren

$$S_m = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

som beskriver tilstandsvektoren for steg m i kjeden. Siden Mendel startet med heterozygote planter, er den innledende tilstandsvektor:

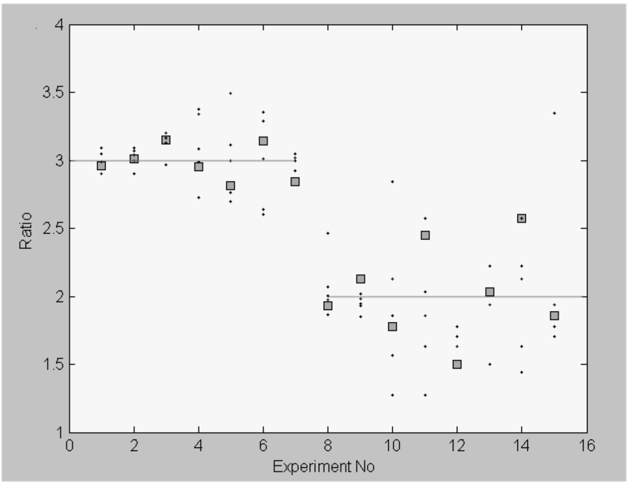
$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En overgangsmatrise, P, bestemmer nå ved matrisemultiplikasjon Markov-endringene fra generasjon til generasjon for plantenes selvbefruktning:

$$S_{m+1} = P \cdot S_m \quad , \quad \text{der}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}$$

Summen av hver av søylene i overgangsmatrisen er lik 1.



Dataplott fra Mendels eksperiment (kvadratiske ruter) sammen med fem ulike numeriske eksperimentserier (punkter) basert på Markov-kjede modellen med samme utvalgsstørrelse som hos Mendel.

Kommende tilstander (generasjoner) i kjeden kan nå beregnes:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.25\\0.5\\0.25\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.375\\0.25\\0.375\end{pmatrix},....,\begin{pmatrix}0.5-(0.5)^{m+1}\\(0.5)^{m}\\0.5-(0.5)^{m+1}\end{pmatrix}\xrightarrow[m\to\infty]{}\begin{pmatrix}0.5\\0\\0.5\end{pmatrix}$$

I tilstandsvektoren vil de to øverste feltene framstå som dominant type, mens det nederste framstår som recessivt, og vi ser at forholdet blir 3:1 i F2-generasjonen. Vi observerer videre at populasjonen ved selvbefruktning deles i linjer som raskt blir høyst homozygote. Til slutt vil selvbefruktning produsere to rene genotyper, som hver får avkom av samme type. I sin artikkel rapporterer Mendel at han fortsatte eksperimentet i 4-6 generasjoner, uten å nevne konkrete tall for de siste, bare generelle resultater og formler (Stern & Sherwood 1966, s. 16).

I stedet for selvbefruktning, kunne vi valgt en modell med *tilfeldig* befruktning med utgangspunkt i en uendelig stor heterozygot populasjon uten overlapping mellom generasjonene. Da blir overgangsmatrisen:

$$P=\begin{pmatrix}0.5&0.25&0\\0.5&0.5&0.5\\0&0.25&0.5\end{pmatrix}$$

Når denne Markov-kjeden utvikles, vil vi få den velkjente *Hardy-Weinbergs lov* fra genetikken, hvor alle genotyper bevares i følge likevekten:

$$S_m=\begin{pmatrix}0.25\\0.5\\0.25\end{pmatrix}\qquad \text{for } \textit{alle } m\geq 2.$$

Denne tilstandsfordeling kan også bekreftes ved trekning med tilbakelegging fra en haploid (ikke diploid) pool av kjønnsceller. Det må her poengteres at Hardy-Weinberg-likevekt er nådd allerede i andre generasjon, og forblir uforandret i senere generasjoner så lenge systemet med tilfeldig befruktning benyttes. En eneste generasjon med tilfeldig befruktning vasker dermed ut effekten av alle generasjoner med innavl. Denne loven ble oppdaget i 1908 av den engelske matematikeren G.H. Hardy og den tyske legen W. Weinberg uavhengig av hverandre.

Markov var den første til å studere slike kjeder systematisk. Markov skrev imidlertid aldri om anvendelser av sin teori i fysikk eller biologi. Han kom fram til kjedene for å fylle interne behov i sannsynlighetsteorien. Hans eneste reelle eksempel på kjedene var i *fonetikk*, hvor han studerte litterære tekster, og hvor to tilstander var konsonanter og vokaler. For å illustrere resultatene sine bestemte han den statistiske variasjonen mellom konsonanter og vokaler i A. Pushkins berømte bok *Eugene Onegin*.

Gjennom arbeidet sitt ga Markov viktige bidrag til utviklingen av sannsynlighetsteori, og grunnla teorien om stokastiske prosesser, ett av de mest generelle objektene i sannsynlighetsteorien. Markov-kjeder fant raskt mange anvendelser i moderne fysikk, en av de tidligste var å beskrive såkalte *Brownske bevegelser*. Senere ble kosmisk stråling og radioaktivitet studert. Nok en vanlig anvendelse er i studier av fluktuasjoner i aksjekurser. Fenomener som generelt betegnes *random walks* har betydelig anvendelse i både biologi og samfunnsvitenskaper.

Markov-kjeder er mye brukt i populasjonsdynamikk. En av standardmodellene kalles Wright-modellen (Tan 2002, s.11). Populasjonsmodeller utviklet av P.H. Leslie på 1940-tallet er også mye i bruk. I Leslies modell antar man at poplulasjonen utgjøres av n aldersgrupper (Pollard 1973, gir mer bakgrunnstoff om såkalte *Leslie-matriser*).

Så langt har vi undersøkt Markov-kjeder hvor hver tilstand korresponderer med en observerbar hendelse. Denne situasjonen er ofte for begrenset til å være anvendelig på en del problemer, og vi trenger derfor en utvidet Markov-modell som inkluderer tilfellet der observasjonene er en sannsynlighets-funksjon av tilstanden. Slike modeller kalles Hidden Markov Models (HMM), og er bredt anvendte sannsynlighetsteoretiske modeller for data eller signaler som observeres sekvensielt (f.eks. over tid). En HMM er et dobbelt sett stokastiske prosesser. Den underliggende tilstandskjeden er ikke direkte observerbar, den er skjult (hidden), og kan kun observeres gjennom en annen stokastisk prosess som produserer kjeden av observasjoner. Man må bestemme den egentlige tilstandskjeden fra kjeden av observerte data ved hjelp av sannsynlighetsmodellen. HMM'en lar oss vite mye om datakilden selv om den ikke er tilgjengelig. Denne egenskapen er viktig når data fra den egentlige kilden er utilgjengelige, eller kostnadene for direkte innblikk for store.

Markov-modellene er rike på matematisk struktur, og kan danne teoretisk grunnlag for et bredt spekter av anvendelser. Basis for HMM-teorien ble utviklet av L.E. Baum og hans kolleger på slutten av 1960-tallet, og ble anvendt av J.K. Baker og F. Jelinek på problemer innen talegjenkjenning mot slutten av 1970-tallet (Rabiner 1989, s. 258). HMM har siden da vist seg å fungere bra i praksis, og har blitt anvendt på mange problemer som f.eks. sekvensanalyser i biologi og bioinformatikk.

Biologiske systemer gir oss i dag mange eksempler på strukturer og sammenhenger med sterk appell til matematikere. Den biologiske verden har imidlertid ofte blitt regnet som for kompleks for matematisk modellering. I forhold til fysikken er det relativt kort tid siden systematiske forsøk på analyse av biologiske problemer ved matematiske metoder kom i bruk. Den nyeste og mest utfordrende vekselvirkning mellom biologi og matematikk kommer nok fra moderne molekylærbiologi og bioinformatikk. Disse høyst strukturelle fagfelter er på mange måter ganske forskjellige fra klassisk, makroskopisk biologi. De nye fagfeltene behandler enorme mengder informasjon, både diskrete (DNA som strenger i et 4-bokstavers alfabet), og geometriske (enzymer).

Litteratur

Dennis, C. and Gallagher, R. (ed.): *The Human Genome*. Nature Publishing Group, 2001.
Fairbanks, D.J. and Rytting, B.: Mendelian Controversies: A Botanical and Historical Review. *American Journal of Botany* 88(5): 737-752, 2001.
Gillispie, C.C. (ed.): *Dictionary of scientific biography*. Charles Scribner's Sons, Vol IX 1974.
Griffiths, A.J.F. m.fl.: *An Introduction to Genetic Analysis*. W.H. Freeman and Company 1996.
Henig, R.M.: A *Monk and two Peas. The story of Gregor Mendel and the Discovery of Genetics*. Weidenfeld & Nicolson 2000.
Pollard, J.H.: *Mathematical Models for the Growth of Human Populations*. Cambridge Univ. Press, 1973.
Rabiner, L. R.: *A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition*. *Proceedings of the IEEE* 77:257-285, 1989
Sheynin, O.B.: A A Markov's Work on Probability, *Archive for History of Exact Science* 39: 337-377, 1988.
Stern, C and. Sherwood, E R: *The Origin of genetics: a Mendel source book*. Freeman, 1966.
Tan, Wai-Yuan, *Stochastic Models with Applications to Genetics, Cancers, Aids and Other Biomedical Systems*. World Scientific Publishing Co. 2002.
Tyvand, P.A.: An Exact Algebraic Theory of Genetic Drift in Finite Diploid Populations with Random Mating. *J. theor. Biol*. 163: 315-331, 1993.
Vollmann, J. and Ruckenbauer, P.: Von Gregor Mendel zur Molekulargenetik in der Pflanzenzüchtung - ein Überblick. *Die Bodenkultur* / Austrian Journal of Agricultural Research 48:53-65, 1997.

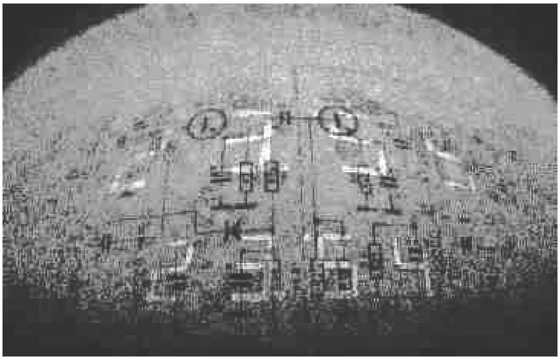
11. Datamaskiner og kunstig intelligens.

1. Innledning

Etter at de første elektroniske datamaskiner ble satt sammen for over 50 år siden, har utviklingen av den nye oppfinnelsen gått stadig raskere. Ved hjelp av denne teknologien har vi bl.a. landsatt 12 mennesker på månen og brakt de tilbake igjen. I våre dager har datamaskinene blitt tatt i bruk på mange sektorer i samfunnet, og det forventes av de fleste at utviklingen går mot et stadig mer datapreget samfunn. Dataindustrien er i raskere utvikling enn noen annen industrigrein. Vi har allerede opplevd flere databølger like inn i de tusen hjem. Datafag integreres nå i grunnskolen, og den høyere informatikkutdannelse har vært sterkt i skuddet ved våre universiteter og høgskoler.

Nå er ikke dette første gang menneskeheten har blitt "velsignet" med ny teknologi. Kaster vi et kort blikk omkring oss, ser vi gjerne ting som biler og elektromotorer, symaskiner og komfyrer, telefon og TV. Dette har vi vokst opp med, og vi regner det som helt hverdagslig teknologi som vi vet hva kan brukes til. Men på datamaskinen reagerer de fleste av oss fortsatt på en annen måte. Denne maskinen har vår generasjon ennå ikke fått en fortrolig og hverdagslig holdning til.

Dagens barn derimot leker gjerne med datamaskiner. I boka *The Second Self* hevder psykologen og sosiologen Sherry Turkle at datamaskinen nå mer og mer fungerer som menneskets *nye speil*. Før var det dyreriket som hadde denne rollen. Speilet gir oss vår referanse og selvforståelse.



Datamaskinen ser ut til å ha et kraftig potensiale - et potensiale som ligger opptil mye av det som vi trodde var reservert for mennesket. Den kan bl.a. svare på spørsmål om innholdet på våre bankkonti (og "stemmen" høres ikke umiskjennelig syntetisk ut lenger). Den kan også sørge for at vi får penger i en fart, og den kan hjelpe oss å søke etter informasjon og litteratur fra hele verden. Å spille mot den kan også være morsomt. Kan vi snart stole på at maskiner kan hjelpe oss å ta vanskelige avgjørelser på samme måte som vi allerede stoler på maskinene når vi reiser eller skal kommunisere over lange avstander?

Ettersom utviklingen av utstyret har gått framover, har det oppstått ulike og motstridende holdninger om hva datamaskinen skulle kunne brukes til. En holdning går ut på at datamaskiner er og blir dumme, lite fleksible og avhengige av mange eksperter for å fungere tilfredsstillende. Det henvises gjerne til maskinenes velfylte "tabbekvote" og alle programsystemer som har "ligget nede" og til slutt måttet trekkes tilbake for kortere eller lengre periode. Andre hevder at maskinens evne til å lære, tenke og skape kommer til å øke raskt slik at de i framtiden vil kunne behandle de samme problemer som mennesket, med samme grad av sikkerhet. Få sider av menneskets intellekt vil dermed kunne holdes utenfor datamaskinenes rekkevidde. Christopher Evans sier i en av sine mest provoserende uttalelser (Evans 1982, s.187):

> *Mennesket som lenge var den eneste og udiskutable herre på kloden, vil ikke lenger behøve å stå alene overfor universet. Andre intelligenser, som først var sammenliknbare, senere langt overlegne, vil stå ved menneskets side.*

Mot dette kan vi stille K.A. Olsen og H.R. Jervels uttalelse (Jervel & Olsen 1984, s.101):

> *Uansett blir påstandene om at maskinene skal erstatte alle menneskers gjøremål i organisasjoner stående igjen som helt urealistisk. Ikke engang de beste AI-systemene (kunstig intelligens) har oppnådd noen særlig suksess. Ikke engang på delvis lukkede problemområder, som er forferdelig enkle i forhold til de en møter på mange andre områder.*

Atter andre baserer sin holdning til datamaskinen på konsekvenser for sysselsettingen. Her spenner holdningene fra datamaskinen som "jobkiller" (f.eks. typografiyrket) til det motsatte, nemlig at den vil skape mange nye arbeidsplasser. Noe de fleste i dag dog er enige om, er at for å trygge arbeidsplasser, må datateknologi tas i bruk slik at man ikke blir hengende etter i utviklingen og dermed utkonkurreres av andre.

De utredninger vi har hatt om sysselsetting i Norge, peker mot at IKT (Informasjons og Kommunikasjons Teknologi) ikke er det avgjørende moment m.h.t arbeidsløshet. Utredninger fra våre nordiske naboland peker omtrent i samme retning. Dette gjelder samfunnet totalt sett. Enkelte bedrifter og greiner av en virksomhet vil kunne vinne/miste arbeidsplasser.

Denne artikkelen er laget for å trenge dypere inn i hva datamaskinen kan og hva den ikke kan. Å fokusere på dette mener jeg blir det viktigste når vi spør om hva IKT vil kunne overta for oss mennesker. Uten en realistisk og faglig holdning til datamaskinens egenart og potensiale, vil debatten om IKT's rolle i framtidens samfunn, sysselsetting, styring, arbeidsmiljø og undervisning bli både ullen og forfeilet.

2. Tre presiseringer

Før vi tar fatt på analysen av datamaskinens muligheter og begrensninger som informasjonsbehandler, trenger vi å definere nærmere hva vi mener med en datamaskin, - og hva vi mener om oss selv i denne relasjonen. I tillegg blir begrepet intelligens sentralt.

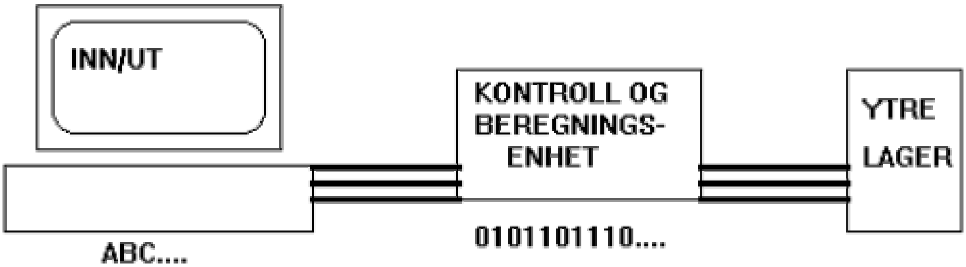
2.1 HVA ER EN DATAMASKIN?

En datamaskin kan betraktes som bestående av to hoveddeler: Den har elektronisk *hardware* som gjør det mulig å behandle symbolske koder (*software*). *Hardware* (maskinvare) er det som maskinen er bygget opp av: mikroprosessorer, ledninger, tastatur og slikt. *Software* (programvare) er programmer som er lagret i datamaskinen.

Grunnfunksjonene i datamaskinen er å lagre, hente fram, addere og å sammenlikne tall. Disse funksjonene er alltid lagt inn i maskinens *hardware*.

En datamaskin arbeider digitalt i totallsystemet. Dette tallsystemet bruker gjerne symbolene 0 og 1 eller AV og PÅ. Disse er representert som spenningsforskjeller i elektroniske kretser. Hver bokstav og ordre må kodes direkte eller oversettes til et slikt tall, og slik kan maskinen gjøre det vi sier den skal gjøre. Ved å kombinere datamaskinens grunnfunksjoner til sammensatte funksjoner i programmene, gjør vi datamaskinen til en meget fleksibel maskin.

Maskinvaren kan videre deles opp i sine underdeler. Vi har en kontroll- og beregningsenhet som tar seg av utførelsen av grunnfunksjonene. Så har vi et ytre lager for å huske program og data, og til slutt overføringsveier mellom slike enheter.



Datamaskinen kjører kun regelbaserte programmer. I 1966 viste C.Bøhm og G.Jacopini formelt at alle problemer som lar seg løse ved hjelp av datamaskin, kan løses ved bruk av tre begreper (Schneider 1981, side 134):

-sekvens (begin.. end, tilordning, input, output)
-valg (if..then..else..)
-iterasjon (while..do..)

Dette blir da de nye grunnfunksjoner i de såkalte 3.generasjons strukturerte programmeringsspråk, og er det nivå de fleste(?) programmerere i våre dager arbeider med en datamaskin på.

2.2 HVA ER DA ET MENNESKE?

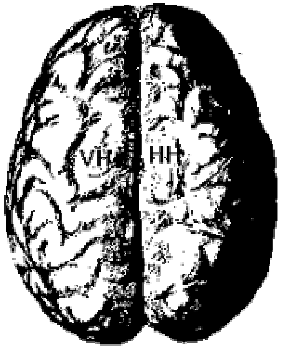
Dette er et av de dypere spørsmål vi kan stille oss og sprenger vel egentlig grensene for dette kapitlet. Men la oss for helhetens skyld gi noen stikkord fra vår nåværende viten om oss selv.

Allerede fra fødselen av er mennesket utstyrt med en god samling "programvare" som kontrollerer hjerteaktivitet, pusting, næringsopptak osv. Det finnes også programmer som gjør at barnet vil utforske verden, lære å gå, leke osv. Nye programmer for dette utvikles etter hvert i stort tempo.

Ingen har vel ennå forståelsen av om disse programmene er lagret biokjemisk, elektrisk eller på annen måte i hjernens enorme nettverk bestående av rundt 10 milliarder nerveceller (nevroner). Vi vet ikke om sentralnervesystemet fungerer digitalt (som datamaskinen) eller ikke. Det eneste vi vet med sikkerhet er at programmene utvikles i selve hjernen og lagres der. Etter hvert gjør de oss i stand til å kjenne igjen ting, snakke, skrive, lese, regne og kanskje også skape kunst, musikk og programmere datamaskiner.

Den menneskelige hjerne består av to halvdeler kalt høyre hemisfære (HH) og venstre hemisfære (VH). HH og VH er spesialisert mot ulike typer tenkning og funksjoner. (Ganong 1983, s.216) Hos de høyrehendte, og også hos de fleste venstrehendte, er VH spesialisert for logikk, numerisk tenkning og språk. I HH har vi spesialisering for bearbeiding av visuelle bilder, romlige forhold og intuisjon. Hos et barn som mister den ene hemisfæren, kan den andre i stor grad overta alle funksjoner.

Slik sett er hjernen ikke direkte å likne med en datamaskin, men kanskje mer som et stort "fellesskap" sammenkoblet med et selv-regulerende nettverk. Måten den er organisert på virker ulik de elektroniske datamaskiner. Alt biologisk liv er dessuten selv-reparerende, selv-reproduserende og kan leve på mange typer energi.



Velger vi i stedet for denne "top down" analysen av mennesket å se det hele i "bottom up"-perspektiv, må vi stoppe opp ved det såkalte DNA-molekylet eller arvekoden (den genetiske koden). Dette spesielle molekylet, som vi finner i alle våre celler, er en slags "maskinkode" for individet (Leach 1982, s.86). Til forskjell fra datamaskinen som arbeider med en binær notasjon, består DNA- molekylets kode av fire kjemiske baser kalt Adenin, Guanin, Cytosin og Thymin. Milliarder av slike baser koblet sammen som en dobbelspiral på molekylnivå, utgjør vårt genetiske program. Programmet ville, utskrevet med liten bokskrift, utgjøre rundt 500 bøker hver på 1000 sider (Wilder-Smith 1982, s.54).

Ut fra disse kjensgjerninger kunne det være fristende å trekke den slutning at mennesket kun var resultatet av et superprogram skrevet i et slags firetallsystem (A,G,C,T). J.Weizenbaum refererer også denne tanken i sin bok (1976, s.158ff), men påpeker at dette bare er en "folkelig forenkling". DNA er nemlig bare en del av den cellen hvert menneske er vokst opp fra. I tillegg har vi bl.a. proteinene som regulerer kjemien. Cellen er også helt avhengig av vekselvirkning med sitt bestemte miljø både før og etter fødselen. Mennesket er altså allerede fra før fødselen et produkt av både arv og miljø.

2.3 HVA ER INTELLIGENS?

Som begrep defineres intelligens meget forskjellig. Definisjonen kan spenne fra "evnen til å kombinere fakta slik at de kan gi løsning på et problem" til "evnen til hensiktsmessig tilpasning til nye situasjoner". Psykologer hevder gjerne at intelligensen har visse kjennetegn, som forestillingsrikdom, konsentrasjonsevne og oppfinnsomhet. Man har altså ennå på langt nær kommet fram til en presis definisjon av ordet.

Er f.eks. menneskets syn, smak og hørsel en del av intelligensen, eller blir disse sansene bare intelligent brukt?

Grunnet uklarhet om begrepet intelligens, så finnes det heller ingen grunnleggende enighet om hva fagfeltet "intelligens på datamaskin" (Artificial Intelligence = AI) går ut på og hva man vil fram til. På den ene side har vi de som mener at mennesket aldri vil komme fram til en enhetlig teori om intelligens og AI. Videre arbeid må da skje ut fra mer eller mindre adskilte enkeltprosjekter. Andre igjen leter etter generelle og altomfattende rammer for AI som kan innpasse alt vi vet om intelligens.

Datapioneren Alan Turing har foreslått en praktisk test som kan brukes for å avgjøre om en datamaskin er intelligent eller ikke (1950, s.433 ff): Et menneske og en datamaskin plasseres i hvert sitt rom. Et annet menneske brukes som forsøksperson og får som oppgave å kommunisere via terminal med de to rommene. Hvis vedkommende ikke er i stand til å avgjøre hvor datamaskinen sitter, har maskinen bestått testen. Dersom forsøkspersonen klarer å oppdage en vesentlig forskjell i f.eks. svarmåte eller logikken i svarene, har datamaskinen ikke bestått testen. Denne prøven kalles gjerne *Turings test.*

AI-forskeren Douglas R. Hofstadter mener at noe av hemmeligheten ved menneskets intelligens ligger i evnen til å operere på flere nivåer samtidig (1979 kap.19 og 20). Dette gjelder både våre sanser og vår tenkning. Vi ser både skogen og det enkelte tre på samme tid. Synsfeltet konsentrerer seg på detaljene, men følger med i helheten. En god sjakkspiller kutter ut det uvesentlige og konsentrerer seg om sin strategi *samtidig* som helhetssituasjonen overvåkes. Denne evnen til å tenke i flere nivåer gjør også at vi kan takle paradokser og være kreative.

3. Fem begrensninger for datateknologien

I litteraturen har jeg funnet fem barrierer som IKT stadig arbeider innenfor. Disse begrensningene ser ikke ut til å være gitt en gang for alle, men er heller grensefelter som teknologien og programutviklingen stadig flytter eller kan flytte. Men grensene er der og definerer hva som på et gitt tidspunkt ligger innenfor og hva som er utenfor datamaskinens domene. La oss se på hvert av disse grensefeltene:

3.1 TEKNISKE BEGRENSNINGER.

De første datamaskinene var teknisk usikre og hadde liten lagerkapasitet og opptok stor fysisk plass. De tekniske problemene har siden den tid gjennomgått en rivende utvikling, og de ulike "brikkene" har blitt stadig mindre.

De grensene teknikken setter flyttes altså med stormskritt. Dog måtte en datamaskin som skulle kunne lagre alle forskjellige spill i sjakk, lagre et uendelig antall muligheter. Til sammenlikning er antall atomer i det kjente univers et tall med 80 siffer (ca. 10^{80}) , så selv om hvert atom kunne gjøres om til en lagercelle monnet det lite. Dette viser hvor krevende et virkelig problem kan være. En prinsipielt uslåelig sjakkmaskin synes altså umulig også av tekniske grunner (Jervel & Olsen 1984, s.137). Så har da intet menneske heller fått betegnelsen "prinsipielt uslåelig". Men virkelige problemer er ofte så krevende at det er naivt å tro at de lar seg løse ved bare å pøse på med mer datakraft.

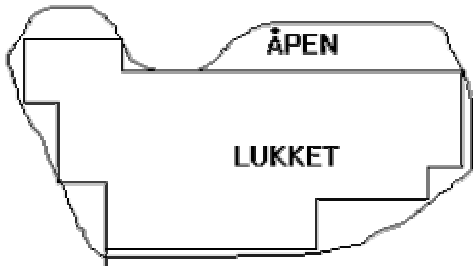
Denne effekten kalles gjerne "*kombinasjonseksplosjonen*"**.** Sjakkspillet er bestemt av enkle regler. For hvert mulige trekk av f.eks. 30 er det i neste omgang omtrent like mange *nye* mulige trekk, tilsammen 900 kombinasjoner. Økningen er eksplosiv, og selv de kraftigste datamaskiner kan bare regne noen få trekk framover, dersom alle muligheter skal tas i betraktning. I det virkelige liv er antall mulige kombinasjoner drastisk mye større. For å hjelpe maskinen må man da innføre prinsipper som skal "sile ut" meningsløse trekk, eller supplere med alternative strategier og kunnskaper.

3.2 ØKONOMISKE BEGRENSNINGER.

Det var militær forskning som finansierte de første datamaskinene. De første produktene var da også dyre. En rapport fra 1954 viste et behov på ca. 50 maskiner for hele USA. Men etter at datamaskinen ble et kommersielt produkt, har finansieringen av nye, bedre og billigere utstyr gått upåklagelig. Prisene er nå så lave at maskinene er i bruk overalt i samfunnet. I våre samfunn er dataindustrien nå på vei til å bli en av de største og mest ekspansive virksomheter.

3.3 LOGISKE BEGRENSNINGER.

For å kunne bruke datamaskinen i en bestemt sammenheng, må vi først lage en strukturert oppskrift (algoritme) for denne bruken. Slik kan en datamaskin bare brukes til oppgaver og aktiviteter som er formaliserbare. I boka "Hva datamaskiner ikke kan", deler forfatterne naturlige problemer og oppgaver inn i en ÅPEN og en LUKKET del (Jervel & Olsen 1984, s.48ff). Bare den lukkede delen vil kunne struktureres til en formell beskrivelse.



Et problem består ofte av både en åpen og en lukket del.

I våre samfunn er mange aktiviteter blitt formalisert lenge før datamaskinen ble oppfunnet. Vi kan tenke på regnskapsførsel, arkivering og tekstbehandling. Her har IKT kommet til ferdigdekket bord, og anvendelsene har da også kommet raskt.

Hvor skillet mellom det åpne og det lukkede skal legges, er langt fra klart. Her er det en flytende grense. Men datamaskinen programmeres i og krever et lukket og presist språk. Slik får vi en grov prinsipiell grense for hva datamaskinen kan overta. Å prøve å behandle en åpen situasjon med IKT alene, har vi ingen mulighet til å lykkes med. Det blir som å tre en tvangstrøye over seg. Derimot kan det være av nytte å behandle en lukket delmengde av hele situasjonen.

Ettersom kunnskapene øker og formaliseringen av samfunnsoppgavene blir sterkere, skulle man tro at mer og mer ville ligge til rette for bruk av IKT. Rasjonalisering vil ofte kreve formalisering. Dette er nok også riktig.

Men på dette området eksisterer det en logisk grense. Denne ble formulert av logikeren Kurt Gödels allerede i 1931, og går nå under navnet *Gödels ufullstendighetsteorem*. Allan Turing refererer denne i sin berømte artikkel *Computer Machinery and Intelligence* (1950 s.444-445):

> *I et tilstrekkelig omfattende logisk system så finnes det alltid utsagn (dvs. relevante påstander) som verken kan bevises eller motbevises innenfor systemets ramme.*

Turing har selv tilpasset dette resultatet til å gjelde maskiner. Dermed står vi igjen med at uansett hvor stor kapasitet en datamaskin har, vil det alltid finnes visse oppgaver den ikke kan løse. Formaliseringen vil aldri dekke et helt fagområde komplett. I praksis er det nok vanskelig å påpeke mangler ved maskiner som skyldes Gödels setning, men resultatet står der som en teoretisk grense.

Men er ikke den menneskelige hjerne også et "formelt logisk system" og dermed underlagt de samme logiske begrensninger som en datamaskin? Dette vet vi vel ennå ikke særlig mye om, men sikkert er det at menneskets kreativitet, intuisjon og språk er noe som forundrer oss til stadighet.

3.4 PROGRAMMERINGSMESSIGE BEGRENSNINGER.

Selv om maskinvaren er meget komplisert, så er det programvaren som er mest kompleks og koster mest å utvikle. Det legges da også ned enorm arbeidsinnsats fra store programmeringsteam i å utvikle god og effektiv programvare til å takle formaliserte oppgaver. Store programsystemer er noe av det mest kompliserte mennesker har laget. Det er også lagt ned mye arbeid i å framskaffe gode kompilatorer. Her er ADA, Prolog og Java blant verktøyene for bruk på store programmer.

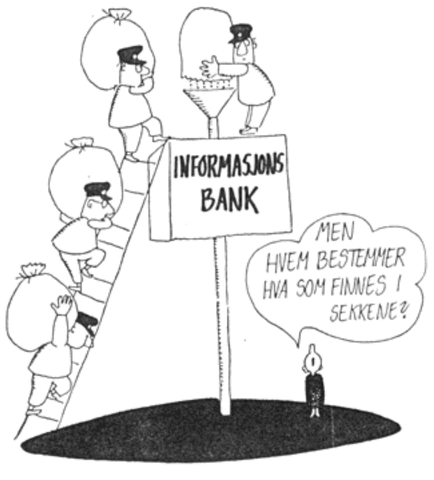
Utviklingskostnadene til et programprodukt er sterkt økende med programmets kompleksitet. Et stort system (100 000 programlinjer) kan være nærmere 100 ganger så dyrt som et lite system (10 000 programlinjer). (Jervel & Olsen 1984, s.146). Når virkelig store programsystemer skal utvikles, må vi være klar over denne eksplosjonsartede økning av arbeidstimer.

Brukere av IKT kjenner også godt til at praktisk talt alle programsystemer i bruk har sine feil og mangler. Når et system er kommet i så mange versjoner at det er feilfritt, er det ofte allerede foreldet.

I 1970-årene brukte amerikanerne mer enn 1 milliard dollar på et system, WIMEX, som skulle gi advarsel om militære angrep og koordinere og kontrollere all amerikansk militær aktivitet. Men WIMEX har vist seg å svikte i kritiske situasjoner. I 1979 skal det visstnok ha vært seks minutters varsel om "kjernefysisk krig" pga. feil i WIMEX (Jervel & Olsen 1984, s.151). Systemet har ikke gitt de forventede resultater.

3.5 ETISKE AVGRENSNINGER.

Orwells bok *1984* er blant de bøker som har satt spor i folks bevissthet. Forestillingen om det datakontrollerte samfunn hvor maskinen *Storebror* alltid kunne se deg, er noe de fleste av oss rygger tilbake for. I Norge har vi da også vært tidlig ute med lover for å sikre personvernet. Det er f.eks. begrensninger på bruk av personnummeret. Dette betyr at det som teknisk sett er mulig allikevel ikke realiseres ut fra en etisk vurdering. Vi ønsker å ta vare på våre rettigheter som mennesker. Selv om IKT *kan* gjøre noe, så følger det ikke dermed at den *bør* brukes til dette. Bør vi utvikle IKT-systemer som f.eks. kan fungere som psykologer og dommere?



Fra Cronberg 1982

Store programsystemer kan dessuten føre til en sentralisering av nøkkelmakt og dermed gi noen få ("eliten") muligheter for manipulering. Slik makt til noen få vil være uønsket i demokratiske samfunn.

4. Datamaskinen som manuell arbeider: roboter

Ordet *robot* ble første gang brukt i 1920 av en tsjekkisk forfatter og var avledet av et uttrykk for slavearbeid. Ingeniørene betrakter dagens roboter som innretninger i stand til automatisk å gjøre visse oppgaver som et menneske normalt gjør. De er oftest beregnet på å løse *en* type oppgaver og er aldri "allmennyttige". Noen mener at ordet *robot* er unødvendig, da det kun er snakk om maskiner.

Men etterhvert som robotene utvikles, blir de også i stand til å utføre flere forskjellige oppgavetyper. Deres valg av oppgave til ethvert tidspunkt er ikke bare bestemt av det forhåndsdefinerte program, men også av data som hentes inn fra omgivelsene. Roboten vil altså kunne ta avgjørelser på grunnlag av en eller annen tolkning av virkeligheten. Riktignok har dagens industriroboter store problemer med å tolke visuelle bilder (pattern recognition). I høyden klarer de på det nåværende tidspunkt å skille en del geometriske former fra hverandre mot en standardisert bakgrunn.

For tiden er også robotene dyre og brukes spesielt til jobber som enten er ubehagelige eller farlige for mennesker, f.eks. under vann, i stor varme eller i atomkraftverk. Her kan de høye kostnadene aksepteres.

Men den tekniske utvikling kommer til å endre bildet. Såkalte *Kybernetiske datasystemer* vil bli stadig mindre i størrelse, forhåpentligvis mer pålitelige og billigere. Menneskene kan få andre og høyere oppgaver i produksjonsprosessen.

Lagerstyring er et felt som egner seg godt for styring av datasystemer. Dette henger ofte sammen med at lagrene blir så store at manuelle systemer er på grensen til å bryte sammen. Datasystemer gir også bedre muligheter til planlegging.

Noe av det manuelle arbeid, vil IKT kunne løse på en helt annen måte enn vi hittil har gjort. Dette gjelder spesielt tradisjonell brevpost som for en stor del er erstattet av e-post. Videokonferansesystemer vil også kunne dempe noe på den stadige reisingen til og fra møter. Mange har hevdet at dette i en ikke altfor fjern framtid vil bety en ny giv for distriktene, og at vi vil få en dreining mot en desentralisering av handels- og næringsliv. Men dette gjenstår å se og vil sannsynligvis også kreve politisk styring.

5. Datamaskinen som akademiker: ekspertsystemer.

IKT's inngripen i de akademiske yrker kommer sannsynligvis til å merkes like sterkt som inngrepene i arbeidet til de faglærte og halvfaglærte. Essensen i et akademisk yrke er informasjonsformidling, og her vil IKT komme inn som et naturlig hjelpemiddel.

Regnskapsførsel var noe av det første som ble overtatt av EDB-systemer. Grunnlaget for en slik anvendelse var det formaliseringsgrunnlag all økonomisk virksomhet fra før av fungerte på. Eiendom, varer og gjeld var representert ved navn og pengebeløp.

Tanken om å bruke datamaskinen som *lærer* kom også tidlig. Læremaskiner eller DSL (DataStøttet Læring) ble utprøvd med betydelig innsats rundt 1960. Men eksperimentet, som bygget på B.F. Skinners psykologi og ikke i særlig grad på lærernes erfaring, falt mislykket ut. Utgangspunktet hadde vært forenklede og feilaktige prinsipper om hva som var god undervisning. Å stadig forholde seg til en bestemt maskin gjennom flere år, blir jo fort problematisk og tørt for en tenåring.

Å bringe datamaskinen inn i undervisningen er et mål som har vært temmelig vanskelig å nå. Utviklingen av pedagogisk programvare gjøres nå under forutsetningen av at dette skal fungere som hjelpemiddel (og ikke erstatning) for læreren. Programmene er svært varierte i opplegg og innhold. Programmenes læringsverdi øker jo bedre de settes inn i en faglig ramme. Til forskjell fra film og bøker, er slike systemer interaktive og reagere på signaler fra brukeren. Konsekvensene av de valg som gjøres kommer på skjermen. Dette gir en meget realistisk opplæringssituasjon. Mange knytter forhåpninger om store pedagogiske gevinster til slike systemer. Andre er mer skeptiske.

Slike undervisningssystemer vil kunne brukes på faglig forsvarlig måte innen det vi har kalt formaliserbare situasjoner. Datamaskinen kan også brukes i åpne situasjoner som språkundervisning. Forutsetningen er da at den åpne delen kan ignoreres og tas opp i andre sammenhenger enn direkte på skjermen.

I sin bok *Computer Power and Human Reason* forteller professor Joe Weizenbaum at han under en diskusjon med en kollega ble utfordret med spørsmålet: "Hva er det en *dommer* vet som vi ikke kan fortelle en datamaskin?" Svaret den andre ga var "ingenting". Kan det altså tenkes at en rettssak med avgjøring av skyldspørsmål og straffeutmåling kan formaliseres?

Bevisførsel i juridisk sammenheng må, slik praksis er i vår rettspleie, karakteriseres som en åpen situasjon. Det er ikke snakk om rent formelle beviser, men om vurdering av et utall av mulige og umulige situasjoner. Straffeutmåling er også en åpen vurdering, selv om dette er noe mer ryddig i og med at rammebetingelsene er gitt i lovtekstene. Å ville innføre et datasystem som dommer måtte altså gjøres ved å ignorere den åpne del av situasjonen. Dette ville bety en innsnevring av virkelighetsforståelsen som det vil bli vanskelig å få både jurister og politikere med på, unntatt i krisesituasjoner. Alle akademiske fag ønsker jo å bevege seg i motsatt retning, nemlig mot økende innsikt og større virkelighetskontakt.

En annen måte IKT kan brukes på av jurister, er til å lagre og holde oversikt over diverse lovtekster og forskrifter. Oversikter over tidligere dommer kan også kobles inn på systemet og slik bli en effektiv hjelp i saksforberedelsene. Slike systemer er allerede utviklet.

Historien om Joe Weizenbaums psykiaterprogram *ELIZA* er velkjent. Denne klassikeren finnes nå også på Internett i flere utgaver. Her var det programmereren som lurte brukeren. De siste 25 årene har det også vært satset seriøst på å utvikle programmer som kan stille *sykdomsdiagnoser* og foreslå medisinsk behandling. Her blir det også snakk om åpne og lukkede deler av situasjonen. Man har forsøkt å få en datamaskin til å stille spørsmål og hente svar på de vanlige innledningsspørsmålene ved en legekonsultasjon. Disse systemene har imidlertid ennå ikke fått noe særlig gjennomslag. Selv denne enkle spørsmålsrunden er åpen. Det er ikke bare opplysningene i svaret som interesserer legene. Hvordan svarene ble gitt formidler også viktige fakta. Var det en klient som f.eks. så ut til å overdrive symptomene?, bagatellisere?, skjule? Var det nervøsitet inn i bildet? Legen må utøve skjønn i slike situasjoner.

Et system for automatisk diagnostisering av magesmerter ble for flere år siden utviklet i Leeds (Jervel & Olsen 1984, s.93). Programmet, som var ganske enkelt, ble kjørt på en bordmaskin. Det var bygd på grunnlagsdata fra 700 "magepasienter" i Leeds. Programmet klarte å gi riktig diagnose i 90% av tilfellene. De mest erfarne legene lå på 80%.

Da systemet ble prøvd i København, klarte det seg ikke bedre enn legene. Grunnlagsdata fra Leeds passet ikke så godt for København, da sistnevnte by f.eks. hadde flere alkoholikere. Ett av problemene ved systemet var denne følsomhet overfor miljøvariasjoner. Det var vanskelig å finne lokale data til utgangspunkt for "beregningene". Gamle legejournaler var ikke alltid det beste grunnlag. Programmet ble dermed lite portabelt og har ikke blitt gjort særlig mye bruk av.

I medisinen er det utviklet flere andre og større diagnosesystemer. Hvilken utbredelse de vil få, gjenstår å se.

"God morgen! Jeg er den nye overlegen. Vær vennlig å tast inn hvordan det står til med Dem i dag!" (Tegning: Carsten Gitt).

Slike ekspertsystemer er altså bygget opp omkring store mengder fakta knyttet til et bestemt område for menneskelig ekspertise. I tillegg innebygges også regler for tolkning av fakta og framstilling av konklusjoner. Slik har man "tappet" ekspertens kunnskaper over i systemet. I hva for grad man lykkes med et ekspertsystem, vil være avhengig av hvor flink man har vært til å formalisere, og om man har klart å skille åpne og lukkede deler fra hverandre. Har man presset åpne deler inn i maskinens lukkede ramme?

Selvfølgelig kan det tenkes krisepregede situasjoner hvor f. eks. et lukket og begrenset legesystem vil være å foretrekke framfor intet system eller en håndbok i medisin.

Det forventes at forsikringsselskaper, banker, farmasøytisk industri, biologer, ingeniørfirmaer og andre kommer til å ta ekspertsystemer i bruk. Her bør det presiseres at det ikke er systemet som "er eksperten", men systemet som er *laget* av eksperten slik at det gir *støtte* til brukeren. Om systemet oppfører seg som en ekspert er noe helt annet. Egentlig burde vel et "ekspertsystem" defineres som datasystem pluss menneske, og flere systemer er lagt opp slik at brukeren må sette navnetrekket sitt på en prikket linje for å bekrefte og ta ansvar for avgjørelsen.

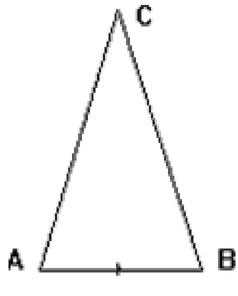
I dag tilbys det mange IKT-redskaper for å utvikle ekspertsystemer, og mange prosjekter har hatt store bevilgninger. Men til tross for dette finnes det påfallende få ferdige produkter. Og da gjerne nettopp på områder knyttet til data- eller oljeindustrien. Mange prosjekter har kun endt med "erfaring og ny erkjennelse". Problemene man støtte på var uoverstigelige (Hasnes 1987, s.13).

De manglende resultater skyldes en uklarhet i teorien og begrepsdannelsen bak ekspertsystemer. Når et forskningsprosjekt ikke er tuftet på en skikkelig teoretisk basis, vil dette straffe seg før eller siden. Men selvfølgelig kan det komme gode biprodukter isteden.

Vi må ikke forveksle intelligens og ekspertise med å ha blitt intelligent *laget*. En maur er ikke intelligent, men den er mye mer fleksibelt laget enn noen robot mennesket til nå har produsert. Slik sett arbeider ikke ekspertsystemer på ekspertnivå, men på "*biblioteksnivå*". En ekspert benytter ikke oppslag og regler, men assosierer situasjoner ut fra sin tidligere erfaring, og handler etter en nokså kompleks tolkning av totalsituasjonen. Selvfølgelig må eksperten av og til også handle ut fra regler, spesielt ved møtet med nye og ukjente situasjoner. Men ekspertsystemene vil for alltid måtte holde seg på dette plan.

6. Kunstig intelligens?

På 1960-tallet arbeidet E. Gelernter med å utvikle programmer som skulle finne beviser for geometriske setninger. Geometrien som vitenskap ble formalisert for over 2000 år siden. En dag frambrakte programmet et elegant bevis som programmereren ikke kjente til fra før!



Setningen som skulle bevises var om likebeinte trekanter, og det gjaldt å vise at vinklene ved grunnlinja var like store. Programmet betraktet trekanten ABC og dens *speilbilde* BAC som to forskjellige trekanter. Men disse er kongruente (tre sider parvis like). Dermed er også vinklene like. Beviset er enkelt og samtidig forskjellig fra det vi kan finne i skolebøkene.

Ser man nøyere etter i Gelernters geometriprogram, finner man at selve teknikken som frambrakte beviset ligger temmelig klart formulert i programmet fra forfatterens hånd (Hofstadter 1979, s.606). Senere har det også vist seg at den gamle matematiker Pappus fra Aleksandria (ca. 300 e. Kr.) brukte samme bevis. Hadde Gelernters program stadig fortsatt å frambringe geniale beviser, måtte det betraktes som en genistrek. Men så skjedde ikke.

Dette betyr ikke at datamaskinen er et uaktuelt hjelpemiddel i matematikken. De som har lært integralregning vet at å integrere funksjoner kan være litt av en kunst. Men det er nå utviklet gode program som utfører symbolsk integrasjon (finner ubestemte integraler). Disse regnes stort sett for å være overlegent raskere enn å gjøre jobben for hånd. De mest kjente programmene som brukes innen matematikk er Excel, Mathematica, Maple og MatLab. Bruk av datamaskiner har ført til en dramatisk økning av de vitenskapelige og teknologiske muligheter til å ta i bruk matematiske modeller. Datamodeller og numeriske eksperimenter har i en viss grad kunnet erstatte tidkrevende og dyre laboratorieeksperimenter (Langtangen & Tveito 2001).

Det mest kjente matematiske problem som ble løst ved bruk av datamaskin er det såkalte *firefarge problemet*. Det går ut på å vise at fire farger er nok når man skal fargelegge et kart slik at to land med felles grenselinje (det er altså ikke nok med bare et grensepunkt) skal ha forskjellig farge på kartet. Beviset ble først gjennomført i 1976 av Appel og Haken på deres datamaskin.

Vil framtidens datamaskiner kunne tenke? Får vi snart maskiner med "menneskets fornuft" som bl.a. er i stand til å lære?

Blant forskerne, også de innenfor kunstig intelligens (AI), mener de fleste nei. Begrunnelsene kan variere. En del forskere innen feltet mener problemene lar seg løse, men med den teknologi vi i dag ser for oss, kommer vi ikke i nærheten av intelligens. Etter manges skjønn må det grunnleggende nye oppdagelser til for å løse problemet. I dag snakkes det derfor mer om kunnskapsprosessering, kunnskapsbehandling, agenter, adaptiv programvare og nevrale nett enn om AI.

AI har de siste årene nærmest fungert som et slags moteord som skulle beskrive framtidens universalhjelpemiddel og bringe nye landevinninger til de fleste fagfelter. Mange mener nå at ordbruken har vært et salgstriks uten reelt innhold. Ved enkelte amerikanske universiteter kan et kurs i *Artificial Intelligence* være det samme som et videregående kurs i programmering.

AI-programmeringen konsentrerer seg om å bygge opp avanserte søkealgoritmer som ved skrittvis og langvarig prøving og feiling bygger opp en løsning. Tilgjengelige kunnskaper om problemområdet representeres som data til programmet i form av regler og rammebetingelser. Der det er umulig å finne sikre (perfekte) løsninger på problemet, benyttes usikkerhetsfaktorer. Disse antyder den mest brukbare løsning.

Dette er ting som tradisjonell programmering har arbeidet med lenge. En datamaskin kan kun kjøre regelbaserte programmer. Selvfølgelig kreves det betydelig intelligens å *utvikle* programmene. Dette har alltid vært et minimumskrav til alle forskere og oppdagere. Senere kreves det jo heldigvis ikke samme intelligens for å *bruke* resultatet. Slik sett er det misvisende å knytte ordet intelligens til disse programmene.

6.1 SJAKKMESTEREN *DEEP BLUE*

I tiden mellom 3. og 11. mai 1997 spilte sjakkmesteren Garry Kasparov en serie på 6 kamper mot et dataprogram kalt *Deep Blue*. Møtet mellom de to året før hadde endt med 2-4 i Kasparovs favør. Men denne gangen spilte datamaskinen bedre. *Deep Blue* vant den siste kampen og resultatet ble sammenlagt 3,5-2,5. Dermed gikk meldingen ut i verden om at menneskets sjakkmester nå var slått av en datamaskin. Kanskje var det bare et tidsspørsmål før maskinene ville bli mennesket helt overlegen?

Spill er nå en stor og velutviklet industri på datamaskiner, og det er mye å velge imellom. Men ingen av disse spillene har så stor interesse som sjakk ut fra et forsker-synspunkt. Det gamle sjakkspillet har fascinert datavitenskapen helt siden 1950-tallet. Sjakk krever en kombinasjon av matematikk og mønstergjenkjenning (pattern recognition) i forening med mindre presise ting som intuisjon og dømmekraft. Med sine 64 ruter og begrensede bevegelsesmønster er ikke sjakkspillet spesielt vanskelig fra et teoretisk synspunkt. En datamaskins evne til å gjøre beregninger gjør det ganske overkommelig å skrive et dataprogram som er i stand til å spille etter disse reglene. Det finnes da også en stor mengde slike spill, og de fleste av dem er i stand til å slå de fleste av oss, siden vi ofte overser ting eller gjør en feil underveis.

Men spill på stormesternivå er en helt annen utfordring og har en helt annen interesse for programmererne. Programmet *Deep Blue* har altså kommet så langt at kun et fåtall sjakkspillere kan by på seriøse problemer. Av disse er Kasparov den fremste.

En forskergruppe i IBM begynte utviklingen av *Deep Blue* i 1989. Prosjektet går ut på finne mer ut om et klassisk problem innen dataforskningen, nemlig å bruke *parallelle prosesser* for å løse kompliserte problemer på kort tid. *Deep Blue* teamet ved IBM, består av Feng- Hsuing Hsu, Murray Campbell, A. Joseph Hoane, Jr., Gershon Brody, og Chung-Jen Tan. Den versjonen av deres spesialkonstruerte datamaskin som ble brukt i 1997 besto av totalt 256 prosessorer hvorav 8 var dedikerte sjakk prosessorer. Selve dataprogrammet *Deep Blue* er skrevet i programmeringsspråket C og kjører på UNIX operativsystem. Systemet er i stand til å beregne 50 til 100 milliarder posisjoner på 3 minutter - den tiden en spiller har til disposisjon for hvert trekk i et klassisk sjakkspill.

Deep Blue vil derfor aldri gjøre taktiske feil på kort sikt. Hvis det gjør en feil i det hele tatt, er det noe som først blir klart senere i kampen.

Et menneske er kun i stand til å søke igjennom 1-2 trekk pr. sekund, selv om menneskets valg av alternativer er mye mer selektiv bygd på intuisjon, erfaring og mønstre. I motsetning til dette søker *Deep Blue* igjennom hundrevis av millioner posisjoner pr sekund basert på en mye enklere utvalgsmetode.

For å gi *Deep Blue* ennå større dybde, har det til disposisjon en *database* med spill av stormestere fra de siste 100 år. Det har også en egen avslutningsdatabase tilgjengelig, og denne trer i kraft nå bare 5 sjakkbrikker er igjen på brettet. Denne databasen inneholder milliarder av sluttscenarier.

Bruker så *Deep Blue* kunstig intelligens? Svaret på dette er nei. Tidligere sjakkprogrammer prøvde å etterlikne menneskets tenkning, men ble aldri gode til dette. Det eksisterer fortsatt ingen formel for intuisjon, og det er umulig å lage en maskin som skal etterlikne en prosess som vi i utgangspunktet ikke har særlig god forståelse for.

Hvordan mennesket tenker er fortsatt et spørsmål uten svar. De som har designet *Deep Blue* har derfor valgt å stole på datateknologiens rå regnekraft kombinert med databasen som "kloner" de største sjakkamper menneskene har utkjempet de siste 100 år. Programmets styrke er og blir styrken til en maskin. Når det gjelder å behandle så store mengder informasjon er systemet imponerende. Men det "lærer" ikke noe om sin motspiller mens det spiller.

Deep Blue fungerer som et *ekspertsystem* som utnytter sin enorme mengde av lagret informasjon. Det tenker ikke, det *reagerer*. *Deep Blue* er ikke reduksjonistisk i sin natur. Og Kasparov spiller ikke bare mot en datamaskin. Han spiller også mot en samlet "hær" av gamle sjakkmestere. *Deep Blue* organiserer denne kunnskapsbasen og anvender den i sann tid på sjakkbrettets stadig endrende mønster.

Sjakkspillet er et lukket og komplekst problem. Grunnet kompleksiteten har man i programmet *Deep Blue* måttet velge å kombinere datamaskinens beregningskraft med teknologier kjent fra design av ekspertsystemer. *Deep Blue* gir oss derfor bare mulighet til å sammenlikne datateknologien med våre egne evner og muligheter innen komplekse, men *lukkede* problemområder. Innen *åpne* problemstillinger kan datamaskinene ikke anvendes alene. Mennesket kan altså fremdeles hevde at dets kreativitet, intuisjon og dømmekraft fortsatt vil triumfere over silisiumbrikkene, selv om spillet sjakk nå er på vei inn i ”silisiumtiden”.

6.2 NATURLIG SPRÅK

Et annet aktuelt område er *naturlig språk*. Språket vårt er åpent. Skal datamaskiner kunne hanskes med naturlige språk, må de ha en form for "menneskelig fornuft". Hovedproblemet skyldes tvetydighetsbarrieren. Ord kan ha ulik mening alt etter sammenhengen. Bruk av billedtale er også et problem. Faktum er at for å utføre oversettelsen, må man ha en mental modell av den verden som omtales, slik at ord kan manipuleres og velges i tilknytning til denne modellen. For avgrensede områder av språket har det kommet nyttige resultater, f.eks. finnes det systemer som kan oversette spesialdokumenter som ordlister og tekniske håndbøker. Datamaskiner brukes også til å oversette værmeldinger. Innenfor et så begrenset område blir det mulig å få til den nødvendige formalisering av oversettingsprosessen.

Det er utviklet oversettersystem som oversetter 80-90% riktig. Oversettere som bruker dataoversettelsen som grunnlag kan greie flere ganger så mye som de som bare har grunnteksten. Innen EU arbeides det en god del med slike oversettelsesprogrammer mellom hovedspråkene. Nye produkter kan være til praktisk nytte, selv om jeg ennå ikke har sett noe system som håndterer norsk på en brukbar måte. Slike system fungerer som et lukket, avgrenset og ufullkomment språkmedium, men er trolig den nyttigste måten en datamaskin kan behandle naturlige språk på.

Det er også satset mye på å utvikle korrekturleseprogrammer. De mest avanserte for engelsk språk kontrollerer både at ord er riktig stavet og at setningskonstruksjonen er grammatikalsk korrekt. Slike programmer for norsk har vel ennå ikke kommet så langt.

Programsystemer som kan forstå noen hundre *muntlige* ord er også laget. Man har da holdt seg innenfor et avgrenset fagområde. Til analysen kreves stor datakraft, og det tar lang tid å analysere ett minutts tale. Disse systemene har etter hvert vist seg vanskeligere å få *skikkelig* til enn man på forhånd hadde trodd. Den motsatte prosess, nemlig å få datamaskinen til å lese en *skriftlig* tekst med syntetisk stemme, er mye enklere. Grunnen til dette er at den menneskelige hjerne er svært fleksibel m.h.t. å forstå uttalemåter.

7. Konklusjon

Vi har sett at datamaskinen har et stort potensiale som informasjons- og kommunikasjonsbehandler. Virkelige problemer har oftest både en formaliserbar (lukket) og en ikke-formalisert (åpen) side. Innen *formaliserbare* sammenhenger vil IKT kunne anvendes både til arkivering, begrensede ekspertsystemer og robotstyring. Det *ikke-formaliserbare* må fortsatt tas hånd om av mennesker. Mennesket krever mindre formaliseringsgrad enn datamaskinen. Slik sett vil datamaskinen bli en nyttig "*arbeidshest*" og ikke noe som "overtar". Kunsten er å finne de rette jobbene til den.

Mange programsystemer er under utvikling med sikte på å ta seg av de lukkede deler av diverse oppgaver. Et problem her er at systemene blir enormt store. Man mister rett og slett oversikten. Det kan tenkes at å utvikle de virkelig store systemer blir like vanskelig og ressurskrevende for oss som å reise i verdensrommet.

Den elektroniske datamaskin har neppe sporen i seg til å kunne "tenke". Maskinen følger visse regler for behandling av data. Den har en beregnende fornuft, og beregningene skjer hurtig. Et menneske arbeider også slik under innlæring av nytt stoff. Men når vår bevissthet fungerer i all sin prakt, arbeider den intuitivt og "gjennomtrenger" problemet som er for hånden (Roszaah 1986, s.46). Menneskets bevissthet har også spesielt evnen til å tenke i bilder, analogier og se helheter. En sammenlikning av den menneskeskapte informasjonsteknologi og den biologiske "teknologi" kommer altså ut med visse avgjørende fordeler til sistnevnte.

En teknologisk fristelse vi kanskje vil møte i framtida, er å presse områder som egentlig er åpne inn i en lukket ramme, for dermed å kunne sette et datasystem over saken. Slik brukt blir IKT en tvangstrøye. Mennesket kan bli innsnevret til å "tenke som maskiner".

Uten et realistisk syn på den nye teknologien, kan f.eks. skolene lett komme til å kaste penger ut av vinduet. Vi må kjenne både muligheter og begrensninger. Albert Einstein sa en gang: "Min blyant er flinkere enn meg" (Popper & Eccles 1977, s.208). Med dette ville han vel si at med blyant og papir er vi betydelig flinkere enn uten dette verktøy. Bevæpnet med datautstyr vil vi da i denne sammenhengen kunne bli ennå noen hakk flinkere enn med blyanten og papiret.

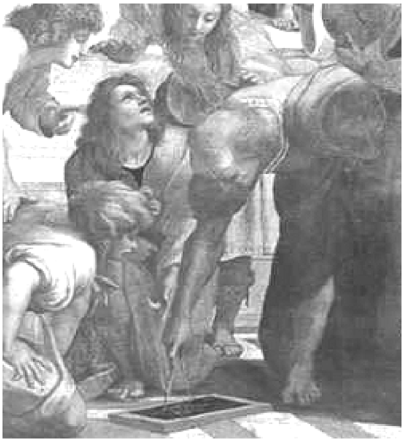
Litteratur:

Cronberg, T. og Sangregario, I.: *Vidunderlige nye hverdag*. Pax, 1982.
Engebretsen, J.E. og Jensen,W.: *Datamakt-for hvem?* Gyldendal 1979.
Evans, C.: *Mikromakt*. Gyldendal 1982.
Ganong, W.F.: *Review of Medical Psychology*. Lange 1983.
Hasnes, G. : *Ekspertsystemer og kunstig intelligens. Visjon og virkelighet*. Elektronikklaboratoriet ved NTH, rapport 1987. Også trykt i DATA nr. 4, 1987.
Hofstadter, D.R.: *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. Basic Books, Inc. 1979.
IBM: Orentering om "*Deep Blue*" på Internett: http://www.research.ibm.com/deepblue/
Jacobsen, Røste, Solheim : *Samfunnsinformatikk*. NKS-forlaget 1986.
Jervel, H.R. og Olsen, K.A.: *Hva datamaskiner ikke kan*. Universitetsforlaget 1984.
Langtangen, H.P. og Tveito, A.: How should we prepare the Students of Science and Technology for a Life in the Computer Age? I *Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond* (red Engquist, B. og Schmid, W.). Springer 2001 s. 809-825.
Leach, J.: DNA-the first machine code. *Practical Computing*, January 1982.
Popper, K.R. og Eccles, J.C.: *The Self and its Brain*. Springer 1977.
Roszaah, T.: Smart Computers at insecure stage. *New Scientist* 3.Apr. 1986.
Schneider, G.M. og Bruell,S.C.: *Advanced programming and problem solving with Pascal*. John Wiley and Sons 1981.
Seip, H.: Data-Norge, Nr. 2, 1986.
Turing, A.M.: Computing Machinery and Intelligence. *Mind*, Oct. 1950, s. 433-460.
Turkle, S.: *The second self.* Simon and Schuster 1984.
Turkle, S.: *Life on the screen.* Orion Publishing Co 1997
Weizenbaum, J.: *Computer power and Human reason*. W.H.Freeman and Company 1976.
Wilder-Smith, A.E.: *Der Mensch-ein sprechender Computer*? Hanssler Verlag 1982. Første figur i artikkelen er hentet fra denne boka.

12. Appendiks:
Krydder og krutt fra matematikkens historie.

1. Tall og tallregning.

Pytagoras



Pytagoras levde omkring 500 år f. Kr. Han er en av grunnleggerne av selve matematikken. Han bodde og foreleste i Sør-Italia og samlet en fast gruppe elever rundt seg. I følge oldtidens filosofihistorikere var det 218 mannlige og 17 kvinnelige elever.

Pytagoras mente at naturens hemmeligheter kan utforskes ved hjelp av tall. Det er en harmoni i den kaotiske naturen, hevdet han. Denne harmonien kunne best uttrykkes i tallenes språk. "**Alt er tall**", skal hans store slagord ha vært. Hans musikkteori ble et godt eksempel på dette, da han oppdaget sammenhengen med tonehøyde og lengden på den svingende streng. Pytagoras ønsket også å lage "musikkteorier" for andre deler av naturen.

Pytagoras er mest kjent for sin berømte læresetning om trekanter. I praksis var denne setningen kjent lenge før. Pytagoras hadde trolig heller ikke noe generelt bevis for setningen. Helt til våre dager er den pytagoreiske læresetningen blitt stående som en av de viktigste enkeltsetninger i matematikken.

Tallene og kvadratrøttene

Naturlige tall og brøker finner vi i de eldste kulturer. Mange typer tall har senere blitt utviklet. Matematikeren Leopold Kronecker, som levde på 1800-tallet, sa det slik: *"Vår kjære Gud har gitt oss heltallene, resten er menneskets verk*". Opp gjennom historien har menneskene flere ganger måttet utvide tallmengden sin. Men dette har aldri skjedd uten problemer. Allerede for 2500 år siden var det en mann med navn **Hippasos** som oppdaget at det fantes tall, for eksempel kvadratroten av 2, som *ikke* kunne skrives som brøker. Disse tallene ble derfor kalt **irrasjonale tall**. Hvis vi prøver å uttrykke et slikt tall som et desimaltall, ender vi opp med et tall som fortsetter i det uendelige uten noe regelmessig eller systematisk mønster.

Hippasos var en av Pytagoras' elever, og de ble enige om å dysse ned hele oppdagelsen. Den ville ødelegge hele deres filosofiske system. Men noen av elevene kom likevel til å sladre, og historien forteller at de "omkom" ved et mystisk skipsforlis.

Sjakkbrettet og riskornet

En persisk konge inngikk følgende avtale med motspilleren sin i sjakk: Dersom motspilleren vant, skulle han få 1 riskorn for første rute på sjakkbrettet, 2 riskorn for neste rute, 4 for tredje og så videre. Vi dobler altså antallet hver gang vi går fra en rute til den neste. Det er 64 ruter på sjakkbrettet.

Kongen så imidlertid ikke konsekvensene av denne avtalen. Ved hjelp av sumformelen for det vi kaller geometriske rekker, kan vi vise at samlet antall riskorn blir: $1{,}845 \times 10^{19}$. Dette er nok til å dekke halve jordoverflaten med et lag med riskorn.

Babylonerne og renter

Ved utgravinger i det gamle Mesopotamia er det funnet mengder av **leirtavler** fra tiden omkring 2000 f.Kr. De viser at babylonerne hadde betydelige matematiske kunnskaper.

Et eksempel er beregning av rentesrente. Utlån og åger forekom da som nå. Prestematematikerne(!) lærte sine elever blant annet hvordan de skulle regne ut fordoblingstiden til en gitt sum når renten var 20%. For hvert år må vi da multiplisere pengesummen med (1 + 20/100) = 1,2. Oppgaven fører til at vi må beregne $1{,}2^t$ for forskjellige verdier av t. Dette betyr at babylonerne måtte regne ut verdiene av det som vi i dag kaller en eksponentialfunksjon.

Leirtavla på bildet viser en tabell over kvadrater og kvadratrøtter.

Goldbachs uløste formodning

Christian Goldbach (1690-1764) er en russisk matematiker som også en tid var sekretær for akademiet i St. Petersburg. Han var også lærer for tsar Peter 2. Goldbach interesserte seg for flere områder av matematikken, bl.a. tallteorien.

Hans navn er knyttet til den såkalte Goldbachs formodning som sier at **ethvert partall kan skrives som en sum av to primtall.** F.eks. er 8=3+5, 10=3+7 osv.

Denne enkle setningen er ennå ikke bevist! Trass i iherdig innsats fra de skarpeste matematikere gjenstår Goldbachs formodning som et av de mest berømte uløste matematiske problemene. Noen mener at setningen er uavhengig av vår tradisjonelle matematikk, slik at den verken kan bevises eller motbevises. Den må i så fall godtas som en grunnleggende sannhet eller aksiom på linje med at 1+1=2.

Georg Cantor

Georg Cantor (1845-1918) ble født i St. Petersburg av jødiske foreldre. Han kalles ofte mengdelærens grunnlegger. Cantors evner kom tidlig fram, og 18 år gammel begynte han sine studier hos framstående matematikere i Berlin.

I løpet av de neste ti årene kom han på sporet av mengdeideen i forbindelse med studiet av varmeledning. Først seinere ble mengdelæren innført som et viktig grunnlag for oppbyggingen av nesten all matematikk. Dette skjedde imidlertid ikke uten kamp. Noen kalte hans mengdelære for "en alvorlig matematisk sykdom" som en dag måtte bli kurert, mens andre mente han hadde skapt et "nytt paradis" for matematikerne.

Selv fikk Cantor aldri oppleve at mengdebegrepet ble godtatt som det naturlige grunnlag og fundament i matematikken. Ved Niels Henrik Abel-jubileet i 1902 ble Cantor utnevnt til æresdoktor ved Universitetet i Oslo.

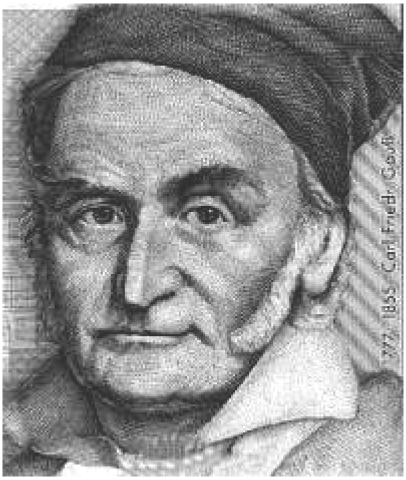
Leonard Euler

Sveitseren Leonard Euler (1707-1783) var en av de første til å anvende matematikk på befolkningsutvikling. I sin lærebok *Introductio in analysin infinitorum* gav han dette eksemplet:

Etter syndfloden ble den menneskelige slekt videreført av seks personer. La oss anta at befolkningen etter 200 år var vokst til 1 million. Hvor stor brøkdel hadde så menneskeheten årlig vokst med? (Euler satte så opp den riktige eksponentiallikningen og fant en årlig tilvekst på ca 1/16 eller 6,2%.) Menneskeheten ville altså på 200 år kunne ha vokst til det angitte antall hvis den årlige vekstprosenten var 6,2, og dette var ikke et spesielt høyt tall på den tiden. Men hadde de fortsatt på samme måte i 400 år, ville antallet ha vokst til over 166 milliarder, en mengde som jordoverflaten hadde vært for liten til å ernære.

Euler var selv en god familiefar og hadde 13 barn, selv om kun 5 av disse levde opp. Han kunne konsentrere seg om matematikk under alle forhold, og avbildes ofte omgitt av barn mens han arbeider med matematiske problemer. De siste årene av sitt liv var han blind, og en av sønnene måtte hjelpe han med skrivingen. Euler hadde en utrolig hukommelse. Han kunne hele bøker utenat, samt de 100 første primtallene pluss deres andre, tredje, fjerde, femte og sjette potenser!

Carl Friedrich Gauss



Carl Friedrich Gauss (1777-1855) regnes sammen med Arkimedes og Newton som en av tidenes tre største matematikere. Gauss gav viktige bidrag innenfor en rekke områder av matematikken.

Carl Friedrich kom fra enkle kår og var enebarn. Allerede som liten var han et vidunderbarn, og seinere spøkte han med at han lærte å regne før han kunne snakke. En lørdag satt Carl Friedrichs far og gjorde i stand lønningsregnskapet for en del arbeidsfolk. Sønnen fulgte farens utregninger med våkent blikk. Med ett utbrøt sønnen: "Far, her er feil! Det skal bli..." Det viste seg at barnet hadde rett. Carl Friedrich hadde da ennå ikke fylt tre år.

Om Gauss fortelles denne historien da han var omtrent 9 år:

Læreren gav i en time klassen som oppgave å regne sammen **hundre** ledd i en aritmetisk tallrekke (f.eks.av formen 2 + 4 + 6 + 8 + . . . + 196 + 198 + 200).

Carl Friedrich tenkte seg bare om et øyeblikk. mumlet "der er det!" og skrev ned svaret. (I eksemplet ovenfor blir summen 10100.) Resten av timen satt han med hendene i kors, mens de andre guttene arbeidet hardt.

Da læreren skulle se over svarene, var det bare én som hadde rett - og han hadde tatt det i hodet! Ved sin intuisjon måtte Carl Friedrich ha tenkt ut sumformelen for en aritmetisk rekke på egen hånd. Fra da av var lærerne klar over hans matematiske talent og ga han spesiell støtte i den videre matematiske utvikling.

Atle Selberg

Atle Selberg (f. 1917) ble født i Langesund i en familie der flere av guttene ble professorer i matematikk. Atle var yngst av disse, og allerede som 15-åring løste han en oppgave ved å vise en liten formel i Norsk Matematisk Tidsskrift. Han valgte å studere realfag og tok doktorgraden ved Universitetet i Oslo og ble forskningsstipendiat i 1942. I 1947 giftet han seg og flyttet til USA for å arbeide ved det store *Institute for Advanced Study* i Princeton. Der ble han utnevnt til professor i 1951.

Selberg kom med en rekke nye resultater i tallteorien. Hans mest berømte arbeid er utformingen av det som nå går under navnet *Selbergs sporformel*. Den kan ikke forklares på en enkel måte da den involverer tallteori, gruppeteori, analyse og geometri på en meget utstudert måte. I fysikken ble den senere brukt til å knytte forbindelser mellom kvantemekanikk og klassisk mekanikk.

I 1950 ble Atle Selberg belønnet med Fields medaljen, den fremste utmerkelse som finnes i faget. Internasjonalt regnes han som en av 1900-tallets fremste tallteoretikere. Hans samlede avhandlinger i to bind ble utgitt i 1989-91.

Hvor er kvinnene?

Bøker om matematikkens historie inneholder få kvinnenavn, men i boka *Women in Mathematics* av Lynn M. Osen finner vi en del stoff om de mest kjente kvinnene i matematikken.

Hypatia

Hypatia (370-415) var datter av filosofen Theon, og hun underviste i matematikk og filosofi ved universitetet i Aleksandria. Hun var en populær og idérik matematiker og ble beskrevet som en karismatisk lærer. Studenter kom derfor fra Europa, Asia og Afrika for å følge hennes forelesninger om blant annet diofantiske likninger og nyplatonistisk filosofi.

Hypatia ble leder av den filosofiske skolen i byen. På denne tiden var det en bitter politisk strid mellom kirke og stat i Aleksandria. Hypatia var nær venn av guvernør Orestes, og erkebiskop Kyrillos betraktet skolen som en trussel mot kirken. En historie forteller at Hypatia ble drept av fanatiske munker som støttet Kyrillos, mens en annen historie forteller at hun ble slått i hjel av mobben i Aleksandria på vei til skolen sin.

Sophie Germain

For å få en solid bakgrunn i faget matematikk er de fleste av oss avhengig av undervisning ved universiteter og høgskoler. I 1794 åpnet Ecole Polytechnique i Paris. Dette ble raskt en av verdens mest anerkjente faginstitusjoner i matematikk. Men skolen var stengt for kvinner.

Sophie Germain (1776-1831) hadde lest om Arkimedes allerede som 13-åring. Senere smugleste hun om Newton og Euler mens andre sov, da foreldrene ville ta fra henne disse bøkene. Senere ga foreldrene opp motstanden, og gikk aktivt inn for å støtte sin datter i studiene. På Ecole Polytechnique måtte hun løpe rundt og samle inn forelesningsnotater fra de andre studentene. Skolen tillot studenter å levere inn skriftlige besvarelser for bedømming av professorene. Sophie Germain leverte inn besvarelser under pseudonymet M. le Blanc, en mannlig student ved skolen. Disse arbeidene fikk mye ros. Hun ga bl.a. viktige bidrag i sine studier av Fermats store sats.

På ordre fra Napoleon utlyste Det franske vitenskapsakademi en pris for den beste avhandling om svingende flater. Dette var et vanskelig problem, men det interesserte Sophie Germain. Hun var den eneste som leverte inn besvarelse, og i 1816 vant hun prisen. Men hun møtte ikke opp ved prisutdelingen, trolig fordi hun følte at juryen hadde vegret seg og ikke gitt henne den respekt hun hadde krav på og fortjente. Prisen førte imidlertid til at hun fikk innpass i de beste matematiske kretser. Hun korresponderte og diskuterte med sin tids største matematikere, bl.a. Gauss, og hun ble feiret med et eget møte i Institut de France.

Caroline Herschel

William Herschel (1739-1822) var en av sin tids største astronomer. Blant annet oppdaget han planeten Uranus. Astronomi krever nitidige observasjoner og store kompliserte beregninger. Den personen som utførte mange av disse beregningene, blir ofte ikke nevnt.

Caroline Herschel (1750-1848) valgte å vie sitt liv til å hjelpe broren med innsamling av materiale og nøye beregninger. Typisk nok brukte hun tiden etter sin brors død med å tilrettelegge åtte bind av hans arbeid slik at det kunne bli brukt av William Herschels sønn. Selv oppdaget hun også åtte kometer i tiden 1786-1797

Etter hvert fikk Caroline Herschel også anerkjennelse for sin egen innsats. Hun ble tildelt gullmedaljen til *The Royal Astronomical Society*, og i 1835 ble hun valgt inn som æresmedlem i dette selskap.

Sonja Kovalevskij

Sonja Corvin-Krukovskij Kovalevskij (1851-1901) var født i Moskva. Hennes tidlige interesse for matematikk ble vekket på en spesiell måte: På grunn av papirmangel, var rommet hennes tapetsert med pålimte sider fra en bok i matematikk. Sonja brukte mye tid på å tyde disse formler og tekster. Senere fikk hun privatlærer, og ønsket etterhvert å studere hos den berømte matematikeren Weierstrass i Berlin. Hun ble avvist på universitetet fordi hun var kvinne, men Weierstrass lot henne få lese forelesningsmanuskriptene sine. På den måten fikk hun anledning til å utvikle sitt matematiske talent. Hun tok doktorgraden som "privatstudent" i 1874.

Sonja Kovalevskij fikk stilling ved universitetet i Stockholm, og i 1889 ble hun den første kvinnelige matematikkprofessor i Europa. Hun gav originale bidrag til mange områder i matematikken. I 1888 vant hun den kjente franske prisen *Prix Bordin* for en av sine matematikkavhandlinger om rotasjon av et fast legeme omkring et punkt. Det var lukket bedømmelse, og det vakte bestyrtelse da konvolutten ble åpnet. Det var en kvinne som hadde vunnet!

2. Algebra og likninger.

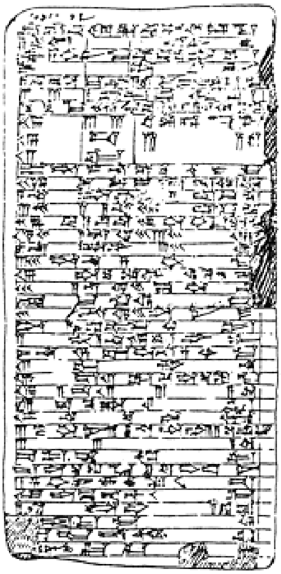
Ordet algebra

I matematikken regner vi mye med bokstaver i stedet for tall. Denne regningen kaller vi algebra. God kjennskap til algebra er nødvendig i alle deler av matematikken.

Ordet algebra har vi fått fra det arabiske ordet **al-jabr**, som betyr å gjenopprette eller sette sammen brukne bein. Like nøyaktig som en lege setter sammen et brukket bein, bør vi behandle våre algebraiske bokstavuttrykk.

Babylonernes løsning av likninger

Babylonerne løste problemer som i prinsippet var det samme som å løse annengradslikninger. Bildet under viser en leirtavle fra 1700 f.Kr (AO 8852). Den er tolket av Neugebauer og van der Waerden. Regningen foregår i et 60-tallsystem. I de fire siste linjene settes det prøve på svaret. Tolkingen ser ut som vist ved siden av figuren (NB: tegnet **,** er brukt for å adskille siffer i 60-tallsystemet, mens tegnet **;** brukes som desimaltegn).



Lengde og bredde har jeg multiplisert og fått arealet. Så la jeg til forskjellen mellom lengde og bredde og fikk 3,3 . Videre har jeg lagt sammen lengde og bredde og fått 27. Ønsket er lengde, bredde og areal.

Gitt er 27 og 3,3 - summene.

Resultatet blir 15 lengden,12 bredden

3,0 arealet

Du følger metoden:

27 + 3,3 = 3,30

2 + 27 = 29

Ta halvparten av 29 som blir 14;30

14;30x14;30 = 3,30;15

3,30;15 - 3,30 = 0;15

0;15 har 0;30 som kvadratrot

14;30 + 0;30 = 15 lengden

14;30 - 0;30 = 14 bredden

Trekk de 2 du la til 27 fra 14 bredden

12 er den virkelige bredden

15 lengden og 12 bredden multipliseres

15X12 = 3,0 arealet

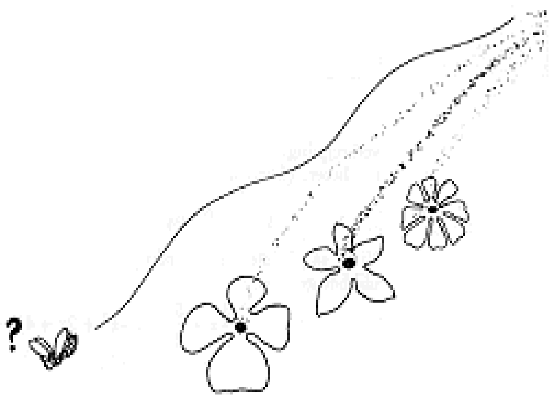
15 - 12 = 3

3,0 + 3 = 3,3

Poetiske likninger

I motsetning til våre dagers litt tørre matematiske likninger, var de gamle indernes oppgaver formulert poetisk:

"Av en bisverm slo en femdel seg ned på en cadambablomst og en tredel på en silindriblomst. Tre ganger differensen mellom disse to flokkene slo seg ned på en cutajablomst. Resten av svermen - én bie - svirret omkring i luften, fristet av både jasminens og padunusens søte vellukt. Si meg, smukke kvinne, hvor stor svermen var."



Diofantos

Diofantos var en gresk matematiker som levde ca. 300 år e.Kr. Han utgav mange lærebøker. Blant annet skrev han en bok om å løse likninger. Den dag i dag omtaler matematikere det å finne heltallige løsninger av likninger, som å løse diofantiske likninger.

Vi vet nesten ikke mer om Diofantos enn de opplysningene som blir gitt i en gresk oppgavesamling fra ca. år 500 e.Kr. Litt forkortet lyder oppgaven slik: *I denne graven hviler Diofantos. Han tilbrakte en seksdel av sitt liv som barn, en tolvdel som ungdom og en syvdel som ungkar. Fem år etter at han giftet seg, fikk han en sønn. Sønnen døde fire år før sin far, og han var da bare halvparten så gammel som faren ble. Hvor gammel ble Diofantos?*

Oppgaven kan settes opp som en likning. Svaret skal bli 84 år.

Fermat

Pierre de Fermat (1601-1665) var fransk hobbymatematiker. Han formulerte det som kalles hans "store sats". Denne setningen var lenge et av de mest berømte uløste matematiske problemene. Setningen sier at det er umulig å finne tre hele tall x, y og z som passer i likningen:

$$x^n + y^n = z^n$$

når n er et naturlig tall som er større enn eller lik 3.

Fermat nevner i margen i en bok at han hadde et "vidunderlig bevis" for sin setning, men at det ikke er plass til å vise det i margen.

Trass i iherdige anstrengelser av de skarpeste matematikere i over 300 år, var det først i 1994 at matematikerne klarte å bevise at Fermats store sats var korrekt. Lenge mente mange at den var uavhengig av vår tradisjonelle matematikk. Det ville i så fall bety at vi verken skulle kunne bevise den eller motbevise den.

Men engelskmannen **Andrew Wiles** (f. 1953), som arbeidet i Princeton i USA, kom til slutt etter mange års iherdig arbeid fram til et bevis. Beviset tar over hundre sider og bygger dessuten på mye spesialisert og avansert matematikk. Andrew Wiles forteller at han første gang ble klar over Fermats problem da han var 10 år gammel: "*Det så så enkelt ut, og ennå hadde ingen matematikere i hele verden kunnet løse det. Her var det altså et problem som jeg i en alder av ti år kunne forstå. Fra da av skjønte jeg at aldri kunne la dette problemet ligge. Jeg måtte finne løsningen.*" Da han var ferdig med løsningen var han blitt 41 år.

Fermats problem har med rette blitt kalt **verdens vanskeligste matematiske problem** - en virkelig nøtt som det tok hele 358 år å knekke! Det er nå skrevet en spennende bok om problemet (Simon Singh: *Fermats siste sats*, Aschehoug 1998).

Forskjellige typer likninger

Matematikere har alltid vært opptatt av å finne enkle løsninger av likninger. Allerede babylonerne kunne løse annengradslikninger av typen $x^2 - 2x - 3 = 0$ ved hjelp av kvadratsetningene.

Omkring år 1500 klarte Scipione del Ferro i Italia å løse enkle tredjegradslikninger. For ikke å hjelpe sine konkurrenter holdt han metoden hemmelig. Han viste den bare til noen få venner og elever.

Fjerdegradslikningen ble seinere løst av Lodovico Ferrari (1522-65).

Femtegradslikningen var lenge et problem. Dette fikk en uventet løsning da Niels Henrik Abel beviste at likninger av høyere grad enn 4 ikke kan løses generelt ved rottegn. Denne store matematiske oppdagelsen gjorde Abel da han var bare 21 år gammel.

Niels Henrik Abel

Niels Henrik Abel (1802-1829) er Nordens største matematiker. Han ble født ved Stavanger - enten på stedet Nedstrand eller på Finnøy prestegård. Han vokste opp i bygda Gjerstad i Aust-Agder, og i 1815 begynte han på Katedralskolen i Oslo.

Abels interesse for matematikk ble tent av en ung matematikklærer som snart ble klar over at han hadde et av historiens største matematikkgenier i klassen. Norge ble snart for "trangt" for Abel. I 1825 drog han ut i Europa på et magert stipend. Da hadde han allerede gjort mange store matematiske oppdagelser.

Abel kom hjem til Norge i 1827 med en helse som var knekt av tuberkulose. Han døde bare 26 år gammel på Froland verk og er begravd på Froland kirkegård. I dag er viktige matematiske begreper oppkalt etter Niels Henrik Abel. Hans samlede verker er på to bind. Det er sagt at "*han har gitt matematikere nok å arbeide med i 500 år*".

Évariste Galois

Omtrent på Niels Henrik Abels tid var det i Frankrike en annen ung matematiker som også led en tragisk skjebne. Hans navn var Évariste Galois (1811-32). På skolen var Galois kjent som en innesluttet og litt original type som i tillegg var ivrig republikaner.

De vanskeligste matematikkbøkene brukte de flinkeste elevene et par år på å komme igjennom. Men Galois kunne sluke dem som "krimbøker" på få dager.

Galois ønsket å komme inn på den berømte skolen École Polytechnique, men strøk til opptaksprøven to ganger. Siste gang skal han til og med ha kastet svampen i hodet på sin sensor. I stedet måtte Galois begynne på École Normale.

Innenfor algebraen kom Galois med ideer som matematikerne ennå utforsker konsekvensene av. Galois videreførte Abels arbeid om likninger, og ga et nytt bevis for uløsbarheten av femtegradslikningen. Han la også grunnlaget for en fullstendig teori for algebraiske likninger med kriterier for hvilke som er løsbare og hvilke ikke.

Galois liv tok en brå slutt 21 år gammel da han ble skutt i en duell etter en "idiotisk krangel", sannsynligvis om ei jente med navn Stéphanie-Félicité. Han ble dødelig såret i magen, og døde på sykehuset dagen etter. Galois hadde allerede før duellen skrevet flere matematiske artikler, men natten før duellen skrev han ned sitt matematiske testamente der flere grunnleggende matematiske teorier ble skissert. Den såkalte *Galois-teorien* er på mange måter en forløper for den abstrakte algebra som ble utviklet på 1900-tallet.

Sophus Lie

Sophus Lie (1842-99) ble født på Nordfjordeid og var prestesønn slik som Abel. Det tok sin tid før han bestemte seg for å bli matematiker; han vaklet en stund mellom språk og realfag. En periode var han også interessert i en militær karriere, men synet var ikke godt nok.

Lie tok sin doktorgrad i Oslo i 1871, og året etter ble han utnevnt til ekstraordinær professor i matematikk. Men det var få her i landet som forsto det han drev med, og i 1886 ble han derfor professor i Leipzig der fagmiljøet var mye større. Her ble han etter hvert verdensberømt for sine originale og nyskapende teorier som i dag går under navnet *Lie-algebra*.

Det er ikke enkelt å forklare hva Lies matematikk går ut på. Utgangspunktet var geometri og transformasjon av geometriske objekter som linjer, kuleflater etc. Lie ville sammen med sin kollega Felix Klein, bygge opp geometrien og analysen omkring gruppebegrepet, slik som Galois tidligere hadde bygget opp teorien for algebraiske likninger. Disse Lie-gruppene beskrives også som kontinuerlige grupper og viser seg velegnet til å studere symmetrier. De kom senere til å bli et sentralt hjelpemiddel i teoretisk fysikk.

Lie opplevde også mørke sider ved livet, og var i perioder svært deprimert. Hans "grenseløse fortvilelse" førte bl.a. til 7 måneders opphold på en tysk nerveklinikk. Men datidens medisiner hjalp lite, og Lie gikk bokstavelig talt depresjonen av seg. Den storvokste mannen var kjent som en ivrig friluftselsker og turgåer, og dette hjalp gjennom sykdomsperiodene. Hans kone Anna var også en sterk støttespiller.

De siste årene i Tyskland ble formørket av samarbeidsproblemer og mistro mot en del kolleger, selv om disse mørke sidene ikke er dominerende i bildet av en lyssterk personlighet, og hans skapende tanker. Arild Stubhaug har nylig skrevet en stor biografi om Lie med tittel: *Det var mine tankers djervhet* (Aschehoug 2000). Lie kom tilbake til Oslo det siste året av sitt liv, og sine siste forelesninger ga han fra sykesengen. I et verk som *Encyclopedia of Mathematics* er Lie i dag den matematiker i verden som har nest flest referanser etter Riemann. Hans samlede verker utgjør 7 bind.

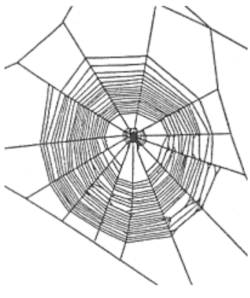
Emmy Noether

Emmy Noether (1882-1935) er den fremste kvinnelige matematikeren som har levd til nå. På skolen viste hun ikke spesielle matematiske evner, og hun så ut til å foretrekke språkfagene. Hun avla også eksamen som språklærer. Men i stedet for å begynne som lærer, valgte hun nå å fortsette med utdannelsen sin. I året 1900 var hun eneste kvinne blant 1000 menn ved det tyske universitetet der hun studerte. Sju år seinere tok hun doktorgraden i matematikk.

Det var vanskelig for en kvinne å få stilling ved noe universitet. Kolleger forsøkte å hjelpe henne. Først i 1919 fikk hun et uoffisielt professorat i matematikk - uten lønn! Seinere ble det ordnet med en relativt beskjeden lønn. I 1933 måtte Noether flykte på grunn av Hitler sammen med mange av Tysklands beste matematikere. I USA ble hun professor i matematikk. Hun var kjent for å ta seg godt av studentene sine.

Noethers fagområde var algebra. Hennes styrke som matematiker var evnen til å tenke abstrakt, i begreper og systemer. Viktige algebraiske begreper bærer i dag hennes navn.

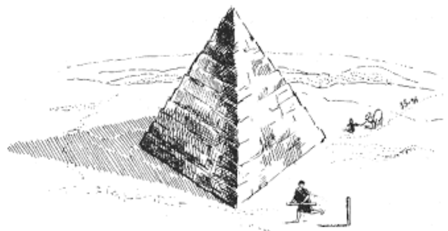
3. Geometri.



Fra de tidligste tider har menneskene lagt merke til geometrien i naturen. Det gjelder stjernehimmelen, bikuben, nettet til edderkoppen osv. Antall radier i et edderkoppnett er for eksempel spesielt for hver art og er fra 10 til 180.

Geometrien har en praktisk opprinnelse. Herodot (ca 500 f.Kr) skriver: "*Egypterne betalte årlig en skatt til kong Sesostris beregnet ut fra hvor mye land de eide. De som mistet land på grunn av at Nilen gikk over sine bredder, måtte rapportere det til kongen. Han sendte så en av sine oppsynsmenn som målte hvor mye av landet som var igjen. På grunnlag av dette ble det beregnet ny skatt.*"

Vi regner med at ordet geometri stammer fra denne tiden. Ordet betyr nemlig "**måling av jordstykker**". Egypterne og babylonerne kjente korrekte metoder for å finner arealet av trekanter, rektangler og trapeser for 4000 år siden. Grekerne gjorde geometrien til en formell vitenskap med presise definisjoner og regler ca år 300 f.Kr. De krevde at geometriske konstruksjoner skal utføres ved hjelp av passer og linjal.



Thales fra Milet

Thales fra Milet (ca 600 f.Kr.) i Lilleasia er den første matematikeren vi kjenner navnet til. Han beviste resultater i geometri. Dessuten regner vi ham som den første filosofen i vesten. Vi vet ikke hvordan Thales beviste resultatene sine. Antakeligvis gav han en form for logisk begrunnelse i stedet for bare å stole på eksperimenter og tegninger.

Under et opphold i Egypt ble Thales berømt for at han kunne beregne høyden til pyramidene. Metoden han brukte gikk ut på at han satte en loddrett pinne i sanden ved pyramiden. Når skyggen til pinnen var like lang som høyden av pinnen, sprang Thales bort og målte skyggen til pyramiden. Lengden av denne skyggen er da lik høyden til pyramiden. Historien forteller ikke hvordan Thales klarte å måle skyggen til pyramiden.

Skyggetabeller

Vi kan spore trigonometriske funksjoner, eller i det minste noe som minner om dem, tilbake til noe som ble kalt skyggetabeller. Man har funnet en egyptisk skyggetabell som er om lag 3200 år gammel.

Tabellene angir lengden av skyggen som en loddrett pinne (eller en person) ville kaste på forskjellige tider av dagen. Skyggen var lang om morgenen, nådde minimum midt på dagen, og gikk mot uendelig lengde om kvelden. Tabellene kunne brukes som solur.

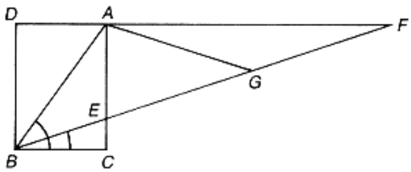
De første skyggetabellene vi kjenner var svært enkle og tok ikke hensyn til at solen ville stå på forskjellig høyde avhengig av årstiden. Flere typer slike tabeller ble laget helt fram til middelalderen. Disse skyggetabellene kan ses på som en forløper for tangenstabellen som ligger lagret i lommeregneren din.

Euklids *Elementer*

Verdens mest berømte matematikkbok heter ***Elementene*** og er skrevet av Euklid ca. 300 f. Kr. Dette verket består av 13 bøker og inneholder mye av den matematikk grekerne satt inne med. Euklids bøker ble brukt i europeiske skoler i hele 2000 år. Geometriens systematiske oppbygging dannet mønster for resten av matematikken.

En av datidens konger studerte også hos Euklid. Kongen strevde med stoffet som de andre, og spurte til slutt Euklid om det ikke var en lettere måte å lære seg dette på? Da svarte Euklid: *"Det går ingen kongeveg til matematikken"*. - Fremdeles er det slik at det finnes ingen snarveg inn i matematikkens verden.

Vinkelens tredeling



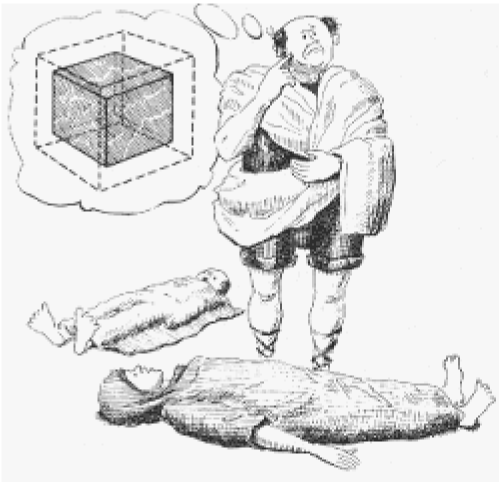
Noen problemer har til alle tider trukket til seg mennesker med interesse for matematikk. Et av de klassiske problemene er vinkelens tredeling. Vi kan beskrive problemet slik:

Tenk deg at en vilkårlig vinkel er tegnet på papiret. Del denne vinkelen i tre like store deler ved hjelp av passer og linjal.

Det er enkelt å halvere en vinkel ved hjelp av passer og linjal. En skulle derfor tro at det er lett å tredele en vinkel også. Prøv selv! Universitetene mottar hvert år en del forslag til løsninger av dette problemet. Noen av forslagene gir så gode resultater at det er nesten umulig å påvise feilen ved hjelp av målinger.

Før du arbeider lenge på dette problemet, skal du vite at i 1837 viste franskmannen P.L. Wantzel at det er umulig å dele en såpass "pen" vinkel som 60° ved hjelp av passer og linjal. Han overførte problemet til å konstruere lengder som er løsninger av en tredjegradslikning. Han viste at det var umulig å konstruere løsninger av denne likningen.

Terningens fordobling



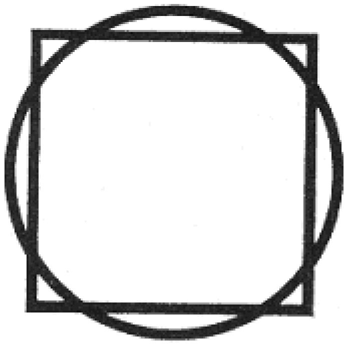
Et annet av de gamle geometriske problemene gjelder fordoblingen av en terning. Det er flere historier om hvordan dette problemet har oppstått. En historie lyder slik:

En by var plaget av pest. Oraklet i Delfi sa til innbyggerne i byen at de ville bli kvitt pesten hvis de klarte å fordoble størrelsen av det terningformede alteret til guden Apollo.

Problemet var altså å konstruere siden i en terning som skal ha dobbelt så stort volum som en annen terning. Oppgaven ble forelagt den store filosofen Platon. Han måtte oversende problemet til en av sine matematikere.

Platon mente at dette var et av de viktigste problemene i matematikken. Det tok imidlertid over 2000 år før oppgaven ble løst. Igjen var det P.L. Wantzel som fant løsningen. I 1837 beviste han at det er umulig å konstruere terningens fordobling ved hjelp av passer og linjal.

Sirkelens kvadratur



Det tredje av de klassiske geometriproblemer kalles sirkelens kvadratur. Problemet er meget vanskelig, og det viser seg at det er uløselig ved hjelp av passer og linjal. Det ble først avklart i 1882 av den tyske matematiker Ferdinand Lindemann (1852-1939).

Selve problemet går ut på at vi skal konstruere et kvadrat med samme areal som en oppgitt sirkel. Det henger sammen med spørsmålet om vi kan konstruere tallet π. Dersom sirkelen har radius 1, må nemlig det søkte kvadratet ha sidekanter lik roten av π. Utforskingen av problemet rører derfor ved hva slags natur tallet π kan tillegges.

Det Lindemann klarte å vise, var at tallet π er et ikke-algebraisk tall, det vil si at det ikke er løsning i noen polynomlikning. Tallet π kan derfor ikke konstrueres.

Tallet Pi

$A = \pi * r^2$. - Dette er formelen for arealet av sirkelen.

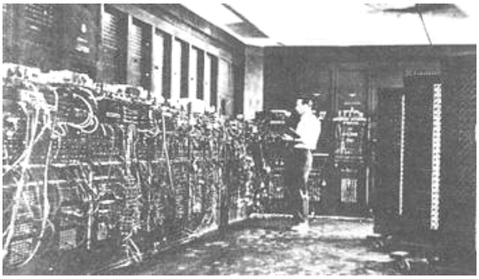
De eldste spor etter en bestemmelse av π finner vi i en egyptisk papyrus (Rhind-papyrusen) fra omkring 1700 f.Kr. Denne gir π = 3,16 som er en bra tilnærmelse.

Arkimedes (287 - 212 f.Kr.) beviste ved å innskrive og omskrive en 96-kant i sirkelen at π måtte ligge mellom 3,14084 og 3,14285.

Adrianus Romanus fant 15 riktige desimaler i 1593.

William Jones fra England var den første som innførte symbolet π i 1706. Det ble innført som en forkortelse for det engelske ordet periphery som betyr periferi. Symbolet ble allment akseptert da matematikeren Leonard Euler tok det i bruk noe senere.

I 1949 fant Eniac - den første datamaskin - 2 037 desimaler, og en IBM-maskin beregnet i 1964 10 000 desimaler: π=3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288..

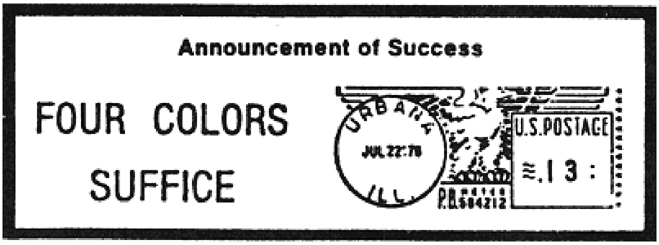


Nå er oppmerksomheten mer rettet mot om det finnes mønstre i desimalene til π. Over 200 milliarder siffer er kjent.

I skolene blir ofte π innført ved at en måler omkrets og diameter til sirkelformede figurer. Kanskje tar en til slutt også gjennomsnittet av flere måleverdier. Denne metoden har trolig røtter tilbake til de eldste beregningsmetodene, slik at vi kan hevde at ringen er sluttet.

Firefargeproblemet

I 1852 skrev den engelske studenten Francis Guthrie til sin bror og spurte om det var mulig å gi et matematisk bevis for følgende problem: Jeg skal fargelegge et kart slik at to land med felles grenselinje (det er altså ikke nok med bare et grensepunkt) skal ha forskjellig farge på kartet. Vil det da alltid være nok å bruke fire farger? Dette spørsmålet har blitt kjent som firefargeproblemet. Det tok matematikere over hundre år før problemet ble løst, og da under forutsetning av at et land ikke er delt i flere atskilte områder slik som det tidligere Vest-Tyskland.



Poststemplet forteller at firefargeproblemet ble løst i 1976. Beviset ble gjennomført av Kenneth Appel og Wolfgang Haken og krevde 1000 regnetimer på datamaskin.

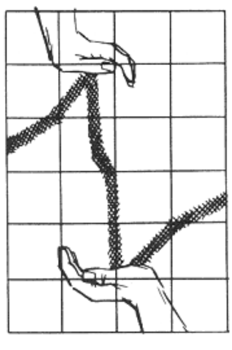
Vektorregning

Vektorregningen har sin opprinnelse i fysikken, og det latinske ordet **vector** betyr blant annet "en som bærer på noe". Allerede for lenge siden tenkte en seg at krefter og hastighet kan betraktes som linjestykker med lengde og retning. En adderte slike linjestykker som sidene i et parallellogram.

Den egentlige vektorregningen ble utviklet på 1800-tallet. Mye av inspirasjonen kom fra iren W.R. Hamilton (1805-1865) som er avbildet her. I 1843 oppfant han en slags firedimensjonale tall som han kalte kvaternioner. En del av dette var oppfunnet tidligere av nordmannen Caspar Wessel (1745-1818).

Kvaternionene hadde ingen fornuftig fysisk mening. Fysikeren Maxwell foreslo derfor at man skulle spalte kvaternionene i en talldel og en vektordel. I 1881 gav amerikaneren J.W. Gibbs (1839-1903) den endelige framstillingen av vektorregningen slik vi kjenner den i dag.

Det var altså fysikken som var utgangspunktet for vektorregningen. Dette er derfor et godt eksempel på hvordan fagene fysikk og matematikk har påvirket hverandre.



4. Statistikk.

Ordet statistikk stammer visstnok fra det tyske ordet *"Staatsmerkwerdenkeiten"* som betyr *"merkelige ting ved staten"*. Ordet har nok sammenheng med tabeller og figurer over folketall, hærstyrker, landarealer, skatter og andre talldata som staten samlet for å kunne følge med på hva som foregikk i landet.

Slik samling av statistiske data har i vert fall pågått siden Keiser

Augustus' tid. Han lot landets befolkning bli innskrevet i manntall for 2000 år siden.

Faget *sannsynlighetsregning* oppstod på 1600-tallet. En god del seinere ble den matematiske sannsynlighetsregning anvendt som hjelpemiddel for å analysere statistiske data, og det er dette som nå går under navnet matematisk statistikk.

I vår tid brukes (og misbrukes) statistikk på praktisk talt alle områder: økonomi, industri, politikk, sosiologi, medisin, biologi, fysikk osv. Selv for lesning av vanlige dagsaviser er kunnskaper i statistikk en fordel.

Befolkningsstudier

John Graunt (1620-74) regnes som grunnlegger av statistiske befolkningsstudier. Han analyserte det statistiske materialet som var lagret om Londons innbyggere. Spesielt interessant for ham var Londons dødsstatistikk som gikk tilbake til 1532.

I 1662 skrev han boka *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality.* Graunt bemerket f.eks. at antall guttefødsler var omtrent lik antall jentefødsler. Dette er velkjent for oss, men ser ut til å ha vært en nyhet i 1662. Graunt gjorde også et forsøk på å utarbeide dødelighetstabeller av samme type som brukes av moderne livsforsikringsselskaper.

Blaise Pascal

Blaise Pascal (1623-62) fikk en god utdannelse i Paris, og bare religion ble holdt utenfor undervisningen. Allerede som 11-åring skrev han en liten avhandling om noen lydeksperimenter han hadde gjort selv. Året etter oppdaget han mange setninger fra geometrien uten å ha fått noen undervisning i emnet. Da han var 16 år fikk han trykt et arbeid hvor han satte fram en ny og "vakker" geometrisk setning om kjeglesnitt. Det var da tydelig at han var et av matematikkens vidunderbarn.

To år seinere konstruerte han en av de første regnemaskiner som kunne utføre addisjon og subtraksjon mekanisk. Seinere laget han ca. 50 slike. I vår tid har Pascal blitt hedret for dette ved at et av de mest kjente programmeringsspråk er oppkalt etter han. Pascal grunnla også den grein av matematikken som kalles *sannsynlighetsregning*.

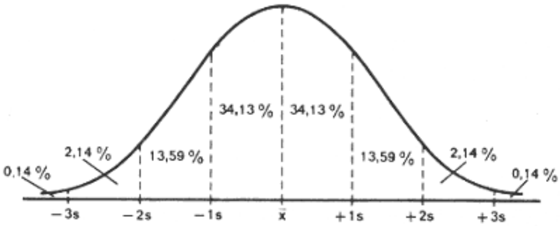
Pascal tenkte meget klart, og hadde en egen evne til å trenge gjennom problemene og uttrykke presist det andre beskrev i vage ord.

En kveld da Pascal var 31 år opplevde han en åndelig omveltning i sitt liv. I to timer var han gjennomglødet av en overnaturlig ild. All tvil forsvant etter denne direkte kontakten med Gud. Resten av livet brukte han til å kjempe for sin tro og jobbet bare sporadisk med matematikken. En del av det han talte og skrev ble samlet til det som nå er kjent som hans *Tanker*. En av Pascals store interesser ble også å hjelpe fattige, og han lånte penger mot rente for å kunne gi gaver.

Normalfordelingen

Statistikken har også sine lover. En av disse er den klokkeformede *normalfordelingen* eller gausskurven. Normalfordelingen ble oppdaget av De Moivre i 1733, og på nytt i 1809 av Carl Friedrich Gauss, mens han studerte feillære.

Gauss hadde problemer i forbindelse med stjerneobservasjoner. Når han målte en bestemt vinkel på stjernehimmelen flere ganger etter hverandre med ett av de instrumentene han disponerte, fikk han ikke samme svar hver gang. Hyppigheten av måleresultatene fordelte seg som en klokkeformet kurve, den såkalte normalfordelingen, rundt den "sanne" verdien.



Normalfordelingskurven gjør seg ikke gjeldende før tallet på observasjoner blir svært stort. Den kan derfor regnes som et grensetilfelle når n (antall observasjoner) går mot uendelig. I statistikken finner vi ofte normalfordelte data - i alt fra stjerneobservasjoner til soldatenes kroppslengde.

Florence Nightingale

Florence Nightingale (1820-1910) fikk som pike opplæring i matematikk av sin far. Hun ble interessert i faget og ønsket også å studere videre, men moren mente at det ikke egnet seg for en kvinne. En del matematikk ble det likevel.

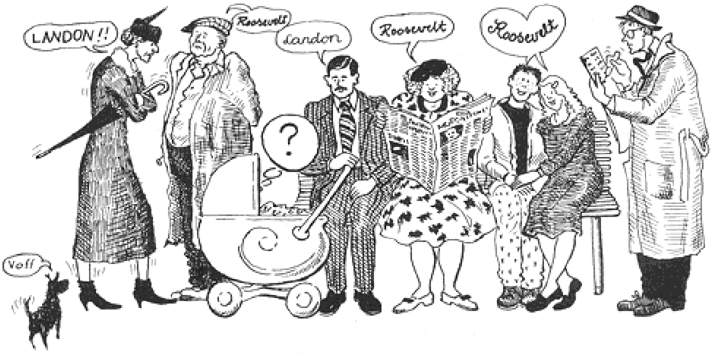
Under Krimkrigen fungerte hun som oversykepleier og bidro gjennom dette sterkt til å reformere sykepleien og hygienen. Hun utarbeidet statistikk og grafiske framstillinger som viste dødsfall av ulike årsaker på hospitalet. For dette arbeidet ble hun verdensberømt. I 1858 ble hun valgt til medlem i *Royal Statistical Society*.

Florence Nightingale skapte også den første skole for sykepleie i 1859 ved St. Thomas Hospital i London. Hun skrev bøker om faget og regnes i dag som grunnlegger av den moderne sykepleie.

George Gallup

George Gallup (1901-84) er en kjent amerikansk meningsmåler og samfunnsforsker. Gallup underviste i journalistikk ved et amerikansk universitet. Etter forespørsler fra et annonsefirma i New York om å foreta meningsmålinger for firmaets kunder, grunnla Gallup i 1935 *American Institute of Public Opinion*.

I 1936 var det presidentvalg i USA mellom Roosevelt og Landon. Bladet *Literary Digest* hadde forutsagt at Landon ville vinne. Deres undersøkelse bygde på utsendelse av hele 2,4 millioner brev. Men Gallups målinger viste at Roosevelt ville vinne.



Gallup fikk rett. Meningsmålingen til Literary Digest bygde nemlig på et lite representativt utvalg av befolkningen. Bladet hadde sendt ut sine brev etter telefonkataloger og bileierlister. Men i 1936 var det ikke så vanlig med bil eller telefon. Dette førte til et stemmetall på Roosevelt som var 19% lavere enn det i virkeligheten ble. En slik grov feil hadde ikke Gallup gjort. Nå er ordet gallup et synonym for meningsmåling.

Eilert Sundt

Nordmannen Eilert Sundt (1817-1875) er kjent som teolog og samfunnsforsker. Etter å ha møtt dikteren Henrik Wergeland, ble han inspirert til å arbeide med å finne ut hvorfor så mange underprivilegerte grupper, særlig de såkalte taterne, hadde det så dårlig her i landet.

Sundt reiste rundt land og strand og studerte folkelivet. Han fant svært mye elendighet. De neste ti år var han stadig på vandring over hele landet og samlet førstehåndskunnskap om folket. Dessuten benyttet han seg av det han kunne få tak i av offisiell statistikk, og han skaffet seg informasjon gjennom prester og lærere.

I bøkene sine skrev han om befolkningslære (giftemål, fødsel, dødelighet), moralske forhold, hus- og sanitærtilstander og om levekår for fiskere, arbeidere og de omreisende taterne (fantene). Sundt skrev på et folkelig poetisk språk, men alt var basert på grundig statistikk.

I 1864 grunnla Sundt *Christiania arbeiderforening*. Men han var motstander av Marcus Thrane og hans sosialisme. Sundt var også aktiv i Folkeopplysningsselskapet. Han regnes som banebryter for sosiologisk og statistisk kartlegging av folks levekår.

Anders Kiær

Anders N. Kiær (1838-1919) ble født i Drammen. Han ble utdannet jurist, men hans viktigste arbeider er befolkningsstatistikker over inntekt og formue, og skipsfartsstatistikker. Han forsket også i folkeforflytningen i årene 1866 - 85.

Det var vanlig på den tiden å foreta en mest mulig *total* kartlegging av de forhold som skulle undersøkes. Dette var en svært tidkrevende metode. I 1897 publiserte Kiær en banebrytende avhandling *om Den repræsentative Undersøgelsesmetode* hvor man istedenfor en total kartlegging, skulle gjøre en *representativ* kartlegging. Representantene for f.eks. befolkningen ble trukket ut tilfeldig som ved et lotteri. Det tok lang tid før statistikerne anerkjente nytten i Kiærs metode.

Ellers er Kiærs navn knyttet til opprettelsen av *Statistisk sentralbyrå* som ble opprettet i 1876. Han var også direktør for byrået i en årrekke. Statistisk sentralbyrå samler inn og bearbeider den offentlige statistikk her i landet. De utgir bl.a. *Statistisk årbok* og *Statistisk ukehefte*.

Feil bruk av statistikk

Ikke alle statistiske metoder er til å stole på. I en av Kjell Aukrusts bøker leser vi om de gamle vikingene:

- "Store og kraftige vikinger? Sludder og våsprat fra ende til annen. Vikingene var noen oppskrytte små puslinger!

Ludvig så mistenksomt på Solan: Hvor hadde sagbruksarbeideren disse opplysningene fra?

Solan Gundersen hadde det fra sjølveste forskningssjefen i Statistisk Sentralbyrå. Ekspertene regna seg tel sånt. Dagens norske soldat vokste nemlig 0,8 millimeter om året. I dag var gjennomsnittshøyden 179 centimeter. Det var bare å regne seg attende i tia med null komma åtte, tel slaget på Stiklestad - Da skulle'n Ludvig få sjå svart på kvitt å mye det vart att ta'n Olav den Hellige, Gaukatore, Afrafaste og'n Hårek fra Tjøtta! - Nei, her nytta det itte å telle på fingra! Men Solan Gundersen kunne fortelle det han:

- Dessa oppskrytte råskinna som barka sammen i slaget på Stiklestad var itte høyere enn 29 centimeter!

Ja Ludvig kunne bare måpe. På Stiklestad ville han verken ha sett snurten av bondehæren eller kara hass Olav den Hellige. Døm var rett og slett borte neri graset ..."

5. Funksjoner.

Rene Descartes

Rene Descartes (1596-1650) var fransk og regnes som den første store filosof i moderne tid. Hans interesse for matematikk var bare en del av hans liv.

Som filosof la han vekt på at matematikkens deduktive tenkemåte skulle gjennomsyre all vitenskap. Hovedpoenget i hans filosofi var at en kunne anvende en matematisk metode på alle kunnskapsområder - noe som bare delvis har vist seg å stemme.

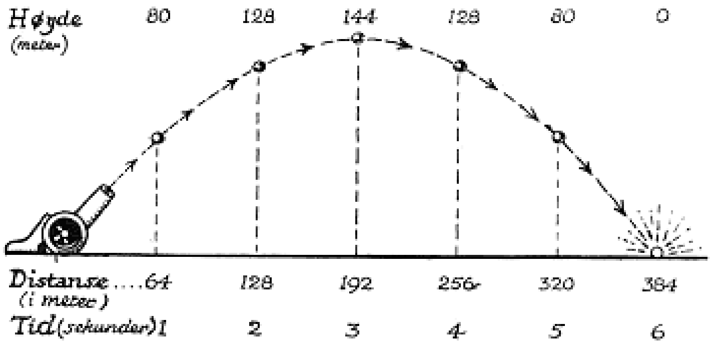
Descartes fant på å løse geometriske problemer ved å regne med likninger for kurver. I sitt verk *Discours de la méthode* (1637) viser han i et tilleggskapittel hvordan en kan løse mange geometriske oppgaver ved hjelp av algebraen - nemlig ved å ta i bruk det vi i dag kaller koordinatsystemet. Descartes grunnla den nye koordinatgeometrien. Vi snakker derfor ofte om det *kartesiske koordinatsystemet* etter filosofens latinske navn

Cartesius. I *Discours de la méthode* finner vi også det som går under navnet "nullpunkt-setningen".

I 1649 reiste Descartes til Stockholm for å undervise dronning Kristina i filosofi. Det ble en spesielt kald vinter i Sverige slik at Descartes fikk lungebetennelse og døde i Stockholm allerede i 1650.

Parabelen

Når vi kaster stein, følger steinen en buet kurve til den treffer bakken igjen Det krever lang øvelse å bli treffsikker i steinkast.

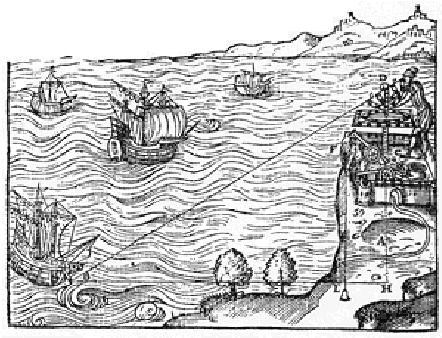


I krigstider har matematikerne ofte måttet interessere seg for militære våpen og deres evne til å treffe. I studiet av banen til en kanonkule har grafen til andregradsfunksjonen - parabelen - vært til nytte. Vi bruker også parabelen når vi studerer skrått kast i fysikken.

Sinuskurver

Det var opprinnelig de gamle astronomers behov for å beregne posisjonene til stjerner og planeter som gjorde det nødvendig med trekantberegninger.

Den greske astronomen *Hipparkhos* som levde omkring 150 f.Kr, var den første som regnet ut en tabell over noe som liknet en såkalt sinusfunksjon. Denne kunnskapen kom til Europa gjennom inderne og araberne. Ordet sinus betyr *bukt* eller *lomme*.



I landmåling og karttegning har trekantberegninger vært et helt nødvendig hjelpemiddel. De trigonometriske funksjonene er i dag noen av de viktigste i matematikken og dens anvendelser.

Logaritmer

Den skotske baron, godseier og vitenskapsmann *John Napier* (1550-1617) utviklet de første logaritmer på slutten av 1500-tallet. Han brukte dem til å forenkle løsningen av et astronomisk problem han arbeidet med. Han publiserte sine logaritmetabeller i 1614.

Professor *Henry Briggs* (1561-1631) foreslo for Napier en litt annen måte å lage logaritmer på, de såkalte *briggske logaritmene* (tierlogaritmene).

Logaritmene ble bl.a. brukt til å forenkle regningen med store tall. Den neste store og lett anvendelige oppfinnelse til forenkling av tallregningen, er vår tids datamaskiner og lommeregnere.

Funksjonsbegrepet: Leonard Euler

Funksjonsbegrepet har en lang historie. Fra de tidligste tider har menneskene observert at for eksempel fenomener på stjernehimmelen opptrer med en viss regelmessighet. Vi kan si at disse fenomenene er en funksjon av tiden.

Sveitseren Leonard Euler (1707-1783) gav viktige bidrag til utviklingen av det moderne funksjonsbegrepet. Euler er den mest produktive matematiker som har levd. Selv om det nå er over 200 år siden han døde, er man ennå ikke ferdig med å utgi hans samlede verker. Vi regner med at de vil komme til å bestå av om lag 100 tykke bind. Mot slutten av sitt liv ble Euler blind, men han fortsatte likevel med forskningsarbeid.

Et sitat viser Eulers generelle definisjon av en funksjon. I innledningen til boka *Institutiones calculi differentialis* (1755) sier han:

"Når x betyr en variabel størrelse så heter alle størrelser, som på en eller annen måte avhenger eller bestemmes av x, funksjoner av x."

Ser vi bort fra at Euler forutsatte at definisjonsmengden var **R** (de reelle tall), er dette omtrent samme funksjonsdefinisjon som vi lærer i videregående skole.

I praksis benyttet imidlertid Euler bare funksjoner som var gitt ved formler.

Funksjonsbegrepet: Dirichlet

Funksjonsbegrepet er et grunnleggende begrep i matematikken og har en lang historie. Lenge mente matematikerne at alle egentlige funksjoner måtte kunne skrives som en formel.

Dermed fikk man problemer med de delte funksjonene som måtte skrives ved hjelp av to eller flere formler. Euler ga slike spesiell funksjoner navnet diskontinuerlige. I siste halvdel av 1700-tallet var det mange harde diskusjoner om en skulle tillate å bruke delte funksjoner.

Vårt moderne funksjonsbegrep tilbakeføres gjerne til den tyske matematiker P.L. Dirichlet (1805-1859). Han sa at: *"f er en funksjon av x når det for hver x i et intervall svarer et tall f(x)".* Dermed unngikk han restriksjonen til en formel for f(x).

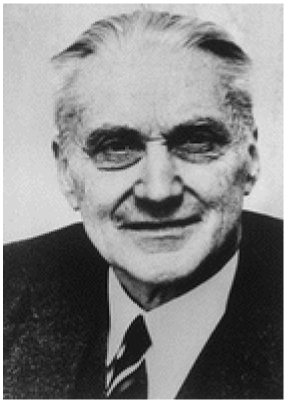
Økonomi og matematikk

Økonomi er blitt kalt den eldste av kunstene og den yngste av vitenskapene. Først da den begynte å ta i bruk en viss mengde matematikk ble den betraktet som en vitenskap. Dette skjedde på 1800-tallet.

Adam Smith, også kalt "Sosialøkonomiens far", publiserte sin store bok *Wealth of Nations* i 1776. Denne inneholdt lite matematikk. Eiendomsmegleren *David Ricardo* brukte matematikk da han i 1817 beviste det overraskende prinsipp at fri handel var fordelaktig for forbrukere i alle land (NB: under visse betingelser).

Først i 1969 ble nobelprisen i økonomi opprettet. Minst halvparten av økonomiprisene som er utdelt siden den tid har gått til arbeider som må betegnes som anvendt matematikk. Nordmennene Ragnar Frisch og Trygve Haavelmo fikk nobelprisen i økonomi i henholdsvis 1969 og 1989.

Ragnar Frisch



Den kjente norske sosialøkonomen Ragnar Frisch (1895-1973) var professor ved Universitetet i Oslo i perioden 1931-1965. Frisch utførte flere viktige arbeider innenfor sosialøkonomi, matematisk statistikk, produksjonsteori, etterspørselsteori, nasjonalregnskap og anvendelse av lineær programmering. Dessuten hadde han lange opphold i India og Egypt for å hjelpe til med den økonomiske planleggingen.

I årene etter krigen var Frisch en av hovedarkitektene bak bruken av planøkonomien som styrte gjenoppbyggingen av Norge. I 1969 fekk han den første nobelprisen i økonomi, sammen med nederlenderen Jan Tindbergen.

Frisch er en av hovedmennene bak *økonometrien* der en bruker matematiske modeller til å framstille økonomien.

Lineær programmering

Lineær programmering er en av de mange matematiske metodene i økonomien. Metoden ble utviklet av amerikaneren George Dantzig og den russiske matematiker Leonid Kantorovich. Andre ga også viktige bidrag. I 1975 fikk Kantorovich nobelprisen i økonomi for teorien om lineær programmering og dens anvendelser for best mulig bruk av ressurser.

Et av de mest kjente problemene i lineær programmering består i å lage en næringsmessig holdbar meny med minimale kostnader. Problemet ble først reist i et landbrukstidsskrift i 1945.

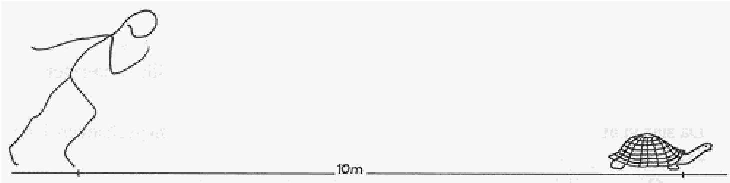
Lineær programmering har i dag vid anvendelse i næringsliv, industri og bankvesen. Det er en måte å tjene penger på.

6. Integral- og differensialregning.

Akilles og skilpadda

Grenseverdier er noe vi jobber mye med i matematikken. Behovet for en klargjøring av hva grenseverdier er ble antydet allerede av den greske filosofen *Zenon* som levde om lag 450 f.Kr. Han laget et paradoks som kalles *Akilles og skilpadda:*

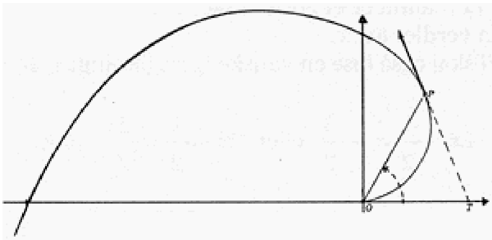
Akilles løper 10 ganger så fort som skilpadda. Skilpadda starter med et forsprang på 10 meter. Når Akilles har kommet dit skilpadda startet, har skilpadda fortsatt et forsprang på 1 meter. Når Akilles har tatt igjen dette forspranget, har skilpadda kommet seg ytterligere 10 cm av gårde, og så videre. Etter dette resonnementet vil Akilles aldri kunne ta igjen skilpadda!



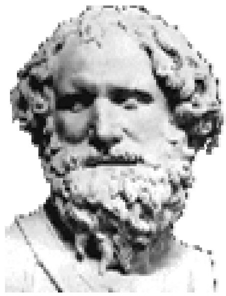
Paradokset ble først oppklart med grenseverdibegrepet og teorien for det som kalles uendelige rekker. Full klarhet krever at vi aksepterer uendelige mengder og betrakter disse ved hjelp av Cantors mengdelære. Grensebegrepet ble innført på slutten av 1700-tallet, og mengdelæren mot slutten av 1800-tallet.

Arkimedes' spiral

Derivasjon brukes ofte for å finne tangenter til kurver. For enkelte kurvetyper ble problemet med å finne tangenten løst allerede for et par tusen år siden uten kjennskap til derivasjon.



Arkimedes (287-212 f.Kr.) var Antikkens største matematiker og naturviter. En av hans kurver kalles *Arkimedes' spiral.* Den framkommer hvis vi lar et linjestykke rotere mot urviserne rundt origo, O, samtidig som vi lar et punkt P bevege seg med konstant fart ut langs linjestykket. Punktet P vil da beskrive spiralen. Arkimedes bestemte sannsynligvis tangenten ved å finne *retningen for punktets bevegelse* i P. Han oppfant også det som blir kalt en Arkimedes-skrue, som er en konstruksjon som brukes for å heve vann. Denne brukes fortsatt i deler av verden.



Arkimedes gjorde også en rekke andre tekniske oppfinnelser, bl.a. kastemaskiner, taljer og vektstenger som kunne brukes for å gjøre tunge løft. En av hans spissformuleringer var at "*gi meg et fast punkt og jeg skal flytte jorden*".

Ellers er Arkimedes mest kjent for oppdagelsen av sin lov om oppdrift i væsker. Ifølge historien sprang han da rundt på torget og ropte "*Eureka, Eureka*" (jeg har funnet det!).

Isaac Newton

Isaac Newton (1642-1727) er et av de største matematiske genier som har levd. Allerede i studietiden ved Trinity College i Cambridge ser han ut til å ha nådd fram til grenseområdet for sin tids naturvitenskapelige og matematiske viten.

I det ytre levde Newton et liv uten de store omveltninger. Han var tilbaketrukket, forlot aldri England, men hadde en usedvanlig god helse. I 1665 ble Cambridge rammet av en stor pest, og universitetet måtte holde stengt et par år. Newton holdt seg stort sett hjemme, og i tur og orden gjorde han alle sine tre store oppdagelser: Lysets brytning i ulike farger, den generelle gravitasjonsteori og derivasjon og integrasjon.

Først i 1687 lot han seg overtale av astronomen Edmund Halley til å utgi en del av dette i boka *Naturvitenskapens matematiske prinsipper.* Boka inneholder resultatet av den største vitenskapelige innsats som noensinne er gjort av én enkelt person. Hans arbeider markerte begynnelsen til den moderne fysikk og astronomi. Newton må derfor først og fremst regnes som fysiker, men han gjorde også banebrytende arbeider innen matematikken. Til en viss grad kan vi si at han konstruerte de matematiske redskaper han hadde behov for i sine fysiske arbeider.

Newton var også den første som konstruerte en kikkert der lyset ble samlet av et speil i stede for en linse Han brukte også mye av sin tid til studier i teologi og historie.

Gottfried Wilhelm Leibniz

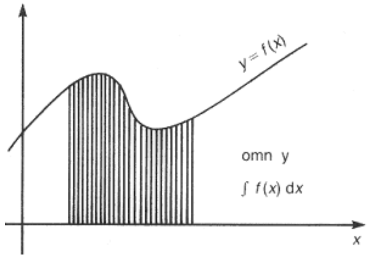
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) oppdaget differensial- og integralregningen omtrent samtidig med og uavhengig av Newton. Leibniz må kalles et universalgeni. Han begynte på universitetet i Leipzig bare 15 år gammel og tok doktorgraden 5 år seinere. Leibniz studerte jus, filosofi, logikk og teologi, og han virket som diplomat noen år. Den matematikken han kunne, tilegnet han seg etter hvert, og stort sett på egen hånd.

Leibniz var spesielt opptatt med å finne gode skrivemåter for matematiske begreper og operasjoner. I forbindelse med derivasjon innførte han blant annet differensialsymbolene *dx* og *dy*. Han skrev den deriverte som *dy/dx*. Euler derimot brukte derimot en skrivemåte som liknet på f'(x), slik vi oftest er vant til å gjøre.

Symboler i matematikken

I dag er det utenkelig med matematikk uten symboler. Symbolene uttrykker matematiske ideer og sammenhenger kort og presist. Mange av de symbolene vi kjenner ble imidlertid først tatt i bruk på 1600-tallet. I dag er disse symbolene til en viss grad internasjonale. Matematikere fra ulike kulturer kan dermed komme sammen og snakke samme matematikkspråk.

I videregående skole lærer vi å integrere funksjoner. Det skriver vi slik: $\int f(x)dx$. Vi kan tolke integrasjonen geometrisk som å finne arealet mellom grafen til en funksjon og x-aksen. Integralsymbolet ble innført av G.W. Leibniz (1646-1716). Sammen med Newton blir han regnet som grunnleggeren av differensial- og integralregningen.



Leibniz brukte først uttrykket "*omn y*" (summen av alle linjer y) som symbol for integrasjonen. Dette hadde sammenheng med at han trodde at integralet kom fram ved å summere "alle linjer" under grafen. Siden gikk Leibniz over til å bruke integralsymbolet vi er vant med. På den tiden var dette symbolet i bruk som stor bokstav *S*, og det stod for den første bokstaven i ordet "summa". Leibniz kalte den nye regningen summasjon. Ordet integrasjon ble innført noe seinere.

Bernhard Riemann

Bernhard Riemann (1826-1866) så dagens lys i den lille landsbyen Brenselenz i Tyskland. Faren var luthersk prest, og Bernhard vokste opp i et fattig, men lykkelig hjem. Foreldrene så en viktig oppgave i å oppdra og undervise barna sine. Tidlig ble derfor Bernhards lyst til å lære vakt. I seksårsalderen ga han seg i kast med matematikken. Hans medfødte evner kom snart til sin rett: Han ikke bare løste alle regneoppgavene som ble gitt ham, men laget også mye problemer som har utfordret sine eldre søsken med.

Nitten år gammel kom han inn på universitetet i Göttingen. Meningen var at han skulle studere teologi, men han gikk også på matematikk- og fysikkforelesningene, og snart tok denne interessen overhånd. Den berømte matematikeren Carl Fridrich Gauss foreleste også i Göttingen, og Riemann ble oppslukt av faget.

I sin matematikk ble Riemann banebrytende. Det er sagt om han at alle de emneområder han arbeidet med klarte han på en eller annen måte å revolusjonere. 25 år gammel leverte han sitt berømte doktorarbeide om kompleks funksjonsteori. Et par år senere skrev han også et berømt arbeide om det som snart ble kalt *Riemannske geometrier*. Denne avhandlingen satte hele geometrien i et nytt lys og banet vei for den geometriske fysikken vi fikk på 1900-tallet.

Det Riemann viste her, var at på samme måte som det er - avhengig av krumningen - forskjellige typer linjer og forskjellige typer flater, så finnes det også forskjellige typer tre (og fire-) dimensjonale rom. Dette er de *Riemannske geometriene*, men detaljene her krever kunnskap i matematikk.

Med disse ideene var faktisk Riemann en vitenskapelige "profet" i sin tid. På mange måter ser det ut som at Riemanns egentlige interesse og motivasjon må har vært matematisk fysikk, og hadde han levd lenger, så hadde han kanskje blitt sin tids Newton eller Einstein. Femti år senere tok nemlig Albert Einstein opp Riemanns visjon om en geometrisk fysikk for verdensrommet. Einstein benyttet da Riemanns arbeider i relativitetsteoriens beskrivelse av det fysiske univers som omgir oss. Her tolket Einstein universet som et firedimensjonalt rom-tids referansesystem. Denne beskrivelsen har hatt enorm betydning for vår tids fysikk. Men uten Riemanns arbeider hadde denne revolusjonen i den naturvitenskapelige tenkemåte vært umulig eller kommet først senere.

Trettien år gammel ble Riemann utnevnt til assisterende professor. Men hans skapelses-tid skulle snart ta slutt. Noen år senere ble han alvorlig syk, helsa hadde nok vært svak hele tiden. Han ble bare 39 år gammel.

Riemanns samlede verker består bare av ett bind, men til gjengjeld er det meste der genistreker. Som fysiker og matematiker var Riemann av samme kaliber som Newton og Einstein. Det var også han som definerte den type integralregning vi i dag lærer i den videregående skole. Egentlig bærer da også dette navnet *Riemann-integralet*.

Kristian Birkeland

Kristian Birkeland (1867-1917) ble født i Oslo, og ble etter hvert en berømt fysiker som nådde helt opp i nobelpris-klassen. Men som forsker startet Birkeland med matematikk, før han beveget seg over i teoretisk fysikk.

Før han var 18 år hadde Birkeland skrevet et betydelig vitenskapelig arbeid kalt *Principer til en antall geometrisk metode* der han hadde oppdaget noen nye geometriske setninger. Birkeland studerte så kjemi, matematikk og fysikk i fem år ved Universitetet i Oslo, og tok matematisk naturvitenskapelig lærereksamen, som det da het, 23 år gammel. Mens han var student, publiserte han også tre matematiske artikler. Deretter arbeidet han som lærer ved Aars og Voss skole. Men han kom tilbake til Universitetet der hans hovedinnsats etter hvert skulle ligge innenfor eksperimentell fysikk. Han ble professor 31 år gammel.

I dag er Birkelands navn først og fremst knyttet til Birkeland-Eydes metode for framstilling av salpeter og kunstgjødsel, og dermed etableringen av industribedriften Norsk Hydro, men for Birkeland var dette bare en episode i hans mangfoldige livsverk. Hans aktivitet hadde et omfang og en dybde som var helt ukjent i norsk forskning.

Spesielt gjorde han forskning på *nordlys*. For sin innsats har han fått plass på den norske 200 kr seddel. En skisse av hans nordlyseksperiment vises også på samme pengeseddel. Ved det såkalte Terrella-eksperimentet ble det første kunstige nordlys framstilt i et laboratorium. Han bygget observatorier for nordlysforskning ved Alta.

Naturvitenskapsmannen Birkeland publiserte ca. 70 vitenskapelige avhandlinger, de fleste på fransk. Han hadde også 59 patenter. Tolv var knyttet til Birkeland- Eyde- ovnen og starten av Norsk Hydro. Andre kjente oppfinnelser er: Den elektromagnetiske kanon, fettherding, tørking av fisk, behandling av organiske rester og mekaniske høreapparat.

De siste årene av sitt liv bodde Birkeland i Egypt av helsegrunner, og for å studere det såkalte zodiaklyset. Som menneske var han temmelig utbrent og følte seg motarbeidet av andre. Han døde på et hotellrom i Tokyo. Hans siste og "endelige" manuskript gikk tapt i et skipsforlis under 1. verdenskrig. En utenlandsk forfatter har nylig skrevet en biografi om Birkeland som også er oversatt til norsk: Lucy Jago: *Nordlysets gåte - Pioneren som ofret alt i vitenskapens tjeneste* (Gyldendal 2002).

Litteratur:

Karl Erik Sandvold m.fl.: *Matematikk for den videregående skolen.* Gyldendal Norsk Forlag. 1988. Deler av stoffet over er tidligere utgitt som kapittelinnledninger til dette læreverket: 1MA,2MN,2MS.
E.T. Bell: *Men of Mathematics*. New York 1937.
Lynn M. Osen: *Women in Mathematics*. MIT Press 1974. Se også: www.agnesscott.edu/lriddle/women/women.htm
Jan Thompson: *Kunnskapsforlagets matematikkleksikon.* Oslo 1997.

Oppgaver

Kapittel 1: Tallene fikk navn

OPPGAVE 1
Forfatteren av verket *All verdens tall*, Georges Ifrah, fikk dette spørsmålet i en matematikktime: "*Lærer, hvor kommer tallene fra? – Hvem oppfant null?*"

Anta at du selv som lærer må besvare dette spørsmålet for dine elever. La tidsrammen du har til rådighet være ca. en halv til én time. Beskriv hovedpunktene i ditt svar. Velg selv klassetrinn.

OPPGAVE 2
Gunnhild er født 4. oktober 1980, og hennes kjæreste ønsker å lage en overraskende feiring den dagen hun har levd i 10000 dager. Hvilken dato blir dette? Husk å ta hensyn til skuddårene.

Kapittel 2: Nordens første matematikktekst anno 1300

OPPGAVE 1
Regning i titallsystemet kom til Norge via bl.a. disse personene:

Muhammed Al-Khwarizmi. (ca. 800 e.Kr)

Alexander de Villa Dei (? -1240)

Haukr Erlendsson (? -1334).

Søk på Internett etter flere opplysninger om disse. Gi et kort referat om funnene.

OPPGAVE 2
Studer avsnitt 10 (Tofolding) og avsnitt 11 (Halvdeling) i Hauksbok som finnes på nettet. Regn igjennom noen eksempler. Diskuter hvordan boka er som lærebok på disse punktene.

OPPGAVE 3

Synet på hva faget matematikk er har variert en god del gjennom historien. En ofte benyttet inndeling av matematikksyn går langs hovedlinjene:

Problemløsningssyn:

> Matematikk er ikke et ferdig produkt, men er stadig under utvikling og revisjon.

Platonistisk syn:

> Matematikk er et statisk, monolittisk byggverk bundet sammen med logikk og indre mening.

Instrumentalistisk syn:

> Matematikk er en samling redskaper, bestående av fakta, regler og ferdigheter som brukes i den ytre verden.

Hvilke av disse fagforståelser finner du representert i "Hauks bok"?

Kapittel 3: Geometri og det gylne snitt

OPPGAVE 1
Undersøk om noen av disse gjenstandene har form som et gylent rektangel:

- spillekort
- fyrstikkeske
- bankkort
- A4-ark

OPPGAVE 2
Analyser bilde av fasaden på et bygg du kjenner til, der arkitekten kan ha benyttet det gylne snitt (gjerne fra slutten av 1800-tallet). Marker nødvendige hjelpelinjer. Hvilke geometriske figurer og relasjoner finner du? Bilder kan du evt. finne på nettet.

OPPGAVE 3
På det norske flagg er forholdet mellom fargene loddrett 6:1:2:1:6 og vannrett 6:1:2:1:12.

Hva blir forholdet mellom arealene av de tre fargene? Finn forholdet mellom arealet av hvitt+blått og rødt. Kommenter resultatet.

OPPGAVE 4
Tegn opp et hoppeparadis du kjenner, og beskriv hvordan leken foregår. Undersøk geometrien nærmere, og finn symmetriegenskaper, vinkler og arealet.

OPPGAVE 5
Aryabhata i India (år 510 e.Kr.) skrev: "*Adder 4 til 100, multipliser med 8, og adder 62000. Dette er tilnærmet omkretsen til en sirkel med diameter 20000*". Hvilken verdi for pi brukte Aryabhata i den siterte teksten? Gi en vurdering av hvor god denne verdien er i historisk sammenheng.

Kapittel 4: Algebraens opprinnelse

OPPGAVE 1
Løs følgende problemer fra Rhindpapyrusen (problem 24 og 32) ved hjelp av metoden med "gjett og juster" (regula falsi):

a) *En størrelse og 1/7 av størrelsen summeres. Svaret blir 19. Hva er størrelsen?*

b) *En størrelse, 1/3 av størrelsen og 1/4 av størrelsen summeres. Svaret bli 2. Finn størrelsen.*

Forklar hvordan denne løsningsmetoden bygger på en lineær sammenheng mellom størrelsene.

OPPGAVE 2
Løs følgende problem fra en gammel babylonsk leirtavle:

Summen av arealet av to kvadrater er 1525. En side i det andre kvadratet er 2/3 av sidene i det første pluss 5. Finn sidene i begge kvadratene.

OPPGAVE 3
Babylonerne brukte ofte tabeller for å løse likninger. Lag, som de, en tabell over eksponentene $x^3 + x^2$ der x går fra 1 til 30. Bruk for enkelthets skyld regneark, ikke leirtavle!

Babylonerne klarte å løse tredjegradslikningen $2x^3 + 3x^2 = 540$ slik:

Multipliser det hele med 4, sett $y = 2x$*, deretter* $y = 3z$*.*

Forklar hvordan du da tror at de gjorde for å kunne bruke tabellen.

OPPGAVE 4
Dette problemet er hentet fra kapittel 9 i den kinesiske Jiuzhang:

Rundt en by er det bygget en mur. Muren har form som et kvadrat. Midt på hver av de 4 sidene er det en port. 20 pu nord for den nordligste porten står det et tre. En må gå 14 pu sørover fra porten i sør, og så snu og gå 1775 pu rett vestover før en kan se treet. Hvor lange er hver av de 4 sidene av bymuren?

Løs problemet. Merk at kineserne gjerne betraktet slike problemer geometrisk. Det kan f.eks. være lurt å se på formlike trekanter.

OPPGAVE 5
Den italienske matematikeren Philipo Calandri skrev en matematikkbok for over 500 år siden. Her er et av problemene:

Hodet av en fisk veier 1/3 av hele fisken, halen veier 1/4, og kroppen veier 30 ounces. Hva veier hele fisken?

Kapittel 5: Kepler og den første regnemaskinen

OPPGAVE 1
Hvilke likheter og hvilke forskjeller er det mellom Schickards mekaniske kalkulator og den Pascal bygget noen år senere?

OPPGAVE 2
Sett opp et regneark som gir en numerisk løsning av Keplers likning.

Kapittel 6: Framveksten av den matematiske analyse

OPPGAVE 1
I skrivet *Om parabelens kvadratur* bestemmer Arkimedes arealet av et parabelsegment. Ved å innskrive flere og flere trekanter i parabelen og summere arealet av disse, fikk han en geometrisk rekke som det er enkelt å finne summen av. Resultatet ble at parabelens areal er 4/3 av arealet av den innskrevne trekant han startet med.

Vi kan etterprøve resultatet ved bruk av rektangler og nummerisk integrasjon. Bruk til dette parabelen:

$$y = -x^2 + 4$$

Lag et oppsett for kalkulator eller regneark som regner ut en tilnærmingsverdi for arealet begrenset av parabelen og x-aksen. Del for eksempel opp i 50, 100 og 200 rektangler. Sammenlikn dette med arealet av den innskrevne trekanten med grunnlinja langs x-aksen og høyde langs y-aksen. Sammenlikn gjerne også med det du får hvis du bruker grafisk kalkulator eller et graftegningsprogram.

OPPGAVE 2
Arkimedes fant tilnærmingsverdier for tallet π ved å se på omkretsen av regulære mangekanter som var omskrevet om eller innskrevet i en enhetssirkel. Han begynte med omskrevne og innskrevne sekskanter. Deretter foretok han fordoblinger av antall kanter til 12-kant, 24-kant, 48-kant og 96-kant. Ut fra geometriske betraktninger fant han en sammenheng mellom siden, S_n, i en inskrevet regulær n-kant og siden, S_{2n} , i den doble 2n-kanten:

$$S_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^2}}$$

Lag et oppsett på kalkulator eller et regnearkoppsett som regner ut tilnærmingsverdier for omkretsen av en sirkel med radius 1. Sjekk Arkimedes' resultat om at:

$$223/71 < \pi < 22/7$$

OPPGAVE 3
I artikkelen omtales Keplers setning for vintønner slik:

Av alle rette sylindere med fast lengde på målestaven, har de østerrikske størst volum.

Gi en nummerisk begrunnelse for denne ved bruk av regneark.

OPPGAVE 4
Hvilke grunnleggende ideer ble Newtons fluxionsregning basert på?

Nevn de prinsipielle problemene knyttet til hans doktrine om "prime and ultimate ratio".

OPPGAVE 5
Hva er hovedforskjellene mellom Newtons og Leibniz' framstilling av analysen, og hvordan er deres framstilling i forhold til den moderne teori for differensial- og integralregning?

OPPGAVE 6
I artikkelen skilles det grovt mellom to perioder i utviklingen av metodene i den moderne analysen, nemlig den intuitive og den aksiomatiske. Gi en kort beskrivelse av

hver periode, gjerne med eksempler på matematikere og resultater som er typiske for hver etappe.

Kapittel 9: Abels matematikk og livsløp

OPPGAVE 1
Den såkalte "*Paris-avhandlingen*" bekymret Abel helt til det siste. Gi en beretning om hva som egentlig skjedde med denne avhandlingen helt fram til vår tid.

OPPGAVE 2
Drøft påstandene:

a) *Abels matematikk er for avansert til å kunne omtales i grunnskole og videregående skole*.

b) *Abels livshistorie har vært et nasjonalhistorisk "ikon" for det selvstendige Norge.*

Kapittel 12: Krydder og krutt fra matematikkens historie

OPPGAVE 1
På de analoge klokkene våre går som kjent minuttviseren 12 ganger så fort som timeviseren. Anta så at klokka er 1, og finn ut når minuttviseren vil nå igjen timeviseren. Angrip problemet på flere måter:

a) som likning

b) som en uedelig sum

c) ved å anvende Zenons paradoks på minuttviseren og timeviseren.

OPPGAVE 2 OG 3
Velg ut *to* av historiene i leksjonen. Finn aktuelle steder i ditt matematikkpensum der du kan anvende disse som innledningsstoff/appetittvekker/oppgavestoff for elevene.

Beskriv hvorfor og hvordan du vil integrere disse to historiske elementene i din undervisning.

Stikkordregister

STEINAR THORVALDSEN

Matematisk kulturhistorie

Alle kulturer har behov for å fortelle sine historier. Matematikken er en av de første og største historier vår kultur vet å fortelle. Faget har engasjert mennesker og preget kulturer gjennom årtusener. I denne boka får du møte en del av menneskene og historiene bak tallene og formlene.

Matematikken gir konkrete svar. I sin stil beskriver den deler av den verden som omgir oss i form av tall, strukturer og teorier. Ingen ungdom tar skade på sitt sinn ved å måtte svette noen timer i uka med å trene sitt hode til å få en gryende forståelse av dette kulturproduktet.

Boka er utformet som en artikkelsamling der delene kan leses uavhengig av hverandre. Oppgaver følger også med.

Det er forfatterens håp at denne boka kan være til nytte i matematikkundervisningen. Målgruppa er studenter og lærere i videregående skole og høgskolesystemet. Boka vil også være av interesse for elever og lærere på ungdomstrinnet.

Steinar Thorvaldsen er utdannet cand. real. i matematikk fra NTNU i Trondheim. Han har i flere år arbeidet ved Høgskolen i Tromsø med undervisning i fagene matematikk og informatikk. I 2001 ble han tildelt høgskolens første forskningspris, og han arbeider nå med et forskningsprosjekt ved Universitetet i Tromsø. Han er også leder for Tromsø Astronomiforening.

EUREKA NR 4/2002
ISBN 82-7389-045-7
ISSN 1502-8933