UNIVERSITY OF TROMSØ UIT

FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS

En læreverkstudie av overgangen fra skolematematikk til universitetsmatematikk

Sindre Hellan

MAT-3906 Master i matematikk – lektorutdanning

Mai 2013

UNIVERSITY OF TROMSØ UIT

FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS

En læreverkstudie av overgangen fra skolematematikk til universitetsmatematikk

Sindre Hellan

MAT-3906 Master i matematikk – lektorutdanning

Mai 2013

FORORD

Med denne masteroppgaven fullfører jeg lektorutdannelsen i realfag ved Universitetet i Tromsø. Jeg vil rette en stor takk til Anne Fyhn ved Institutt for lærerutdanning og pedagogikk og til Trygve Johnsen ved Institutt for matematikk og statistikk. All deres hjelp og tilbakemelding har vært verdsatt! Takk også til Marius Overholt ved Institutt for matematikk og statistikk for å ha stilt opp til intervju, til Johan Lithner (Umeå Universitet) og Mogens Niss (Roskilde Universitet) for korrespondanse om deres teorier, og til Svein Arne Sikko (Høgskolen i Sør-Trøndelag) for svært nyttige litteraturtips. Til slutt vil jeg takke familie og venner som har stilt opp for meg dette semesteret. Dere samler skatter i himmelen.

Tromsø, mai 2013

Sindre Hellan

INNHOLD

1. INNLEDNING

De siste seks årene har jeg, ved siden av mine studier, jobbet som vikar på alle trinn i norsk skole. Jeg har også ledet kollokviegrupper for førsteårsstudenter ved Universitetet i Tromsø, og jeg sitter stadig og jobber sammen med førsteårsstudenter. Da tiden kom for å skrive masteroppgave, hadde jeg flere alternativ som interesserte meg, som problemløsning og nivådifferensiert undervising. Høsten 2012 brukte jeg mye tid sammen med studenter som tok innføringsemnet Kalkulus 1. Dette fikk meg til å tenke tilbake til hvordan jeg synes det var å ta dette emnet. Overgangen fra å lese skolematematikk til å ta Kalkulus 1 oppfattet jeg selv og mange medstudenter som utfordrende, selv om noen av oss fikk gode karakterer på videregående. Jeg kunne altså selv relatere til denne utfordringen, og ved å hjelpe andre studenter fikk jeg en del inntrykk av hva andre tenkte om overgangen.

Jeg bestemte meg derfor for at jeg ville se på overgangen fra å lese 1T-R1-R2-matematikk (den matematikken som skal forberede eleven til et realfagsstudium) på videregående, til å studere innføringsemnet Kalkulus 1 på universitetet.

Jeg begynte å undres over nøyaktig hva som skapte utfordringer. Det finnes flere mulige svar, og det kan kanskje være en kombinasjon av flere faktorer. Jeg la merke til at både i videregående skole og på universitetet står læreboka sentralt i undervisning og læring av matematikk. Sentralt er også eksamensoppgaver, som er det elevene/studentene i virkeligheten blir testet i for å måle kompetansen ved avslutningen av kurset. Omfanget av denne teksten gir bare mulighet for å studere ett av disse temaene, så jeg bestemte meg å velge det førstnevnte. Jeg ville fokusere på hverdagen og læringsprosessen, og den er i stor grad avhengig av læreboka. Lithner (2004, s. 406) siterer Love & Pimm (1996):

> The book is is still by far the most pervasive technology to be found in use in mathematics classrooms. Because it is ubiquitous, the textbook has profoundly shaped our notion of mathematics and how it might be taught. By its use of the ‘explanation-examples-exercises’ format, by the way in which it addresses both teacher and learner, in its linear sequence, in its very conception of techniques, results and theorems, the textbook has dominated both the perceptions and the practices of school mathematics.

Dersom det er store forskjeller mellom lærebøkene som brukes i den videregående skolen og den som brukes på universitetet, vil det gi utslag, ettersom læring av matematikk har vært, og fortsetter å være, bygget opp rundt lærebøker.

Jeg formulerte følgende tentative problemstillinger for masteroppgaven min: Hvilke likheter og forskjeller er det mellom lærebøkene som brukes i 1T-R1-R2 og i Kalkulus 1, og hvilket grunnlag gir 1T-R1-R2-matematikk for å starte på Kalkulus 1? Det siste spørsmålet vil være et oppfølgingsspørsmål som kan sies å ta for seg den praktiske implikasjonen av svaret på det første spørsmålet.

For å avgrense oppgaven videre måtte jeg velge ut ett tema som behandles i boka som brukes i Kalkulus 1 ved Universitetet i Tromsø, *Kalkulus* (Lindstrøm, 2006). Siden funksjonsdrøfting er ett av de temaene som behandles mest grundig i Lindstrøms bok, vil det gi utslag om det er stort sprik mellom hvordan dette behandles i den videregående skolen og på universitetet. Jeg valgte derfor å se nærmere på akkurat dette temaet.

Tre matematikkbøker er mest utbredt i den videregående skolen i Norge i dag: *Matematikk R2* (Heir, et al., 2008), *Sigma R2* (Sandvold, et al., 2008), og *Sinus R2* (Oldervoll, et al., 2008). Etter et kjapt overblikk virker det som om disse tre bøkene behandler funksjonsdrøfting i ulik grad og med ulik tilnærming. Denne oppgavens omfang tillater meg imidlertid bare å studere ett av læreverkene dersom undersøkelsen skal være grundig. Jeg valgte *Sigma* fordi jeg har erfaring med dette læreverket fra min praksis i den videregående skolen, fra vikartimer og fra privattimer. Mine forskningsspørmål er:

Hvilke likheter og forskjeller er det mellom læreverkene Sigma 1T-R1-R2 *og* Kalkulus?

Hvilket grunnlag gir den videregående skolens læreverk Sigma 1T-R1-R2 *for å møte emnet funksjonsdrøfting i universitetets innføringslæreverk* Kalkulus*?*

Resultatene fra undersøkelsen min gjelder altså studenter som har fulgt *Sigma* i den videregående skolen, og som har *Kalkulus* på universitetet.

2. BAKGRUNNSTEORI

2.1 Hva er matematikk?

“Hva er matematikk?” er et spørsmål med mange fasetter. Er det noe vi oppdager, eller er den konstruert? Er den bare nyttig som et verktøy for oss, eller har den en verdi utenom dette? Er det et håndverk, eller er den mer som en kunst, som krever kreative evner hos tenkeren? Schoenfeld forklarer at det svaret man gir på slike spørsmål vil ha stor innflytelse på hvilke mål man setter for læringen av matematikk.

Mange tenker på matematikkunnskap som en mengde med fakta og prosedyrer, og det å kunne matematikk blir da definert som å mestre disse. På den andre siden finnes de som tenker at matematikk er kunsten å gjenkjenne mønstre, og da oppfatter man det å gjøre matematikk som noe som er utforskende. Sitatene som følger representerer to syn som står i sterk kontrast til hverandre.

> [C]ultural assumptions are shaped by school experience, in which *doing* mathematics means following the rules laid down by the teacher; *knowing* mathematics means remembering and applying the correct rule when the teacher asks a question; and mathematical *truth is determined* when the answer is ratified by the teacher.

> Mathematical facts are first guessed and then proved, and almost every passage in this book endeavors to show that such is the normal procedure. If the learning of mathematics has anything to do with the discovery of mathematics, the student must be given some opportunity to do problems in which he first guesses and then proves some mathematical fact on an appropriate level. (Pòlya, sitert i Schoenfeld, 1992, s. 17)

Schoenfeld mener at den førstnevnte måten å definere matematikk på er trivialiserende, og han gir i stedet følgende definisjon:

> Mathematics is an inherently social activity, in which a community of trained practitioners (mathematical scientists) engages in the science of patterns – systematic attempts, based on observation, study, and experimentation, to determine the nature of regularities in systems defined axiomatically or theoretically (“pure mathematics”) or models of systems abstracted from real world objects (“applied mathematics”). The tools of mathematics are abstraction, symbolic representation and symbolic manipulation. However, being trained in the use these tools no more

> means that one thinks mathematically than knowing how to use shop tools makes one a craftsman. Learning to think mathematically means (a) developing a mathematical point of view – valuing the processes of mathematization and abstraction and having the predilection to apply them, and (b) developing competence with the tools of the trade, and using those tools in the service of the goal of understanding structure – mathematical sense-making.

Jeg mener Pólya og Schoenfeld har gode poeng her. Regler og prosedyrer er utvilsomt nyttige verktøy når vi gjør matematikk, men matematikk har også en skapende side. Kunsten består i å løse matematiske problemer ved å bruke disse verktøyene på en kreativ måte. Schoenfeld refererer også til Stanic & Kilpatric når han forklarer at ”real problem solving (that is, working problem of the “perplexing” kind) is the heart of mathematics, if not mathematics itself.” (Schoenfeld, 1992, s. 14) Det er med dette utgangspunktet har jeg valgt å bruke begrepsapparatene beskrevet i kapittel 3, ettersom de lar meg gjøre nettopp disse disktinksjonene.

2.2 Funksjonsdrøfting

Begrepet *funksjonsdrøfting* eller *kurvedrøfting* har ingen definisjon i *Kunnskapsforlagets Matematikkleksikon*. Heller ikke Lindstrøm gir en definisjon i sin bok *Kalkulus* (Lindstrøm, 2006). Delkapitlet om kurvedrøfting inkluderer et par av operasjonene som vanligvis forbindes med begrepet (klassifisering av kritiske punkter og konveksitet/konkavitet, og disse begrepene er gitt ved presise definisjoner). I (Gulliksen & Hole, 2010), som er boka som brukes på Brukerkurs i matematikk ved UiT, heter det at funksjonsdrøfting inkluderer å finne nullpunkter, finne lokale og globale ekstremalpunkter, avgjøre hvor funksjonen vokser og avtar, avgjøre om funksjonen har en invers, bestemme krumning og vendepunkter, og å skissere grafen til funksjonen.

I denne oppgaven vil jeg definere funksjonsdrøfting bredt:

Funksjonsdrøfting skal i denne oppgaven inkludere

- **å finne intervaller hvor en funksjon er kontinuerlig, deriverbar, positiv/negativ, voksende/avtagende og konveks/konkav**
- **å finne kritiske punkter og klassifisere disse**

- **å finne grenseverdier, skjæringer med aksene, symmetrier og asymptoter**
- **å kunne avgjøre om en funksjon er like eller odde**
- **å kunne skissere grafen til funksjonen**

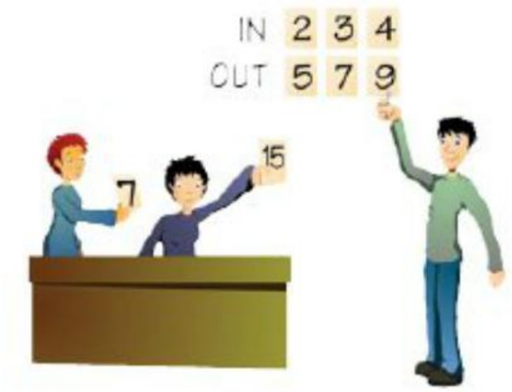
2.2.1 Funksjonsdrøfting i læreplanen

Selve funksjonsbegrepet introduseres første år på videregående. I *Sigma 1T* (Sandvold, et al., 2009, s. 58) presenteres funksjoner slik:

2.1 Funksjonsbegrepet

Du skal lære
– definisjonen av en funksjon
– symbolene vi bruker når vi regner med funksjoner
– å regne ut funksjonsverdier

I grunnskolen har du regnet med funksjoner. Men har du tenkt over hva en funksjon egentlig er? Nedenfor spiller Fanny at hun er en funksjon. Hun mottar lapper med verdier fra Xia. Så gjør hun noen beregninger og leverer svaret til Yngve, som lager oversikt i en tabell.



Klarer du å se hvordan Fanny regner? Hver gang hun får en verdi inn, multipliserer hun verdien med 2 og legger til 1.
– Innverdien kaller vi variabelen, og vi betegner den med x.
– Utverdien kaller vi funksjonsverdien, og vi betegner den med y.
– Dermed kan vi skrive Fanny-funksjonen slik: $y = 2x + 1$.

Til hver x-verdi som blir levert inn, leverer Fanny akkurat én y-verdi ut. Vi sier derfor at y er en funksjon av x.

Dersom vi forkorter Fanny-funksjonen til f, skriver vi $y = f(x)$. Det vil si at vi finner y ved å bruke funksjonen f på verdien x. Vi har altså

$$f(x) = 2x + 1$$

Dersom Fanny får oppgitt at $x = 7$, regner hun slik: $f(7) = 2 \cdot 7 + 1 = 15$.

I det neste eksemplet øver vi oss på slike utregninger av funksjonsverdier.

FUNKSJON
En funksjon f er en framgangsmåte som til hver verdi av x gir nøyaktig én funksjonsverdi $f(x)$.

Figur 1: Hvordan funksjoner introduseres i *Sigma*.

Funksjoner introduseres altså ved hjelp av et praktisk eksempel og uformelle begreper som ”innverdi” og ”utverdi.” Definisjonen er gitt i margen:

> En funksjon f er en framgangsmåte som til hver verdi av x gir nøyaktig én funksjonsverdi $f(x)$.

Lindstrøm skriver følgende om funksjoner (Lindstrøm, 2006, s. 211):

> For våre formål vil det være tilstrekkelig å tenkte på en funksjon $f: A \rightarrow B$ som en *regel* eller *tilordning* som til hvert element x i A gir oss ett (og bare ett!) element $f(x)$ i B.

Lindstrøm inkluderer også en åtte siders epistel om funksjonsbegrepets utvikling gjennom historien og en diskusjon rundt ulike definisjoner.

I læreplanen for matematikk i den videregående skolen har hvert av fagene 1T-R1-R2 en liste med kompetansemål for emnet funksjoner. Disse er gjengitt nedenfor, der målene som har med drøfting av funksjoner og tilhørende teknikker å gjøre er uthevet.

1T: Funksjonar

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- **gjere greie for funksjonsomgrepet og kunne omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar**
- **berekne nullpunkt, ekstremalpunkt, skjeringspunkt og gjennomsnittleg vekstfart, finne tilnærma verdiar for momentan vekstfart og gje nokre praktiske tolkingar av desse aspekta**
- **gjere greie for definisjonen av den deriverte, bruke definisjonen til å utleie ein derivasjonsregel for polynomfunksjonar og bruke denne regelen til å drøfte funksjonar**
- lage, tolke og gjere greie for funksjonar som beskriv praktiske problemstillingar, analysere empiriske funksjonar og finne uttrykk for tilnærma lineære samanhengar, med og utan bruk av digitale verktøy
- **bruke digitale verktøy til å framstille og analysere polynomfunksjonar, rasjonale funksjonar, eksponentialfunksjonar og potensfunksjonar**

R1: Funksjoner

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- **gjøre rede for begrepene grenseverdi, kontinuitet og deriverbarhet, og gi eksempler på funksjoner som ikke er kontinuerlige eller deriverbare**
- **bruke formler for den deriverte til potens-, eksponential- og logaritmefunksjoner, og derivere summer, differanser, produkter, kvotienter og sammensetninger av disse funksjonene**
- **bruke førstederiverte og andrederiverte til å drøfte forløpet til funksjoner og tolke de deriverte i modeller av praktiske situasjoner**
- **tegne grafer til funksjoner med og uten digitale hjelpemidler, og tolke grunnleggende egenskaper til en funksjon ved hjelp av grafen**
- **finne likningen for horisontale og vertikale asymptoter til rasjonale funksjoner og tegne asymptotene**

- bruke vektorfunksjoner med parameterframstilling for en kurve i planet, tegne kurven og derivere vektorfunksjonen for å finne fart og akselerasjon

R2: Funksjoner

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- forenkle og løse lineære og kvadratiske likninger i trigonometriske uttrykk ved å bruke sammenhenger mellom de trigonometriske funksjonene
- **derivere sentrale funksjoner og bruke førstederiverte og andrederiverte til å drøfte slike funksjoner**
- omforme trigonometriske uttrykk av typen $a \sin kx + b \cos kx$, og bruke dem til å modellere periodiske fenomener
- gjøre rede for definisjonen av bestemt integral som grense for en sum og ubestemt integral som antiderivert
- beregne integraler av de sentrale funksjonene ved antiderivasjon og ved hjelp av variabelskifte, ved delbrøkoppspalting med lineære nevnere og ved delvis integrasjon
- tolke det bestemte integralet i modeller av praktiske situasjoner og bruke det til å beregne arealer av plane områder og volumer av omdreiningslegemer
- formulere en matematisk modell ved hjelp av sentrale funksjoner på grunnlag av observerte data, bearbeide modellen og drøfte resultat og framgangsmåte

De fleste kompetansemålene går på hvilke regneteknikker eleven skal kunne bruke og hva han skal kunne bruke dem til. Et par mål sier at eleven skal kunne gjøre rede for visse begreper. Målene er altså innholdspregede. De blir svar på spørsmålet, ”hvilket pensum skal eleven lære seg?”

I kapittel 7 i *Sigma 1T* introduseres eleven for funksjonsdrøfting. Fortegnslinjer brukes til å løse ulikheter, og begrepene *definisjonsmengde* og *verdimengde* innføres. Boka utleder formelen $x = -b/2a$ for topp- eller bunnpunkt på parabler $ax^2 + bx + c$, og forteller at man finner horisontale og vertikale asymptoter til hyperbler $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$ ved henholdvis $y = a/c$ og $x = -d/c$.

Kapittel 8 tar for seg nullpunkter og skjæring med y-aksen ved regning, og skjæring med linjære funksjoner ved bruk av digitale hjelpemidler. Den deriverte introduseres som ekvivalent med momentan vekst (en semiformell definisjon presenteres kort i slutten av kapitlet), og elevene blir forklart hvordan man deriverer polynomfunksjoner. Endelig viser boka hvordan man bruker fortegnslinjer til å finne topp-, bunn-, og terrassepunkter, samt til å fortelle hvor grafen stiger og synker.

I kapittel 5 i *Sigma R1* brukes første gang begrepet *grenseverdier*. Heller ikke dette begrepet gis noen formell definisjon, men introduseres i stedet ved å gi tre eksempler og prøve å avlede en intuitiv forståelse. Det påpekes at $\lim_{x \to a} f(x)$ kan ekisistere selv om $f(a)$ ikke er definert. Boka opererer ikke med grenseverdiene ∞ og $-\infty$. Slike grenseverdier blir i stedet sagt ikke å eksistere. Boka gir sin definisjon av den deriverte og gir reglene for derivasjon av ulike typer funksjoner og ulike sammensetninger av funksjoner. Det gis bevis for to av disse reglene.

Kapittel 6 ser på hvordan man kan bruke fortegnslinjene til $f'(x)$ og $f''(x)$ for å si noe om funksjonens vekst og grafens krumning. Elevene skal finne nullpunkter, topp- og bunnpunkter, samt vendepunkter, og de introduseres for vertikale og horisontale asymptoter. Kapitlet avslutter med en uformell definisjon av kontinuitet og en semiformell definisjon av deriverbarhet.

I kapittel 3 i *Sigma R2* lærer elevene om trigonometriske funksjoner og hvordan man deriverer dem.

2.2.2 Potensielle utfordringer med funksjonsdrøfting

Med tanke på selve utregningene er det først og fremst viktig at man er stødig i dervasjon av de funksjonene man møter på (på videregående vil det si eksponentialfunksjoner, trigonometriske funksjoner, logaritmiske funksjoner, og særlig polynomfunksjoner). Videre kan det nok sies at selv om derivasjon, bruk av fortegnslinjer, og så videre, stort sett følger en fast oppskrift, er det mange begreper og tilhørende prosedyrer som skal holdes adskilt. Dessuten kan noen funksjoner kreve at man er spesielt oppmerksom under drøftingen, for eksempel en rasjonal funksjon der divisoren har nullpunkter.

For å få overblikk over drøftingen, og for å vite omtrent hvordan svaret skal se ut, er det viktig å ha kjennskap til hvordan ulike funksjoner oppfører seg. Even (1990, s. 534) forklarer:

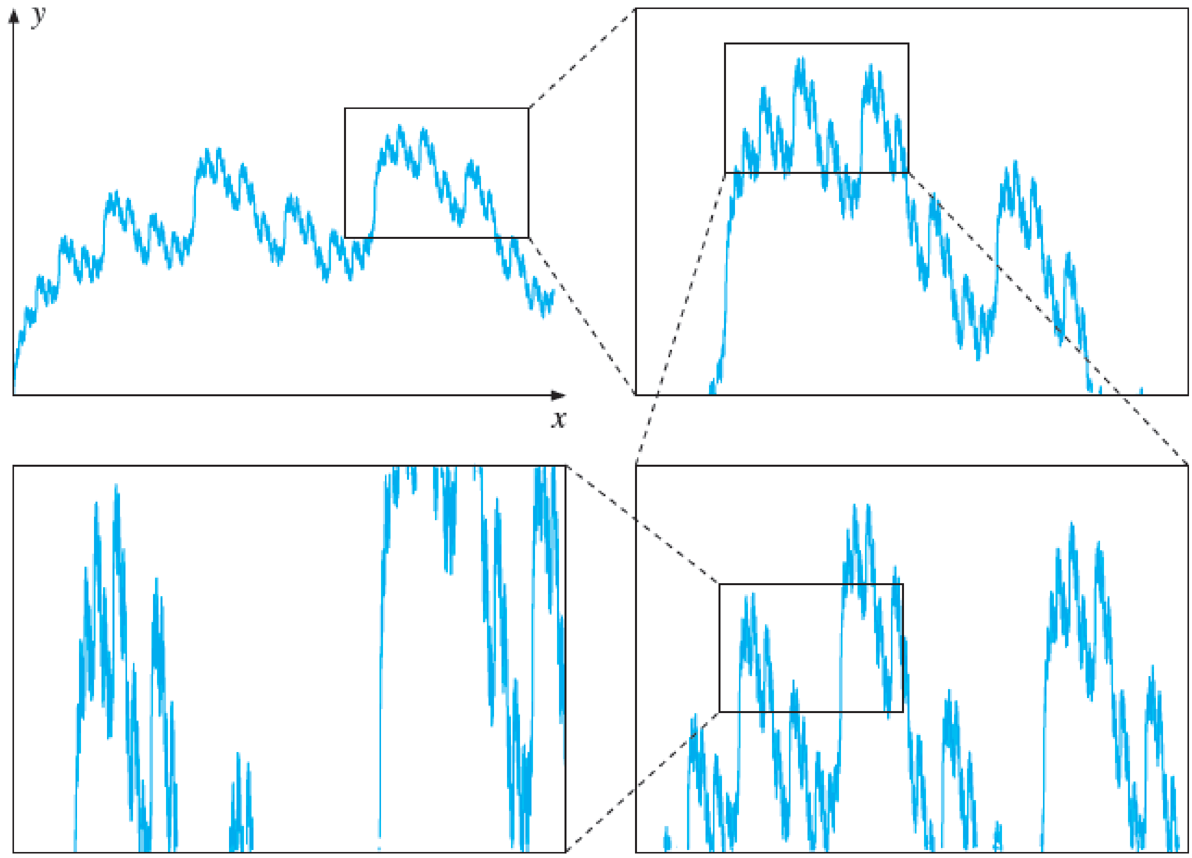
> Many students are able to deal with functions point-wise only, i.e. they can only plot and read points, but cannot think of a function as it behaves over intervals or in a global way. (…) The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989a) also recommends avoiding graphing by hand using tables of values.

Dette kom tydelig fram da en gruppe studenter ble bedt om å skissere grafen til $f(x) = 1/(x^2 - 1)$. Halvparten av dem begynte å lage en tabell for små heltallsverdier av x og deres tilhørende funksjonsverdier. Den andre halvparten så på udefinerte punkter, en tilnærming som viser at man er oppmerksom på hvordan funksjonen oppfører seg (ibid.) Even nevner for øvrig at det ikke bare er hos elever og studenter forståelsen er begrenset, men også hos lærere.

Et annet poeng er at studenter bare er vant med ”pene” funksjoner (ibid, s. 529):

> Almost all the functions that high school and sometimes even college students meet are the kind that have a “nice” graph and can be described by a formula, so the students’ concept image [i.e. all the cognitive structure in the individual’s mind that is associated with a given concept] of a function is determined by functions they meet and not by the modern definition of a function, which emphasizes the arbitrary nature of functions.

Lindstrøm (2006, s. 209) gjør studenten oppmerksom på det samme – at ikke alle funksjoner har de samme egenskapene som de man møtte på videregående, og som eksempel på dette bruker han funksjonen $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2^k x}{2^{k/2}}$ som ikke er deriverbar i et eneste punkt og som har en graf som er uendelig lang over en vilkårlig lite intervall.



Figur 2: En kontinuerlig ingensteds deriverbar funksjon

Lindstrøm stiller det retoriske spørsmålet: ”Hvor mye av den erfaring og innsikt som vi har bygget opp gjennom arbeidet med de ”pene” funksjonene i skolematematikken, kan vi egentlig overføre til disse nye funksjonene?” (ibid, s. 210)

Et tredje moment behandles av Bloch (2003), som forklarer hvordan det i mange land er vanlig å introdusere nye matematiske konsepter på en uformell måte. Hun påpeker at i den videregående skolen introduseres funksjoner og grenseverdier ved å se på et par eksempler, for så å bruke de egenskapene man kan observere til å nå en generalisering på en implisitt måte. Dette regnes som tilstrekkelig for dette nivået, og tanken er at på et senere tidspunkt, på universitetsnivå, vil studentene lære å argumentere for disse egenskapene og bevise dem. Bloch (ibid, s. 5-6) beskriver en typisk læringssituasjon på skolen:

> First, the teacher does a standard task in the classroom with his/her students, using a variety of representatives of the target concept (here – functions). Next, students are supposed to do a similar task, with other emblematic representations of the same concept. Students are expected to interpret the representatives used (graphs, tables of numbers, formulae …) in the same way as the teacher, that is, as representatives of functions and of their properties. This presentation is supposed to be more ‘intuitive’ than a formal one. But in fact, it does not bring out the fundamental mathematical knowledge.

På universitetet er imidlertid foreleserne ikke fornøyd med studentenes evne til å argumentere og bevise, og at de ikke vet å bruke grafer som et verktøy til dette (ibid, s. 3).

Tall & Vinner (1981, s. 155) bruker eksemplet kontinuitet, et begrep som er meget sentralt i funksjonsdrøfting, til å forklare tankegangen bak tilnærmingen nettopp nevnt.

> The notion of continuity is rarely alluded to as a formal definition, but a concept image is built up from the informal use of the term. For instance in The School Mathematics Project Advanced Level texts the concept images of limits and continuity are carefully built up over the two years of the course with fairly formal concept definitions only being given at the very end. In this way the concept image is intended to lead naturally to the concept definition, but in practice certain potential conflicts occur which can cause cognitive conflict for those who later study formal analysis.

2.3 Fra elev til student

2.3.1 Matematikkundervisning i videregående skole og på universitet

En spørreskjema- og intervjuundersøkelse utført av Pepin et al. (2011) viser at det vanskeligste for norske førsteårsstudenter som tar matematikk, ser ut til å være endringen i undervisningsstil og tilhørende læringsstil. Med dette mener forfatterne overgangen til selvregulert læring (ibid, s. 351):

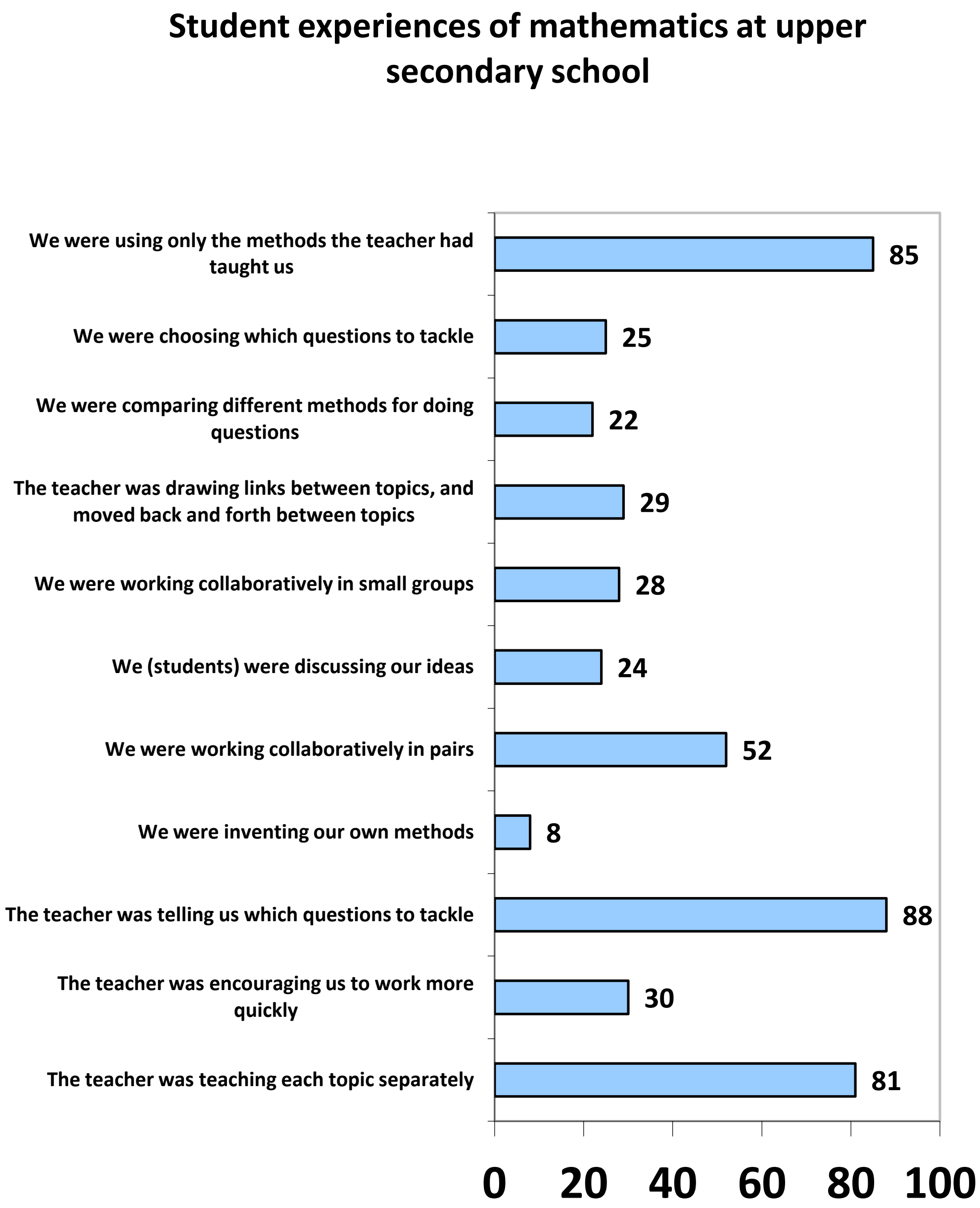
> [M]ost models define independent/selv-regulated learning as "an active, constructive process whereby learners set goals for their learning and then attempt to monitor, regulate and control their cognintion, motivation, and behaviour, guided and constrained by their goals and the contextual features in the environment" (Pintrich, 2005, p. 452). Boekaerts (1999) views it as the ability to develop knowledge, skills, and attitudes which can be transferred from one learning context to another" (p. 446). It is likely to include "self-generated thoughts, feelings, and actions that are planned and cyclically adapted to the attainment of personal goals" (Zimmerman, 2005, p. 14). The ability to self-regulate one's own motivation, cognition, affect and behaviour seems critical to development and growth (Corno, 2009).

Over 95% av studentene opplevde at den største forandringen fra videregående skole var at de nå var nødt til å jobbe på egenhånd, noe de ikke følte seg forberedt på. Tidligere kunne de simpelthen følge læreren. Det var ikke lenger tilstrekkelig.

Denne forandringen i læringsstil er noe studenter forventes å tilpasse seg. De antas å kunne være aktive og konstruktive deltagere i sin egen læringsprosess, og de forventes å kunne observere, vurdere og regulere prosessen underveis. Dette oppfattet studentene i undersøkelsen som vanskelig. Én av dem snakket om hvordan han ikke ble tett fulgt opp slik han ble på videregående, mens en annen snakket om hvordan han nå var nødt til å lære seg nye ting selv, i motsetning til å bli lært.

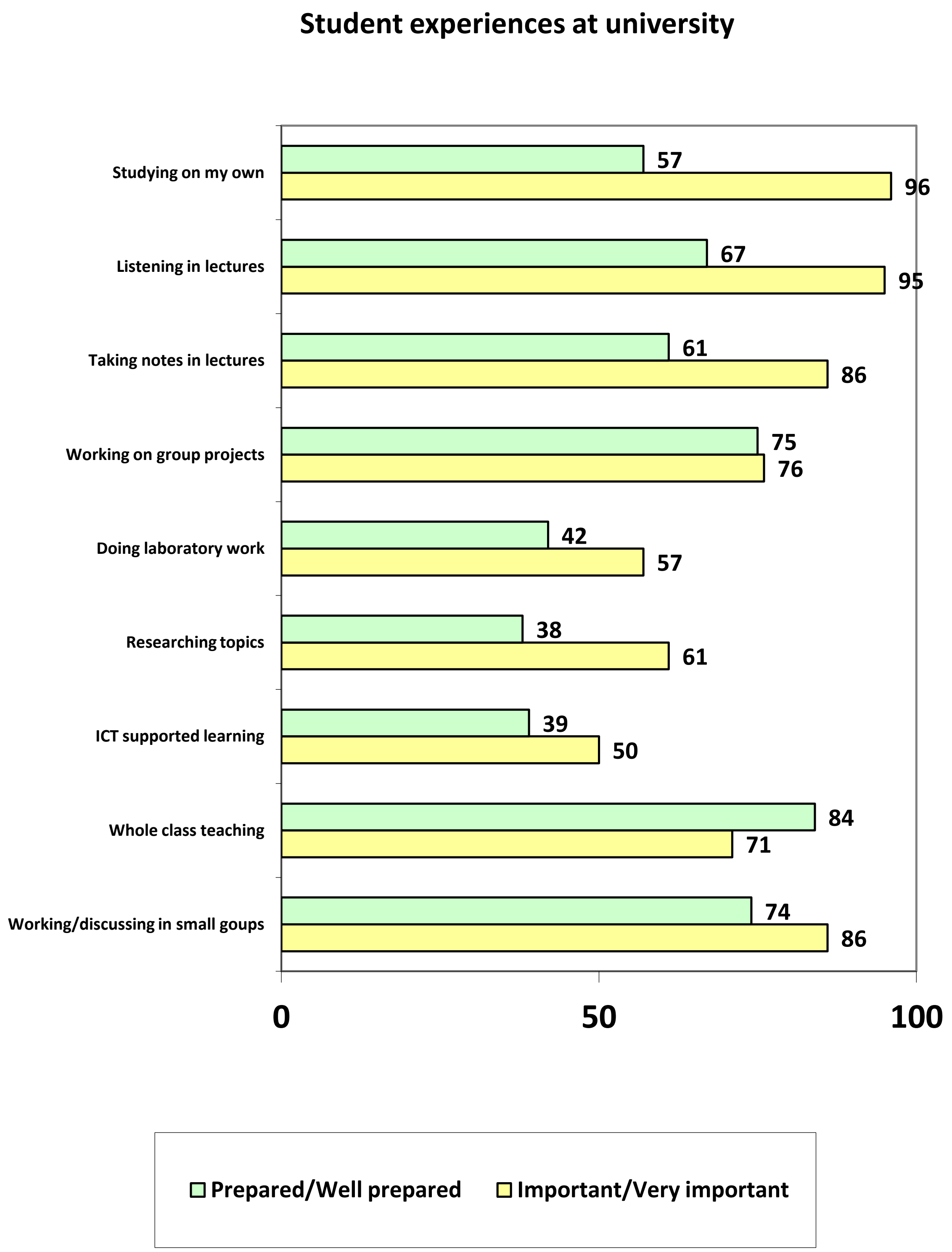
Foreleserne på sin side følte at studentene hadde manglende kunnskaper – tomrom som foreleserne måtte fylle igjen. Studentene oppfattet staben som hyggelig og behjelpelig, men selv om de ansatte var tilgjengelige, ble de bare unntaksvis oppsøkt utenom forelesningene, og da av de samme få studentene. Dette blir en kontrast til skolen, hvor læreren er tilstede mens elevene gjør oppgaver og dermed blir den første elevene ber om hjelp. Kollokviegruppene på universitetet viser seg å gi utbytte kun når studentene har sett på oppgavene på forhånd, og kollokvieleder kommuniserer ikke med foreleser om problemer som går igjen.

720 studenter (lærer, lektor, ingeniør, sivilingeniør og anvendt matematikk) deltok i undersøkelsen, som hadde to datapunkt; ett da deltagerne nettopp hadde blitt studenter, og ett i tredje semester. Noen av resultatene gjengis her:



Figur 3: Percentage of students indicating their experiences with particular teaching practices/working methods at upper secondary school

(For hvert utsagn fantes fire alternativ: Nesten aldri, noen ganger, ofte, nesten alltid. Tallene viser til andelen som svarte ett av de to siste alternativene.)



Figur 4: Percentage of students indicating the importance of particular practices at university (yellow bars). Percentage of students indicating their preparedness of particular practices from previous schooling (green bars).

2.3.2 Strategier i videregående skole og på universitet

Pepin et al. (op. cit.) påpeker at studentene trenger å lære strategier for hvordan man lærer matematikk, men at dette ikke blir gitt nok oppmerksomhet fra utdanningsinstitusjonens side. Når elever blir studenter, får de lære mer om de de lærte på videregående, men de blir også møtt av en ”ny” og mer formell matematikk, som inkluderer bevisføring og argumentasjon. Mange prøvde forgjeves å bruke strategien fra skolen – å følge læreren og etterligne og kopiere matematikken – men tempoet var for høyt. I tillegg følte studentene at det var et hull i kunnskapen mellom det de trodde de hadde lært på forelesningen, og det fagstoffet som kom på ukens oppgaver. Forelesningen gir knagger å henge ting på, men er ikke nok for å lære matematikk, ifølge flere av dem.

2.3.3 Kalkulusstudenters prestasjoner

Studentenes oppfatning av overgangen til universitetsmatematikk støttes av forskning gjort av Lesh & Zawojewski (2007, s. 764), sitert i Lithner et al. (2011, s. 223):

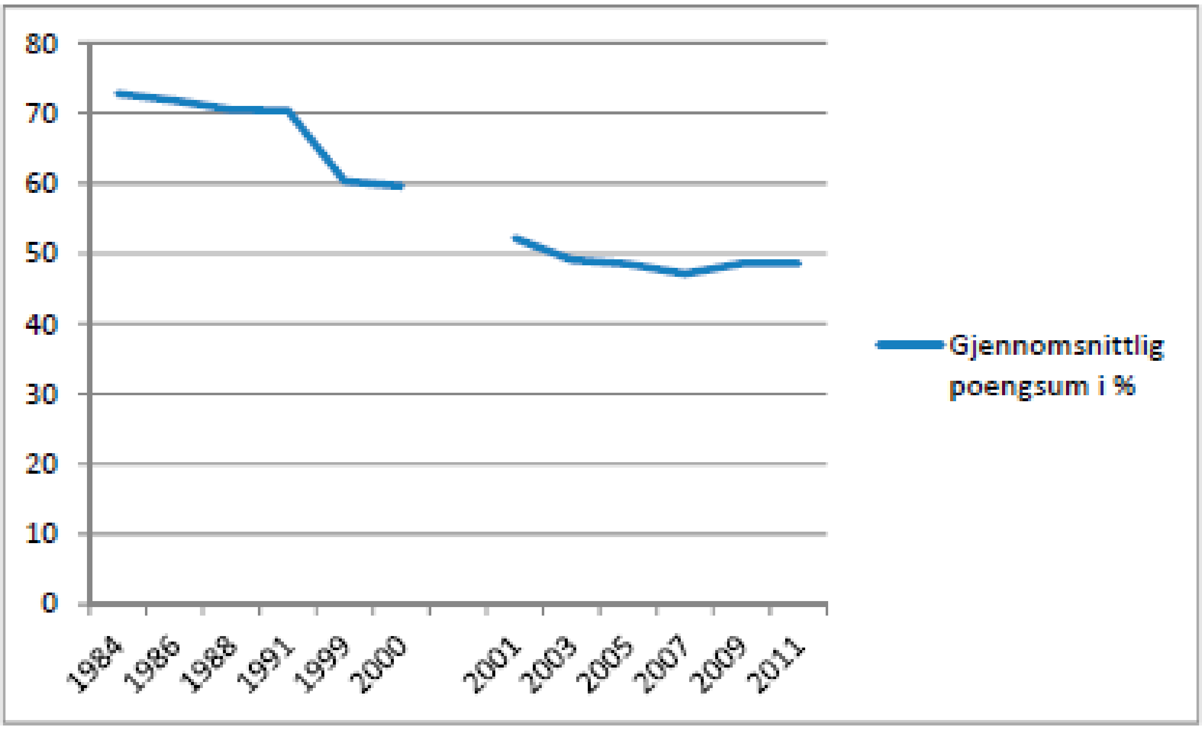
> Among mathematics educators, there is a growing recognition that a serious mismatch exists (and is growing) between the low-level skills emphasized in test-driven curriculum materials and the kind of understanding and abilities that are needed for success beyond school.

Pepin et al. (op. cit, s. 357) hevder at det i Norge er utbredt bekymring over mangelen på forberedelse på overgangen til høyskole- og universitetsmatematikk. Interessen for matematikk har dalt, og prestasjonene følger samme utvikling.

> From our analyses it appears that students’ experience at upper secondary school did not seem to prepare them well for university learning of mathematics, neither in terms of content nor in terms of learning styles, or indeed in terms of autonomously managing the resources.

Norsk matematikkråds forkunnskapstest er en undersøkelse av forkunnskapene til de som nettopp har begynt på et studium som inkluderer matematikkfaget. Undersøkelsen gjennomføres annet hvert år. Testen fra 2011 (Nortvedt, 2012) (korrigert versjon) består av 22 spørsmål fordelt på 16 oppgaver. Disse oppgavene er de samme som i 2001, og 6 av dem (såkalte ankeroppgaver) har vært med helt siden testen først ble gjennomført i 1984. Svært få av oppgavene har blitt offentliggjort.

Resultatene fra undersøkelsen viser en nedgang i studentenes forkunnskaper fra 1984. Kurven ser nå ut til å ha flatet ut.



Figur 5: Utvikling av forkunnskaper i matematikk fra 1984 til 2011. Merk: Det er lagt inn et «brudd» i grafen i 2001, siden testen da ble endret. Revideringen bestod dels i å redusere antall oppgaver og dels i at noen nye oppgaver ble utviklet.

Årstall/ oppgave	1984 %	1986 %	1999 %	2000 %	2001 %	2003 %	2005 %	2007 %	2009 %	2011 %
2a Enkel ligning	94	93	-	69	76	69	66	64	67	68
7 Prosentregning	84	82	67	55	52	47	41	38	40	40
6 Ordne brøker	82	78	65	56	56	55	53	49	54	53
1c Tallregning	78	75	-	53	44	39	36	32	34	36
14 Proporsjonalt resonnement (Beste kjøp)	74	71	58	53	50	48	51	51	48	51
3 Volum	57	56	37	22	41	35	32	31	33	31
Gjennomsnitt på ankeroppgavene	78	76	-	51	53	49	47	44	46	47

Figur 6: Resultater på ankeroppgaver fra 1984 til 2011. Merk: Oppgave 1c og 2a var ikke med i oppgavesettet i 1999.

Én av de få oppgavene som har blitt offentliggjort er den om Dahl skole, som skal løses uten hjelpemidler:

På Dahl skole er det 135 jenter og 115 gutter. Hvor mange prosent av elevene er jenter?

Prosentregning introduseres i 7. klasse og delingsalgoritmen er allerede gjennomgått på dét tidspunktet. Tabellen under viser andelen studenter som fikk rett svar på oppgaven.

Gruppe		N	Korrekt svar (%)
Kjønn	Menn	3774	45
	Kvinner	2248	32
Bakgrunn	2P	535	21
	2T	59	39
	S1	91	21
	S2	373	29
	R1	260	32
	R2	2481	52
	2MX	225	31
	3MX	489	47
Utdanningsvei	Brukerkurs	530	34
	Kalkulus	626	53
	Ingeniør	1537	37
	Siv.ing	1327	57
	Økonom	554	21
	Siv.øk	418	47
	Lærer 1 – 7	448	20
	Lærer 5 – 10	316	37
Totalt			40

Figur 7: Resultater på oppgaven "Dahl skole."

Mens Pepin nevner innhold, læringsstil og selvstendighet som utilstrekkelige hos førsteårsstudenter, mener Selden et al. (1994, gjengitt i Haavold, 2011) at noe annet er enda viktigere med tanke på oppgavene som kalkulusstudenter møter. De hevder at elevenes regnetekniske ferdigheter er tilstrekkelige for å starte på Kalkulus, men at tradisjonell undervisning ikke forbereder dem på å bruke disse ferdighetene kreativt!

Lithner (2004, s. 425) observerer det samme i Sverige, og gir støtte til Seldens konklusjon når han påpeker hvordan vi i skolematematikken fokuserer på rutineoppgaver:

> In Sweden there has been a rather intense debate about the low pass rates at high school and university. Many claim that the main reason is students' insufficient prerequisite algebra skills. One alternative explanation is that for many students our educational system actually fails to

> provide a sufficient environment for developing *any* mathematical skill, but since the main mathematical competence needed in order to solve numerically dominating [routine] exercises is algebra, one may wrongly draw the conclusion that students' difficulties are caused by insufficient algebra skills alone.

2.3.4 Topaseffekten

Et annet interessant fenomen som går igjen når elever møter problemer de ikke klarer å løse med én gang, er den såkalte topaseffekten. Begrepet beskriver det som skjer når læreren bryter problemet opp i små biter, som hver for seg bare krever at eleven bruker de kjente algoritmene fra boka (eventuelt biter som læreren kan gi eksplisitt veiledning på hver for seg), for så å sy sammen løsningen på slutten. På denne måten forsvinner hele hensikten med problemet, ettersom læreren gjør arbeidet som skulle utfordre eleven og føre til ny læring.

Fra et innholdsperspektiv er elevenes matematiske forståelse nettopp summen av alle disse bitene. Elevene danner den oppfatning at metoden for å løse et problem alltid vil bli gitt dem. (Schoenfeld, 1992) De skjønner heller ikke sammenhengen mellom hvert av stegene og helheten eller målet med oppgaven (Haavold, op. cit.)

2.4 Matematisk resonnement i lærebøker

I en undersøkelse av kalkulusstudenter i Sverige (Lithner, 2004) gikk det fram at strategien å fokusere på det som er kjent og som kan pugges med kun overfladisk forståelse, dominerte over en tilnærming der man fokuserer på dypere matematisk forståelse og intrinsiske egenskaper ved matematiske objekter. Studentene var ikke vant med å resonnere på den sistnevnte måten, og de satset ikke på denne strategien, selv om de hadde de nødvendige forkunnskapene og strategien ville gitt avkastning.

598 oppgaver fra lærebøker i kalkulus ble analysert i undersøkelsen, og det viste seg at nesten alle oppgavene kunne løses ved simpelthen å kopiere fra et tilsvarende eksempel gitt i samme bok. Bare et fåtall av oppgavene krevde noen slags form for kreativt resonnement hos studenten. Antall tekstoppgaver er på vei ned, og dessuten går tekstoppgavene over fra å legge

opp til kreativt resonnement, til å kunne løses på samme måte som resten av oppgavene. Lithner refererer til Henningsen & Stein (1997), Schoenfeld (1992) og Shield (1998), som alle sammen finner at dette fokus på pugging uten forståelse er en viktig årsak til lærevansker og dårlige resultater i matematikkfaget, og i en senere artikkel understreker Lithner et al. (2011) at problemet er internasjonalt. Elever og studenter i alle aldergrupper har store problemer med å løse oppgaver som ikke er rutinepregede.

Schoenfeld (op. cit.) påpeker at problemløsning har blitt et eget emne, separert fra den matematikken vi vanligvis gjør. Og slike oppgaver er avmerket som sådan i lærebøkene. Det underliggende budskapet blir at du kan ta en pause fra den vanlige matematikken og ha det litt gøy med denne oppgaven (eller at du skal styre unna om du ikke er så flink i matematikk).

Videre forklarer Schoenfeld hvordan mange av problemløsningsoppgavene ikke med rette kan kalles problemer, ettersom løsningsmetoden er kjent på forhånd. Den er kanskje til og med gitt i samme oppgave (som for eksempel når veien til å løse oppgaven er å finne et mønster, og oppgaveteksten spesifiserer at du skal prøve å sette inn $n = 1, 2, 3, 4,$ osv.)

Akkurat som Lithner, observerer Schoenfeld at også tekstoppgaver går over til å bli rutineoppgaver – oppgaver laget for å trene elevene i én bestemt regneteknikk og for å kunne løses i løpet av kort tid. Han observerte at elevene plukket dette opp og gikk over til bare å lese siste linja i oppgaven. De lette etter selve spørsmålet, noe som resulterte i svar som for eksempel at antall busser som kreves er ”31 med 12 i rest.” Det elevene i praksis jobbet med, var øvingsoppgaver, ikke problemer.

Tester som TIMMS Advanced og PISA+ viser at også Norge er berørt av denne internasjonale tendensen til å gi lite oppmerksomhet til problemløsning. I tillegg er det sjelden at elever blir bedt om å begrunne sine svar med matematiske argumenter (Haavold, op. cit, s. 194). Schoenfeld (op. cit, s. 25) skriver

> [W]hat we *know* is what we can justifiably demonstrate to be true. (…) Most instruction gives short shrift to the “justifiably demonstrate” part of mathematical knowledge – (…) it focuses on using techniques, with minimal attention to having students justify the procedures in a deep way.

2.4.1 Overfladisk resonnement

Mange elever, til og med de som får gode karakterer, prøver å løse problemer ved å bruke et overfladisk resonnement. Et eksempel fra Haavolds (op. cit.) forskning viser hva som skal menes med dette. Elever som får gode resultater i matematikk blir presentert med ligningen $\sin x + \cos x = a$ og får beskjed om at de skal finne a. På overflaten ser oppgaven ut som de trigonometriske ligningene elevene var vant med å løse, og de prøvde derfor å bruke de prosedyrene de hadde brukt mange ganger tidligere. Først da elevene møtte på problemer (de skjønte ikke at a er et intervall, ikke et tall), innså de at oppgaven var forskjellig fra de som stod i læreboka. Forskeren måtte veilede elevene gjennom å stille spørsmål, før de begynte å tenke over de intrinsiske egenskapene ved denne ligningen. Dette viser at også sterke elever har en oppfatning av at matematiske problemer kan løses ved hjelp av en kjent prosedyre, og at de ikke er vant med å bruke kreativt resonnement som en vanlig tilnærming til problemer.

3. TEORETISK RAMMEVERK

3.1 Exposition, examples, exercises

Lærebøker (og tilhørende klassromsundervisning) domineres av metoden Burkhard kaller ”exposition, examples, exercises.” (Schoenfeld, op. cit.) En typisk lærebok i matematikk introduserer altså en ny teknikk, bruker et par eksempler for å demonstrere teknikken i bruk, og gir så leseren et utvalg av oppgaver for å øve inn denne teknikken. Tanken er at etter at eleven har arbeidet seg gjennom disse sidene, vil han ha ei ny bok i sitt matematiske bibliotek.

Dersom Schoenfeld med rette er skeptisk til et innholdsdominert syn på matematikklæring, er det imidlertid ikke nok å ha bøker i kunnskapsbiblioteket. Når eleven møter en matematisk utfordring, må han vite hvilken bok han skal hente ut, og hvordan han skal finne den.

Gjennomgående bruk av denne metoden kan også bidra til forestillingene elever og studenter har om at matematiske problem har ett og bare ett riktig svar, og at den eneste måten å finne det svaret på som regel er ved teknikken som læreren sist demonstrerte på tavla.

3.2 Lithners begrepsapparat

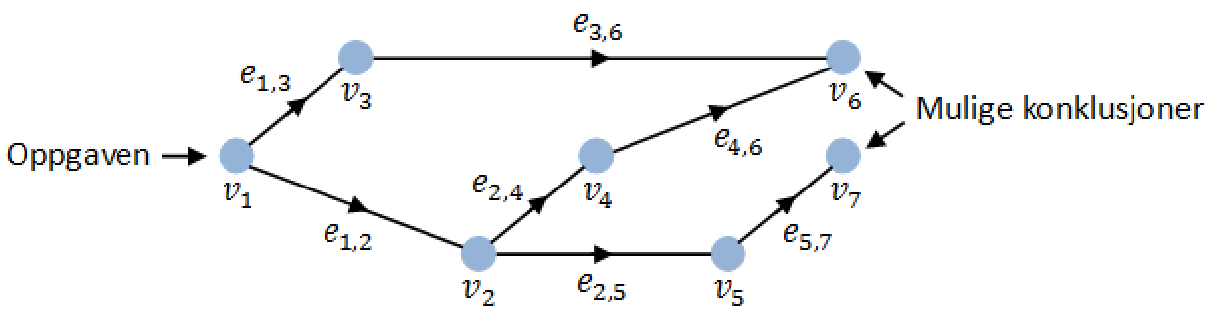
Det finnes allerede flere begrepsapparat for å kategorisere grad av faglig forståelse. Ett eksempel er Bloom (1956), som brukes i norsk skole. Lithner (2004) fokuserer på, og deler inn etter, hvilken type *resonnement* som brukes. Med resonnement menes her den underliggende tankeprosessen som leder fram til påstander og konklusjoner under oppgaveløsing. Tankeprosessen trenger ikke nødvendigvis å være formelt logisk, og er dermed ikke begrenset til det eleven kan bevise. Den kan til og med være feil, så lenge det (i elevens øyne) finnes gode begrunnelser som støtter den.

Den grunnleggende ideen i begrepsapparatet er at pugging er *imiterende*, mens motsetningen er *kreativ*. En viktig distinksjon som Lithner gjør for å få fram denne motsetningen, er den mellom et matematisk objekts *intrinsiske* egenskaper og dets *overfladiske* egenskaper. De førstnevnte er sentrale for oppgaven som skal løses, mens de sistnevnte har liten eller ingen relevans. For å avgjøre hvilken av brøkene 99/120 og 3/2 som er størst, vil størrelsen på de fire tallene være en overfladiske egenskap som gir utilstrekkelig informasjon, mens kvotienten er en intrinsisk egenskap som lar oss finne svaret. (Lithner, et al., 2010)

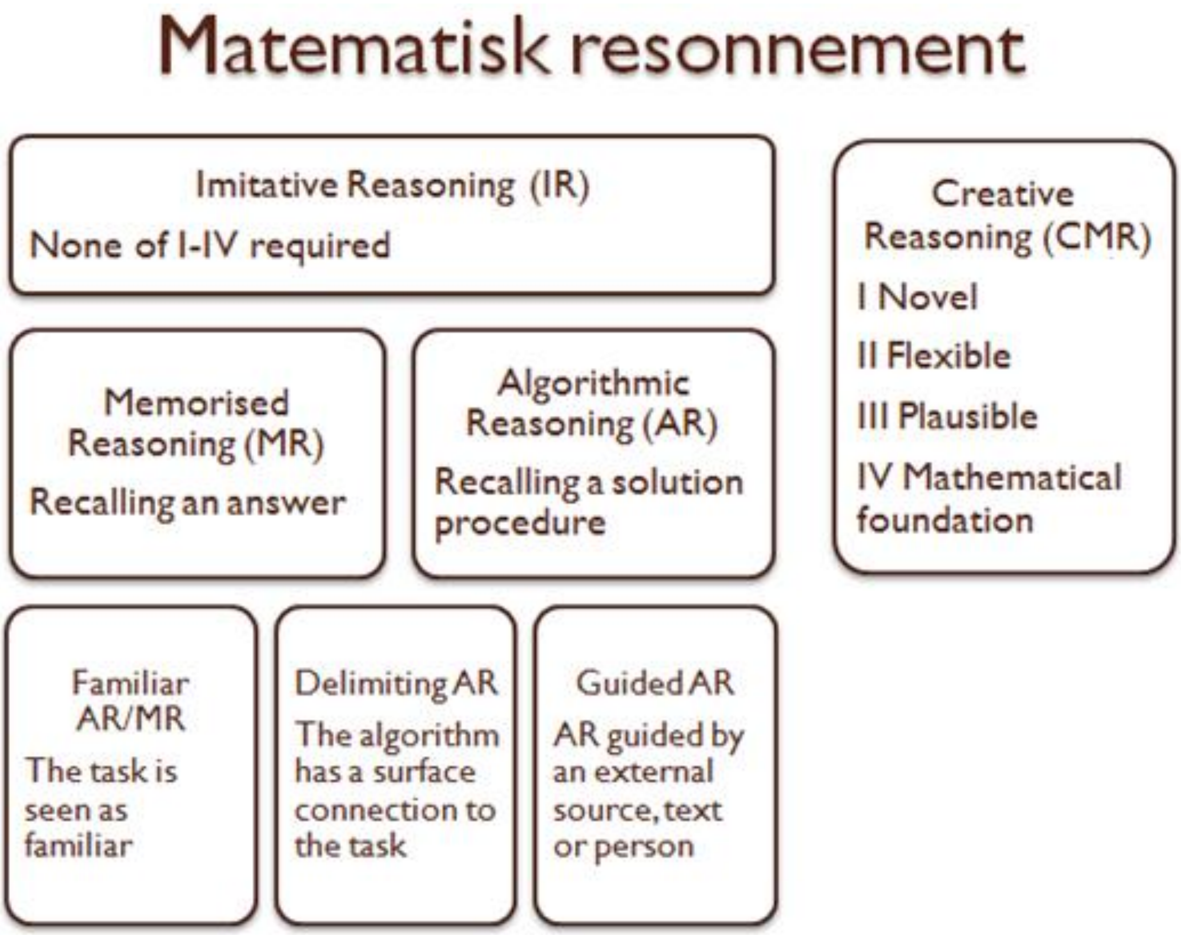
Å løse en oppgave kan sies å være en gjennomføring av følgende fire trinn:

1) En (del)oppgave blir presentert og dette betegnes som en *problematisk situasjon* dersom det ikke er åpenbart hvordan man skal gå fram.
2) En *strategi velges*, der 'strategi' betegner alt fra lokale prosedyrer til generelle tilnærminger, og 'velges' er ment i bred forstand (velge ut, huske, konstruere, oppdage, gjette, osv.) Strategien kan støttes med *prediktiv argumentasjon:* Hvorfor kommer strategien til å løse oppgaven?
3) *Strategien implementeres* og kan støttes med *verifiserende argumentasjon:* Hvorfor gav strategien en løsning på oppgaven?
4) En *konklusjon* nås.

Et resonnement kan representeres ved en rettet graf der nodene v_n representerer et visst tidspunkt i resonnementet med tanke på både kunnskapen man har og hvor i oppgaven man befinner seg. Man velger en strategi blant kantene som går ut fra v_n. Implementeringen av strategien representeres ved en kant $e_{m,n}$. Kunnskap som ikke ble vurdert i v_n blir nå bragt fram i minnet eller konstruert og blir lagt til for å danne den nye kunnskapstilstanden v_m der oppgaven er delvis løst og et trinn i oppgaven formuleres. En begrunnelse (reason) er det som ligger bak forflytningen mellom noder. Man har alltid en slik begrunnelse, selv om den kan være vag eller overfladisk.



Figur 8: Trinnene i et logisk resonnement



Figur 9: Oversikt over Lithners begrepsapparat

3.2.1 Memorisert resonnement (MR)

Memorisert resonnement oppfyller følgende betingelser:

1) Strategivalget er basert på å huske et fullstendig svar.
2) Strategiimplementeringen består bare i å skrive det ned.

All oppgaveløsing krever at man bruker hukommelsen, men en strategi basert kun på hukommelse er nyttig bare i noen få tilfeller, for eksempel til å huske fakta (”Hvor mange cm^3 er det i en liter?”), definisjoner (”Hva er et polynom?”) og bevis. Men å kunne gjengi noe garanterer ikke at du har forstått det, slik følgende eksempel illustrerer.

En eksamensoppgave i kalkulus ba studenten skrive analysens fundamentalteorem og gi et bevis for det. Halvparten av studentene fikk full uttelling på oppgaven, og nesten alle disse hadde gjengitt bokas bevis på to sider. De som ikke fikk full uttelling hadde gjengitt bare deler av beviset, eller de hadde noen av delene i feil rekkefølge, slik at beviset ble logisk ugyldig.

Etter eksamen ble studentene bedt om å forklare trinnene i beviset, men de fleste kunne bare forklare et par av ligningene som inngikk i utledningen (Lithner, 2008).

3.2.2 Algoritmisk resonnement (AR)

For å løse oppgavene man møter på skolen er det ofte mer gunstig å huske en algortime enn å huske svaret. Algoritmisk resonnement oppfyller følgende betingelser:

1) Strategivalget er å huske en løsningsalgoritme. Den prediktive argumentasjonen kan være av ulike slag, men det er ikke noe behov for å finne en ny løsning.
2) Strategiimplementeringen er triviell, og bare slørv kan hindre en i å finne svaret.

En algoritme er ifølge Brousseau (1997 s. 129, sitert i Lithner, 2004 s. 259) en endelig sekvens av instruksjoner som, når de utføres, lar en finne svaret på en bestemt type oppgaver. En bredere definisjon vektlegger at alle de konseptuelt vanskelige delene tas hånd om av algoritmen, mens bare de enkle delene overlates til eleven eller studenten, noe som kan begrense læringseffekten. AR kan altså utføres med begrenset, så vel som full forståelse av prosedyren.

I AR blir hovedutfordringen å finne en passende algoritme. Tre forskjellige måter å finne denne algoritmen på gjør at vi kan skille mellom tre typer AR.

3.2.2.A Familiar AR

I Famliar AR er følgende betingelser oppfylt:

1) Begrunnelsen for strategivalget er at oppgavetypen gjenkjennes og at man dermed kan bruke den tilhørende kjente algoritmen.
2) Algoritmen implementeres.

Et eksempel på dette er nøkkelordstrategien, der eleven forbinder visse ord med en viss regneoperasjon, for eksempel ”til sammen” med addisjon. Algoritmen velges ikke på matematisk grunnlag, men på overfladisk grunnlag, og metoden er dermed ikke pålitelig, iallfall ikke i utfordrende situasjoner.

3.2.2.B Delimiting AR

I Delimiting AR er en eliminasjonsmetode der følgende betingelser oppfylt:

1) En algoritme velges fra en mengde som begrenses av oppgaveløseren gjennom algoritmens overfladiske relasjon til oppgaven. Utfallet forutsies ikke.
2) Den verifiserende argumentasjonen er basert på overfladiske vurderinger som har med oppgaveløserens forventninger til svaret å gjøre. Dersom implementeringen ikke leder fram til et svar som for oppgaveløseren virker rimelig, forkastes algoritmen uten videre, og en ny algoritme velges fra mengden.

Et eksempel gitt av Lithner (2008) er en elev som skal finne maksimums- og minimumspunkt for $y = -x^2 + 3x + 7$ på intervallet $[-1, 5]$. Eleven deriverer y og finner at $y'(x) = 0$ gir $y = 9{,}25$, men så blir hun usikker fordi hun forventet å finne to verdier (maksimum og minimum). Hun prøver å bruke kalkulatorens minimumsfunskjon, noe som krever at hun oppgir et intervall for hvor hun tror minimumspunktet ligger. Derfor forkaster hun også denne metoden, og prøver kalkulatorens tabellfunksjon i stedet. Hun skriver inn verdiene $x = -1, 0, \dots, 5$ og finner $y_{min} = -3$ og $y_{max} = 9$ men blir urolig fordi hun har funnet en større verdi $y = 9{,}25$ tidligere. Hun forkaster også denne metoden og løser $-x^2 + 3x + 7 = 0$ og finner $x_1 \approx 4{,}54$ og $x_2 \approx -1{,}54$. Metoden er helt feil, men hun ser det som løsningen.

3.2.2.C Guided AR

Dersom Familiar eller Delimiting AR ikke fungerer kan man prøve å få veiledning utenfra. I Text-guided AR er følgende betingelser oppfylt:

1) Strategivalget går ut på å identifisere overfladiske likheter mellom oppgaven og et eksempel, en definisjon, et teorem, en regel, eller noe annet i en tekstkilde.
2) Algoritmen implementeres uten verifiserende argumentasjon.

Lithners (2004) forskning viser at 70% av oppgavene i vanlige amerikanske kalkulusbøker kan løses ved GAR, og tilsvarende gjelder for svenske matematikkbøker for 5-12. trinn. Oppgaven over kan løses ved å kopiere fra dette lærebokeksemplet:

Finn maksimum og minimum for $f(x) = x^2 + 2x + 1$ når $x \in [-3, 0]$.

Løsning: $f'(x) = (2x + 4)$. Løser $f'(x) = 0$ og finner $x = -2$. Ettersom $f'(x)$ eksisterer for alle x og $x = -2$ er eneste nullpunkt, evalueres funksjonen der og i endepunktene for intervallet. $f(-3) = 4$, $f(-2) = -3$. $f(0) = 1$. Altså har vi maksimum $f(-3) = 4$ og minimum $f(-2) = -3$.

Første steg blir å gjenkjenne dette som et eksempel man kan kopiere. Dersom man klare dét, har en oppgave som var ment å handle om ekstremalverdier blitt redusert til en oppgave om elementær algebra.

Resonnementet har lav logisk verdi ettersom det ikke er basert på argumenter grunnlagt i intrinsiske egenskaper ved funksjonen, derivatet eller ekstremalverdier. Eksemplenes rolle blir å ikke bare å demonstrere teknikken, men å gi et fullstendig templat for lignende oppgaver. Man kan simpelthen ta tallene fra oppgaven og ”putte dem inn” i eksemplet.

I skolebøker er det vanlig at oppgaver etterfølger bare ett eksempel. Dermed blir heller ikke gjenkjenningen noe problem. På høyere nivå er delkapitlene lengre og de inneholder flere eksempler.

En annen versjon av GAR er Person-guided AR, som oppfyller følgende:

1) Alle strategivalg som er problematiske for oppgaveløseren gjøres av en veileder (en autoritetsperson som f.eks. en lærer eller en flink elev eller student), som ikke gir oppgaveløseren noen slags prediktiv argumentasjon.
2) Implementeringen av strategien følger veiledningen og de gjenstående rutinedelene av oppgaven utføres uten verifiserende argumentasjon.

Lithner (2008, s. 264) gir et godt eksempel på dette. Moa i niende klasse ber læreren om hjelp til å finne 15% av 90. Læreren begynner ved å skrive 0,15 · 90 og den fullstendig dialogen er som følger:

L: ”Hva er 5 · 0?” M: ”0.” [L skriver 0].

L: ”Hva er 5 · 9?” M: ”45.” [L skriver 45].

L: ”Hva er $1 \cdot 0$?” M: ”0.” [L skriver 0].

L: ”Hva er $1 \cdot 9$?” M: ”9.” [L skriver 9].

L: ”Hva er $5 + 0$?” M: ”5.” [L skriver 5].

L: ”Hva er $4 + 9$?” M: ”13.” [L skriver 13].

L: ”Hvor skal komma stå?” M: [Stille]

L: Setter komma på rett plass og går.

Her har ikke Moa fått hjelp til det som var utfordringen. I stedet er oppgaven redusert til simpel aritmetikk, som eleven ikke ser ut til å ha noen problemer med. Ingen argumentasjon inngår, ingen instrinsiske egenskaper blir tatt i betraktning, og ingen strategivalg blir vurdert.

3.2.3 Kreativt resonnement (CMR)

Kreativt resonnement oppfyller alle de følgende kriteriene:

1) Det skapes en ny (for oppgaveløseren) resonnementsekvens (som starter med oppgaven og ender i en løsning), eller en som var glemt skapes på nytt.
2) Det finnes argumenter som gir støtte til strategivalget og/eller –implementeringen, og som gir grunn til å tro at konklusjonen er riktig eller sannsynlig.
3) Argumentene er forankret i intrinsiske matematiske egenskaper ved komponentene som inngår i resonnementet.

CMR trenger ikke å være en utfordring, slik problemløsning er. Definisjonen inkluderer også elementære resonnement. Resonnementets troverdighet ligger i logikken, mens AR og MR baserer sin troverdighet på kilden til algoritmen eller svaret som gjengis. Videre er det ikke mulig å vurdere og korrigere prosessen underveis når man bare resonnerer imiterende.

Merk at det ikke er nok å se på oppgaven for å avgjøre hvilket resonnement som kommer til å brukes. Det som kan løses med algoritmisk resonnement hos én, krever kanskje kreativt resonnement hos en som ikke er kjent med algoritmen.

Et resonnement som i hovedsak er basert på AR eller MR, men som inneholder mindre, lokale elementer av CMR vil bli betegnet *Lokal CMR*, mens et resonnement som inneholder større elementer av CMR vil bli betegnet *Global CMR.* Den sistnevnte typen kan likevel inneholde en stor andel AR og MR.

Lithner (2008) gir et eksempel på CMR. Per blir gitt grafen til $f(x)$ under til venstre, og får i oppgave å tegne grafen til den primitive funksjonen $g(x)$. Strategivalget hans er å kombinere flere sekvenser av Familiar AR: Han vil starte med å finne et algebraisk uttrykk for $f(x)$ på intervallet $[-3,-1]$, integrere dette uttrykket for å finne $g(x)$ på dét intervallet, og avslutte med å tegne grafen til funksjonen. Deretter vil han se på neste intervall. Metoden ville gitt rett svar om den ble korrekt implementert, men Per slørver, og etter 20 minutter kommer han fram til den feile $g(x)$ under i midten. Han beveger seg over på intervallet $[-1,0]$, men obervatøren avbryter ham:

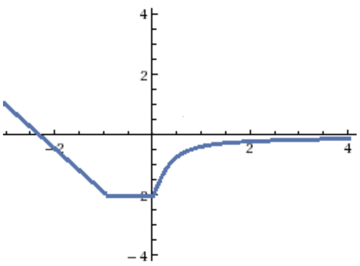
Lithner: ”Er derivatet til din $g(x)$ gitt ved grafen til $f(x)$?”

Per: ”Nei, det er den ikke. Svaret mitt er feil. Derivatet til $g(x)$ er positiv hele veien, men det er ikke $f(x)$.”

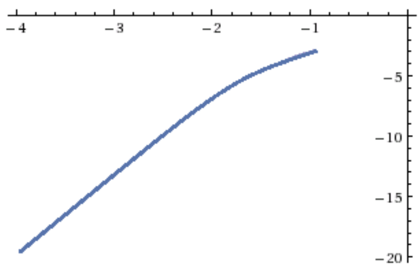
Lithner: ”Kan du ut ifra dette resonnementet lage en grov skisse over hvordan grafen ser ut?”

Per: ”Derivatet er først positivt, så null, og deretter negativt.”

Per tegner så skissen under til høyre ved punktvis å lese av stigningen til $g(x)$ som funksjonsverdien til $f(x)$ etter hvert som han tegner grafen til $f(x)$.



Figur 10: Grafen til $f(x)$.



Figur 11: Pers første forsøk på $g(x)$.


Figur 12: Pers korrekte $g(x)$.

Etter at Per har mislyktes én gang og fått mild rettledning, er resonnementet hans ikke-imitativt på de tre måtene som er beskrevet øverst. Han skaper en ny resonnementssekvens, først når han evaluerer grafen i midten, og så når han tegner grafen til høyre. Han har ikke sett slike oppgaver før, og selv om han bruker også grunnleggende kunnskap, er ikke dét nok til å bringe ham helt fram til løsningen, som i MR eller AR. Per har argumenter for slutningene han trekker om den feile grafen og den riktige han tegner etterpå. Argumentene er ikke bare forklaringer av ting han visste på forhånd, men de legges til grunn for Pers strategivalg om implementeringen av dem. Argumentene har matematisk grunnlag og er basert på de intrinsiske egenskapene til funksjonene: Utviklingen av funksjonsverdien, utviklingen av stigningen, og at punktvis stigning til $f(x)$ i punktet a er lik $f'(x)$.

3.3 Niss & Jensens begrepsapparat

For å kunne vurdere lærebøkene i lys av læreplanen for 1T-R1-R2-matematikk vil jeg også benytte et annet rammeverk, utviklet av Niss & Jensen. Da Utdanningsdirektoratet i begynnelsen av 2012 skulle lage et rammeverk for grunnleggende ferdigheter (et sentralt begrep i alle læreplaner), ble Niss invitert til å holde foredrag. (Ref: Guri Nortvedt, Norsk Matematikkråd.) I rapporten ”Kompetencer og matematiklæring” (Niss & Jensen, 2002) argumenterer han og Jensen for at læreplanen for alle trinn bør fokusere på matematisk *kompetanse*, i betydningen ekspertise.

Bakgrunnen for utviklingen av dette begrepsapparatet er tanken om at læreplaner som har for kraftig fokus på pensumlister kommer til kort, og at flere elementer i matematikkundervisning bør fornyes. Niss & Jensen (ibid.) skriver at det i Danmark (som i Norge) er tradisjon for at læreplaner inneholder tre deler: Formålet med undervisningen, pensum og faglige mål, og evaluerings- og eksamensverktøy. Noen ganger fastsettes hensikt og mål før pensum, men ofte blir det motsatt. Målet blir et forord til pensumbeskrivelsen. Dessuten forteller målene noe om hvorfor vi skal ha matematikkundervisning, men ikke hva selve undervisningen skal gå ut på.

En pensumbasert fagbeskrivelse fører lett til en reduksjon av faglighet og gir et lavt ambisjonsnivå for undervisningen. En liste med matematiske emner eller prosedyrer dekker ikke den dype forståelsen for matematikk.

Videre blir det vanskelig å sammenligne matematikkundervisningen på ulike steder i utdanningssystemet når man bare tenker på hvilket pensum som gjennomgåes i de ulike kursene. Man sier gjerne at to utgaver av matematikkundervisning er ekvivalente dersom de ser på samme pensum, selv om de kan være store forskjeller på krav til innsikt, aktivitet og dybdeforståelse.

Også nivåforskjeller blir en pensumanliggende i den forstand at ett pensum blir regnet for å være på et lavere nivå enn et annet, dersom alle elementene i det førstnevnte enten håndteres også av det sistnevnte, eller danner en begrepslogisk forutsetning for det.

Det er på denne bakgrunnen at Niss & Jensen utvikler sitt begrepsapparat, som er ment å være et verktøy for læreplaner på alle trinn i utdanningssystemet. Oppgaven blir (ibid, s. 41):

- Å fastsette og karakterisere hva det vil si å beherske (dvs. kjenne, forstå, utføre og anvende) matematikk, både i seg selv og i forskjellige sammenhenger, uten referanse til et bestemt matematisk emne, spesielt et bestemt pensum.
- Å beskrive utvikling og progresjon i matematikkundervisning og -tilegnelse, både innenfor en gitt læreplan og mellom forskjellige læreplaner.
- Å karakterisere forskjellige nivåer av fagbeherskelse for dermed å kunne beskrive utvikling og progresjon i den enkelte elevs tilegnelse av matematikk.
- Å karakterisere forskjellige matematikklæreplaner og forskjellige slags matematikk-undervisning, på parallele eller forskjellige undervisningstrinn, på en måte som går vesentlig utover sammenligning av pensa.

3.3.1 Matematisk kompetanse

Hjørnesteinen i dette begrepsapparatet er *matematisk kompetanse*, i betydningen ekspertise (ibid, s. 43):

> Matematisk kompetence består i at have viden om, at forstå, anvende, og kunne tage stilling til matematik og matematikvirksomhed i en mangfoldighed av sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå. Dette implicerer naturligvis en mangfoldighed af konkret viden og konkrete færdigheder inden for diverse matematiske områder, men matematisk kompetence kan ikke, jf. det foregående, reduceres til disse forudsætninger.
>
> [En matematisk kompetence] er en selvstændig, rimeligt afgrænset hovedkomponent i matematisk kompetence som netop beskrevet. Man kan også sige at *en matematisk kompetence er en indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situasjoner, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer.* At sådanne kompetencer er selvstændige og rimeligt velafgreænsede, betyder ikke, at forskellige kompetencer er uden forbindelse med hinanden eller skapt afgrænsede uden overlap. Man kan tænke på en kompetence som et ”knudepunkt” i en ”klynge” af ting, der er ophobet nær midten og udtyndes ud imot randen, og som værende til dels sammenværende med

> forskellige andre klynger. Dette betyder også, at en kompetence i almindelighed ikke kan erhverves eller besiddes i isolation fra andre kompetencer.

Niss & Jensen opererer med to kategorier med fire kompetanser i hver av dem. Disse beskrives kort nedenfor. For en fullstendig beskrivelse hevises det til kilden.

3.3.2 Å spørre og svare i og med matematikk

Den første gruppa inkluderer følgende fire kompetanser:

3.3.2.A Tankegangskompetanse

Denne kompetansen består i kunne stille matematiske spørsmål og å ha en ídé om hvilken type svar som kan forventes. (Å kunne finne og vurdere dette svaret inngår i henholdsvis problembehandlingskompetanse og resonnementskompetanse.) Særlig viktig er forståelse for de nødvendige og tilstrekkelige betingelser for at et matematisk objekt har en bestemt egenskap, og at man kan gjøre abstraksjoner og generaliseringer på bakgrunn av dette. I tillegg inngår forståelse for, og anvendelse av, matematiske definisjoner og begreper.

3.3.2.B Problembehandlingskompetanse

Problembehandlingskompetanse omfatter det å kunne formulere og stille opp matematiske problemer, samt det å kunne løse problemer stilt opp av en selv eller andre, kanskje til og med på forskjellige måter. Med problemer menes her matematiske spørsmål som krever undersøkelse for å kunne besvares (i motsetning til rutineoppgaver).

3.3.2.C Modelleringskompetanse

Med modelleringskompetanse menes det å kunne analysere grunnlaget for, og egenskapene ved gitte modeller, samt å kunne vurdere deres gyldighet og bruksområder. Man må kunne gjøre de nødvendige fortolkninger som kreves for bevege seg mellom en matematisk modell og virkeligheten. Vi snakker altså om å kunne ”matematisere” virkeligheten, og å kunne ”avmatematisere” modeller. I tillegg skal man skal selv kunne bygge modeller og redegjøre for dem. Man skal kunne ta beslutninger basert på modelleringens forsmål og hva som er hensiktsmessig og relevant. Merk at mens man i teorien kan snakke om matematisk modellering hver gang matematikken anvendes utenfor sitt eget område, er det her snakk om kun de tilfeller der det ikke finnes en åpenbar modell for den modellerte situasjonen. Med andre ord, de situasjoner som krever at man tar beslutninger, som allerede nevnt.

3.3.2.D Resonnementskompetanse

Denne kompetansen omfatter det å kunne følge og bedømme et matematisk resonnement (i forstanden en rekke av argumenter for en påstand) og et matematisk bevis. Spesielt skal man kunne avgjøre hvorvidt et bevis er gyldig og kunne komme med moteksempel dersom det ikke er det. Endelig skal man kunne gi sine egne bevis ved å gjennomføre formelle resonnement, eller formalisere uformelle eller intuitive sådan.

3.3.3 Å kunne håndtere matematikkens språk og redskaper

Den andre gruppa inneholder følgende fire kompetanser:

3.3.3.A Representasjonskompetanse

Denne kompetansen handler om å kunne forstå og nyttiggjøre seg ulike representasjoner av matematiske objekter, fenomener problemer eller situasjoner. Med representasjoner menes her spesielt de symbolske, de visuelle, de geometriske, de verbale, diagrammer og tabeller. Man skal kunne oversette mellom disse, og man skal kjenne til styrker og svakheter ved de ulike representasjonene, og på dét grunnlaget kunne velge den som er best egnet i en gitt situasjon.

3.3.3.B Symbol- og formalitetskompetanse

I denne kompetansen inngår det å kunne avkode symbol- og formelspråk, og å kunne oversette mellom et slikt språk og vårt naturlige språk. Her er det ikke bare snakk om avanserte matematiske symboler, men også de symbolene vi bruker til elementær aritmetikk, samt den formelle siden av grunnleggende matematikk (som for eksempel aksiomene vi bruker i aritmetikken eller geometrien).

3.3.3.C Kommunikasjonskompetanse

Å kunne sette seg inn i og fortolke andres matematiske utsagn, enten de er skriftlige, muntlige eller visuelle, utgjør det ene aspektet ved kommunikasjonskompetanse. Det andre er at man selv kan uttrykke seg på ulike måter og ulike nivå, og at man kan vurdere hvordan best uttrykke seg, alt etter hvem som er mottakeren. Til sammen gjør disse to aspektene ved kommunikasjonskompetanse at man kan delta i en matematisk diskusjon.

3.3.3.D Hjelpemiddelkompetanse

Denne kompetansen inkluderer å ha kjennskap til ulike matematiske verktøy og deres respektive egenskaper og bruksområder, samt å kunne bruke disse verktøyene på en hensiktsmessig måte. Hjelpemidler inkluderer ikke bare de elektroniske, men også linjal, passer, gradskive, osv.

4. METODE

Vi forsker fordi vi ønsker å finne svar på de spørsmål vi bærer på. Mange ganger lar ikke spørsmålene seg besvare fullstendig, men ulike tilnærminger kan belyse ulike aspekter ved problemstillingen vår. Disse tilnærmingene eller metodene vil jeg derfor drøfte i lys av deres respektive styrker og svakheter, generelt sett, samt hvorvidt de egner seg til å besvare masteroppgavens problemstilling. På bakgrunn av denne avgrensningen vil jeg utforske ulike metoder med den hensikt å kunne argumentere for mitt metodevalg, men også for å kunne gi en begrunnelse for hvorfor alternative metoder ikke ble valgt. En viktig del av en undersøkelse er rammeverket som skal brukes til å klassifisere de innsamlede data, og jeg vil derfor presentere og drøfte valg av dette.

4.1 Kvalitative vs. kvantitative metoder

Ofte blir kvantitative og kvalitative metoder presentert som uforenelige tilnærminger med sterk kontrast, gjerne ved bruk av tabeller som tydeliggjør forskjellene. I realiteten representerer disse tabellene ytterlighetene på en kontinuerlig, eller i det minste trinnvis, skala (Grønmo, 1996). For enhver problemstilling finnes det kanskje ett punkt på denne skalaen som representerer den beste tilnærmingen, men som regel vil det også finnes et annet punkt som representerer det beste supplementet. Grønmo forklarer at metodene komplementerer hverandre, snarere enn at de utelukker hverandre.

For noen tiår siden ble akademiske tidsskrifter dominert av kvantitative studier. Selv om dette til dels henger igjen, har vi sett at pendelen har svingt i den andre retningen, særlig for samfunnsvitenskapens vedkommende. (Holter, 1996) Andelen kvalitative studier som gjennomføres og publiseres øker i takt med tilliten til, og behovet for, slike studier. Samtidig blir det gitt argumenter for hvorfor kvalitative studier ikke er like pålitelige som de kvantitative.

Ett av disse argumentene er filosofisk av natur. Positivismen sier at den eneste kilden til sikker kunnskap er sanseinntrykk – for å kunne påvise noe trenger vi dermed en tilstrekkelig mengde emipiriske data, slik at vi gjennom en induktiv metode kan komme fram til en konklusjon. Å diskutere hvorvidt denne tesen er sann er en oppgave i seg selv, men den minner oss iallfall om at dersom vi ønsker å generalisere ut ifra de data vi har samlet inn, er det i utgangspunktet lettere med store mengder kvantitative data. Har vi derimot små (men tilstrekkelige) mengder kvalitative data, er det ekstra viktig at vi argumenterer for hvorfor en generalisering likevel er berettiget.

Et annet argument går på manglende tiltro til data som ikke er tallfestet. Denne tankegangen kan føre til vi innfører en noe påtatt og tilsynelatende vilkårlig tallfesting. Skal vi for eksempel si noe om tiden på 100 m hos elevene på idrettslinja, er det naturlig å bruke kvantitative metoder. Vi kan simpelthen måle tiden og gjøre de nødvendige statistiske beregningene. Skal vi derimot si noe om hvor fornøyde elevene var med sitt eget resultat, kan det tenkes at det blir litt kunstig å innføre en diskret skala fra 1 til 10. Dette gjelder spesielt dersom man ikke presiserer hva slags skala man opererer med (er den for eksempel lineær?) eller hva slags følelser for eksempel en 8'er beskriver.

Et tredje argument utfordrer forskerens evne til å forholde seg "objektiv." Dette er et verdiladet ord som brukes mye, men det blir ikke like ofte presisert hva som som legges i det. Én betydning av ordet har med forskerens påvirkning på undersøkelsen å gjøre. Argumentet er gyldig i den forstand at når vi gjør kvantitative analyser, ligger informasjonen i tallmaterialet, og enhver statistiker som kan sitt håndverk vil finne samme varians, usikkerhet, osv. På den andre siden, når det kommer til selve implikasjonen av disse statistiske beregningene, er denne like "subjektiv," eller avhengig av forskeren, som i en kvalitativ undersøkelse.

Dersom ingen andre begrensninger eksisterer, vil valg av metode først og fremst være avhengig av hvilken problemstilling, eller hvilket aspekt ved problemstillingen, man ønsker å studere. Jeg gjengir mine problemstillinger her:

Hvilke likheter og forskjeller er det mellom lærebøkene Sigma 1T-R1-R2 *og* Kalkulus?

Hvilket grunnlag gir den videregående skolens læreverk Sigma 1T-R1-R2 *for å møte emnet funksjonsdrøfting i universitetets innføringsverk* Kalkulus*?*

Om ingen andre faktorer må taes i betraktning, kan vi prøve å skreddersy metoden til problemstillingen. Så heldige er vi nesten aldri, ettersom det også vil være praktiske hensyn vi må ta (tid, ressurser, tilgjengelighet, papirarbeid, personvern, osv). Grønmo (1996) presenterer i en artikkel en skjematisk oversikt som gir et godt utgangspunkt for diskusjonen om metodevalg.

ASPEKT VED UNDERSØKELSEN	DATATYPE	
	Kvalitative data	Kvantitative data
Problemstilling	*Analytisk beskrivelse*	*Statistisk generalisering*
Design	*Fleksibilitet*	*Strukturering*
Kilde	*Nærhet og sensitivitet*	*Avstand og selektivitet*
Tolkningsmulighet	*Relevans*	*Presisjon*

Figur 13: Undersøkelser basert på kvalitative og kvantitative data (Grønmo, 1996, s. 81).

Problemstillingen min åpner for både kvalitative og kvantitative tilnærminger. I lærebokanalysen kunne jeg for eksempel valgt å gjøre en statistisk generalisering av antall eksempler, antall oppgaver totalt, eller antall ord i teksten. Slik informasjon er utvilsomt nyttig i å besvare problemstillingen, ettersom vi får god oversikt over det som kan tallfestes. Kvantitative aspekter ved bøkene vil derfor bli kommentert i analysen. Jeg er imidlertid mer interessert i de kvalitative forskjellene. Dersom strukturen eller oppgavene i bøkene er forskjellig av natur, vil jeg prøve å få en dypere forståelse for i hvilken forstand de er forskjellige, og hvordan dette eventuelt påvirker overgangen til universitetsmatematikk.

Når det gjelder undersøkelsens design er det flere fordeler ved å velge en kvalitativ tilnærming. Jeg jobber da med et fleksibelt opplegg som jeg kan justere underveis, og som kan tilpasses nye erfaringer jeg tilegner meg mens undersøkelsen pågår. Det kan tenkes at jeg finner likheter eller forskjeller jeg ikke hadde overveid på forhånd, men som viser seg å være relevante i å besvare problemstillingen. I situasjoner der man ikke med rimelig grad av sikkerthet kan si at vi vet hva vi leter etter, kan en kvalitativ tilnærming være å foretrekke. Jeg må likevel være forsiktig, så jeg ikke justerer opplegget så mye at jeg beveger oss bort ifra det som var utgangspunktet for undersøkelsen. Kvantitative undersøkelser har den fordelen at de har en fastlagt struktur som ikke kan justeres underveis. Dermed er de mer presise, og i en viss forstand enklere å gjennomføre, ettersom de ikke krever at man griper inn og gjør de nødvendige justeringer. Siden jeg nettopp har blitt introdusert for forskning, er det ikke utenkelig at det vil dukke opp uforutsette elementer. Ved gjennomføring av kvantitative intervju av studenter som tar Kalkulus 1, kunne det for eksempel vise seg at spørsmålene ikke var gunstige for å gi svar på problemstillingen, eller at de kategorier jeg hadde definert ikke var dekkende.

Som forsker er ens forhold til kildene (i mitt tilfelle, lærebøkene) noe som kan påvirke muligheten til å tolke resultatene. Jeg har vært student i mange år, og har gjennom hele den tiden undervist vgs-elever i matematikk (i regi av UiT og som vikar på de videregående skolene i Tromsø), og slik er jeg iallfall delvis kjent med lærebøkene fra før. Spesielt Lindstrøms bok er jeg blitt godt kjent med etter å ha jobbet med den som student og i veiledning av andre studenter. Selv om det er jeg som samler inn data til undersøkelsen, er min grad av nærhet til kildene begrenset. (Det ville vært annerledes om jeg selv hadde bidratt til ei av bøkene, eller om jeg var del av samme kollegium som forfatterne.) Når det gjelder analyseapparatet er grunnlaget utviklet av andre, men jeg har tilpasset det for å kunne besvare problemstillingen min.

Tolkningsmulighetene mine vil også avhenge av hva slags metode jeg bruker. En kvalitativ tilnærming åpner for høy grad av relevans. Med dette menes at jeg, ettersom jeg kan gjøre justeringer underveis, kan fokusere på det aspektet ved problemstillingen som viser seg å være mest interessant, eller det aspektet som dataene gir meg best grunnlag for å uttale meg om. En mulig ulempe ved dette er at tolkningene kan bli lite entydige og få lav grad av presisjon. Kvantative undersøkelser på sin side er presise, og jeg kan til og med sette tall på hvilken grad av presisjon undersøkelsen har. Ulempen blir at jeg potensielt må la noe av relevansen vike for presisjonen. For eksempel om jeg krever at datamaterialet skal kunne tallfestes, medfører det at noen spørsmål (særlig de mer åpne) ikke kan stilles i et intervju eller i en spørreundersøkelse. Dette er fordi vi ikke klarer å lage svaralternativ som dekker spektret av, og dybden av, det respondenten kan ønske å svare. Slik risikerer man at undersøkelsen blir noe overfladisk, og undersøkelsens troverdighet lider.

Dermed er undersøkelsen min i hovedsak kvalitativ, men den har som sagt kvantitative elementer, og disse kan eventuelt undersøkes videre ved en senere anledning.

Flere undersøkelsesmetoder ble vurdert, og ved å se på ett av alternativene, vil jeg kort nevne noen praktiske hensyn som la føringer på mitt metodevalg. Noe jeg vurderte var å gjennomføre intervju med studenter som tar Kalkulus 1, eller som nettopp har tatt det kurset. Av flere årsaker bestemte jeg meg imidlertid for å skrinlegge den ideen.

For det første har vi tidsaspektet. Bare det å finne villige respondenter, og avtale og gjennomføre intervjuene ville tatt lang tid. Videre vil analysen av dem kunne potensielt tatt mye lengre tid enn en masteroppgave på 30 studiepoeng gir rom for, enten vi snakker om en håndfull lange kvalitative intervju, eller mange kortere kvantitative intervju. For det andre er det en mengde papirarbeid som skal gjøres når man gjennomfører slike anonymiserte intervju, en prosess jeg ikke kjenner til fra før. For det tredje ville jeg foretrukket å ha mer erfaring som intervjuer dersom dette skulle være hovedmetoden for masteroppgaven. Jeg har ikke gjort lærebokanalyse heller, men jeg er mer kjent med lærebokkonseptet, og er i stand til å reflektere over problemstillingen i lys av det. For det fjerde vil det kreve mye tid og energi å utvikle et godt intervjutemplat, og jeg ville sannsynligvis måttet bearbeidet dette over tid ved å gjennomføre flere testintervju. For det femte er det, som Marius Overholt sa i mitt intervju med ham, ingen selvfølge at studentene selv vet hva overgangen til Kalkulus 1 medførte, og hva som eventuelt gjorde den utfordrende. Svarene deres vil riktignok være interessante likevel, men metoden ble altså valgt bort til fordel for den jeg har beskrevet.

Lærebokanalyse blir et viktig verktøy for å besvare problemstillingen. Fokus vil være på bøkenes oppbygning/struktur og på selve oppgavene. (Mer om dette i kapittel 4.2.)

Som supplement til denne analysen har jeg gjennomført et intervju med førsteamanuensis Marius Overholt som flere ganger har forelest emnet Kalkulus 1 ved Universitetet i Tromsø. Dette håper jeg skal gi meg en innsikt jeg ellers ikke ville hatt, og jeg vil komme tilbake til hans innspill mot slutten av oppgaven.

4.2 Analyseapparatet

4.2.1 Analyse på bakgrunn av Lithners teori

Begrepsapparatet slik det er beskrevet i kapittel 3 egner seg godt til å klassifisere resonnementet hos elever når man presenterer dem for en oppgave og ber dem tenke høyt under hele prosessen som oppgaveløsningen utgjør, slik vi for eksempel ser hos Lithner (2008, 2010). I en annen artikkel bruker Lithner, et al. (2011) begrepsapparatet til å klassifisere selve oppgavene som elevene skal løse. Disse oppgavene var imidlertid eksternt gitte oppgaver som elevene skulle løse uten læreboka eller notater tilgjengelig.

Klassifiseringen tok utgangspunkt i hvorvidt lignende oppgaver fantes i elevenes lærebøker, slik at det dermed var tilstrekkelig for å løse disse eksternt gitte oppgavene, at elevene kunne gjengi svaret fra boka eller huske algoritmen som ble brukt.

Siden jeg skal klassifisere oppgavene i selve læreboka, må jeg bruke begrepsapparatet på en annen måte. Jeg bestemte meg for å ta utgangspunkt i lærebøkenes eksempler, og vurdere oppgavene opp mot dem.

Jeg resonnerte slik at kategorien MR mer eller mindre faller bort i en lærebokanalyse, ettersom svært få oppgaver vil be leseren om simpelthen å slå opp svaret ved å bla noen sider (for eksempel å gjengi et bevis som er skrevet i boka). Videre kan man ikke skille mellom ulike typer AR i en lærebokanalyse, ettersom dette er distinksjoner som har med hva som foregår i oppgaveløserens hode å gjøre (nærmere bestemt, hvordan oppgaveløseren finner algoritmen/avgjør hvilken algoritme som skal benyttes). Disse distinksjonene kunne vært gjort dersom jeg presenterte enkeltelever for oppgaver og fikk dem til å tenke høyt mens de løste oppgavene.

Jeg fant det derfor naturlig å samle alle disse typene resonnement (MR og alle AR-varianter) under den brede IR-kategorien. I denne analysen vil en oppgave klassifiseres som IR dersom det finnes et eksempel i læreboka som er så likt oppgaven at det kan brukes som templat for å løse den.

Videre bestemte jeg at en oppgave skulle havne i kategorien Lokal CMR dersom den krever at man gjør lokale endringer på løsningsforslaget til et eksempel i boka. En slik oppgave kan kreve at man gjør operasjoner før man kommer punktet hvor eksemplet starter, eller at man følger eksemplet fra starten men må gjøre noen ting annerledes underveis. Dersom dette heller ikke er tilstrekkelig for å løse oppgaven, bestemte jeg at den skulle klassifiseres som Global CMR.

Personlig korrespondanse med Lithner (e-post av 14.02.13) avdekket i ettertid at denne tilpasningen var nesten helt lik den han selv hadde gjort da han gjorde en lærebokanalyse i 2004 (begrepsapparatet hans var på den tiden noe forskjellig fra dagens begrepsapparat). Med artikkelen fra lærebokanalysen (Lithner, 2004) for hånd, kunne jeg lese noen eksempler på klassifisering av oppgaver fra ei lærebok.

Lithner, et al. (2011) lister opp noen aspekter som jeg vil være bevisst på under min klassifisering av oppgaver.

1) Spørsmålsformulering. Når oppgaven er formulert slik at man blir bedt om å gjøre noe rimelig avgrenset, og man husker at en tilsvarende formulering finnes i et eksempel i boka, kan man bruke denne informasjonen til å løse oppgaven. Et eksempel vil være, ”differensiér følgende polynom.”
2) Eksplisitt informasjon. (a) Informasjon om matematiske komponenter, for eksempel de begreper og verdier som er gitt i oppgaven. Dersom to sannsynlighetsverdier er oppgitt og oppgaven spør etter en tredje, kan samme situasjon i bokas eksempler antyde at man i de fleste tilfeller finner rett svar ved å multiplisere de to sannsynlighetene. (b) Hendelser fra det virkelige liv. Sammenhengen har også mye å si for elevenes evne til å relatere oppgaver til hverandre. En oppgave om renter og bankinnskudd ved bestemte tidspunkt kan kobles til geometriske følger.
3) Representasjon. Matematiske komponenter kan ofte representeres på flere måter (bilder, symboler, tekst, tabeller, grafer, osv.) og dersom representasjonsmåten er den samme i oppgaven som i et eksempel, vil dette gjøre oppgaven lettere.
4) Spåklige elementer. Spesielle nøkkelord eller –fraser kan tipse oppgaveløseren om hva som skal gjøres. Om oppgaven inneholder ordet ”maksimum,” kan dette kobles til prosedyren der man setter den deriverte lik 0 og lager fortegnsskjema.
5) Eksplisitte hint. ”Bruk derivasjon til å…” Slike hint leder oppgaveløseren i retning av en eventuell løsningsalgoritme.
6) Svarformat. Det er stor forskjell i muligheten til å relatere oppgaver til eksempler, alt etter om oppgaven ber deg velge et svar fra flere alternativ, gi et kort numerisk svar, eller gi en lengre forklaring.

4.2.2 Analyse på bakgrunn av Niss & Jensens teori

Niss & Jensens begrepsapparat er mer eller mindre klart til å benyttes til analysen. Niss & Jensen (ibid.) hevder at de åtte matematiske kompetansene er rimelig avgrensede. For hver oppgave jeg analyserer vil jeg avgjøre hvilke av kompetansene som er *nødvendige* eller *svært relevante* for å forstå og løse den gitte oppgaven, hvilke som gir *mulige veier til en løsning* eller er *noe relevante*, og hvilke som *ikke er spesielt relevante*.

4.3 Valg av oppgaver

Til den kvalitative analysen har jeg plukket ut oppgaver fra *Sigma* og *Kalkulus* i et forsøk på å se hele resonnementsspektret og hele kompetansespektret som kreves av leseren av de to læreverkene. Med utgangspunkt i rammeverkene beskrevet i kapittel 4.2 har jeg forsøkt å lage beskrivende overskrifter for ulike typer oppgaver jeg fant.

4.4 Undersøkelsens troverdighet

Læreboka er en slags implementert læreplan. Fra ei bok blir læreplangodkjent vil den stå svært sentralt i undervisningen. Elevene trener på oppgavene i læreboka, slik at de kan nå læreplanmålene og bli forberedt til en eventuell eksamen. En betydelig andel av de organiserte matematikktimene på skolen og på universitetet går med til å løse oppgaver fra lærebøkene. Derfor er lærebøkene, og spesielt oppgavene, noe av det mest sentrale man kan undersøke når man vil studere overgangen fra skolematematikk til universitetsmatematikk.

I denne undersøkelsen studerer jeg kun ett av de temaene som tas opp i lærebøkene, og det kan tenkes at oppgavene knyttet til andre tema har en annen distribusjon med tanke på resonnement og kompetanse. Likevel skal det sies at funksjonsdrøfting er, ved siden av annen behandling av funksjoner (som for eksempel integrasjon), ett av de mest sentrale temaene i R-matematikk og Kalkulus 1 (Ifølge Lindstrøm har funksjoner hovedrollen i boka). Dermed er det ikke urimelig å ha som utgangspunkt at resultatene er representative for sine respektive læreverk. Dette vil kunne kontrolleres i en mer omfattende undersøkelse.

En svakhet ved analysen er at jeg studerer kun ett av de tre aktuelle læreverkene for den videregående skolen. Masteroppgavens omfang tillater meg ikke å se på alle tre, og et forsøk på å gjøre det ville sannsynligvis resultert i at undersøkelsen av dem ble overfladisk.

Oppgavene klassifiseres med utgangspunkt i de to rammeverkene som er beskrevet. Likevel må jeg gjøre en subjektiv vurdering i klassifiseringen, i den forstand at jeg må vurdere likheten mellom oppgaver og eksempler samt kompetansenes grad av relevans i løsningen av oppgavene. Det kan tenkes at andre ville klassifisert noen av oppgavene annerledes.

Noen vil kanskje stille spørsmål ved at Lithner først hevder at det som krever kreativt resonnement hos én er rutine for en annen (Lithner, et al., 2011), og så går videre med å klassifisere selve oppgavene med det samme begrepsapparatet. Er denne generaliseringen av elevers resonnement basert på selve oppgavene fornuftig? Ja, det er den. For mitt vedkommende er det snakk om oppgavene i læreboka. Det understrekes at klassifiseringen er ment å vise hva slags resonnement som kreves av en elev som har boka foran seg, og ikke hvilket resonnement eleven ender opp med å bruke. Når en elev møter en oppgave han ikke umiddelbart vet hvordan han skal løse, står han fritt til å prøve å finne løsningen på egenhånd, eller bla i boka for å finne et eksempel som ligner.

Til slutt er det interessant å spørre hvorvidt alle skoleelever gjør alle oppgavene i boka, ettersom det å beherske alt dette gir det beste grunnlaget for å ta Kalkulus 1. Legges det i det hele tatt opp til at elevene skal regne alle oppgavene, eller i det minste tilstrekkelig mange fra hvert kapittel? Hvis ikke, hvilke oppgaver blir valgt bort? Praksisen angående om det er læreren eller elevene som velger ut oppgavene varierer nok, og det er iallfall mulig at elever som ligger under gjennomsnittlig nivå blir frarådet av læreren å prøve seg på visse oppgaver, enten eksplitt eller implisitt. Dersom dette er tilfellet, og om det medfører at elever ikke får tilstrekkelig trening i kreativt resonnement, vil dette kunne gjøre overgangen til universitetsmatematikk vanskeligere enn den hadde trengt å være, selv om oppgavene er tilgjengelige i boka. En innvending her vil kanskje være at elever som presterer under gjennomsnittet i R-matematikk neppe går videre til et matematikkstudium. Hvorvidt dette er sant, vet jeg ikke, men det er flere enn de som skal studere matematikk (fysikere, ingeniører, osv.) som må ta Kalkulus 1 på universitetet. Å besvare spørsmålene øverst i dette avsnittet ligger dessverre utenfor det som oppgavens omfang tillater meg å finne ut av, men de antydninger som er en konsekvens av lærebøkenes design vil bli kommentert ved avslutningen av oppgaven.

4.5 Undersøkelsens etterprøvbarhet

En styrke ved undersøkelsen er at datagrunnlaget, det vil si lærebøkene, er tilgjengelig for alle, og kategoriseringen av disse data kan dermed etterprøves. Begrepsapparatene for kategoriseringen er utviklet av forskere over tid, og applikasjonen av disse apparatene og tilpasningene som er gjort er beskrevet i oppgaven.

4.6 Etiske overveielser

I enhver undersøkelse skal personen som utfører den prøve å forholde seg objektiv og være åpen for at eventuelle hypoteser kan vise seg ikke å stemme. Gjennomføringen av undersøkelsen skal beskrives så grundig at andre kan etterprøve den.

Utover dette kommer hensyn til personer med tilknytning til undersøkelsen. Ettersom jeg gjør en litteraturstudie, trenger jeg ikke tenke på anonymitet og taushetsplikt, men respekt for lærebokforfatterne og deres arbeid er viktig. All kommunikasjon som brukes som supplement til dette, enten det er fra intervju eller personlig kommunikasjon, må gjengis nøyaktig og med sikkerhet om at man har oppfattet den andre personen rett.

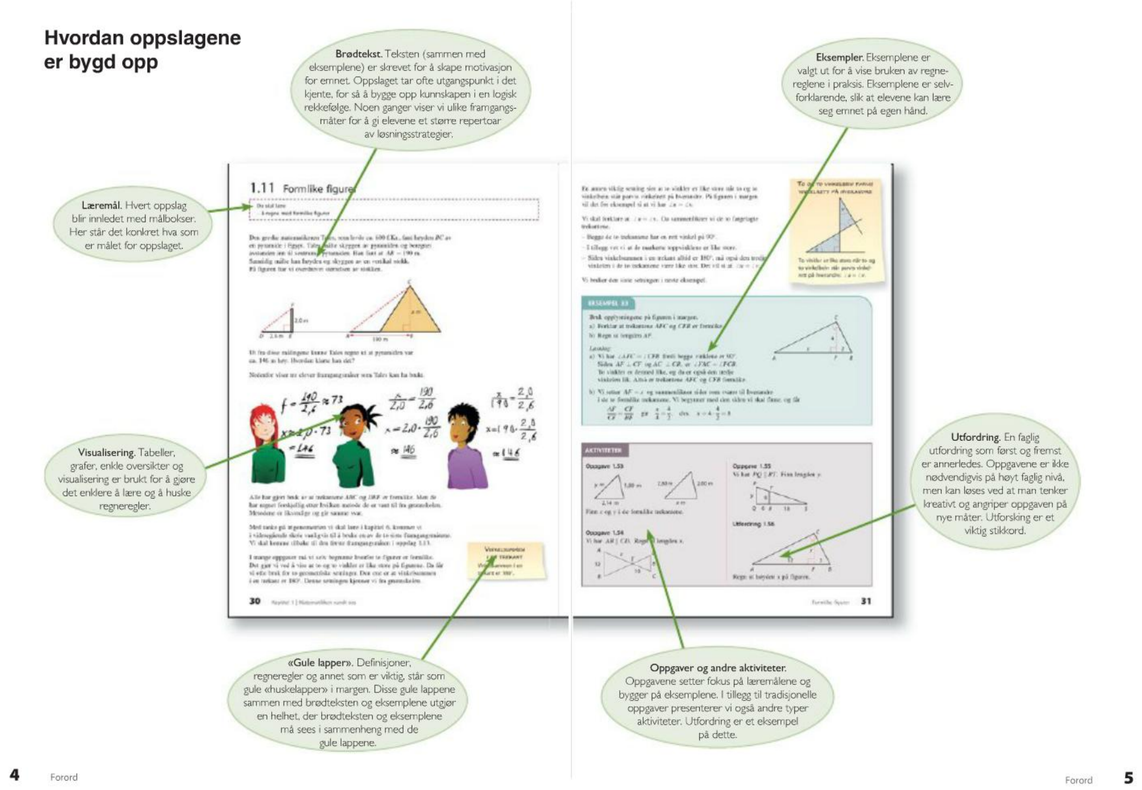
5. ANALYSE

Til sammen gir Lithner (2008) og Niss & Jensen (2002) to rammeverk som lar meg studere ett læreverk med tre bøker for videregående skole og ett med én bok for universitet med to forskjellige innfallsvinkler (matematisk resonnement og matematisk kompetanse). Som beskrevet i forrige kapittel, vil jeg i dette kapitlet først belyse generelle karakteristika ved de to læreverkene, blant annet det som har med deres oppbygning og struktur å gjøre. Deretter vil jeg gjøre en kvantitativ analyse av alle oppgavene jeg har studert. Til slutt vil jeg gjøre en kvalitativ analyse av noen av de oppgavene.

5.1 Lærebøkenes struktur

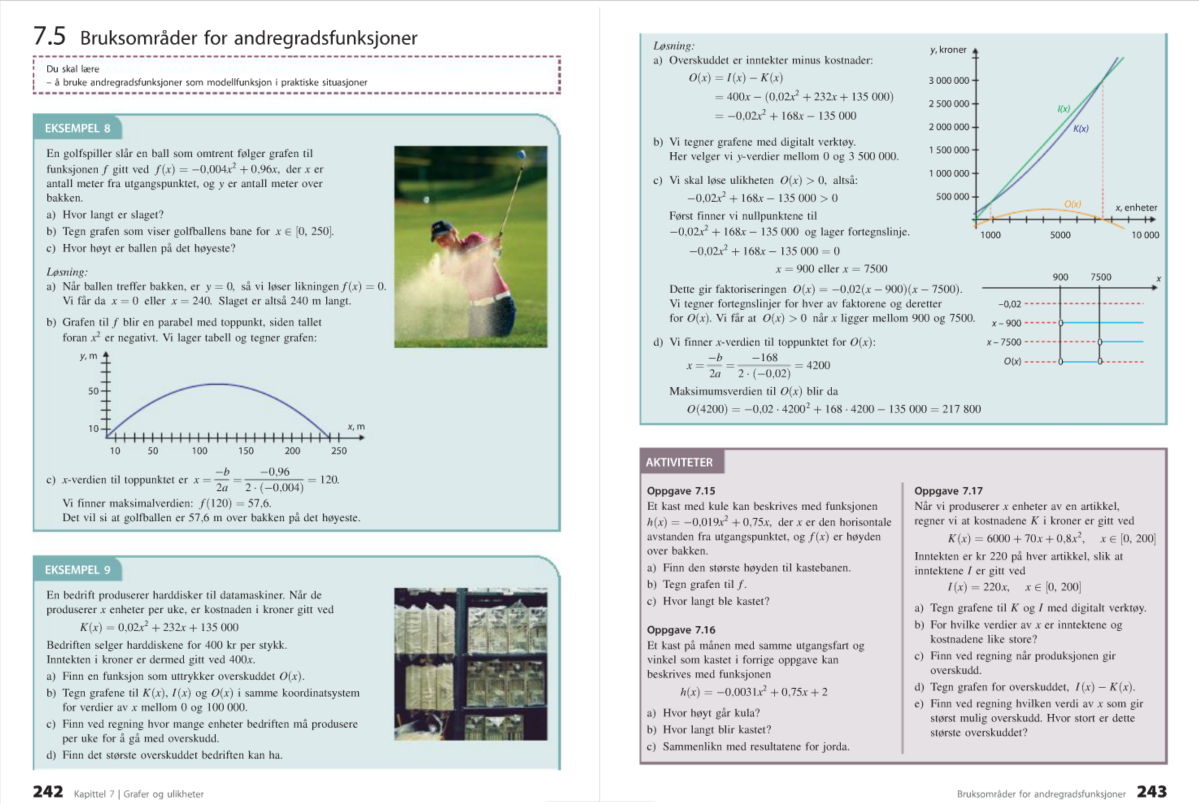
5.1.1 Strukturen i *Sigma*

Forordene til lærebøkene gir leseren et overblikk over bøkenes oppbygning og forteller om forfatternes hensikter.



Figur 14: Forklaring av strukturen i *Sigma*.

Forfatterne av *Sigma* ”lagt stor vekt på å gi boka en ryddig struktur.” (Sandvold, et al., 2009, s. 3) Figur 14 viser leseren hvordan to typiske sider i boka ser ut, og forfatterne forklarer meningen med de ulike delene av dem. I første del av boka blir man møtt med to sider med samme struktur hver gang man blar om. To slike sider (jeg refererer ellers til dette som et delkapittel) inneholder lite tekst og er rike på kunstneriske illustrasjoner i flere farger. De tar for seg et avgrenset emne og inkluderer flere elementer, slik figur 14 viser. Blant disse er det aktuelle læreplanmålet, en innledende brødtekst, visualisering og gule lapper som skal gjør det lettere å finne og huske regler, eksempler, noen få oppgaver som bygger på disse eksemplene, samt en utfordring som er ment å være en oppgave som ”ikke nødvendigvis er på høyt faglig nivå, men [som] kan løses ved at man tenker kreativt og angriper oppgaven på nye måter.” (ibid, s. 5) Etter hvert av hovedkapitlene følger et sammendrag over reglene og en test med løsningsforslag. Bakerst i boka er en oppgavesamling for hele boka, delt inn etter delkapitler. Disse oppgavene er merket med *A*, *B* eller *C* etter oppgavens vanskegrad. Til slutt følger noen oppgaver delt inn kun etter hovedkapitlene.



7.5 Bruksområder for andregradsfunksjoner

Du skal lære
– å bruke andregradsfunksjoner som modellfunksjon i praktiske situasjoner

EKSEMPEL 8

En golfspiller slår en ball som omtrent følger grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = -0{,}004x^2 + 0{,}96x$, der x er antall meter fra utgangspunktet, og y er antall meter over bakken.

a) Hvor langt er slaget?
b) Tegn grafen som viser golfballens bane for $x \in [0, 250]$.
c) Hvor høyt er ballen på det høyeste?

Løsning:

a) Når ballen treffer bakken, er $y = 0$, så vi løser likningen $f(x) = 0$. Vi får da $x = 0$ eller $x = 240$. Slaget er altså 240 m langt.

b) Grafen til f blir en parabel med toppunkt, siden tallet foran x^2 er negativt. Vi lager tabell og tegner grafen:

c) x-verdien til toppunktet er $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0{,}96}{2 \cdot (-0{,}004)} = 120$.
Vi finner maksimalverdien: $f(120) = 57{,}6$.
Det vil si at golfballen er 57,6 m over bakken på det høyeste.

EKSEMPEL 9

En bedrift produserer harddisker til datamaskiner. Når de produserer x enheter per uke, er kostnaden i kroner gitt ved

$$K(x) = 0{,}02x^2 + 232x + 135\,000$$

Bedriften selger harddiskene for 400 kr per stykk. Inntekten i kroner er dermed gitt ved $400x$.

a) Finn en funksjon som uttrykker overskuddet $O(x)$.
b) Tegn grafene til $K(x)$, $I(x)$ og $O(x)$ i samme koordinatsystem for verdier av x mellom 0 og 100 000.
c) Finn ved regning hvor mange enheter bedriften må produsere per uke for å gå med overskudd.
d) Finn det største overskuddet bedriften kan ha.

242 Kapittel 7 | Grafer og ulikheter

Løsning:

a) Overskuddet er inntekter minus kostnader:

$$O(x) = I(x) - K(x) = 400x - (0{,}02x^2 + 232x + 135\,000) = -0{,}02x^2 + 168x - 135\,000$$

b) Vi tegner grafene med digitalt verktøy. Her velger vi y-verdier mellom 0 og 3 500 000.

c) Vi skal løse ulikheten $O(x) > 0$, altså:
$-0{,}02x^2 + 168x - 135\,000 > 0$
Først finner vi nullpunktene til $-0{,}02x^2 + 168x - 135\,000$ og lager fortegnslinje.
$-0{,}02x^2 + 168x - 135\,000 = 0$
$x = 900$ eller $x = 7500$
Dette gir faktoriseringen $O(x) = -0{,}02(x - 900)(x - 7500)$. Vi tegner fortegnslinjer for hver av faktorene og deretter for $O(x)$. Vi får at $O(x) > 0$ når x ligger mellom 900 og 7500.

d) Vi finner x-verdien til toppunktet for $O(x)$:
$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-168}{2 \cdot (-0{,}02)} = 4200$
Maksimumsverdien til $O(x)$ blir da
$O(4200) = -0{,}02 \cdot 4200^2 + 168 \cdot 4200 - 135\,000 = 217\,800$

AKTIVITETER

Oppgave 7.15
Et kast med kule kan beskrives med funksjonen $h(x) = -0{,}019x^2 + 0{,}75x$, der x er den horisontale avstanden fra utgangspunktet, og $f(x)$ er høyden over bakken.
a) Finn den største høyden til kastebanen.
b) Tegn grafen til f.
c) Hvor langt ble kastet?

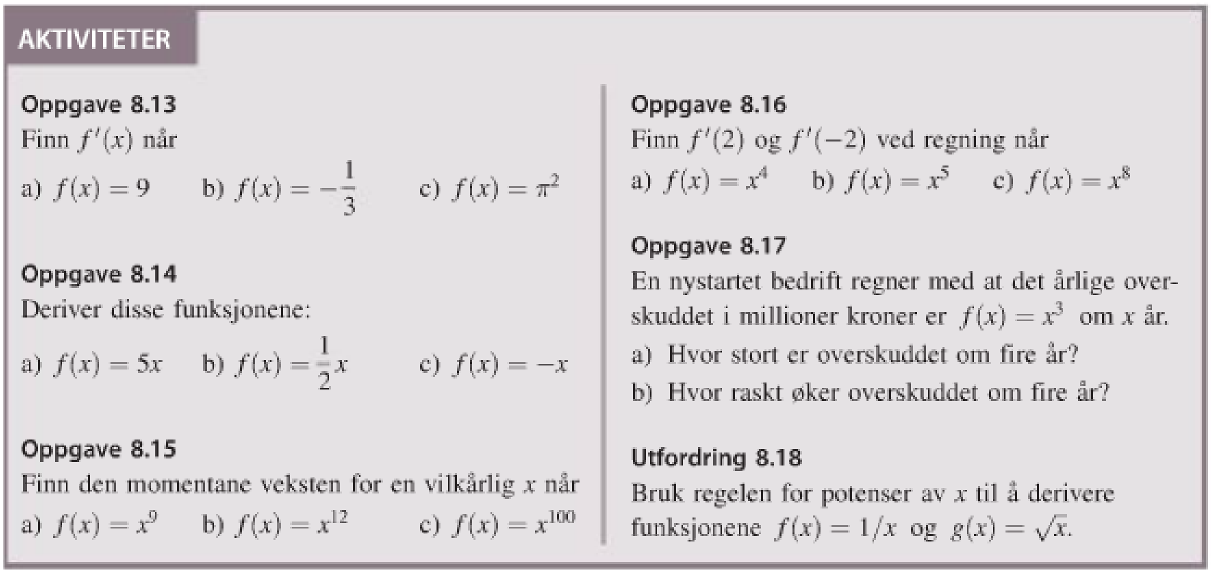
Oppgave 7.16
Et kast på månen med samme utgangsfart og vinkel som kastet i forrige oppgave kan beskrives med funksjonen
$$h(x) = -0{,}0031x^2 + 0{,}75x + 2$$
a) Hvor høyt går kula?
b) Hvor langt blir kastet?
c) Sammenlikn med resultatene for jorda.

Oppgave 7.17
Når vi produserer x enheter av en artikkel, regner vi at kostnadene K i kroner er gitt ved
$$K(x) = 6000 + 70x + 0{,}8x^2, \quad x \in [0, 200]$$
Inntekten er kr 220 på hver artikkel, slik at inntektene I er gitt ved
$$I(x) = 220x, \quad x \in [0, 200]$$
a) Tegn grafene til K og I med digitalt verktøy.
b) For hvilke verdier av x er inntektene og kostnadene like store?
c) Finn ved regning når produksjonen gir overskudd.
d) Tegn grafen for overskuddet, $I(x) - K(x)$.
e) Finn ved regning hvilken verdi av x som gir størst mulig overskudd. Hvor stort er dette største overskuddet?

Bruksområder for andregradsfunksjoner 243

Figur 15: Et typisk delkapittel i *Sigma*.

Denne plasseringen av en ny teknikk med tilhørende eksempler og oppgaver medfører at eleven har en svært begrenset utvalg når han skal avgjøre hvilken regneteknikk han skal bruke for å løse en gitt oppgave. I kapittel 3.2.2.B gjengir jeg en eliminasjonsmetode beskrevet av Lithner (2008), og her har eleven svært få potensielle løsningsmetoder å velge mellom. Dette forsterkes ved at oppgavene i *Sigma* generelt ikke tester noe annet enn de reglene som nettopp er innført. Eleven er med andre ord ikke nødt til å ha klar til disposisjon særlig stor andel av den matematikkunnskapen han har, ettersom det kun er det som nylig er tillært som er relevant for de fleste oppgavene. Som en konsekvens elimineres noe som er utfordrende ved matematikk, nemlig å avgjøre hvilken del av kunnskapen man har som er relevant for oppgaven, og hvilke regneteknikker man skal bruke. På figur 16 under er oppgavene til og med gruppert etter hvilken derivasjonsregel som skal benyttes.


AKTIVITETER

Oppgave 8.13
Finn $f'(x)$ når

a) $f(x) = 9$ b) $f(x) = -\frac{1}{3}$ c) $f(x) = \pi^2$

Oppgave 8.14
Deriver disse funksjonene:

a) $f(x) = 5x$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x$ c) $f(x) = -x$

Oppgave 8.15
Finn den momentane veksten for en vilkårlig x når

a) $f(x) = x^9$ b) $f(x) = x^{12}$ c) $f(x) = x^{100}$

Oppgave 8.16
Finn $f'(2)$ og $f'(-2)$ ved regning når

a) $f(x) = x^4$ b) $f(x) = x^5$ c) $f(x) = x^8$

Oppgave 8.17
En nystartet bedrift regner med at det årlige overskuddet i millioner kroner er $f(x) = x^3$ om x år.

a) Hvor stort er overskuddet om fire år?
b) Hvor raskt øker overskuddet om fire år?

Utfordring 8.18
Bruk regelen for potenser av x til å derivere funksjonene $f(x) = 1/x$ og $g(x) = \sqrt{x}$.

Figur 16: Når derivasjonsoppgaver er gruppert etter hvilken regel som skal benyttes.

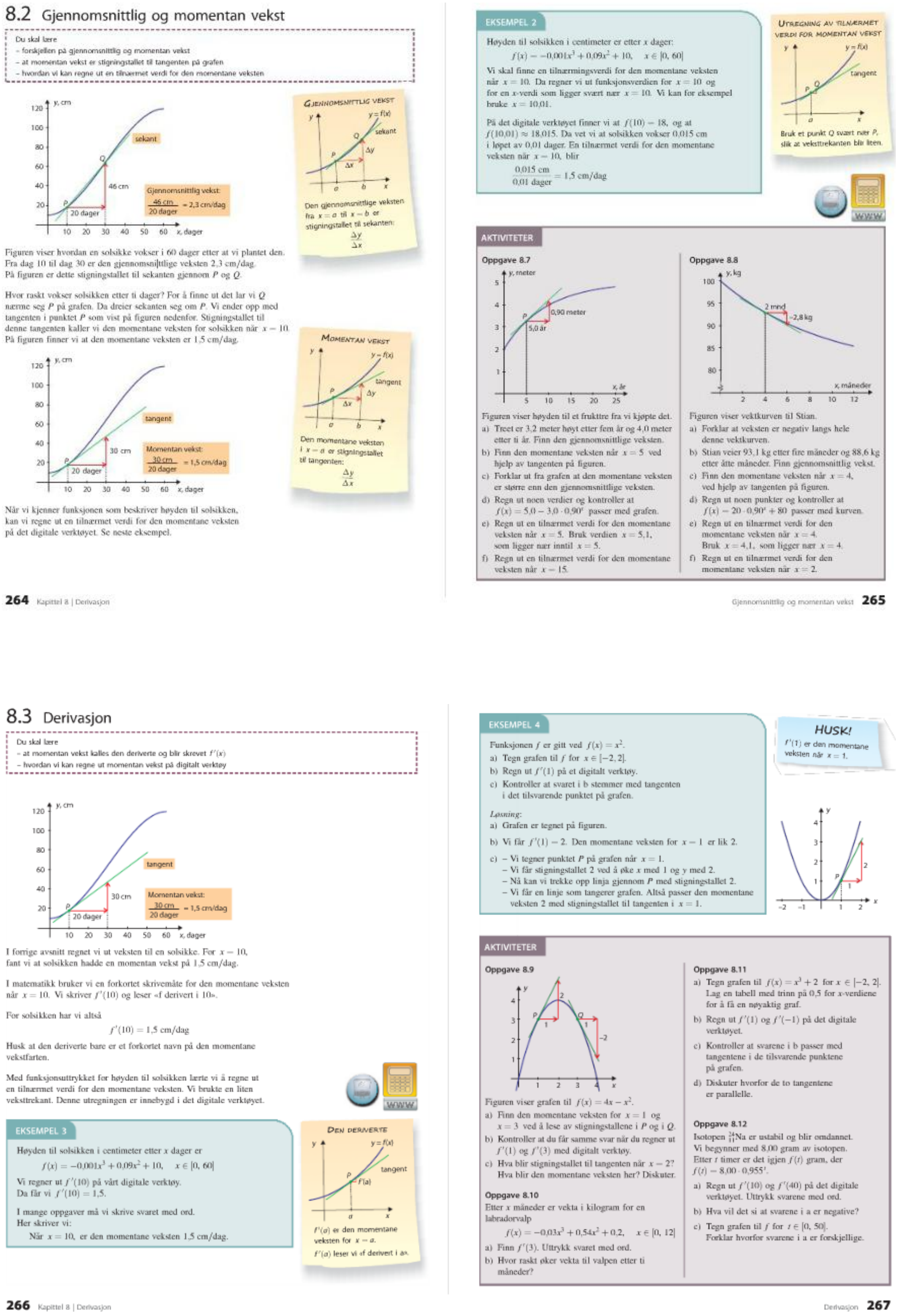
Et annet poeng er at eksemplene er svært like oppgavene som følger, slik at eleven kan bruke eksemplet som templat for oppgaveløsning (mer om dette i den kvalitative analysen). Dette gjelder også mange av oppgavene bak i boka. En konsekvens av dette er at eleven får det som Niss & Jensen (op. cit, s. 65) kaller liten *aksjonsradius* for sine kompetanser:

> En kompetences *aktionsradius* hos en person udgøres af det spektrum af *sammenhenge og situationer* personen kan aktivere kompetencen i. Det drejer sig først og fremmest om sammenhænge og situationer, der er bestemt af matematiske emneområder (så vel internt matematiske som anvendte emner), men også om sammenhænge og situtationer der er bestemt af problemstillinger og utfordringer.

I *Sigma* er det meste av fokus på regneteknikk, og lærebøkene er strukturert slik at det er lett å lære regneteknikkene, men man lærer ikke å bruke teknikkene i særlig mange sammenhenger.

Et tredje element er hvor i boka ulike oppgaver er plassert. Som sagt er særlig oppgavene i første del av boken slike som kan løses med det foregående eksemplet som templat. Blant oppgavene i de lilla rutene, er nesten alle slike som krever kun IR. De oppgavene som krever Lokal eller Global CMR er stort sett å finne bakerst i boka.

I *Sigma* bevises nesten ingen av de matematiske setningene, og matematikken er ikke så formell. Et eksempel på dette er innføringen av derivasjon i kapittel 8 i *Sigma 1T*:



8.2 Gjennomsnittlig og momentan vekst

Du skal lære
- forskjellen på gjennomsnittlig og momentan vekst
- at momentan vekst er stigningstallet til tangenten på grafen
- hvordan vi kan regne ut en tilnærmet verdi for den momentane veksten

Figuren viser hvordan en solsikke vokser i 60 dager etter at vi plantet den. Fra dag 10 til dag 30 er den gjennomsnittlige veksten 2,3 cm/dag. På figuren er dette stigningstallet til sekanten gjennom P og Q.

Hvor raskt vokser solsikken etter ti dager? For å finne ut det lar vi Q nærme seg P på grafen. Da dreier sekanten seg om P. Vi ender opp med tangenten i punktet P som vist på figuren nedenfor. Stigningstallet til denne tangenten kaller vi den momentane veksten for solsikken når $x = 10$. På figuren finner vi at den momentane veksten er 1,5 cm/dag.

Når vi kjenner funksjonen som beskriver høyden til solsikken, kan vi regne ut en tilnærmet verdi for den momentane veksten på det digitale verktøyet. Se neste eksempel.

EKSEMPEL 2

Høyden til solsikken i centimeter er etter x dager:

$$f(x) = -0{,}001x^3 + 0{,}09x^2 + 10, \quad x \in [0, 60]$$

Vi skal finne en tilnærmingsverdi for den momentane veksten når $x = 10$. Da regner vi ut funksjonsverdien for $x = 10$ og for en x-verdi som ligger svært nær $x = 10$. Vi kan for eksempel bruke $x = 10{,}01$.

På det digitale verktøyet finner vi at $f(10) = 18$, og at $f(10{,}01) \approx 18{,}015$. Da vet vi at solsikken vokser 0,015 cm i løpet av 0,01 dager. En tilnærmet verdi for den momentane veksten når $x = 10$, blir

$$\frac{0{,}015 \text{ cm}}{0{,}01 \text{ dager}} = 1{,}5 \text{ cm/dag}$$

AKTIVITETER

Oppgave 8.7

Figuren viser høyden til et frukttre fra vi kjøpte det.

a) Treet er 3,2 meter høyt etter fem år og 4,0 meter etter ti år. Finn den gjennomsnittlige veksten.
b) Finn den momentane veksten når $x = 5$ ved hjelp av tangenten på figuren.
c) Forklar ut fra grafen at den momentane veksten er større enn den gjennomsnittlige veksten.
d) Regn ut noen verdier og kontroller at $f(x) = 5{,}0 - 3{,}0 \cdot 0{,}90^x$ passer med grafen.
e) Regn ut en tilnærmet verdi for den momentane veksten når $x = 5$. Bruk verdien $x = 5{,}1$, som ligger nær inntil $x = 5$.
f) Regn ut en tilnærmet verdi for den momentane veksten når $x = 15$.

Oppgave 8.8

Figuren viser vektkurven til Stian.

a) Forklar at veksten er negativ langs hele denne vektkurven.
b) Stian veier 93,1 kg etter fire måneder og 88,6 kg etter åtte måneder. Finn gjennomsnittlig vekst.
c) Finn den momentane veksten når $x = 4$, ved hjelp av tangenten på figuren.
d) Regn ut noen punkter og kontroller at $f(x) = 20 \cdot 0{,}90^x + 80$ passer med kurven.
e) Regn ut en tilnærmet verdi for den momentane veksten når $x = 4$. Bruk $x = 4{,}1$, som ligger nær $x = 4$.
f) Regn ut en tilnærmet verdi for den momentane veksten når $x = 2$.

264 Kapittel 8 | Derivasjon

Gjennomsnittlig og momentan vekst 265

8.3 Derivasjon

Du skal lære
- at momentan vekst kalles den deriverte og blir skrevet $f'(x)$
- hvordan vi kan regne ut momentan vekst på digitalt verktøy

I forrige avsnitt regnet vi ut veksten til en solsikke. For $x = 10$, fant vi at solsikken hadde en momentan vekst på 1,5 cm/dag.

I matematikk bruker vi en forkortet skrivemåte for den momentane veksten når $x = 10$. Vi skriver $f'(10)$ og leser «f derivert i 10».

For solsikken har vi altså

$$f'(10) = 1{,}5 \text{ cm/dag}$$

Husk at den deriverte bare er et forkortet navn på den momentane vekstfarten.

Med funksjonsuttrykket for høyden til solsikken lærte vi å regne ut en tilnærmet verdi for den momentane veksten. Vi brukte en liten veksttrekant. Denne utregningen er innebygd i det digitale verktøyet.

EKSEMPEL 3

Høyden til solsikken i centimeter etter x dager er

$$f(x) = -0{,}001x^3 + 0{,}09x^2 + 10, \quad x \in [0, 60]$$

Vi regner ut $f'(10)$ på vårt digitale verktøy.
Da får vi $f'(10) = 1{,}5$.

I mange oppgaver må vi skrive svaret med ord.
Her skriver vi:
Når $x = 10$, er den momentane veksten 1,5 cm/dag.

EKSEMPEL 4

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^2$.

a) Tegn grafen til f for $x \in [-2, 2]$.
b) Regn ut $f'(1)$ på et digitalt verktøy.
c) Kontroller at svaret i b stemmer med tangenten i det tilsvarende punktet på grafen.

Løsning:

a) Grafen er tegnet på figuren.
b) Vi får $f'(1) = 2$. Den momentane veksten for $x = 1$ er lik 2.
c) – Vi tegner punktet P på grafen når $x = 1$.
– Vi får stigningstallet 2 ved å øke x med 1 og y med 2.
– Nå kan vi trekke opp linja gjennom P med stigningstallet 2.
– Vi får en linje som tangerer grafen. Altså passer den momentane veksten 2 med stigningstallet til tangenten i $x = 1$.

AKTIVITETER

Oppgave 8.9

Figuren viser grafen til $f(x) = 4x - x^2$.

a) Finn den momentane veksten for $x = 1$ og $x = 3$ ved å lese av stigningstallene i P og i Q.
b) Kontroller at du får samme svar når du regner ut $f'(1)$ og $f'(3)$ med digitalt verktøy.
c) Hva blir stigningstallet til tangenten når $x = 2$? Hva blir den momentane veksten her? Diskuter.

Oppgave 8.10

Etter x måneder er vekta i kilogram for en labradorvalp

$$f(x) = -0{,}03x^3 + 0{,}54x^2 + 0{,}2, \quad x \in [0, 12]$$

a) Finn $f'(3)$. Uttrykk svaret med ord.
b) Hvor raskt øker vekta til valpen etter ti måneder?

Oppgave 8.11

a) Tegn grafen til $f(x) = x^3 + 2$ for $x \in [-2, 2]$. Lag en tabell med trinn på 0,5 for x-verdiene for å få en nøyaktig graf.
b) Regn ut $f'(1)$ og $f'(-1)$ på det digitale verktøyet.
c) Kontroller at svarene i b passer med tangentene i de tilsvarende punktene på grafen.
d) Diskuter hvorfor de to tangentene er parallelle.

Oppgave 8.12

Isotopen $^{24}_{11}$Na er ustabil og blir omdannet. Vi begynner med 8,00 gram av isotopen. Etter t timer er det igjen $f(t)$ gram, der $f(t) = 8{,}00 \cdot 0{,}955^t$.

a) Regn ut $f'(10)$ og $f'(40)$ på det digitale verktøyet. Uttrykk svarene med ord.
b) Hva vil det si at svarene i a er negative?
c) Tegn grafen til f for $t \in [0, 50]$. Forklar hvorfor svarene i a er forskjellige.

266 Kapittel 8 | Derivasjon

Derivasjon 267

Figur 17: Hvordan derivasjon introduseres i *Sigma*.

Her ser leseren en graf med en sekant og utregning av gjennomsnittlig vekst ved bruk av veksttrekant. Den samme grafen vises også med en tangent og en tilsvarende utregning. En liten veksttrekant for sekanten PQ brukes for å gi en tilnærming til veksten til tangenten gjennom P. ”På figuren finner vi at den momentane vekstfarten er 1,5 cm/dag. (…) Med funksjonsuttrykket for høyden til solsikken lærte vi å regne ut en tilnærmet verdi for den momentane veksten. Vi brukte en liten veksttrekant. Denne utregningen er innebygd i det digitale verktøyet.” Fra dette punktet bruker eleven de vanlige derivasjonsformlene (som blir innført uten bevis, ettersom den deriverte ikke er formelt definert) for de aktuelle funksjonene. Helt i slutten av kapitlet kommer en semiformell definisjon.

Den overordnede strategien bak strukturen i *Sigma* bærer tydelig preg av exposition, examples, exercises, som beskrevet i kapittel 3.1.

5.1.2 Strukturen i *Kalkulus*

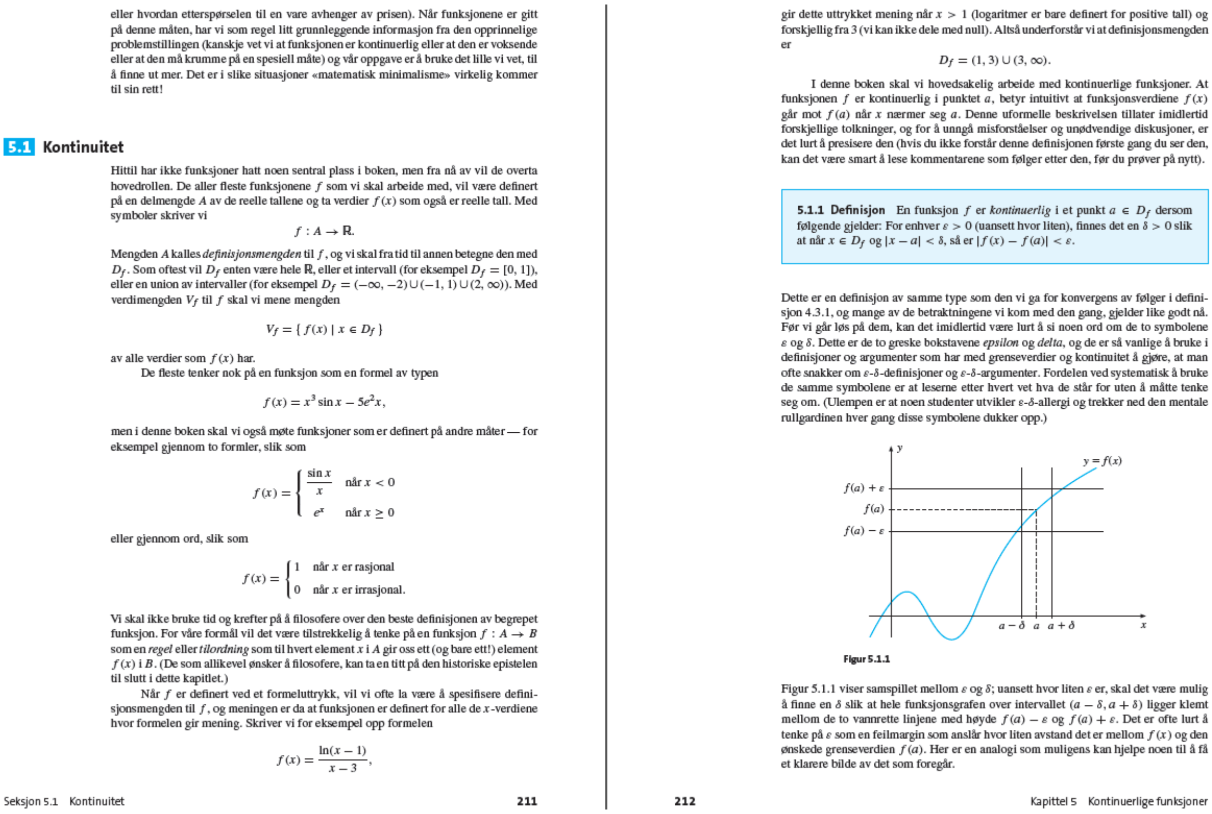
Lindstrøm (2006) åpner sine forord med å presisere at boka er ment å være en innføringsbok for matematikk ved universiteter og høyskoler, og at den bygger på full fordypning fra videregående (R2-matematikk):

> Jeg har forsøkt å skrive en bok som legger omtrent like mye vekt på teori, regneteknikk og anvendelser. Etter min mening er alle disse tre komponentene nødvendige for virkelig å forstå matematikk – teoriforståelse uten regneteknikk har ingen nytteverdi, og anvendelser uten teoriforståelse fører bare til en meningsløs kopiering av formler som man hverken kan begrunne eller tolke. (…) I anvendelsene har mitt hovedmål vært å få studentene til å stille opp stykkene selv. Derfor finnes det bare noen få eksempler der anvendelsene kun fungerer som staffasje rundt et ferdig oppstilt regnestykke – i de fleste tilfellene vil jeg ha med studentene hele veien fra den opprinnelige problemstillingen, via den matematiske formuleringen og den regnetekniske løsningen, frem til drøfting av svaret i den opprinnelige situasjonen. (Lindstrøm, 2006, s. 7-9)

En slik tredeling gir en bok som er svært forskjellig fra *Sigma*, som fokuserer mest på regneteknikk.

Kalkulus har mye mer teori enn *Sigma*. I *Sigma* beviser forfatterne nesten ingen av de matematiske setningene (jamfør kapittel 5.1.1), mens i *Kalkulus* bevises nesten alle, og flere av bevisene er gitt som oppgaver til leseren. Lindstrøm forklarer at *Kalkulus* er ”en bok som er teoretisk selvforsynt. (…) Det betyr selvfølgelig ikke at alle studenter skal lese og forstå hvert eneste bevis, og det betyr slett ikke at alle forelesere skal dekke hele teoristoffet (da vil man raskt oppdage at tiden blir knapp).” (ibid, s. 8) Boka har ingen bilder eller kunstneriske illustrasjoner (bortsett fra døde matematikere), men er rik på matematiske figurer som forfatterne bruker til hjelp i sin forklaring.

Et typisk delkapittel i *Kalkulus* er på rundt 10 sider og inneholder definisjoner, matematiske setninger med tilhørende bevis, eksempler og til slutt, oppgaver. Oppgavene er ikke merket etter vanskegrad.



eller hvordan etterspørselen til en vare avhenger av prisen). Når funksjonene er gitt på denne måten, har vi som regel litt grunnleggende informasjon fra den opprinnelige problemstillingen (kanskje vet vi at funksjonen er kontinuerlig eller at den er voksende eller at den må krumme på en spesiell måte) og vår oppgave er å bruke det lille vi vet, til å finne ut mer. Det er i slike situasjoner «matematisk minimalisme» virkelig kommer til sin rett!

5.1 Kontinuitet

Hittil har ikke funksjoner hatt noen sentral plass i boken, men fra nå av vil de overta hovedrollen. De aller fleste funksjonene f som vi skal arbeide med, vil være definert på en delmengde A av de reelle tallene og ta verdier $f(x)$ som også er reelle tall. Med symboler skriver vi

$$f : A \to \mathbb{R}.$$

Mengden A kalles *definisjonsmengden* til f, og vi skal fra tid til annen betegne den med D_f. Som oftest vil D_f enten være hele $\mathbb{R}$, eller et intervall (for eksempel $D_f = [0, 1]$), eller en union av intervaller (for eksempel $D_f = (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty)$). Med verdimengden V_f til f skal vi mene mengden

$$V_f = \{ f(x) \mid x \in D_f \}$$

av alle verdier som $f(x)$ har.

De fleste tenker nok på en funksjon som en formel av typen

$$f(x) = x^3 \sin x - 5e^2 x,$$

men i denne boken skal vi også møte funksjoner som er definert på andre måter — for eksempel gjennom to formler, slik som

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{når } x < 0 \\ e^x & \text{når } x \geq 0 \end{cases}$$

eller gjennom ord, slik som

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{når } x \text{ er rasjonal} \\ 0 & \text{når } x \text{ er irrasjonal.} \end{cases}$$

Vi skal ikke bruke tid og krefter på å filosofere over den beste definisjonen av begrepet funksjon. For våre formål vil det være tilstrekkelig å tenke på en funksjon $f : A \to B$ som en *regel* eller *tilordning* som til hvert element x i A gir oss ett (og bare ett!) element $f(x)$ i B. (De som allikevel ønsker å filosofere, kan ta en titt på den historiske epistelen til slutt i dette kapitlet.)

Når f er definert ved et formeluttrykk, vil vi ofte la være å spesifisere definisjonsmengden til f, og meningen er da at funksjonen er definert for alle de x-verdiene hvor formelen gir mening. Skriver vi for eksempel opp formelen

$$f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-3},$$

Seksjon 5.1 Kontinuitet 211

212 Kapittel 5 Kontinuerlige funksjoner

gir dette uttrykket mening når $x > 1$ (logaritmer er bare definert for positive tall) og forskjellig fra 3 (vi kan ikke dele med null). Altså underforstår vi at definisjonsmengden er

$$D_f = (1, 3) \cup (3, \infty).$$

I denne boken skal vi hovedsakelig arbeide med kontinuerlige funksjoner. At funksjonen f er kontinuerlig i punktet a, betyr intuitivt at funksjonsverdiene $f(x)$ går mot $f(a)$ når x nærmer seg a. Denne uformelle beskrivelsen tillater imidlertid forskjellige tolkninger, og for å unngå misforståelser og unødvendige diskusjoner, er det lurt å presisere den (hvis du ikke forstår denne definisjonen første gang du ser den, kan det være smart å lese kommentarene som følger etter den, før du prøver på nytt).

5.1.1 Definisjon En funksjon f er *kontinuerlig* i et punkt $a \in D_f$ dersom følgende gjelder: For enhver $\varepsilon > 0$ (uansett hvor liten), finnes det en $\delta > 0$ slik at når $x \in D_f$ og $|x - a| < \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Dette er en definisjon av samme type som den vi ga for konvergens av følger i definisjon 4.3.1, og mange av de betraktningene vi kom med den gang, gjelder like godt nå. Før vi går løs på dem, kan det imidlertid være lurt å si noen ord om de to symbolene ε og δ. Dette er de to greske bokstavene *epsilon* og *delta*, og de er så vanlige å bruke i definisjoner og argumenter som har med grenseverdier og kontinuitet å gjøre, at man ofte snakker om ε-δ-definisjoner og ε-δ-argumenter. Fordelen ved systematisk å bruke de samme symbolene er at leserne etter hvert vet hva de står for uten å måtte tenke seg om. (Ulempen er at noen studenter utvikler ε-δ-allergi og trekker ned den mentale rullgardinen hver gang disse symbolene dukker opp.)

Figur 5.1.1

Figur 5.1.1 viser samspillet mellom ε og δ; uansett hvor liten ε er, skal det være mulig å finne en δ slik at hele funksjonsgrafen over intervallet $(a - \delta, a + \delta)$ ligger klemt mellom de to vannrette linjene med høyde $f(a) - \varepsilon$ og $f(a) + \varepsilon$. Det er ofte lurt å tenke på ε som en feilmargin som anslår hvor liten avstand det er mellom $f(x)$ og den ønskede grenseverdien $f(a)$. Her er en analogi som muligens kan hjelpe noen til å få et klarere bilde av det som foregår.

Figur 18: To typiske sider i *Kalkulus*.

De første oppgavene leseren av *Kalkulus* møter, er syv problemløsningsoppgaver i slutten av innledningen, før kapittel 1. Etter å ha gjort min kvantitative og kvalitative analyse (henholdsvis kapittel 5.2 og 5.3), finner jeg at dette er et eksempel på én av de største forskjellene mellom oppgavene i de to læreverkene – at leserne av *Kalkulus* blir nødt til å stille opp mange av oppgavene selv, uten særlig mye hjelp fra eksemplene, mens oppgavene i *Sigma* er svært like eksemplene og ofte er ferdig oppstilte. Dette stemmer godt med forskningen som jeg viste til i kapittel 2.2 og 2.3. Mine kvantitative og kvalitative analyser gjenspeiler også en forskjell på de to læreverkene med hensyn til andelen oppgaver som krever CMR.

Dette kan gjøre det utfordrende å gå over fra å lese *Sigma* til å lese *Kalkulus*, og Lindstrøm skriver i forordet til bokas tredje utgave at han selv har erfart utfordringen som denne forskjellen byr på, og at han derfor har gjort noen endringer i denne nyeste utgaven:

> Spesielt har jeg arbeidet mye med samspillet mellom eksempler og oppgaver. Min egen erfaring fra over ti års bruk er at det en del steder har vært for brå progresjon fra rene rutineoppgaver til mer utfordrende oppgaver. Detter har jeg forsøkt å rette på dels ved å legge til flere oppgave-relevante eksempler og dels ved å lage nye oppgaver eller utstyre eksisterende oppgaver med tydeligere hint. Samtidig har jeg forsøk å unngå den fellen som består i å la nesten hver eneste oppgave være en enkel omskriving av et eksempel i boken – problemløsing er en av de viktigste ferdighetene i matematikk, og den eneste måten å lære seg problemløsing på, er ved å løse problemer! (Lindstrøm, 2006, s. 9-10)

Min analyse med Niss & Jensens begrepsapparat indikerer at problemløsning og de andre kompetansene som har med å spørre og svare i og med matematikk å gjøre, er lite vektlagt i *Sigma*, men er sentrale i *Kalkulus*. Ikke bare oppgavene, men også eksemplene i de to læreverkene er forskjellige. Mens *Sigma* er dominert av ”rutineeksempler” som er ment å være veiledning til rutineoppgavene, inkluderer *Kalkulus* flere eksempler på problemløsning, bevis og spesialtilfeller. Disse sistnevnte eksemplene kan kanskje ikke anvendes direkte når studenten skal løse oppgaver, men de tjener formålet å la studenten se hvordan man går fram når man møter slike oppgaver – ikke en oppskrift, men generelle angrepsstrategier. Det er lettere å gi et bevis selv, dersom du har erfaring med å følge bevis. Studenten kan også lære noen generelle matematiske triks som kan brukes i andre problemer og bevis.

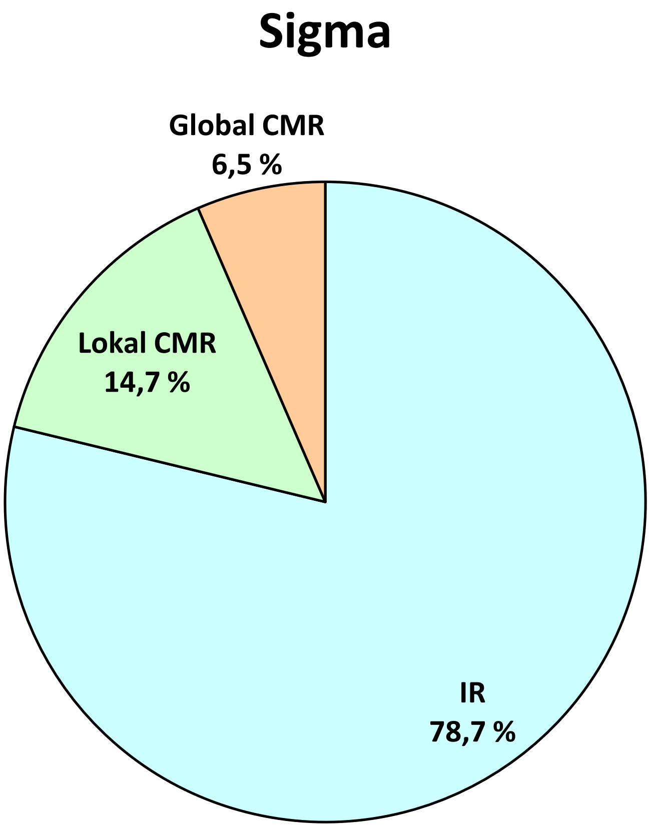
5.2 Kvantitativ analyse med Lithners apparat

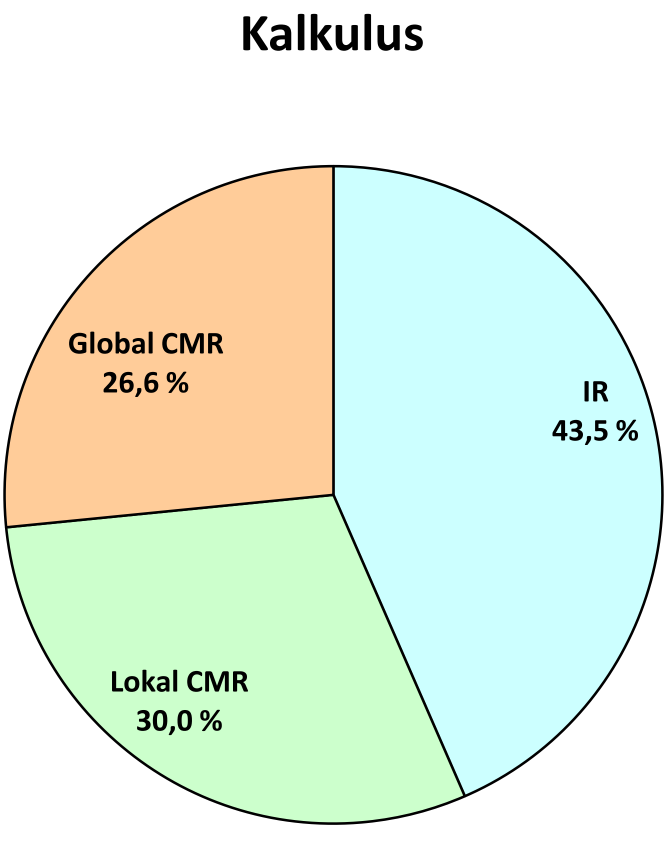
For å sikre en grundig analyse har jeg studert alle oppgaver i *Sigma* og *Kalkulus* som jeg fant at omhandler funksjonsdrøfting og relevante teknikker (for eksempel derivasjon og behandling av grenseverdier). Med Lithners rammeverk har jeg kategorisert til sammen 2034 deloppgaver, hvorav 1590 fra *Sigma* og 444 fra *Kalkulus*.

Kapittel	IR	Lokal CMR	Global CMR
Sigma 1T kap. 7	225 (85,6 %)	26 (9,9 %)	12 (4,6 %)
Sigma 1T kap. 8	286 (74,5 %)	71 (18,5 %)	27 (7,0 %)
Sigma R1 kap. 5	288 (83,5 %)	46 (13,3 %)	11 (3,2 %)
Sigma R1 kap. 6	290 (73,4 %)	61 (15,4 %)	44 (11,1 %)
Sigma R2 kap. 3	163 (80,3 %)	30 (14,8 %)	10 (4,9 %)
SIGMA	**1252 (78,7 %)**	**234 (14,7 %)**	**104 (6,5 %)**

Kapittel	IR	Lokal CMR	Global CMR
Kalkulus kap. 5	57 (43,5 %)	35 (26,7 %)	39 (29,8 %)
Kalkulus kap. 6	73 (40,1 %)	60 (33,0 %)	49 (26,9 %)
Kalkulus kap. 7	63 (48,1 %)	38 (29,0 %)	30 (22,9 %)
KALKULUS	**193 (43,5 %)**	**133 (30,0 %)**	**118 (26,6 %)**

Figur 19: Antall oppgaver i *Sigma* og *Kalkulus* som krever IR, Lokal CMR og Global CMR.





Figur 20: Andel oppgaver i *Sigma* og *Kalkulus* som krever IR, Lokal CMR og Global CMR.

I *Sigma R2* kapittel 3, som handler om trigonometriske funksjoner, har jeg studert kun de oppgavene som har med funksjonsdrøfting å gjøre. Oppgaver om modellering, trigonometriske ligninger, osv. har jeg utelatt. Når det gjelder de andre kapitlene, har jeg sett på alle oppgavene.

I *Kalkulus* har jeg sett på alle oppgaver fra kapittel 5.1-4, 6.1-5 og 7.3-6.

5.3 Kvalitativ analyse med Lithners og Niss & Jensens apparat

For hver oppgave har jeg laget en tabell som oppsummerer hvilke kompetanser som er *nødvendige* eller *svært relevante* for å forstå og løse den gitte oppgaven, hvilke som gir *mulige veier til en løsning* eller er *noe relevante*, og hvilke som *ikke er spesielt relevante*. Disse tre alternativene er i tabellene representert ved henholdsvis N, M og et blankt felt. Jeg har valgt ut oppgavene i et forsøk på å vise bredden av de to læreverkene med tanke på resonnement og kompetanser.

5.3.1 Avgrenset bruk av nylig innført algoritme

På alle nivå i matematikken blir leseren introdusert for nye algoritmer. Den nye regelen akkompagneres ofte av et eksempel og påfølgende oppgaver som er strengt avgrenset til bruk av den nye algoritmen. Leseren trenger med andre ord i liten eller ingen grad å bruke den nye algoritmen i kombinasjon med tidligere ervervede matematikkunnskaper. Dette finner jeg i både *Sigma* (for eksempel 7.11 og 8.20 i 1T, 5.3 og 5.16 i R1 og 3.28 i R2) og *Kalkulus* (for eksempel 5.2.3, 5.3.1 og 6.1.1), men *Sigma* inneholder en betydelig større andel slike oppgaver.

Én av disse oppgavene er som følger:

Oppgave 7.21 a) (Sandvold, et al., 2009, s. 247) Bestem asymptotene til funksjonen $f(x) = \frac{4x+3}{2x+6}$

Delkapitlet handler om hyperbler og asymptoter. Strategivalget blir å bruke den innrammede regelen på side 246 og/eller eksempel 12a på side 247 som templat for å løse oppgaven. Regelen forteller at grafen til $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ [grafen til en slik funksjon er avbildet] blir en hyperbel med vertikal asymptote $x = -d/c$ og horisontal asymptote $y = a/c$. Eksempeloppgaven og dens løsning er gjengitt under.

Eksempel 12 a) (Sandvold, et al., 2009, s. 247) Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$. Fastsett asymptotene og tegn grafen til f.

Løsning: Vi løser ligningen $2x + 1 = 0$ og får $x = -1/2$. Den vertikale asymptoten er altså linja $x = -1/2$. Den horisontale asymptoten er linja $y = a/c = 1/2$. Vi lager tabell og får grafen på figuren. [Grafen er avbildet].

Strategiimplementeringen blir å bytte ut tallene fra eksemplet (eller bokstavene fra regelen) med tallene gitt i oppgaven og følge samme prosedyre. Ingen intrinsiske egenskaper ved funksjonen (for eksempel grenseverdier) blir brukt for å finne asymptotene, og leseren trenger ikke skjønne hvorfor de gitte formlene gir ligningene for asymptotene. Leseren trenger faktisk ikke å ha forstått hva en asymptote egentlig er. Oppgaven klassifiseres derfor som IR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
IR						M		

Tankegangskompetanse omhandler blant annet betingelsene for at et matematisk objekt har en bestemt egenskap, og det inkluderer også forståelse for, og bruk av matematiske definisjoner og begreper. Asymptote er for eleven et nytt begrep, men oppgaven krever som sagt ikke at eleven skjønner hva begrepet betyr. Han trenger heller ikke å avgjøre hvorvidt funksjonen i det hele tatt har noen asymptote. Slik oppgaven er formulert, krever den ikke tankegangskompetanse. (Bare én oppgave om asymptoter, C7.62d, krever dette når den ber eleven forklare hvorfor én gitt funksjon $g(x)$ er en asymptote til en annen gitt funksjon $f(x)$.) Ingen av oppgavene om asymptoter krever noen av de andre kompetansene i den første kategorien.

Eleven trenger ikke bruke andre representasjoner for asymptotene enn den algebraiske som han får ved å bruke formlene som er gitt. For å bruke disse formlene må eleven ha tilstrekkelig symbol- og formalismekompetanse, men det er nok at eleven klarer å se hva a, b, c og d i formelen $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ refererer til i den aktuelle funksjonen. Dette er elementært for en elev på dette trinnet, så jeg mener det ikke er snakk om særlig høye krav til symbol- og formalismekompetanse.

Noen oppgaver (for eksempel 7.22, 7.23, A7.59, B7.60, B.7.61 og C7.62) ber eleven tegne grafen til gitt funksjon som har asymptoter, men heller ikke disse krever representasjonskompetanse, ettersom den grafiske framstillingen ikke er utgangspunktet for oppgaven, men endepunktet. I alle disse oppgavene kommer tegningen av grafen etter at eleven har bestemt asymptotene. Funksjonen er gitt, kan plottes med digitalt verktøy, og tegnes av.

Ingen kommunikasjonskompetanse er nødvendig, og det er verken nødvendig eller hensiktsmessig å bruke noen slags hjelpemidler for å løse oppgaven.

5.3.2 Bruk av nylig innført algoritme med et kreativt trinn

Noen oppgaver har den nyinnførte algoritmen som den prinsipielle løsningsmetoden, men skiller seg fra eksemplene ved at de krever at leseren benytter også andre teknikker under løsningen. Dette kan være snakk om å kombinere den nye regelen med algoritmiske prosedyrer leseren kjenner fra før. I så fall vil oppgaven ofte være av typen IR likevel. Andre ganger er det snakk om et trinn som krever kreativt resonnement hos leseren. I oppgavene under kommer dette trinnet først i løsningen av dem, men det kan også komme underveis eller til slutt. Hvor vanskelig dette trinnet er, vil variere, men mens slike oppgaver i *Sigma* ofte er varianter av eksemplene (for eksempel 6.16b og 6.17b fra R1), inneholder en tilsvarende oppgave jeg fant i *Kalkulus* et element som leseren må løse uten hjelp fra eksemplene.

Oppgave B5.39 (Thorstensen, et al., 2007, s. 180) Regn ut: $\lim_{x\to 3} \left(\frac{x-x^2}{2x-6} + \frac{2x-x^2}{3-x}\right)$

Oppgaven skiller seg fra eksemplet som ligner mest, ved at det er snakk om en sum av to kvotienter der begge nevnerne går mot null. I denne boka lærer elevene at dersom vi vil finne grenseverdien for en kvotient, og nevneren går mot null, men telleren ikke gjør det, så eksisterer ikke denne grenseverdien. Man opererer altså ikke med grenseverdier lik ∞ eller $-\infty$. Énsidige grenser er heller ikke et tema. Uten disse verktøyene er det ikke med én gang tydelig hva summen av to slike kvotienter skulle være. Det kunne være at grenseverdien for summen av dem eksisterer, selv om grenseverdien for hvert av leddene ikke gjør det.

Eksempel 2 b) (Thorstensen, et al., 2007, s. 157) Finn grenseverdien dersom den eksisterer: $\lim_{x\to 2} \frac{5x-10}{x^2-4x+4}$

Løsning: Vi bruker faktoriseringsformelen for andregradsuttrykk i nevneren:

$$\lim_{x\to 2} \frac{5x-10}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2} \frac{5\cancel{(x-2)}}{(x-2)\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2} \frac{5}{x-2}$$

Når vi fullfører utregningen, finner vi at telleren nærmer seg 5, mens nevneren nærmer seg 0. Brøken vokser over alle grenser. Det vil si at grenseverdien ikke eksisterer.

Strategiimplementeringen blir å skrive om uttrykket i oppgaven, slik at det blir én kvotient, som i eksemplet, for så å kunne følge eksemplet videre.

$$\lim_{x\to 3} \left(\frac{x-x^2}{2x-6} + \frac{2x-x^2}{3-x}\right) = \lim_{x\to 3} \frac{-4x^3+6x^2-9x}{-2x^2+12x-18} = \lim_{x\to 3} \frac{x(4x^2-6x+9)}{2(x-3)^2}$$

Andregradsuttrykket i telleren lar seg ikke faktorisere, og vi står igjen med et uttrykk der nevneren går mot null, mens telleren ikke gjør det. Eleven kan nå, på bakgrunn av eksemplet, konkludere med at denne grenseverdien ikke eksisterer.

For å kunne bruke denne strategien er eleven nødt til å kunne se at uttrykket i oppgaven kan skrives om til én kvotient. Ellers vil ikke eksemplet være til nytte. Videre er han nødt til å kunne utføre denne omskrivningen og faktorisere teller og nevner så langt det går an, for å kunne komme til sin konklusjon. Når uttrykket først er omskrevet til én kvotient, kan man følge eksemplet i den videre løsningen av oppgaven. Dette første trinnet som eleven må se og utføre, gjør at oppgaven klassifiseres som Lokal CMR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Lok CMR						N		M

Det sentrale i denne oppgaven er håndteringen av symbolene, hvorav noen er relativt nye for eleven. Han må kunne sette en sum på felles brøkstrek, og han må kunne faktorisere telleren og nevneren, med eller uten digitalt hjelpemiddel.

En annen oppgave av denne typen finnes i *Kalkulus*. Her er det kreative trinnet mer krevende.

Oppgave 4 c) (Lindstrøm, 2006, s. 239) Finn grenseverdien $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$.

I dette delkapitlet finner jeg et eksempel der jeg har en kvotient med $\infty - \infty$ i nevneren. Dette er eksemplet som ligner mest.

Eksempel 5.4.12 (Lindstrøm, 2006, s. 237) Finn $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}+x}$

Løsning: Siden $\sqrt{x^2+x}$ går mot ∞ og *x* mot $-\infty$, er det ikke klart hva nevneren går mot. For å forenkle problemet, multipliserer vi over og under brøkstreken med det konjugerte uttrykket $\sqrt{x^2+x}-x$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x}$$

Deler vi nå med *x* i teller og nevner, får vi (vær forsiktig, husk at vi er interessert i negative *x*):

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)=-2$$

Og følgelig er $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}+x}=-2$.

Strategiimplementeringen i oppgave 4c blir å gange over og under brøkstreken (som foreløpig ikke finnes) med den konjugerte, for så å følge samme prosedyre som i eksemplet. Det er imidlertid ikke umiddelbart tydelig at det er dette som er veien å gå, nettopp fordi vi ikke har noen brøkstrek.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=\frac{3}{2}$$

Det er dette første trinnet, som ikke har med gjenkjenning å gjøre, men med de intrinsiske egenskapene (å kunne tenke på $\sqrt{x^2+3x}-x$ som $\frac{\sqrt{x^2+3x}-x}{1}$), som gjør at oppgaven krever Lokal CMR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Lok CMR	N					N		

Et uttrykk som ser ut til å gå mot $\infty - \infty$ kan ha en grenseverdi, men bare om vi kan skrive det om til brøkform og forkorte. Å se dette krever tankegangskompetanse. Algebraen i denne oppgaven er ganske vrien, og i den forstand er oppgaven blant de mest krevende ferdigoppstilte grenseverdioppgavene i delkapitlet. Symbol- og formalismekompetanse er dermed sentralt. Studenten kan bruke digitale hjelpemidler for å overbevise seg selv om at en grenseverdi eksisterer og han kan nok finne denne verdien ved å sette inn en stor verdi for x. Dette hjelper ikke studenten på vei med selve utregningen, men kan tjene som en slags kontroll.

5.3.3 Bruk av en regel i en ikke-algoritmisk sammenheng

Noen oppgaver krever at man bruker en regel på en måte som er forskjellig fra den måten som rutineoppgaver skal drille leseren i. Dette kan medføre at leseren er nødt til å kjenne regelens utstrekning og begrensning, hvilke betingelser som må være oppfylt for at den skal kunne brukes, med mer. Oppgaven under er hentet fra *Sigma*, hvor slike oppgaver er sjeldne. Merk at oppgaven er spesielt merket som en utfordring.

Utfordring 5.5 (Thorstensen, et al., 2007, s. 157) Bestem a slik at grenseverdien eksisterer:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x + a}{x^2 - 4}$$

Regn ut grenseverdien for denne verdien av a.

Boka gir eksempler der man skal finne en grenseverdi for en kvotient der både teller og nevner går mot null (for eksempel har vi eksempel 2b som er gjengitt ovenfor). I disse tilfellene prøver man å finne grenseverdien ved å faktorisere teller og nevner og forkorte. Boka gir eksempler der dette lykkes i å gi oss en (endelig) grenseverdi, og ett eksempel der dette ikke fører fram.

For å løse oppgaven må eleven skjønne at det er relevant at nevneren går mot 0 når x går mot 2. Noe av det som gjør denne oppgaven utfordrende, er at boka aldri spesifiserer at det er når også telleren går mot 0 at grenseverdien likevel kan eksistere.

Eleven må bruke det at man finner nullpunktene til et polynom ved å sette uttrykket lik 0, altså $x^3 - 2x + a = 0$. (Disse har hittil for det meste blitt referert til som løsninger på ligninger, ikke som nullpunkter.) Videre må han bruke at x går mot 2 til å få $2^3 - 2 \cdot 2 + a = 0$, som gir $a = -4$. Eleven må faktorisere nevneren og se at det er faktoren $(x - 2)$ som er relevant når x går mot 2, og at denne faktoren må forkortes bort dersom grenseverdien skal eksistere. Ved polynomdivisjon (en teknikk eleven kan fra før, men som demonstreres på nytt på samme side som denne oppgaven) finner eleven faktoren $(x - 2)$ også i telleren, og han står igjen med

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 2}$$

Nå kan han sette inn $x = 2$ og finne grenseverdien $\frac{5}{2}$.

Ingen eksempler er veldig lik denne oppgaven, og eleven benytter seg av de matematiske objektenes intrinsiske egenskaper hele veien. Oppgaven har mange trinn som krever kreativt resonnement, og oppgaveteksten gir ingen hjelp til å finne løsningen. Derfor krever denne oppgaven Global CMR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Glo CMR	N	M				N		

For å løse oppgaven er eleven som sagt nødt til å vite hvilke betingelser som må være oppfylt for at grenseverdien kan eksistere. Det vil si at tankegangskompetanse er essensielt. Oppgaven er i en viss forstand allerede definert og oppstilt (i motsetning til fjellklatrerproblemet nedenfor), men løsningsmetoden har flere trinn og er ikke åpenbar. I motsetning til de andre oppgavene om grenseverdier, finnes det her ingen eksempler som tar eleven gjennom en tilsvarende prosess (slik eksempel 2 på s. 157 leder deg gjennom oppgave 5.1-4 på samme side i *Sigma R1*). Oppgaven er ikke en problemløsningsoppgave i samme forstand som fjellklatrerproblemet, men krever en viss problemløsningskompetanse av årsakene som er nevnt.

Symbol- og formalismekompetanse er sentralt for å kunne løse oppgaven. Grenseverdikonseptet med tilhørende symboler er nytt for eleven, og her er forståelsen av dem viktig i løsningen av oppgaven. I tillegg til variabelen x, som går mot 2, har eleven også a å tenke på.

For eleven kan ligningen $x^3 - 2x + a = 0$ se ut som én man kan bruke et digitalt hjelpemiddel for å løse, men det er ikke tilfellet.

Oppgave 8 a) (Lindstrøm, 2006, s. 344) La

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan x}{1 + x^2}, & x \geq 0 \\ Ae^x + B, & x < 0 \end{cases}$$

Finn A og B slik at f er kontinuerlig og deriverbar for alle x.

Eksemplet som ligner mest er 130 sider foran, der man skal vise at en funksjon er *diskontiuerlig* i 0:

Eksempel 5.1.4 (Lindstrøm, 2006, s. 214): Vis at funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{hvis } x \leq 0 \\ 2x + 1, & \text{hvis } x > 0 \end{cases}$$

ikke er kontinuerlig i punktet $a = 0$.

Løsning: Hvis du tegner grafen til denne funksjonen, ser du at $f(0) = 0$, men at $f(x)$ *ikke* går mot null (men mot 1) når x nærmer seg 0 ovenfra. Det betyr at dersom vi velger ε mindre enn 1 (for eksempel $\varepsilon = \frac{1}{2}$), så vil det uansett hvor liten vi velger $\delta > 0$ finnes noen x slik at $|x - 0| < \delta$ og $|f(x) - f(0)| > \varepsilon$ (nemlig alle *positive* x mindre enn δ). Siden det ikke finnes ε-er som ikke kan pareres av noen δ, så er funksjonen diskontinuerlig i $a = 0$.

Funksjonen i oppgaven er gitt ved brudden forskrift, som i eksemplet. Første linje i løsningen forklarer hvorfor funksjonen i eksemplet ikke er kontinuerlig i 0, men den forklarer også studenten hva som skal til for at funksjonen i oppgaven *skal* være kontinuerlig i 0.

Her stopper imidlertid likheten. I eksemplet skal man vise at en gitt funksjon ikke er kontinuerlig i punktet 0. I oppgaven skal man finne konstantene A og B slik at f er kontinuerlig i 0 (funksjonen er kontinuerlig for alle andre x siden den er sammensatt av kontinuerlige funksjoner.)

For kontinuitet i 0:

$$f(0) = \frac{\arctan 0}{1 + 0^2} = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to 0^-} (Ae^x + B) = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to 0^-} (A + B) = 0 \Longrightarrow A = -B$$

For å avgjøre hvorvidt funksjonen er deriverbar i 0, får ikke studenten noe hjelp fra eksempler.

For deriverbarhet i 0:

$$D\left[\frac{\arctan x}{1 + x^2}\right] = \frac{1 - 2x \arctan x}{(1 + x^2)^2} \Longrightarrow f'(0) = 1 \Longrightarrow \lim_{x \to 0^-} D[Ae^x + B] = 1 \Longrightarrow \lim_{x \to 0^-} Ae^x = 1$$

Det følger at

$$A = 1 \qquad B = -1$$

Oppgaven krever at studenten bruker funksjonens intrinsiske egenskaper for å finne svaret, og han får veldig lite hjelp fra eksemplet. Videre er deriverbarhet er et tema som ikke behandles før i kapitlet etter denne oppgaven, så om studenten skal løse oppgaven slik jeg har løst den, må han bruke Global CMR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Glo CMR	N	M				N		

Å løse oppgaven forutsetter at leseren vet hva som kreves for at en funksjon skal være kontinuerlig og deriverbar. Begge uttrykkene som inngår i funksjonen er kontinuerlige og deriverbare for alle x, så det er kun punktet 0 som leseren må undersøke nærmere. Mest sentralt for oppgaven er altså tankegangskompetanse. Noe problemløsningskompetanse kreves også. Det er ikke åpenbart at man skal sette opp én ligning for kontinuitet og en annen for deriverbarhet, men det at den ene delen av funksjonen inneholder to ukjente konstanter, kan kanskje tyde på noe slags ligningssett er en løsningsmetode.

5.3.4 Eksplisitte hint

Noen ganger er det ikke likheten med et tidligere eksempel som leder leseren til korrekt løsningsmetode, men eksplisitte hint gitt i oppgaveteksten.

Oppgave B7.30 (Sandvold, et al., 2009, s. 252) En selger av mobiltelefoner får to tilbud:

A: 120 kr for hver telefon hun selger.

B: Et fast beløp på 2000 kr og 85 kr for hver telefon hun selger.

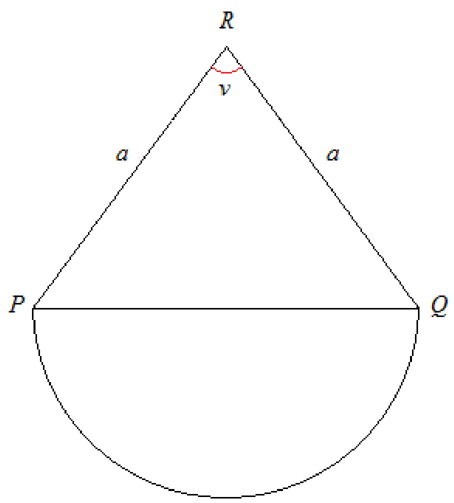
Lag en ulikhet og finn ut hvor mange telefoner hun må selge for at tilbud A skal være bedre enn tilbud B.

Eleven får altså klar beskjed om at denne oppgaven løses ved å sette opp en ulikhet. Ingen eksempler der man oversetter en tekst til en ulikhet er gitt, så eleven må stille opp ulikheten selv og bruke dens intrinsiske egenskaper for å få ulikhetstegnet rett vei. Når ulikheten først er skrevet opp, kan eleven følge framgangsmåten i eksempel 1 s. 234, som viser hvordan man løser en ulikhet. Til slutt må eleven passe på at svaret $x > 57{,}1$ betyr at man faktisk må selge minst 58 telefoner for at tilbud A skal være best. Han kan altså ikke bare runde av (slik han kanskje er vant med) eller la svaret stå med desimaler. Dette gjør at på tross av det eksplisitte hintet, kvalifiserer oppgaven til Lokal CMR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Lok CMR						N	M	

Oppgaven her er å oversette teksten til riktig ulikhet, løse denne ulikheten, og til slutt gi en tolkning av svaret som er fornuftig i lys av teksten. Det meste av dette inngår i symbol- og formalismekompetanse. Dette er den første tekstoppgaven jeg har sett på hittil. Selv om oppgaveteksten er kort og eksplisitt, vil jeg argumentere for at en viss kommunikasjonskompetanse er nødvendig for at en 1T-elev skal kunne tolke oppgaven og formulere svaret.

Oppgave 3.93a (Sandvold, et al., 2008, s. 124) Et parkanlegg har form som vist på figuren. Anlegget består av en likebeint trekant PQR der $PR = QR = a$ og $\angle R = v$, i tillegg til en halv sirkelflate med diameter lik PQ. Finn PR uttrykt ved a og v, for eksempel ved å bruke cosinussetningen. (Funksjonsdrøftingen kommer senere i oppgaven, men det er i denne deloppgaven eleven får et eksplisitt hint.)



Fordi de krever færre kompetanser, er oppgaver der man kun jobber med tall er stort sett enklere enn de som krever at man jobber med ikke-numeriske symboler og andre representasjoner, og å jobbe med enkelttilfeller er ofte enklere enn å tenke generelt. Her er en oppgave som i den forstand kunne vært ganske utfordrende, og det finnes dessuten ingen eksempler som ligner på denne oppgaven. Uten hintet om cosinussetningen ville denne oppgaven krevd Global CMR, men når eleven kan slå opp cosinussetningen med en tilhørende figur, er det ikke så langt til løsningen. Eleven må bytte ut symbolene i setningen slik den står skrevet, med symbolene i oppgaven, og løse ligningen for PQ. Med hintet plasseres oppgaven i stedet i Lokal CMR-kategorien.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Lok CMR						N		

Av oppgavene jeg har sett på i *Sigma R2*, er denne blant de som krever mest symbol- og formalismekompetanse. Med hintet om cosinussetningen krever oppgaven imidlertid ingen andre kompetanser. Oppgaven er å sette inn de gitte ikke-numeriske symbolene på rett plass i cosinussetningen og gjøre et stykke algebraisk arbeid.

Oppgave 1 b) (Lindstrøm, 2006, s. 230) Bruk ekstremalverdisetningen til å vise at funksjonen har maksimums- og minimumsverdier på intervallet $[1{,}0001,\ 3]$.

$$f(x) = \frac{\ln(\sin^2 x + e^x)}{x - 1}$$

Eksempel 5.3.6 tar for seg en lignende situasjon. Der skal man vise at $f(x) = x^7 \sin\left(e^{x^{14}/(x^2+1)}\right)/(x^4+1)$ har et maksimumspunkt på $[-1, 2]$. Forfatteren gjør dette vet å vise til at f er kontinuerlig ut ifra teorien han nylig har presentert (men han viser ikke dette eksplisitt), og at $[-1, 2]$ er et lukket, begrenset intervall, slik at ekstremalverdisetningen gjelder.

Oppgaven er svært lik eksemplet, men ikke i den forstand at man kan bytte ut tallene fra eksemplet med tallene i oppgaven og få et fornuftig svar. Oppgaven krever Lokal CMR fordi studenten er nødt til å ha en viss forståelse for argumentasjonen i eksemplet, og han må bruke intrinsiske egenskaper ved funksjonen i oppgaven for å vise at den oppfyller de samme premissene:

Telleren er definert på hele intervallet, ettersom argumentet er postivt på hele intervallet. Argumentet er en sum av to kontinuerlige funksjoner, så telleren er kontinuerlig. Nevneren er definert og kontinuerlig på hele intervallet. Funksjonen $f(x)$ er altså kontinuerlig på dette intervallet, og intervallet er lukket og begrenset. Dermed har $f(x)$ maksimums- og minimumspunkter der.

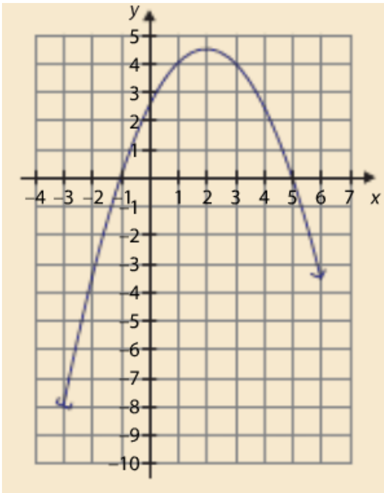
Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Lok CMR	M					N		

Studenten må kjenne forutsetningene for å bruke ekstremalverdisetningen, og han må vise at funksjonen oppfyller disse betingelsene. Dette krever tankegangskompetanse, men siden eksemplet viser dette så tydelig, er det nok at studenten vet hva det vil si at en funksjon er kontinuerlig og at et intervall er lukket og begrenset. Å forstå notasjonen for funksjonsuttrykket og intervallet krever symbol- og formalismekompetanse.

5.3.5 Implisitte hint

Når en oppgave inneholder flere deloppgaver, vil man i noen tilfeller kunne bruke svaret fra én av dem til å løse en som kommer senere. Sagt på en annen måte er det faktum at det første spørsmålet i hele tatt opptrer et implisitt hint om hvordan man skal gå fram videre. Leseren er imidlertid nødt til å være mer oppmerksom enn når han får eksplisitte hint. Han må se at det er en naturlig progresjon i spørsmålene som stilles.

Test 7.C (Sandvold, et al., 2009, s. 251) Figuren viser grafen til en funksjon f:



a) Skriv opp definisjonsmengden og verdimengden til f.

b) Les av på grafen løsningen til likningen $f(x) = 0$.

c) Bestem a, b og c slik at $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Løsning (Sandvold, et al., 2009, s. 312)

a) $D_f = [-3, 6\rangle \quad V_f = [-8, 4{,}5\rangle$

b) $f(x) = 0$ når $x = -1$ eller $x = 5$.

c) Av svaret i b får vi at f må kunne skrives

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x + 1)(x - 5)$$

Vi multipliserer ut og får

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x + 1)(x - 5) \\ &= a(x^2 - 5x - x - 5) \\ &= a(x^2 - 4x - 5) \\ &= ax^2 - 4ax - 5a \end{aligned}$$

Vi leser av toppunktet til $(2, \frac{9}{2})$. Så setter vi $x = 2$ inn i uttrykket for $f(x)$ ovenfor:

$$a(2^2 - 4 \cdot 2 - 5) = a \cdot (-9) = -9a$$

Men dette vet vi skal være lik $\frac{9}{2}$, altså

$$-9a = \frac{9}{2}$$

Det gir $a = -\frac{1}{2}$. Denne verdien setter vi inn i uttrykket for f.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$$

Altså har vi $a = -\frac{1}{2}, b = 2, c = \frac{5}{2}$.

Det er oppgave c jeg er interessert i her. Den kan man også løse den oppgaven ved å ta utgangspunkt i at $c = f(0)$, lese av denne verdien, og så finne a og b ut fra den øverste ligningen i løsningen. Uansett må man gå veien om nullpunktene, og som forfatterne selv sier i sitt løsningsforslag, er dette noe vi finner i svaret på forrige deloppgave. Det er dette som skal kunne lede eleven til å sette opp den øverste ligningen, en sammenheng eleven er kjent med fra formler og eksempler i kapittel 5. Der forklarer forfatterne at vi finner faktoriseringen av et andregradspolynom ved å sette uttrykket lik null. Å finne b og c når man først har funnet a, er ikke spesielt vanskelig. Å sette opp ligningen og å finne a er det som krever kreativt resonnement, men om man er oppmerksom, får man litt hjelp. Oppgaven krever Lokal CMR, men er én av de mer vriene av den typen.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Lok CMR	N				N	N		

For å kunne løse oppgave c, må eleven først ha løst oppgave b. Her er det viktig at eleven kan oversette mellom et funksjonsuttrykk og den tilhørende grafen, og motsatt. Dette krever representrasjonskompetanse. Oppgaven er én av kun 6 oppgaver (B7.38, A7.41, A7.43, 7.68 og 7.73 – alle disse er plassert bak i boka) i kapittel 7 som har grafen til en funksjon som utgangspunkt, og ber eleven bruke den til å finne (deler av) funksjonsuttrykket, lese av definisjonsmengde og verdimengde, eller tegne fortegnslinje. De andre oppgavene som involverer grafer (for eksempel 7.18, 7.22 og A7.54) ber eleven tegne grafen til et gitt funksjonsuttrykk.

Å sette opp ligningen krever en viss tankegangskompetanse, men eleven får som sagt litt hjelp til å koble sammen formlene $ax^2 + bx + c$ og $a(x - x_1)(x - x_2)$. Men eleven er nødt til å bruke tankegangskompetanse også for å løse siste del av oppgaven. Han må gjøre koblingen til formelen for ekstremalpunktet til en parabel og se at den kan brukes for å finne de ukjente konstantene.

Oppgaven inneholder også ganske kinkig algebra, så eleven må nyttiggjøre seg sin symbol- og formalismekompetanse.

Oppgave B6.37 (Thorstensen, et al., 2007, s. 213)

a) Multiplisér ut: $e^{-x}(e^x - 1)(e^x - 4)$
c) Vi har gitt $f(x) = e^x + 4e^{-x} - 5$. Finn nullpunktene.

Når man multipliserer ut uttrykket i oppgave a, får man uttrykket i oppgave c. Nullpunktene er altså i en viss forstand gitt i oppgave a, ettersom uttrykket allerede er faktorisert der. For å finne x-verdiene kan eleven simpelthen følge et eksempel fra samme delkapittel:

Eksempel 9a (Thorstensen, et al., 2007, s. 200) Funksjonen f er gitt ved $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$. Bestem nullpunktene ved regning.

Løsning: Vi finner nullpunktene ved å løse likningen $f(x) = 0$. Her løser vi andregrads-likningen og får

$$e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$$

$$e^x = 1 \quad \text{eller} \quad e^x = 3$$

Husk! Når $b > 0$ har vi $e^x = b \Leftrightarrow x = \ln b$

$$x = \ln 1 = 0 \quad \text{eller} \quad x = \ln 3 \approx 1{,}099$$

Med nullpunktene gitt på denne måten i oppgave a, slipper eleven å gå det kreative trinnet å multiplisere uttrykket i oppgave c med e^x for å få en andregradsligning. Han trenger dermed ikke å tenke over hvorfor dette ikke endrer nullpunktene i uttrykket, noe som er en intrinsisk egenskap ved eksponentialfunksjonen. Om eleven ikke overser at uttrykkene i oppgave a og c er de samme, vil oppgave c kunne løses med IR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
IR						N		M

Eleven løser denne oppgaven ved å utføre den nødvendige algebraen. Ligninger der e^x er den ukjente er nye for eleven, så han må han god symbol- og formalismekompetanse.

Dersom eleven selv hadde måttet gange med e^x for å få en andregradsligning, ville oppgaven krevd tankegangskompetanse, ettersom dette krever at man er kjent med eksponentialfunksjonens spesielle egenskaper.

5.3.6 Hint fra ikke-matematisk informasjon

Noen ganger vil situasjonen som presenteres i en oppgave kunne gi leseren en idé om hvordan han skal finne svaret. Tidligere nevnte jeg koblingen mellom bankinnskudd og geometriske rekker. I oppgaven under er ikke bare alle spørsmålene lik de i eksemplet, men også sammenhengen de er satt i er den samme.

Oppgave 7.18 (Sandvold, et al., 2009, s. 245) Når vi produserer en bok, er de faste kostnadene 60 000 kroner. I tillegg kommer kostander til papir, trykking og innbinding på 75 kroner per bok.

a) Finn et uttrykk for enhetskostnaden per bok når det blir produsert *x* bøker.
b) Tegn grafen for x-verdier mellom 500 og 5000.
c) Regn ut hvor mange bøker som er produsert når enhetskostanden er 100 kroner per bok.

Eksempel 10 (Sandvold, et al., 2009, s. 244) Vi skal produsere en bok. De faste kostadene er 300 000 kr. I tillegg må vi regne med en variabel kostnad på 120 kr per bok.

a) Sett opp et funksjonsuttrykk for kostnaden per bok når vi lager *x* bøker.

b) Tegn grafen når $x \in [1000, 20\,000]$.

c) Bestem hvor mange bøker vi må lage for at kostanden per bok skal bli mindre enn 200 kr.

Om ikke eleven ser den matematiske koblingen mellom oppgaven og eksemplet, vil han iallfall kunne se sammenhengen som teksten gir. Den vil lede ham til dette eksemplet, som kan brukes som templat for å løse oppgaven. Alle tre spørsmål faller dermed i IR-kategorien.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
IR					M	M		M

For å svare på oppgave c har eleven flere mulige tilnærminger. Han kan gjøre som i eksemplet og tegne inn linja $y = 200$ og lese av x-verdien der linja krysser grafen fra oppgave b. Eventuelt kan han bruke funksjonsuttrykket han fant i oppgave a og sette opp en ulikhet. Et tredje alternativ er å bruke digitalt hjelpemiddel til å finne x-verdien i punktet $y = 200$. Disse tre alternativene korresponderer med henholdsvis representasjonskompetanse, symbol- og formalismekompetanse, og hjelpemiddelkompetanse.

Noen tekstoppgaver kan kreve en viss kommunikasjonskompetanse hos leseren for at han skal kunne tolke oppgaven og formulere svaret. Her er imidlertid oppgaven så lik eksemplet at det ikke er nødvendig.

I *Kalkulus* finner jeg ingen oppgaver der sammenhengen hinter om hvilken løsningsmetode man skal bruke.

5.3.7 Nøkkelord

Jeg finner flere eksempler på hvordan en kobling mellom visse nøkkelord i oppgaveteksten og en løsningsmetode kan være nok til å finne rett svar, uavhengig av forståelsen for intrinsiske egenskaper ved de involverte matematiske objektene. For eksempel finnes oppgaver som gir leseren en funksjon som representerer én eller annen størrelse og ber ham finne ut når denne er *størst/høyest/...* evt. *minst/lavest/...* Disse adjektivene kan fort kobles til å sette den deriverte lik null og finne x-verdien der den deriverte skifter fortegn fra positivt til negativt, henholdvis negativt til positivt. Tilsvarende kan adverbene *vokser raskest* evt. *saktest*, eller *øker mest* evt. *minst*, kobles til den samme prosessen for den andrederiverte. Nøkkelordene kan være formelle matematiske begreper eller de kan være uformelle begreper som brukes i dagligtale.

Merk at det faktum at en oppgave inneholder slike nøkkelord ikke impliserer at man ikke kan løse oppgaven med full forståelse av hva begrepene betyr. Poenget er at det er mulig å løse noen oppgaver uten å forstå de involverte begrepene matematisk, så lenge man (med en viss grad av sikkerhet) kan koble det til rett prosedyre.

Oppgave A6.27a (Thorstensen, et al., 2007, s. 211) Bakterietallet i en bakteriekultur er tilnærmet gitt ved

$$N(t) = -10t^3 + 150t^2 + 700t + 10\,000, \quad t \in [0, 10]$$

der t er antall timer fra et valgt tidspunkt. Avgjør når veksten er størst.

Eksempel 4a (Thorstensen, et al., 2007, s. 194) Vi planter et tre som er 1,00 meter høyt. Etter t år er høyden til treet i meter gitt ved

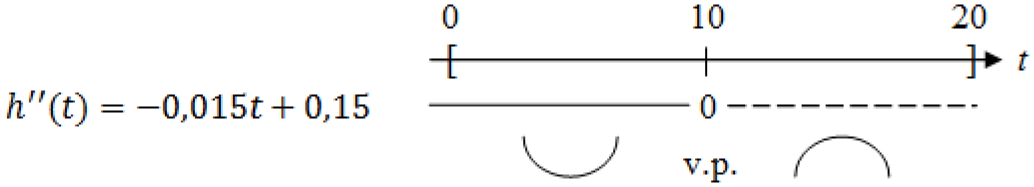
$$h(t) = -0{,}0025t^3 + 0{,}075t^2 + 1{,}00, \quad t \in [0, 20]$$

Når vokser treet raskest?

Løsning: Svaret på dette spørsmålet finner vi ved hjelp av fortegnslinja til den andrederiverte:

$$h'(t) = -0{,}0025 \cdot 3t^2 + 0{,}075 \cdot 2t = -0{,}0075t^2 + 0{,}15t$$

$$h''(t) = -0{,}0075 \cdot 2t + 0{,}15 \cdot 1 = -0{,}015t + 0{,}15$$



Når $t = 10$, skifter $h''(t)$ fortegn fra pluss til minus. Treet vokser altså raskest etter ti år.

Oppgaven har flere likheter med eksemplet enn den språklige som jeg fokuserer på her, blant annet når det kommer til representasjon. Poenget er at denne språklige likheten gjør at eleven lettere kan identifisere eksemplet som et templat for løsning til oppgaven. Selve regneoperasjonene (derivasjon av et polynom og å lage fortegnslinje) er algoritmer eleven er kjent med fra før. Oppgaven krever ikke mer enn IR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
IR					M	N		

For å løse oppgaven må eleven skjønne forskjellen mellom $h(t)$, $h'(t)$ og $h''(t)$, og han må utføre derivasjon av en polynomfunksjon. Dette inngår i symbol- og formalismekompetanse. Fortegnslinjer er en representasjon som eleven er kjent med fra fjoråret, og han trenger ikke kombinere fortegnslinjer for flere derivat for å løse oppgaven. Derfor mener jeg denne oppgaven krever en viss grad av representasjonskompetanse, men ikke ikke så høy.

5.3.8 Bevis med ett kreativt trinn

Bevis omfavner svært mye. Mange matematiske setninger kan bevises på flere måter og med ulik grad av rigorøsitet. Noen ting er vanskeligere å bevise enn andre, og vanskegraden kan påvirkes av hvilken måte man velger å bevise den aktuelle setningen på. Noen bevis har få trinn, andre har mange. Bevisene vil dessuten variere med tanke på hvor mange matematiske setninger og teknikker som må brukes. Uansett vil et bevis nesten alltid kreve en viss grad av kreativt resonnement. Unntak inkluderer blant annet rutinemessige induksjonsbevis.

Oppgave 4 (Lindstrøm, 2006, s. 261) Anta at f og g er to deriverbare funksjoner og at f er positiv. Vis at

$$D\left[f(x)^{g(x)}\right] = f(x)^{g(x)}[g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}]$$

Det virker rimelig å anta at man skal skrive om uttrykket på venstre side til uttrykket på høyre side hovedsakelig ved hjelp av derivasjonsregler. Én av teknikkene som blir presentert i samme delkapittel, er logaritmisk derivasjon.

Setning 6.1.10 (Lindstrøm, 2006, s. 260) Hvis f er deriverbar og forskjellig fra 0 i punktet x, så er

$$f'(x) = f(x) \cdot D[\ln|f(x)|]$$

Oppgaven kan kanskje løses på flere måter. For meg virker det mest effektivt å bruke regelen ovenfor:

$$\begin{aligned} D\left[f(x)^{g(x)}\right] &= f(x)^{g(x)} \cdot D\left[\ln f(x)^{g(x)}\right] \\ &= f(x)^{g(x)} \cdot D[g(x) \ln f(x)] \\ &= f(x)^{g(x)}[g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}] \end{aligned}$$

For å utføre beviset som ovenfor, må leseren se at logaritmisk derivasjon er å foretrekke, noe funksjonen vitner om. (Lindstrøm (2006, s. 261) skriver at ”dersom $f(x)$ inneholder mange produkter og potenser, viser [logaritmisk derivasjon] seg å være meget tidsbesparende.”) Eksemplet som demonstrerer teknikken gir ingen eksplisitt hjelp i utføringen av beviset, men det tar for seg derivasjon av en funksjon opphøyd i en annen funksjon, noe som kan være et tegn på at dette er teknikken som skal brukes i beviset.

Eksempel 6.1.11 (Lindstrøm, 2006, s. 261) Derivér $f(x) = |\cos^{18} x \cdot e^{\tan x} \cdot (x^{16} +$ *3x12)*/$\cos x$

Leseren må også gjøre bruk av tredje logaritmesetning, samt reglene for derivasjon av en logaritmefunksjon, produktregelen og kjerneregelen, slik man også ser i eksemplet.

Det er særlig det første trinnet som krever kreativt resonnement. Dersom leseren ser dette, vil han kunne bruke reglene han er vant med for å komme i mål. Å utføre beviset på denne måten krever Lokal CMR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Lok CMR	N			M		N		

Til denne oppgaven trenger studenten en viss resonnementskompetanse. Beviset er av typen der du skal vise at ett uttrykk er likt et annet, og resonnementskompetansen er den som trinnvis lar deg skrive om venstre side til høyre side. Den brukes for å kontrollere at hver likhet er riktig. Beviset har ganske få trinn, og handler mer om to andre kompetanser.

For å kunne gjøre de nødvendige omskrivningene må studenten som sagt anvende flere regler om derivasjon og logaritmer. Han er nødt til å bruke logaritmisk derivasjon, som er en ny teknikk for ham, og omskrivningen av uttrykket involverer utfordrende algebra. Han trenger tankegangskompetanse og symbol- og formalismekompetanse for å kunne håndtere alle disse reglene og teknikkene på én gang.

5.3.9 Bevis med flere kreative trinn

Nå vil jeg se på et bevis som har flere kreative trinn, og som dermed er litt vanskeligere enn det foregående.

Oppgave 17 (Lindstrøm, 2006, s. 262) La n være et naturlig tall og anta at f og g er n ganger deriverbare. Vis at

$$D^{(n)}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{(n-k)} f(x) D^{(k)} g(x)$$

der $D^{(n)}h$ betegner den n-tederiverte til funksjonen h. Bruk formelen til å finne den fjerde-deriverte til $h(x) = e^x \sin x$.

Her er det mindre tydelig hvordan man skal gå fram, sammenlignet med beviset ovenfor. Litt uformelt kan man si at det er lengre vei å gå mellom venstre og høyre side i ligningen. Igjen vil det kanskje finnes flere måter å bevise dette på. Uten å være sikker på at det ville føre fram, valgte jeg å prøve et induksjonsbevis.

For $n = 1$ kan jeg bruke produktregelen for å skrive om uttrykket.

$$\begin{aligned} D^{(1)}[f(x)g(x)] &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= \binom{1}{0} D^{(1)} f(x) D^{(0)} g(x) + \binom{1}{1} D^{(0)} f(x) D^{(1)} g(x) \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} D^{(1-k)} f(x) D^{(k)} g(x) \end{aligned}$$

Nå antar jeg at formelen jeg skal bevise gjelder for n, og jeg skal vise at dette impliserer at

$$D^{(n+1)}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} D^{(n+1-k)} f(x) D^{(k)} g(x)$$

er sant. Da vil setningen være bevist.

$$D^{(n+1)}[f(x)g(x)] = D\left[D^{(n)}[f(x)g(x)]\right] = D\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{(n-k)} f(x) D^{(k)} g(x)\right]$$

$$= D\left[\binom{n}{0} D^{(n)} f(x) D^{(0)} g(x) + \binom{n}{1} D^{(n-1)} f(x) D^{(1)} g(x) + \binom{n}{2} D^{(n-2)} f(x) D^{(2)} g(x) + \cdots\right.$$

$$\left. + \binom{n}{n-2} D^{(2)} f(x) D^{(2)} g(x) + \binom{n}{n-1} D^{(1)} f(x) D^{(n-1)} g(x) + \binom{n}{n} D^{(0)} f(x) D^{(n)} g(x)\right]$$

$$= \binom{n}{0}\left[D^{(n+1)} f(x) D^{(0)} g(x) + D^{(n)} f(x) D^{(1)} g(x)\right]$$

$$+ \binom{n}{1}\left[D^{(n)} f(x) D^{(1)} g(x) + D^{(n-1)} f(x) D^{(2)} g(x)\right]$$

$$+ \binom{n}{2}\left[D^{(n-1)} f(x) D^{(2)} g(x) + D^{(n-2)} f(x) D^{(3)} g(x)\right]$$

$$+ \cdots$$

$$+ \binom{n}{n-2}\left[D^{(3)} f(x) D^{(n-2)} g(x) + D^{(2)} f(x) D^{(n-1)} g(x)\right]$$

$$+ \binom{n}{n-1}\left[D^{(2)} f(x) D^{(n-1)} g(x) + D^{(1)} f(x) D^{(n)} g(x)\right]$$

$$+ \binom{n}{n}\left[D^{(1)} f(x) D^{(n)} g(x) + D^{(0)} f(x) D^{(n+1)} g(x)\right]$$

Leddet til høyre i én parantes er det samme som leddet til venstre i neste parantes. Jeg summerer koeffesientene deres.

$$= \binom{n}{0}\left[D^{(n+1)} f(x) D^{(0)} g(x)\right]$$

$$+ \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right]\left[D^{(n)} f(x) D^{(1)} g(x)\right] + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right]\left[D^{(n-1)} f(x) D^{(2)} g(x)\right] + \cdots$$

$$+ \left[\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1}\right]\left[D^{(2)} f(x) D^{(n-1)} g(x)\right] + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right]\left[D^{(1)} f(x) D^{(n)} g(x)\right]$$

$$+\binom{n}{n}\left[D^{(0)}f(x)D^{(n+1)}g(x)\right]$$

Jeg bruker så at $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ og dessuten at $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$ og $\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}$

$$=\binom{n+1}{0}\left[D^{(n+1)}f(x)D^{(0)}g(x)\right]$$

$$+\binom{n+1}{1}\left[D^{(n)}f(x)D^{(1)}g(x)\right]+\binom{n+1}{2}\left[D^{(n-1)}f(x)D^{(2)}g(x)\right]+\cdots$$

$$+\binom{n+1}{n-1}\left[D^{(2)}f(x)D^{(n-1)}g(x)\right]+\binom{n+1}{n}\left[D^{(1)}f(x)D^{(n)}g(x)\right]$$

$$+\binom{n+1}{n+1}\left[D^{(0)}f(x)D^{(n+1)}g(x)\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}D^{(n+1-k)}f(x)D^{(k)}g(x)$$

Eksemplene i boka gir ingen hjelp til å identifisere en algoritmisk løsningsmetode for denne oppgaven. Blar man helt fram til kapittel 1.2, som tar for seg induksjonsbevis, kan man potensielt se noen overfladiske likheter (som summetegnet og bokstaven n) med eksempel 1.2.3. Der viser forfatteren ved induksjon at $\sum_{i=0}^{n}x^i=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ for $x\neq 1$. Det er imidlertid mer sannsynlig at en student som blar helt fram til begynnelsen av boka allerede har identifisert induksjonsbevis som en potensiell løsningsmetode, basert på de intrinsiske egenskapene (å vise at en regel gjelder for enhver n). Til og med hvis en student klarer å gjøre koblingen til induksjonsbevis basert på overfladiske egenskaper, venter det ingen algoritme som sikrer en løsning.

Studenen må så bruke produktregelen på hvert ledd fra rekka som han skriver ut. Deretter kommer noe av det vanskeligste med dette beviset, nemlig å se at det lar seg gjøre å omgruppere leddene og bruke at $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$. Denne regelen er også gitt helt i begynnelsen av boka. Til slutt må studenten skrive om første og siste ledd, som ikke faller inn under denne formelen og som dermed blir "til overs." Den beviste regelen kan så brukes til å finne den fjerdederiverte til $h(x)=e^x\sin x$.

I dette beviset må altså studenten velge en gunstig løsningsmetode, utføre litt krevende algebra, hente inn en formel fra kombinatorikken, og sy det hele sammen på slutten. Han må benytte et bredt spekter av regler og teknikker, oppgaven har flere trinn, og han må bruke objektenes intrinsiske egenskaper hele veien. Oppgaven krever derfor Global CMR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Glo CMR	N			N		N		

Jeg refererer til utdypningen og argumentasjonen i de foregående avsnittene og finner at resonnementskompetanse er sentralt i løsningen av oppgaven. Studenten må ha tankegangskompetanse for å håndtering av de aktuelle reglene, og han bruker symbol- og formalismekompetanse når han benytter disse reglene i praksis og gjør de nødvendige utregningene.

5.3.10 Nyansert bruk av en matematisk setning

Når vi regner, bruker vi matematiske setninger hele tiden. Mange oppgaver krever ikke at man er spesielt oppmerksom med tanke på hvorvidt kriteriene for bruken av en gitt setning er oppfylt. For eksempel er det lett å identifisere når man kan produktregelen for derivasjon. Andre oppgaver involverer setninger med strengere krav, og man kjenne teorien godt hvis man skal kunne avgjøre hvorvidt man har lov til å bruke setningen i et gitt tilfelle.

Oppgave 6 (Lindstrøm, 2006, s. 267) La $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Vis at $f(-1) = f(1)$, men at det ikke finnes noe punkt i $(-1,\ 1)$ der f' er lik null. Hvorfor strider ikke dette mot Rolles teorem?

$$f(-1) = 1 - (-1)^{2/3} = 0 \quad f(1) = 1 - 1^{2/3} = 0 \quad f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-1/3}$$

Rolles teorem (Lindstrøm, 2006, s. 263) Anta at funksjonen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, og at den er deriverbar i alle indre punkter $x \in (a, b)$. Anta videre at $f(a) = f(b)$. Da finnes det et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) = 0$.

Ingen eksempler der Rolles teorem brukes er gitt, så studenten må gå til selve teoremet og finne ut om det er et kriterium som ikke er oppfylt. Funksjonen er åpenbart kontinuerlig, og studenten kan raskt finne at $f(-1) = f(1)$. Da er det bare deriverbarhet som gjenstår, og når man deriverer funksjonen, blir det tydelig at funksjonen ikke er deriverbar for $x = 0$. Dermed strider det ikke mot Rolles teorem at funksjonen ikke har noe nullpunkt på $(-1, 1)$.

Studenten må bruke funksjonens intrinsiske egenskaper for å løse oppgaven, og ingen lignende eksempler er gitt. Med andre ord kan ikke studenten simpelthen imitere en prosedyre fra læreboka. Slik definisjonen på Global CMR er gitt, faller oppgaven i den kategorien, men den er av de mindre vanskelige av den typen. (Husk at slike oppgaver ikke nødvendigvis er utfordrende, noe jeg presiserte i kapittel 3.2.3.)

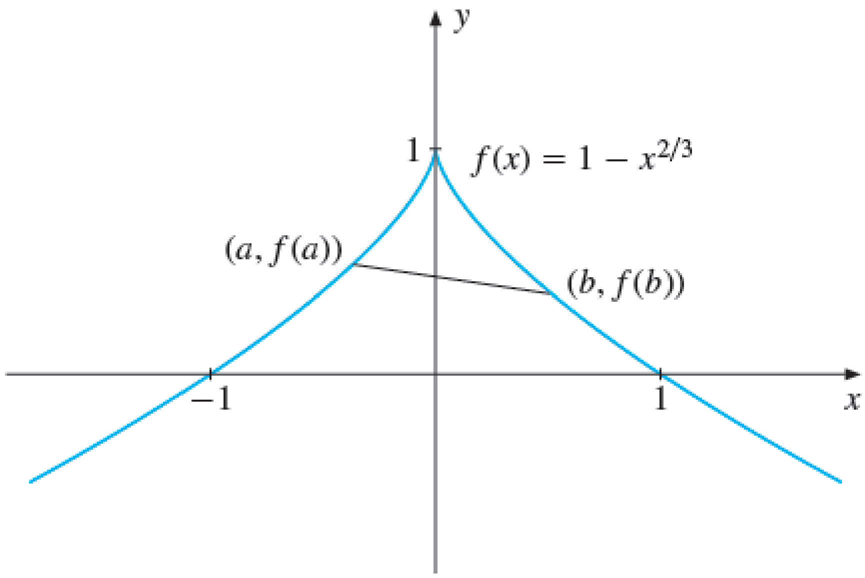
Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Glo CMR	N					M		

Det er tankegangskompetanse som er sentralt i denne oppgaven. Studenten må kunne gjøre noen enkle utregninger og deretter påpeke at resultatet ikke strider mot Rolles teorem, ettersom teoremet forutsetter at f er deriverbar i alle (indre) punkter på intervallet. Siden f ikke er deriverbar i 0, gjelder ikke Rolles teorem for denne funksjonen.

Oppgave 17 b) (Lindstrøm, 2006, s. 290) La $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig og anta at $a < c < b$. Vis at selv om f er konveks på hvert av intervallene $[a, c]$ og $[c, b]$, så behøver ikke f være konveks på $[a, b]$.

Eksempel 6.4.8 (Lindstrøm, 2006, s. 286) Hvor er funksjonen $f(x) = 1 - x^{2/3}$ konveks?

Løsning: Deriverer vi to ganger får vi $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-1/3}$, $f''(x) = \frac{2}{9}x^{-4/3}$. Den dobbeltderiverte er positiv unntatt i punktet $x = 0$, der den ikke er definert. Ifølge setningen er da f konveks på intervallene $(-\infty, 0]$ og $[0, \infty)$. Det er fristende å tro at funksjonen også er konveks på hele $\mathbb{R}$, men det er ikke riktig. [Figuren] viser at linjestykket som forbinder to punkter på hver sin side av null, slett ikke ligger over funksjonsgrafen slik som det skal. Vi må altså være forsiktige med betingelsene i setning 6.4.7 [som sier at dersom f er kontinuerlig på et intervall I og $f''(x) \geq 0$ for alle indre punkter $x \in I$, så er f konveks på I] – ryker de i ett eneste punkt, risikerer vi at konklusjonen også ryker!



Den enkleste måten å løse oppgaven på, virker å være ved et eksempel på en funksjon som er konveks på $[a, c]$ og $[c, b]$, men ikke på $[a, b]$. Eksempel 6.4.8 gir studenten en slik funksjon, og teksten og figuren gir forklaringen. Merk at selv om eksemplet gir studenten et svar på oppgaven, er spørsmålet i eksemplet ganske forskjellig fra oppgaven studenten er bedt om å løse. Studenten kan dermed ikke gjøre et overfladisk søk etter en oppgave som har en problemstilling lik den i oppgaven, men er nødt til å lese hele eksemplet for å dra nytte av det i denne sammenhengen. Gjør han det, kan han simpelthen oppgi funksjonen og eventuelt grafen i eksemplet, med tilhørende forklaring (som han ikke trenger å ha noen dyp forståelse av), som svar på oppgaven. Dette krever bare IR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
IR	N					N		

Som i oppgaven ovenfor, må studenten være kompetent i bruken av de aktuelle begrepene, og han må forstå de symbolene som brukes. Dette er en forutsetning for å kunne få mye hjelp fra eksempel 6.4.8.

Som moteksempel kan studenten som sagt bruke grafen fra eksemplet, noe som ikke krever at studenten kan gjøre noen kobling mellom $f(x)$ og grafen som er representert i koordinatsystemet. På den andre siden vil dét å komme med et eget moteksempel ikke kreve at studenten vet hvilken funksjon det er han uttrykker som en graf. Ettersom ingen av disse metodene krever at studenten ser sammenhengen mellom funksjonsuttrykket og den tilhørende grafen, kreves det ikke representasjonskompetanse, slik man kanskje først skulle tro.

Jeg finner ingen oppgaver som ligner disse to i de kapitlene jeg studerer i *Sigma*.

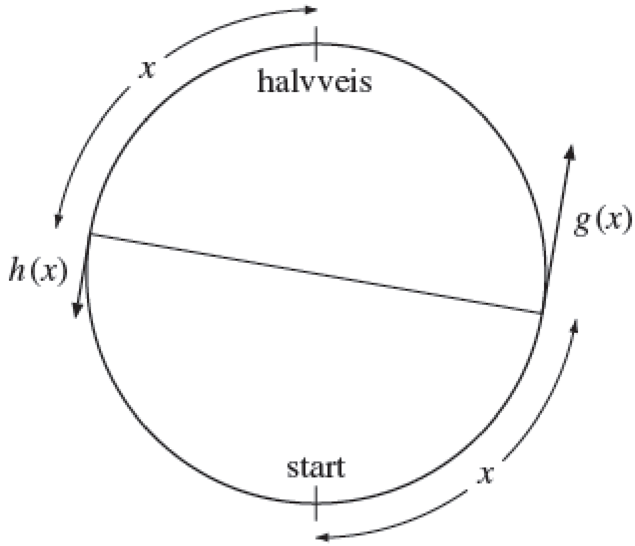
5.3.11 Matematisk diskusjon og forklaring

Diskusjoner kan hjelpe oss å se en oppgave fra flere sider og kan gi oss dypere forståelse enn vi hadde i utgangspunktet. Matematikken er ikke noe unntak fra dette prinsippet. Når du ikke har noen å diskutere med, kan en velformulert oppgave sette i gang en tankeprosess der du oppnår noe tilsvarende etter å ha reflektert over ulike tilnærminger til oppgaven.

Oppgave 10 (Lindstrøm, 2006, s. 225) Ole påstår at dersom du slår en sirkel på et kart, vil det på denne sirkelen alltid være to diametralt motsatte punkter som har samme høyde over havet. Berit mener at dette umulig kan være riktig, og at hun har et moteksempel. Lag en liten historie der Ole og Berit begunner sine synspunkter. Historien skal ende med at begge innser at den andres argumenter har gitt dem en bedre forståelse av problemet.

Eksempel 5.2.4 (Lindstrøm, 2006, s. 223) Du skal løpe én gang rundt en sirkulær bane. Vi forutsetter at farten er null idet du starter og idet du går i mål, ellers kan du løpe som du vil. Vis at det alltid finnes to diametralt motsatte punkter i banen hvor farten er like stor.

Løsning: Vi definerer to funksjoner $g(x)$ og $h(x)$ ved å si at $g(x)$ er farten du har x meter etter at du startet, mens $h(x)$ er farten etter at du passerte halvveis [se figur]. Dersom a er halve banens lengde, vil g og h være kontinuerlige funksjoner på intervallet $[0, a]$. Videre er $g(0) = 0$ og $h(a) = 0$, mens $g(a) = h(0) \geq 0$. Dermed er $g(0) \leq h(0)$ mens $g(a) \geq h(a)$, og ifølge korollar 5.2.2 finnes det en c slik at $g(c) = h(c)$. Men dermed er farten like stor i de diametralt motsatte punktene du er i etter å ha løpt henholdvis c og $c + a$ meter.



Oppgaven er i praksis en variant av dette eksemplet fra boka. Ole vil starte med å plukke et vilkårlig startpunkt på sirkelen og definere to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$. Om du beveger deg langs sirkelen med klokka, vil $f(x)$ være høyden i forhold til startpunktet når du har beveget deg x meter, mens $g(x)$ vil være høyden i forhold til startpunktet, x meter etter at du har passert halvveis.

Ole lar nå a være halve omkretsen av sirkelen. Da vil $f(0) = 0$ og $g(a) = 0$. Dersom nå $f(a) = g(0) = 0$, har Ole funnet to punkter av typen han var ute etter. Hvis i stedet $f(a) = g(0) > 0$, vil $f(0) < g(0) = 0$, mens $f(a) > g(a)$, og da forteller skjæringssetningen at det finnes et punkt c på sirkelen der $f(c) = g(c)$. Det samme gjelder om $f(a) = g(0) < 0$.

Berit vil nå innvende at skjæringssetningen forutsetter at de involverte funksjonene er kontinuerlige, noe høyden langs sirkelen ikke trenger å være. Et enkelt moteksempel vil være å be Ole tenke seg at sirkelbuen er delt i tre like lange deler, der høyden er konstant langs hver bue, men at det mellom hver av dem er en klippe.

Uttrykkene ”slå en sirkel” og ”diametralt motsatte punkter” vil lede studenten til dette eksemplet. Det kan tjene som et utgangspunkt, og framgangsmåten lar seg fint overføre til Oles påstand i oppgaven. Studenten må imidlertid selv finne ut hvorfor de to situasjonene ikke er helt like; han må finne ut hva slags moteksempel Berit kan ha. For å finne et moteksempel må man stille spørsmålet, hvilken betingelse ved skjæringssetningen gjelder i eksemplet med løpebanen, men ikke på kartet? Da bruker man de intrinsiske egenskapene ved funksjonene og man må ha forstått forutsetningen for at skjæringssetningen skal gjelde. Dette siste trinnet i oppgaven gjør at den klassifiseres som Lokal CMR. Uten hjelp fra eksemplet ville oppgaven krevd Global CMR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Lok CMR	N			N	N	N	N	

I denne oppgaven er kommunikasjonskompetanse essensielt. Det er snakk om å kunne føre en matematisk diskusjon der man evaluerer de argumentene som blir gitt. Studenten trenger ikke bruke resonnementskompetanse for å gi Oles ”bevis,” ettersom det er gitt i eksemplet, men han må trenger det for å evaluere ”beviset” og identifisere hvordan han skal tilbakevise det. Tankegangskompetanse brukes så for å vise at de nødvendige betingelsene for å bruke skjæringssetningen ikke er oppfylt.

Studenten bruker representasjonskompetanse for å se for seg funksjonene som på figuren; en måte studenten ikke er vant med. Både løsningen av oppgaven og løsningen av eksemplet inneholder ganske mange symboler som studenten skal holde styr på, og det er på symbolspråket mye av argumentasjonen foregår.

Dette er egentlig en problemløsningsoppgave, men siden den er gitt med et eksempel som som ganske lett kan omskrives til Oles del av samtalen, faller problemløsningsdelen bort.

Oppgave 7.19 b) (Sandvold, et al., 2009, s. 245) Elevene på en skole skal arrangere et juleball. Leie av lokale og musikk kommer til sammen på kr 10 000. I tillegg regner en med mat og drikke for kr 120 per elev. Vi tenker oss at *x* elever deltar på juleballet, og vi lar de samlede kostnadene per elev være kr $E(x)$. Forklar at

$$E(x) = \frac{10\ 000}{x} + 120$$

Det finnes et eksempel som ligner på dette; et eksempel jeg så på i avnsittet om hint fra ikke-matematisk informasjon:

Eksempel 10 (Sandvold, et al., 2009, s. 244) Vi skal produsere en bok. De faste kostadene er 300 000 kr. I tillegg må vi regne med en variabel kostnad på 120 kr per bok.

a) Sett opp et funksjonsuttrykk for kostnaden per bok når vi lager *x* bøker.

Løsning: Vi dividerer de samlede utgiftene med antall enheter og får

$$f(x) = \frac{300\,000 + 120x}{x} = \frac{300\,000}{x} + \frac{120x}{x} = \frac{300\,000}{x} + 120$$

Dette viser eleven hvordan han skal gjøre utregningene for å komme fram til formelen. Når det gjelder forklaringen ser også den ut som den kan overføres til oppgaven: "Jeg dividerer de samlede utgiftene med antall elever." Dessuten ber første deloppgave, oppgave 7.19a, om at du finner de samlede kostnadene om 100 elever deltar, og at du finner hvor mye det da koster per elev. Dette er en teknikk som kan være ment å gjøre det lettere for eleven. Å starte med det spesielle (som ofte involverer kun tall) for så å generalisere, kan være enklere enn å starte rett på det generelle (som involverer matematiske formler). Veien om det spesielle lar eleven tenke "hvordan kom jeg fram til svaret i oppgave a?" Oppgaven krever bare IR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
IR						M	M	

Oppgaven ber eleven om å *forklare*, så den skiller seg fra oppgaver som ber eleven om å *vise at* et gitt uttrykk er likt et annet. Forklaring innebærer at eleven må bruke ord i tillegg til det matematiske symbolspråket, men siden eksemplet er så likt, er det bare snakk om små justeringer dersom eleven skjønner forklaringen i løsningen på eksemplet. Det er lite kommunikasjonskompetanse som kreves.

5.3.12 Omskrivning av et algebraisk uttrykk

I både *Sigma* og *Kalkulus* skal man flere ganger bruke matematiske regler til å løse en ferdig oppstilt oppgave. Men noen oppgaver krever at man må bruke reglene på mer generelle uttrykk.

Oppgave 2 (Lindstrøm, 2006, s. 261) Anta at f, g og h er deriverbare funksjoner. Vis at

$$D[\,f\{g[h(x)]\}\,] = f'\{g[h(x)]\}g'[h(x)]h'(x)$$

Dette er en oppgave som først og fremst krever at leseren kan bruke kjerneregelen og skrive om algebraiske uttrykk:

$$D[\, f\{g[h(x)]\}\,] = f'\{g[h(x)]\} \cdot D[\, g[h(x)]\,] = f'\{g[h(x)]\}g'[h(x)]h'(x)$$

Oppgaven gir endepunktet for omskrivningen, så omskrivningen er ikke spesielt vanskelig. Det finnes imidlertid ingen måte å gjøre omskrivningen på uten å ha forstått kjerneregelen. Det finnes ingen eksempler som viser studenten hvordan man gjør det. Han er nødt til å ta regelen slik den er gitt i boka, $h'(a) = f'[g(a)]g'(a)$, og bruke den på en sammensatt funksjon der den indre funksjonen selv er sammensatt. Dette kan ikke imiteres, så oppgaven krever Lokal CMR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Lok CMR						N		

Studenten må i denne oppgaven håndtere litt komplisert algebra, og dette dekkes av symbol- og formalismekompetanse.

Oppgave 6.77 a) (Thorstensen, et al., 2007, s. 221) Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = ae^{bx}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Konstantene a og b er reelle tall, og $a > 0$. Vis at

$$\sqrt{f(s) \cdot f(t)} = f\left(\frac{s+t}{2}\right)$$

for alle reelle tall s og t.

$$\sqrt{f(s) \cdot f(t)} = \sqrt{ae^{bs} \cdot ae^{bt}} = \sqrt{a^2 \cdot e^{b(s+t)}} = ae^{b(s+t)/2} = f\left(\frac{s+t}{2}\right)$$

Det finnes ingen eksempler som ligner på oppgaven, så eleven er nødt til å gjøre det algebraiske arbeidet selv og denne typen omskrivning er ny for ham. Framgangsmåten er åpenbar for eleven, men det er neppe åpenbart hvordan han skal skrive om uttrykket for å komme nærmere høyre side i ligningen. En teknikk eleven kan bruke, er å ”jobbe innover” fra begge sider av ligningen, og på den måten gjøre det lettere å koble sammen de to uttrykkene.

Denne metoden er imidlertid ikke intuitiv, og den nevnes ikke i den delen av boka jeg har sett på. Oppgaven klassifiseres derfor som Global CMR.

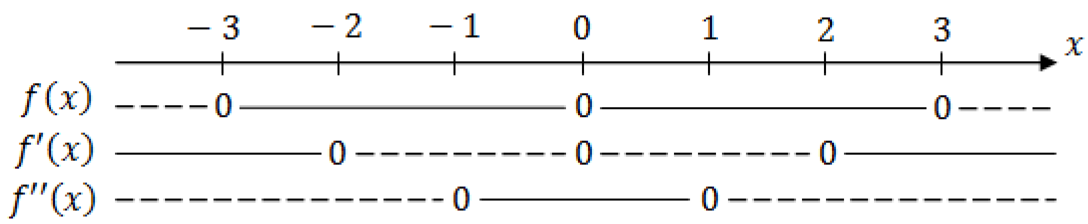
Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Glo CMR				M		N		

Det denne oppgaven først og fremst tester, er symbol- og formalismekompetanse. Som med oppgaven i kapittel 5.2.8 kreves noe resonnementskompetanse for å kontrollere hvert trinn i omskrivningen.

5.3.13 Oversettelse mellom ulike representasjoner av en funksjon

Funksjoner kan representeres på flere ulike måter, for eksempel ved algebraisk uttrykk, graf og fortegnsskjema. Disse representasjonene har ulike bruksområder, og noen oppgaver krever at man kan oversette mellom dem.

Test 6.A (Thorstensen, et al., 2007, s. 209) Tegn en graf som kan passe til disse fortegnslinjene.



Dette er en uvanlig oppgave, ettersom den ber deg gå fra fortegnskjema til graf, og ikke fra funksjonsuttrykk til graf (som i for eksempel 6.2, 6.3, 6.4 og 6.10) eller fortegnsskjema (som i for eksempel 6.5, 6.6, A6.32 og B6.33).

Det finnes figurer (for eksempel på side 190, 191 og 194) som viser hvordan grafen til en generell tredjegradsfunksjon funksjon varierer med fortegnet til funksjonen og dens første- og andrederiverte. I denne oppgaven er eleven nødt til å tegne en graf som passer til alle tre fortegnslinjene, og det finnes ingen figurer for dette. Det finnes heller ingen eksempler der man bruker fortegnslinjer for å tegne grafen til en funksjon. Eleven er nødt til å bruke funksjonens intrinsiske egenskaper hele veien, og oppgaven krever derfor Global CMR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Glo CMR	N				N			

Å kunne gå fra fortegnskjema til graf er essensielt for å kunne løse oppgaven. Jeg vil ikke si at oppgaven krever problemløsingskompetanse, ettersom framgangsmåten er rimelig åpenbar. Det enkleste virker å være å tegne et koordinatsystem for $x \in (-4, 4)$ eller tilsvarende, og plotte inn nullpunktene $x = -3$, $x = 0$ og $x = 3$. Fortegnslinja til $f'(x)$ gir at $x = -2$, $x = 0$ og $x = 2$ er henholdsvis toppunkt, terressepunkt og bunnpunkt. Endelig forteller funksjonslinja til $f''(x)$ at vi har vendepunkt i $x = -1$ og $x = 1$. Med alle disse punktene på plass i koordinatsystemet, kan man tegne en glatt kurve gjennom punktene slik at deres gitte egenskaper blir oppfylt. Slik er representasjonskompetanse nødvendig for å lese fortegnsskjemaet, og tankegangskompetanse er nødvendig for å nyttiggjøre seg informasjonen som fortegnsskjemaet gir.

5.3.14 Problemløsning

Problemløsningsoppgaver finnes på alle nivå og har til felles at de krever undersøkelse før man finner løsningsmetoden. Hva som faktisk blir et problem vil derfor være avhengig av hvem som skal løse oppgaven, men det er likevel mulig å lage en grov distinksjon når man tar i betraktning det faglige nivået på en gjennomsnittlig leser. Slike oppgaver vil dessuten skille seg ut fra mer rutinepregede oppgaver i sin formulering.

Oppgave 7 a) (Lindstrøm, 2006, s. 225) En fjellklatrer starter fra bakken kl. 7 og når toppen kl 15. Neste dag starter hun nedklatringen kl. 7 og er nede kl 15. Vis at det finnes et klokkeslett der hun er like høyt oppe begge dager.

Fjellklatrerens høyde over havet er en kontinuerlig funksjon av tiden. Jeg lar $f(t)$ være høyde over fjellets bunn den første dagen, $g(t)$ være høyde over fjellets bunn den andre dagen, og h være høyden av fjellet. Da får jeg at

$$f(7) = 0 \qquad f(15) = h \qquad g(7) = h \qquad g(15) = 0$$

Nå følger det direkte fra skjæringssetningen at det finnes et klokkeslett der fjellklatreren er like høyt begge dagene.

En alternativ løsning er å tenke seg at det er *to* fjellklatrere som starter kl. 7 samme dag; den ene starter på bunnen og den andre starter på toppen. Vi kan, uten tap av generalitet, forestille oss at de klatrer samme løype. Da er det helt intuitivt at de vil møtes én eller annen plass.

Denne oppgaven bærer preg av klassisk problemløsning. Det er studenten selv som må finne løsningsmetoden, og dét krever undersøkelse. I tillegg til at oppgaven er fra delkapitlet om skjæringssetningen, får studenten får et implisitt hint om at det er skjæringssetningen han skal bruke, ettersom tidspunktene er de samme de to dagene, noe som ikke var en forutsetning for at denne løsningsmetoden skulle holde. Neste deloppgave spør om resultatet holder også om nedstigningen starter kl. 10 og er ferdig kl. 16, og det hadde kanskje vært en ekstra utfordring om det var disse klokkeslettene som var gitt i det første spørsmålet.

Det finnes ingen eksempler som hjelper studenten med denne oppgaven. Den beste hjelpen kommer fra selve definisjonen av skjæringssetningen, men studenten er selv nødt til å forstå applikasjonen av setningen i denne sammenhengen. Han må forklare at skjæringssetningen gjelder her, og hvordan den viser at det finnes et klokkeslett der fjellklatreren er like høyt begge dagene. Å finne ut hvilken setning som man skal bruke, er ikke så vanskelig her, men å forklare bruken krever Lokal CMR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Lok CMR	M	N					M	

Dersom studenten benytter den første løsningsmetoden, må han bruke tankegangskompetanse for å vise at han kan bruke skjæringssetningen. Om han bruker den andre metoden, er det kommunikasjonskompetanse som gjelder. (Igjen, det finnes kanskje andre metoder som gir en løsning på oppgaven, og disse vil kanskje bruke andre kompetanser hos studenten, enn de jeg har brukt her.) Oppgaven ville for øvrig vært krevd mer problemløsningskompetanse dersom den spurte, ”*finnes* det et klokkeslett der hun er like høyt begge dager?” eller om den var plassert slik at det var litt vanskeligere å se hvilken setning man kan bruke for å løse den.

5.3.15 Oppgaven krever bruk av digitalt hjelpemiddel

Mange ganger er det frivillig å bruke digitalt hjelpemiddel til å løse en oppgave. Noen ganger representere det én av flere mulige metoder. Andre ganger tjener digitale hjelpemidler som kontroll, slik jeg viste i kapittel 5.2.2. Men noen ganger presiserer oppgaven at du skal løse den ved å bruke digitale hjelpemidler.

Oppgave B7.55 a) (Sandvold, et al., 2009, s. 255) En bedrift produserer hodesett til mobiltelefoner. Når den ukentlige produksjonen er x enheter, er overskuddet i kroner gitt ved

$$O(x) = -x^2 + 450x - 20\,000, \quad x \in [0, 500]$$

Tegn grafen med digitalt verktøy.

For å løse denne oppgaven trenger man å vite hvordan man tegner en polynomfunksjon med det aktuelle digitale verktøyet. Ttidligere var det vanlig at elever fra første år på videregående skole hadde en grafisk kalkulator, og dermed kunne bøkene inkludere et avsnitt om hvordan man gikk fram for å løse ulike typer oppgaver på en kalkulator fra Casio eller Texas. Nå bruker elevene i større grad programmer som er installert på pcen de får når de begynner, og *Sigma* inneholder ikke noen oppskrift på hvordan man går fram i ulike slike programmer. Det er underforstått at læreren viser denne framgangsmåten i det programmet som skolen har valgt å bruke.

Å tegne en parabel kan ikke regnes som spesielt vanskelig, og det å tegne en parabel er kanskje til og med enklere på en stor fargeskjerm i et program med oversiktlige menyer og en hjelpfunksjon, enn på en kalkulator. Oppgaven klassifiseres som IR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
IR								N

5.3.16 Oppgaven som ligner mest på modellering

I kapitlene jeg ser på finner jeg ingen oppgaver som tar for seg modellering, slik Niss & Jensen beskriver det. Oppgaven som kommer nærmest er gjengitt under.

Oppgave 3.104 b) (Sandvold, et al., 2008, s. 127) Et varmt sommerdøgn i juli ble utetemperaturen målt. Målingene ble gjort annenhver time.

Klokkeslett	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Utetemp.	20,3	18,6	18,0	18,6	20,4	22,5	24,8	26,4	27,0	26,4	24,8	22,5	20,3

Temperaturen er målt i celsiusgrader (°C), og x er antall timer etter midnatt. En modell for utetemperaturen kan være på formen

$$f(x) = A\sin(cx + \varphi) + d$$

Bruk grafen i [oppgave] a [der du skulle merke av punktene i tabell i et koordinatsystem og tegne en glatt kurve gjennom dem] til å finne et funksjonsuttrykk som passer til de målte temperaturene.

Når eleven først har tegnet grafen til funksjonen, kan han følge eksemplet på side 104 for å finne alle konstantene i funksjonsuttrykket. Eleven må kunne lese av grafen de tallene eksemplet ber om (som for eksempel maksimumspunkt), men når dét er gjort, kan han bytte ut tallene i eksemplet med de han har lest av. Forklaringen er akkopagnert av grafen til funksjonen, er delt opp i små trinn, og er så grundig at oppgaven bare krever IR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
IR					N	N		

Man skulle kanskje tro at denne oppgaven krever modelleringskompetanse, men det eleven har som oppgave har kun med den skisserte grafen å gjøre. Oppgaven går ut på å finne konstantene A, c, φ og d, noe som lar seg gjøre ved å lese av ekstremalpunktene og perioden og deretter gjøre noe enkle utregninger. Eleven er ikke involvert i selve modelleringen. Oppgaven krever dermed bare representasjonskompetanse og symbol- og formalisme-kompetanse.

5.3.17 Forskjellige løsningmetoder tester ulike kompetanser

Noen oppgaver lar leseren velge blant flere mulige løsningsmetoder. Hvilken kompetanse som testes vil være avhengig av hvilken løsningsmetode leseren velger å bruke. Dersom det finnes et eksempel på en lignende oppgave, vil det enkleste ofte være å kopiere løsningsmetoden som er gitt der.

Oppgave 7.12 c) (Sandvold, et al., 2009, s. 241) Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^2 + 4x + 3$. Finn skjæringspunktene med $g(x) = -x - 1$.

Eksempel 7 b) (Sandvold, et al., 2009, s. 241) Funksjonen f er gitt ved $f(x) = -x^2 + 4x + 5$. Finn ved regning skjæringspunktene mellom grafen til f og linja $g(x) = x + 5$.

Dette er en typisk oppgave om behandling av funksjoner (se også 7.13c, B7.49d og B7.50c.) Oppgaven er helt lik eksemplet, og ved å putte tallene fra oppgaven inn i eksemplet, finner eleven løsningen ved IR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
IR					M	M		M

Jeg har merket av både representasjonskompetanse og hjelpemiddelkompetanse som mulige veier til svaret. Her kan leseren velge å løse ligningen $f(x) = g(x)$, som er metoden som er gitt i eksemplet like før. Han kan også løse den grafisk ved å tegne grafene i et koordinatsystem og lese av skjæringspunktene (selv om dette er noe tungvint). Som et tredje alternativ kan han bruke et digitalt hjelpemiddel. Hvis han skal løse oppgaven med én de to førstnevnte metodene, trenger man å vite hvordan symbolene kan behandles, men mye kan kopieres fra eksemplet uten dypere forståelse.

Bruker man digitalt hjelpemiddel, er man i liten grad avhengig av symbolbehandling, så lenge man kan skrive inn funksjonene på riktig måte.

5.3.18 Løsningen krever bruk av mange kompetanser samtidig

I oppgaven ovenfor kunne leseren velge mellom ulike kompetanser for å finne løsningen. Noen oppgaver krever at man bruker flere kompetanser samtidig dersom man skal kunne svare på dem.

Oppgave 9 e) (Lindstrøm, 2006, s. 219) I hvilke punkter er funksjonen diskontinuerlig?

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasjonal} \\ 0, & x \text{ irrasjonal} \end{cases}$$

Eksempel 5.1.13 (Lindstrøm, 2006, s. 218) Vi definerer en funksjon $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ på følgende måte. Dersom x er irrasjonal, er $f(x) = 0$. Dersom x er rasjonal, kan vi skrive $x = p/q$ der p og q er naturlige tall uten felles faktorer (brøken er altså forkortet så mye som mulig.) Vi definerer da $f(x) = 1/q$. Vis at f er kontinuerlig i alle irrasjonale punkter og diskontinuerlig i alle rasjonale.

Løsning: Anta først at $a = p/q$ er rasjonal. Siden de irrasjonale tallene ligger tett ([husk setningen om at ethvert åpent intervall (a, b) der $a < b$ inneholder både rasjonale og irrasjonale tall]) kan vi for enhver n finne et irrasjonalt tall x_n slik at $|a - x_n| < 1/n$. Følgen $\{x_n\}$ konvergerer mot a, og hvis f var kontinuerlig i a, ville også $\{f(x_n)\}$ konvergere mot $f(a)$ ifølge setning 5.1.10. Men det er umulig siden $f(x_n) = 0$ og $f(a) = 1/q \neq 0$. Altså er f diskontinuerlig i a.

Anta så at a er irrasjonal. Gitt en $\varepsilon > 0$ må vi finne en $\delta > 0$ slik at $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ når $|x - a| < \delta$. La N være det minste naturlige tallet slik at $1/N < \varepsilon$ (en slik N finnes ifølge Arkimedes' prinsipp 2.2.6). I intervallet $(0, 1)$ finnes det bare endelig mange rasjonale tall som har nevner q mindre enn N. La z være dét av disse tallene som er nærmest a, og velg $\delta = |z - a|$. Anta nå at $|x - a| < \delta$. Da er enten x irrasjonal og $f(x) = 0$, eller $x = p/q$ er rasjonal med $q \geq N$. I det siste tilfellet er $f(x) = 1/q \leq 1/N < \varepsilon$. I begge tilfeller er $|f(x) - f(a)| = |f(x) - 0| < \varepsilon$, og vi har vist at f er kontinuerlig i a.

Bare det å lese og forstå løsningen på bokas eksempel er ganske utfordrende. Løsningsmetoden kan ikke overføres direkte til oppgaven på grunn av forskjeller mellom funksjonene, men om studenten forstår beviset, kan han kanskje trekke ut noen ting om tilnærmingen til spørsmålet om kontinuitet i punkter der funksjonsverdien er rasjonal og irrasjonal. Likevel må studenten gjøre det meste av arbeidet selv, og han må skjønne hvorfor funksjonen i oppgaven er forskjellig fra den i eksemplet, og hvilken betydning dette har for kontinuiteten. Oppgaven tilfredsstiller betingelsene for Global CMR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Glo CMR	N	N		N		N	N	

Av de oppgavene jeg ser på, er dette den der kompetanse om matematiske definisjoner er mest sentralt i løsning av oppgaven. Studenten må vite hva som er nødvendig for at en funksjon skal være kontinuerlig respektive diskontinuerlig i et punkt, noe som krever tankegangskompetanse. Det virker naturlig at det er definisjonen av kontinuitet (som boka for øvrig gir) som skal brukes for å løse oppgaven. Oppgaven krever imidlertid at man benytter definisjonen på en måte som ikke er helt rett fram, så problembehandlingskompetanse er nødvendig. Studenten må ha resonnementskompetanse for å verifisere svaret:

La p være rasjonal og la $\{x_n\}$ være en følge av irrasjonale tall som konvergerer mot p. Da er $f(p) = 1$ mens $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$, så f er diskontinuerlig i p. Tilsvarende, hvis p er irrasjonal, kan vi se på en følge $\{x_n\}$ av rasjonale tall som konvergerer mot p. Da er $f(p) = 0$ mens $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 1$, så f er diskontinuerlig i p. Altså er f diskontinuerlig for alle x.

Oppgave 10 b) (Lindstrøm, 2006, s. 220) Vis at dersom f og g er kontinuerlige i a, så er $f \cdot g$ det også.

For at $f \cdot g$ skal være kontinuerlig i a, må det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| < \varepsilon \quad \text{når} \quad |x - a| < \delta$$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(a)g(a)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)| \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(a)| + |g(a)||f(x) - f(a)| \end{aligned}$$

Både f og g er kontinuerlige. Dermed kan jeg velge en δ_1 slik at

$$|g(a)||f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{når} \quad |x - a| < \delta_1$$

Jeg kan også velge en δ_2 slik at

$$|f(x) - f(a)| < 1 \quad \text{når} \quad |x - a| < \delta_2$$

Dette begrenser f ettersom det følger at

$$|f(x)| < |f(a)| + 1 \quad \text{når} \quad |x - a| < \delta_2$$

Til slutt kan jeg velge en δ_3 som er liten nok til at

$$|g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2|f(a)|+2} \quad \text{når} \quad |x - a| < \delta_3$$

Da kan jeg velge δ slik at $\delta = \min\ \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Dermed er

$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| \leq |f(x)||g(x) - g(a)| + |g(a)||f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

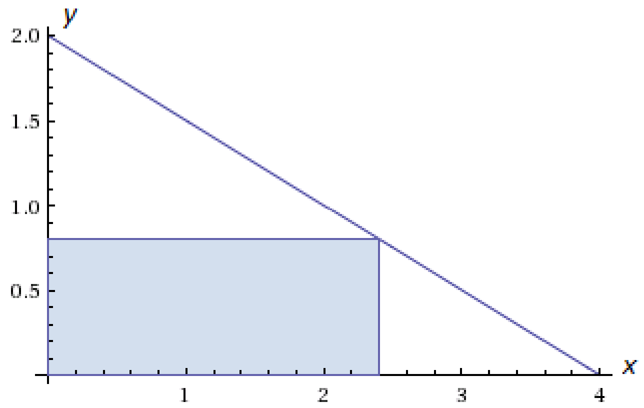
I boka finnes et eksempel som viser at dersom f og g er kontinuerlige i a, så er $f + g$ det også. Dette gjøres ved et ε-δ-bevis, noe som kan tyde på at den samme metoden er en bra plass å begynne når studenten skal vise at dette også gjelder for $f \cdot g$. Men selv om dette beviset bærer likhet med eksemplet, er det også flere trinn som er forskjellige, for eksempel det å legge til og trekke fra $f(x)g(a)$. På samme måte som i forrige oppgave, gir likhetene med eksemplet som ligner mest bare et startpunkt for undersøkelse av en mulig løsning. Oppgaven krever Global CMR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Glo CMR	N	N		N		N	N	

Dette beviset krever et bred kompetanse. For det første må studenten utføre ganske kompleks symbolbehandling. Bare det å utføre et ε-δ-bevis har ifølge Lindstøm vist seg å være utfordrende for studenter. Han skriver at ”noen studenter utvikler ε-δ-allergi og trekker ned den mentale rullegardinen hver gang disse symbolene dukker opp.” (Lindstrøm, 2006, s. 212) Studenten må også være trygg i bruk av absoluttverdier og den tilhørende trekantulikheten. Tankegangskompetanse brukes blant annet til å fortelle studenten hva som skal til for at $f \cdot g$ skal være kontinuerlig, og dette er utgangspunktet for beviset.

Framgangsmåten er ikke åpenbar. Oppgaven krever at studenten har problemløsnings-kompetanse. Resonnementskompetanse brukes til å verifisere at beviset er gyldig, og kommunikasjonskompetanse brukes til å formidle beviset på en forståelig måte.

Utfordring 8.33 (Sandvold, et al., 2009, s. 275) Finn det største arealet som det fargelagte feltet kan ha.



Også denne oppgaven er spesielt merket som en utfordring. Her må eleven først se at det er grafen til $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ som er representert på figuren. Han må skjønne at dette er høyden av rektanglet, og bruke det til å finne funksjonen for arealet av rektanglet, $A(x) = x \cdot f(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{2}x + 2\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$. Toppunktet kan han finne med digitalt hjelpemiddel eller ved å sette den deriverte funksjonen lik 0 (denne metoden er nå innført.) I eksemplet som kommer like før oppgaven, skal man fra en kartongplate på 40 cm x 60 cm lage en eske uten lokk. Denne esken skal ha størst mulig volum, og man skal finne ut hvor mye man må klippe bort i hjørnene av kartongplata for å oppnå dette. Det inngår i eksemplet å finne en funksjon $V(x)$ for volumet og å sette $V'(x) = 0$ for å finne toppunktet. Denne delen av eksemplet lar seg overføre til siste trinn i oppgaven. Den overordnede løsningsmetoden finner eleven i eksemplet, men eleven må selv finne arealfunksjonen, noe som representerer et kreativt trinn. Oppgaven krever Lokal CMR.

Mat res	Spørre og svare				Språk og redskaper			
	Tanke	Problem	Modell	Resonn	Repres	Sym/For	Kommun	Hjelpem
Lok CMR		M			N	N		M

Eksemplet gir leseren en god del hint om hvordan oppgaven skal løses, men en viss problemløsningskompetanse må eleven likevel ha. Det mest interessante med denne oppgaven er måten $A(x)$ er representert på. Eleven har i det foregående delkapitlet sett på kritiske punkter til en funksjon $f(x)$, og disse har en intuitiv sammenheng med grafen til funksjonen. Her er det ikke $f(x)$ som skal maksimeres, men $A(x)$. Dermed eksisterer ikke den samme (visuelle) sammenhengen mellom toppunkt på grafen og maksverdi for funksjonen. Slik blir representasjonskompetanse viktig for å løse oppgaven.

5.4 Sammenligning av de to læreverkenes oppgaver

I kapittel 5.1 sammenlignet jeg de to læreverkenes struktur. Nå vil jeg sammenligne oppgavene deres med en oppsummering av mine funn.

Analysen viser at *Kalkulus* inneholder en betydelig større andel oppgaver som krever Lokal og Global CMR, sammenlignet med *Sigma*. Fordelingen IR/Lokal CMR/Global CMR er 78,8%/14,7%/6,5% for de 1590 analyserte oppgavene fra *Sigma*, og 43,5%/30,0%/26,6% for de 444 analyserte oppgavene fra *Kalkulus*. Mye av denne fordelingen har rot i bøkenes oppsett, beskrevet i kapittel 5.1. Mange av oppgavene i *Sigma* er svært like ett av eksemplene, og flere av dem kan løses ved å bruke det forrige eksemplet som templat. Slike oppgaver finnes også i *Kalkulus,* men de er ikke dominerende der.

Oppgavene i *Sigma* og *Kalkulus* er forskjellige, også med tanke på kompetanser. Jamfør kapittel 4.3 har jeg til den kvalitative analysen forsøkt å plukke ut oppgaver som viser bredden av resonnement og kompetanser som kreves for å løse oppgaver i de to læreverkene. Analysen indikerer at *Sigma* preges av oppgaver som tester kompetansene som har med språk og redskaper å gjøre, mens *Kalkulus* fokuserer også på kompetansene som har med å spørre og svare i og med matematikk å gjøre.

6. DISKUSJON

6.1 Funn og tidligere forskning

Blant oppgavene jeg har analysert er det i *Kalkulus* en betydelig større andel oppgaver som krever CMR, enn det er i *Sigma*. Som tabellene i kapittel 5.2 viser, er fordelingen IR/Lokal CMR/Global CMR henholdvis 43,5%/30,0%/26,6% og 78,7%/14,7%/6,5%. Denne fordelingen støtter opp om og gir en mulig forklaring på det Selden et al (1994, gjengitt i Haavold, 2011), Lithner (2004), Lithner et al. (2011), Lesh & Zawojewski (2007, sitert i Lithner et al., 2011), Pepin et al. (2011) og Schoenfeld (1992) har kommet fram til (jamfør kapittel 2.3 og 2.4). Dersom elever er vant med å kunne løse de fleste oppgavene uten å bruke noe slags kreativt resonnement, vil dette potensielt gjøre overgangen til universitetsmatematikk utfordrende for dem. Lithner et al. (2011) forklarer at flere studier viser at lærebøker kan ha betydelig innvirkning på elevers og studenters mulighet til å lære matematikk. Dermed vil en lærebok der de fleste oppgavene kan løses ved å kopiere algoritmene fra eksemplene kunne påvirke leseren til å resonnere overfladisk (ibid, s. 223).

Analysen indikerer også at få oppgaver i *Sigma* krever de fire kompetansene som har med å spørre og svare i og med matematikk å gjøre. Dette stemmer bra med forskningen til Lithner (2004), Schoenfeld (1992) og Haavold (2011) (jamfør kapittel 2.4). I *Kalkulus* blir disse kompetansene essensielle for å løse flere av oppgavene, og forskningsresultatene i kapittel 2.3 og 2.4 viser at nye studenter ikke er forberedt på å bruke disse kompetansene. Videre kan det se ut som at oppgavene i *Kalkulus* skiller seg fra de i *Sigma* ved at de krever at man bruker flere kompetanser samtidig. Oppgavene i *Sigma* ser ut til å være delt opp i spørsmål som er mer avgrensede enn mange av oppgavene i *Kalkulus* er. Dersom elever er vant med å få oppgavene delt opp i slike trinn, kan det tenkes at det blir vanskelig når de som studenter må løse mer sammensatte oppgaver der en del av utfordringen er å se den trinnvise løsningen.

Sigma ser ut til å legge opp til læringsstrategien jeg i kapittel 3.1 kalte exposition, examples, exercises. Også i *Kalkulus* finnes det oppgaver som kan løses ved å kopiere fra eksemplene, men boka legger ikke opp til dette som den overordnede strategien. Forfatteren har bevisst forsøkt å unngå denne tilnærmingen (jamfør sitatet i kapittel 5.1.2). Dette kommer til uttrykk gjennom at delkapitlene er lengre, at flere av eksemplene er spesialtilfeller og inkluderer bruk av andre teknikker enn den som nettopp er innført, og at få av oppgavene kan løses ved å bruke eksempler som templat. I læreverkene jeg har sett på er det altså forskjeller, ikke bare når det gjelder hvilket resonnement oppgavene krever, men også med tanke på hvilken læringsstil bøkene legger opp til. Forskning gjort av Pepin et al. (jamfør kapittel 2.3) viser at denne endringen i læringsstil er en endring nye studenter ikke er forberedt på.

Undervisningskonteksten på universitetet kombinert med en lærebok med færre rutine-oppgaver og oppgaverelevante eksempler stiller høyere krav til studentenes evne til å samarbeide og diskutere med andre, og til å oppsøke foreleserne når andre studenter ikke kan gi hjelp. I en skoletime i den videregående skolen jobber elevene med rutineoppgaver mye av tiden, og siden læreren er til stede, er man ikke avhengig av evnen til å finne en løsning sammen med andre. Dessuten må ikke elevene aktivt oppsøke læreren, i motsetning til en studiesituasjon der studentene (med unntak av kollokvietimer som ikke nødvendigvis ledes av foreleseren) gjør oppgavene på egen hånd.

6.2 Mulige implikasjoner av funnene

Oppgaver som er laget for at oppgaveløseren skal pugge noe er generelt uegnet til å forbedre konseptforståelse og problemløsningsevner (Lithner, et al., 2011). Når elever som ikke er vant med å bruke slike evner blir konfrontert med en oppgave som er tilstrekkelig forskjellig fra oppgavene de har sett før (og som regnes for å kreve CMR), mislykkes de ofte når de prøver å bruke IR for å løse den. Det samme gjelder når de prøver å bruke Lokal CMR for å løse en oppgave som krever Global CMR (Lithner, et al., 2010). Dersom man er avhengig av bestemte oppgaver for å stimulere evnen til å resonnere kreativt, følger det at et manglende fokus på å løse slike oppgaver leder til at denne evnen ikke ikke blir utviklet.

Lithner (2004, s. 425) siterer Tall, som forklarer hvordan man ved å fokusere på regler og prosedyrer kan havne i en ond sirkel, ettersom oppgaver som krever kreativt resonnement blir vanskeligere og vanskeligere jo færre slike oppgaver man løser:

> "If the fundamental concepts of calculus (…) prove difficult to master, one solution is to focus on the symbolic routines of differentiation and integration. (…) The problem is that such routine exercises become just that – routine – so that students begin to find it difficult to answer questions that are conceptually challenging. The teacher compensates by setting questions on examinations that students can answer and the vicious circle of procedural teaching and learning is set in motion." The [IR] focus in exercises may be a part of this, and may thus lead to short-term gains (passing exam) and long-term losses (weak concept understanding and reasoning construction difficulties).

Dersom Haavold (2011) har rett i at elevers måte å resonnere på er preget av oppfatningen av at matematikkoppgaver kan løses ved å bruke en kjent algoritme, følger spørsmålet om hvor denne oppfatningen kommer fra. Det virker rimelig å tro at dersom en lærebok er dominert av slike oppgaver, vil elever som leser den sitte igjen med inntrykket av at det er dette matematikk handler om. Haavold (ibid, s. 194) hevder at lite fokus på problemløsning og matematisk argumentasjon ikke bare påvirker gjennomsnittselevens evner, men at også sterke elever i noen tilfeller vil resonnere overfladisk iallfall til dels på grunn av dette.

En annen forskjell mellom læreverkene jeg studerer gjelder hvor formell matematikken i bøkene er. Som påpekt i kapittel 5.1 blir de fleste av setningene i *Kalkulus* bevist, enten av forfatterne eller av leseren. I *Sigma* finnes nesten ingen bevis. I tillegg er det forskjeller i hva som regnes som en definisjon eller et bevis, og en teoretisk og stringent forklaring kan bli valgt bort til fordel for en mer visuell og forhåpentlig intuitiv forklaring, som for eksempel ved presentasjonen av derivasjon i *Sigma* (jamfør kapittel 5.1) Tall & Vinner (1981, s. 168-169) forklarer at denne tilnærmingen hvor man bevisst unngår den formelle siden av matematikken ender opp med å skape utfordringer når matematikken blir mer avansert:

> [M]any students have great difficulty (as is well known) with manipulating the definitions of limits and continuity. They are then in the situation where they may have a strong mental picture yet the concept definition image is weak. They understand the statements of theorems as being obvious, but cannot follow the proofs. (…) At more advanced levels it becomes far more difficult to visualize the concepts as mental pictures (…) The mental pictures which served the students well at an earlier stage may now become an impediment.

6.3 Intervju med en foreleser

> [T]he characteristics and domination in number of [IR] and [Local CMR] exercises may create or reinforce the common belief that mathematics is about following procedures developed by others. This belief may seriously affect a person's problem solving behaviour, for example, that own solution constructions are not even attempted. (…) If [IR] practice is sufficient to pass exams, then it may be possible to pass a mathematics course without having learnt much about either the concepts treated or general problem solving skills. (Lithner, 2004, s. 425)

Hvorfor ser vi så denne tendensen til å fokusere på algoritmer og utregninger, også etter at man har startet på høyere utdanning? Overholt gir en mulig forklaring når han sier at bare 10-12 % av de som tar Kalkulus 1 i Tromsø er matematikkstudenter. Han forteller at resultatene har gått jevnt nedover de siste tiårene, før de stabiliserte seg på gjennomgående dårlig for noen år siden. Mange flere tar tertiær utdannelse nå, sammenlignet med noen tiår siden. Det er ikke lenger bare de som presterer best akademisk som tar høyere utdannelse. Det betyr at snittet på eksamen i Kalkulus 1 går ned, og universitetet (som ønsker at flest mulig studenter skal bestå sine kurs og fullføre sine grader i løpet av normert tid) får et insentiv til å gjøre kurset lettere eller innføre brukerkurs, ifølge Overholt.

Overholt forklarer at Lindstrøms (2006) bok er forskjellig fra mange andre bøker for tilsvarende kurs fordi den ikke har så mange rutineoppgaver. Lindstrøm (ibid.) forsøker også å lære studentene noe de kan få bruk for i senere matematikkurs, som for eksempel teori og problemløsning. I Tromsø er det bare matematikere og til dels fysikere som trenger dette, og når de utgjør kun en liten andel av de som tar Kalkulus 1, får det innvirkning på kursets innhold og eksamen. Overholt har undervist i USA, og han forteller at ved store amerikanske universiteter har man mange flere studenter og mye mer ressurser enn man har her. Dermed kan de arrangere flere kalkuluskurs – ett for sivilingeniører, ett for økonomer, et for biologer, ett honors-kurs som man må bestå en test for å kunne delta på, osv. Her i Tromsø er dette urealistisk. Å ha et eget kurs på 1000-nivå for 10-12 studenter, er noe som ikke kommer til å skje. Hadde man hatt to kurs i Kalkulus 1, kunne ett av dem fulgt Lindstrøms bok tettere. Mer tid ville kunne brukes på teori, bevis og problemløsning, ettersom mindre tid ville gått med til å regne rutineoppgaver på tavla.

6.4 Hvorfor er det så lite fokus på CMR og på å spørre og svare?

Oppgavefordelingen på eksamen i lys av resonnement og kompetanser bringer på banen et element som ikke var med i problemstillingene mine. Som jeg nevnte i kapittel 1 valgte jeg å studere lærebøker i denne oppgaven, men at eksamensoppgaver også er relevante for å studere forskjeller mellom skolematematikk og Kalkulus 1. Dersom studenter er bevisste på å jobbe kun med det som kommer på eksamen, og bare utvalgt stoff fra lærebøkene er eksamensrelevant, vil forskjellene mellom lærebøkene ikke nødvendigvis reflektere forskjellene mellom det elever og studenter faktisk testes i og dermed jobber med. Andelen lærebokoppgaver som krever CMR eller kompetanser som har med å spørre og svare å gjøre trenger med andre ord ikke å gjenspeile den mangden med slike oppgaver som elever og studenter ender opp med å gjøre. I tillegg til bevisstheten om hva som kommer på eksamen, vil denne andelen også kunne påvirkes av lærerens oppgaveplan, oppgavenes plassering i boka, og det faktum at ikke bare eksempler kan brukes som templat, men også tidligere løste oppgaver.

Tidsaspektet er noe som lærere, ifølge forskning gjort av Cooney, oppgir som en grunn til å fokusere kun på rutineoppgaver (Schoenfeld, 1992). En lærer i Cooneys undersøkelse forteller at selv om andre typer oppgaver er morsomme og motiverende å holde på med, ligger det et press på lærere som fører til at dette noe som må vike for målet om at elevene skal mestre det de faktisk vil bli testet i.

Et moment som Schoenfeld (ibid.) tar opp, er oppfatningen mange elever har om at gjennomsnittseleven ikke kan forvente virkelig å forstå matematikk. Lithner, et al. (2010) forklarer at denne oppfatningen også finnes hos mange lærere. I en tidligere undersøkelse gikk det fram at lærere tror svake elever ikke er i stand til å lære eller gjøre CMR, og at konsekvensen er at ikke bare svake elever, men også resten av elevene, får matematikkundervisning som fokuserer på IR. Lithner, et al. er imidlertid ikke overbeviste om at disse lærernes oppfatning er rett.

Zeitz (1999, s. x) hevder at ”problem solving can be taught and can be learned.” Han gjennomgår mange overordnede strategier man kan bruke i møte med ulike typer problemer. Schoenfeld refererer til tidligere forskning som indikerer at elever og studenter som lærer slike heuristiske strategier, generelt ikke klarer å overføre denne kunnskapen til andre problemer. Som eksempel ser han på strategien å se på spesialtilfeller for å prøve å se et mønster og dermed kunne utlede en generell sammenheng. Han presenterer tre problemer der man kan bruke denne strategien, men hvor den må benyttes på ulike måter. En innvending mot at problemløsning kan læres, går på at slike strategier må brukes på måter som er så forskjellige fra problem til problem, at de i praksis ikke fungerer som nyttige problemløsningsverktøy.

Schoenfeld (1992) fastholder likevel at nyere forskning viser at problemløsning kan læres, for eksempel gjennom at læreren inntar en ”coaching-rolle” hvor han, mens elevene jobber med problemer, tillater seg å stille følgende tre spørsmål: Hva holder du på med (kan du beskrive det nøyaktig), hvorfor gjør du det (hva har det med løsningen å gjøre), og hvordan skal det hjelpe deg (hva skal du gjøre med resultatet når du finner det?) Han gjør imidlertid leseren oppmerksom på at å utvikle seg i evner som tilsvarer kompetansene som har med å spørre og svare å gjøre, er noe som tar lang tid og som kan være ukomfortabelt for elevene. Dette skaper potensielt et insentiv til å unngå å jobbe med disse kompetansene.

Å jobbe med problemløsning er krevende, ikke bare for elever: ”[T]rue problem solving is as demanding on the teacher as it is on the students – and far more rewarding, when achieved, than the pale imitations of it most of today’s curricula.” (ibid, s. 57) Det ligger i kortene at det er rom for at lærere kan ha også et annet insentiv for å unngå problemløsning, siden det krever mye mer av dem, både faglig og didaktisk, enn rutineoppgaver gjør.

Selv om problemløsning involverer kreativt resonnement, trenger ikke CMR være utfordrende slik problemløsning er (jamfør kapittel 3.2.3). Ett av kriteriene for CMR er at resonnementssekvensen er ny *for den som resonnerer.* Slik blir kreativt resonnement relativt, og dermed er det per definisjon iallfall mulig for elever og studenter på alle nivå å bruke CMR. Stanic & Kilpatrick mener at å sette problemløsning på toppen av matematikkhierarkiet vil påvirke dets plass i pensum (Schoenfeld, 1992), mens Hoyles mener at det leder til oppfatningen av at de fleste elever har liten sjanse til å skjønne viktigheten av logisk argumentasjon i noen slags form (Lithner, 2004). Hvorvidt den norske læreplanen og tilhørende vurderingskriterier legger opp til noe av det samme, er noe som ville vært interessant å studere nærmere ved en senere anledning.

7. OPPSUMMERING

Jeg har med denne oppgaven gjennomført en læreverkstudie av overgangen fra å lese skolematematikk å lese universitetsmatematikk. Mine forskningsspørsmål for denne oppgaven var som følger:

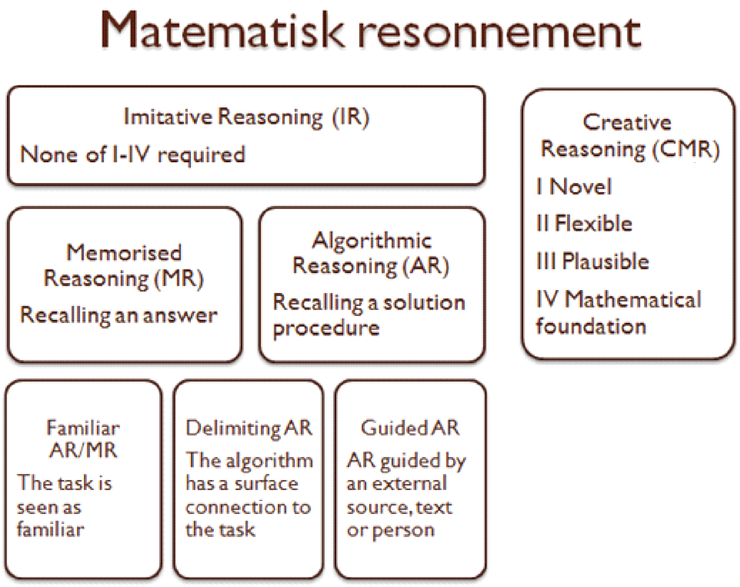
Hvilke likheter og forskjeller er det mellom læreverkene Sigma 1T-R1-R2 *og* Kalkulus?

Hvilket grunnlag gir den videregående skolens læreverk Sigma 1T-R1-R2 *for å møte emnet funksjonsdrøfting i universitetets innføringslæreverk* Kalkulus*?*

Jeg avgrenset oppgaven til temaet funksjonsdrøfting og de teknikkene som brukes til det. For å belyse disse problemstillingene brukte jeg to forskjellige begrepsapparat.

Lithner (2008) fokuserer på, og deler inn etter, hvilken type *resonnement* som brukes. Med resonnement menes her den underliggende tankeprosessen som leder fram til påstander og konklusjoner under oppgaveløsing. Tankeprosessen trenger ikke nødvendigvis å være formelt logisk, og er dermed ikke begrenset til det eleven kan bevise. Den kan til og med være feil, så lenge det (i elevens øyne) finnes gode begrunnelser som støtter den.

Den grunnleggende ideen i begrepsapparatet er at pugging er *imiterende*, mens motsetningen er *kreativ*. En viktig distinksjon som Lithner gjør for å få fram denne motsetningen, er den mellom et matematisk objekts *intrinsiske* egenskaper og dets *overfladiske* egenskaper.



Figur 21: Oversikt over Lithners begrepsapparat

Imiterende resonnement kan være memorisert (strategien er å pugge et fullstendig svar), eller den kan være algoritmisk (strategien er å pugge løsningsalgoritmer, slik at om man velger riktig algoritme, er man sikret rett svar).

Kreativt resonnement oppfyller alle de følgende kriteriene:

1) Det skapes en ny (for oppgaveløseren) resonnementsekvens (som starter med oppgaven og ender i en løsning), eller en som var glemt skapes på nytt.
2) Det finnes argumenter som gir støtte til strategivalget og/eller –implementeringen, og som gir grunn til å tro at konklusjonen er riktig eller sannsynlig.
3) Argumentene er forankret i intrinsiske matematiske egenskaper ved komponentene som inngår i resonnementet.

Et resonnement som i hovedsak er basert på AR eller MR, men som inneholder mindre, lokale elementer av CMR betegnes *Lokal CMR*, mens et resonnement som inneholder større elementer av CMR betegnes *Global CMR.* Den sistnevnte typen kan likevel inneholde en stor andel AR og MR.

Det andre begrepsapparatet er utviklet av Niss & Jensen (2002), som argumenterer for at læreplanen for alle trinn bør fokusere på matematisk *kompetanse*, i betydningen ekspertise, ettersom en liste med matematiske emner eller prosedyrer som skal læres ikke dekker den dype forståelsen for matematikk.

> Matematisk kompetence består i at have viden om, at forstå, anvende, og kunne tage stilling til matematik og matematikvirksomhed i en mangfoldighed av sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå. Dette implicerer naturligvis en mangfoldighed af konkret viden og konkrete færdigheder inden for diverse matematiske områder, men matematisk kompetence kan ikke, jf. det foregående, reduceres til disse forudsætninger.
>
> [En matematisk kompetence] er en selvstændig, rimeligt afgrænset hovedkomponent i matematisk kompetence som netop beskrevet. Man kan også sige at *en matematisk kompetence er en indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situasjoner, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer.* At sådanne kompetencer er selvstændige og rimeligt velafgreænsede, betyder ikke, at forskellige kompetencer er uden forbindelse med hinanden eller skapt afgrænsede uden overlap. Man kan tænke på en kompetence som et ”knudepunkt” i en ”klynge” af ting, der er ophobet nær midten og udtyndes ud imot randen, og som værende til dels sammenværende med forskellige andre klynger. Dette betyder også, at en kompetence i almindelighed ikke kan erhverves eller besiddes i isolation fra andre kompetencer. (Ibid, s. 43)

Niss & Jensen opererer med to kategorier med fire kompetanser i hver av dem. Å spørre og svare i og med matematikk krever tankegangskompetanse, problembehandlingskompetanse, modelleringskompetanse og resonnementskompetanse. Å kunne håndtere matematikkens sprsåk og redskaper inkluderer representasjonskompetanse, symbol- og formalitets-kompetanse, kommunikasjonskompetanse og hjelpemiddelkompetanse.

Analysen min viser at *Kalkulus* inneholder en betydelig større andel oppgaver som krever Lokal og Global CMR, sammenlignet med *Sigma.* Fordelingen IR/Lokal CMR/Global CMR er 78,8%/14,7%/6,5% for de 1590 analyserte oppgavene fra *Sigma,* og 43,5%/30,0%/26,6% for de 444 analyserte oppgavene fra *Kalkulus.* Mye av denne fordelingen har rot i bøkenes oppsett; mange av oppgavene i *Sigma* er svært like ett av eksemplene, og flere av dem kan løses ved å bruke det forrige eksemplet som templat. Slike oppgaver finnes også i *Kalkulus,* men de er ikke dominerende der.

Oppgavene i *Sigma* og *Kalkulus* er forskjellige, også med tanke på kompetanser. Jeg har til den kvalitative analysen forsøkt å plukke ut oppgaver som viser bredden av resonnement og kompetanser som kreves for å løse oppgaver i de to læreverkene. Analysen indikerer at *Sigma* preges av oppgaver som tester kompetansene som har med språk og redskaper å gjøre, mens *Kalkulus* fokuserer også på kompetansene som har med å spørre og svare i og med matematikk å gjøre.

I *Sigma* er det meste av fokus på regneteknikk, og lærebøkene er strukturert slik at det er lett å lære regneteknikkene, men man lærer ikke å bruke teknikkene i særlig mange sammenhenger. Man får det som Niss & Jensen kaller liten *aksjonsradius* for sine kompetanser. Videre er det, delvis på grunn av oppsettet med to og to sider med en ny regel eller regneteknikk, ofte enkelt å avgjøre hvilken algoritme som skal brukes for å løse oppgavene. Avgjørelsen trenger sjelden ha rot i oppgaveelementenes intrinsiske egenskaper. De oppgavene som krever Lokal eller Global CMR er stort sett å finne bakerst i boka, der oppgavene er merket etter vanskegrad. I *Sigma* bevises nesten ingen av de matematiske setningene, og matematikken er ikke så formell.

I *Kalkulus* forklarer forfatteren at han har lagt omtrent like mye vekt på teori, regneteknikk og anvendelser. Boka har mye mer teori enn *Sigma* har, og de fleste matematiske setningene bevises, enten av forfatteren eller av leseren. Et typisk delkapittel i *Kalkulus* er på rundt 10 sider og inneholder definisjoner, matematiske setninger med tilhørende bevis, eksempler og til slutt, oppgaver. Oppgavene er ikke merket etter vanskegrad. Mens oppgavene i *Sigma* er svært like eksemplene og ofte er ferdig oppstilte, blir leseren av *Kalkulus* blir nødt til å stille opp mange av oppgavene selv, uten særlig mye hjelp fra eksemplene.

Disse forskjellene mellom læreverkene kan gjøre det utfordrende å gå over fra å lese *Sigma* til å lese *Kalkulus*. Den typen resonnement og kompetanser som kreves av leseren av *Kalkulus* samsvarer med læreplanen for den videregående skolen. I forordet til *Sigma 1T* (Sandvold, et al., 2009, s. 3) finnes følgende sitat fra læreplanen: ”Opplæringen veksler mellom utforskende, lekende, kreative og problemløsende aktiviteter og ferdighetstrening.” I *Sigma R2* (Sandvold, et al., 2008, s. 3) finner jeg dette sitatet: ”Programfagets egenart skal bidra til forståelse av matematikkens betydning i vår kultur og til utvikling av argumenterende, analyserende og utforskende ferdigheter.”

REFERANSER

Bloch, I., 2003. Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove?. *Educational Studies in Mathematics,* 52(1), s. 3-28.

Bloom, B. S., 1956. *Taxonomy of Educational Objectives, Part 1: The Cognitive Domain.* New York: David McKay.

Even, R., 1990. Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics,* 21(6), s. 521-544.

Grønmo, S., 1996. Forholdet mellom kvantitative og kvalitative metoder. I: H. Holter & R. Kalleberg, red. *Kvalitative metoder i samfunnsforskning.* Oslo: Universitetsforlaget, s. 73-108.

Gulliksen, T. & Hole, A., 2010. *Matematikk i praksis.* 5. utg. s.l.:Universitetsforlaget.

Haavold, P. Ø., 2011. What characterises high achieving students' mathematical reasoning?. In: B. Sriraman & K. Lee, eds. *The Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics.* s.l.:Sense Publishers, s. 193-215.

Heir, O., Erstad, G., Moe, H. & Skrede, P. A., 2008. *Matematikk R2.* 1. utg. s.l.:Aschehoug.

Holter, H., 1996. Fra kvalitative metoder til kvalitativ samfunnsforskning. In: H. Holter & R. Kalleberg, eds. *Kvalitative metoder i samfunnsforskning.* Oslo: Universitetsforlaget, s. 9-25.

Lindstrøm, T., 2006. *Kalkulus.* 3. utg. Oslo: Universitetsforlaget.

Lithner, J., 2000. Mathematical Reasoning in Task Solving. *Educational Studies in Mathematics,* XLI(2), s. 165-190.

Lithner, J., 2004. Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *The Journal of Mathematical Behavior,* 23(4), s. 405-427.

Lithner, J., 2008. A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics,* Volume 67, s. 255-276.

Lithner, J., Boesen, J. & Palm, T., 2010. The relationship between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics,* 75(1), s. 89-105.

Lithner, J., Palm, T. & Boesen, J., 2011. Mathematical reasoning requirements in Swedish upper secondary level assessments. *Mathematical Thinking And Learning,* 13(3), s. 221-246.

Niss, M. & Jensen, T. H., 2002. *Kompetencer og matematiklæring,* København: Undervisningsministeriets forlag.

Nortvedt, G. A., 2012. *Norsk matematikkråds forkunnskapstest 2011, korrigert versjon 03.11.2012,* Oslo: Norsk matematikkråd.

Oldervoll, T. et al., 2008. *Sinus R2.* 1. utg. s.l.:Cappelen.

Pepin, B., Lysø, K. O. & Sikko, S. A., 2011. Student educational experiences at transition from upper secondary to higher education mathematics. *FOU Praksis,* s. 349-362.

Sandvold, K. E. et al., 2008. *Sigma R2.* 1. utg. s.l.:Gyldendal Norsk Forlag AS.

Sandvold, K. E. et al., 2009. *Sigma 1T.* 2. utg. s.l.:Gyldendal Norsk Forlag AS.

Schoenfeld, A. H., 1992. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. In: D. Grouws, ed. *Handbook for Research on Mathematics Thinking and Learning.* New York: MacMillan, s. 334-370.

Tall, D. & Vinner, S., 1981. Tall & Vinner: Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12(7), s. 151-169.

Thompson, J. & Martinsson, T., 1997. *Kunnskapsforlagets matematikkleksikon.* 1. utg. s.l.:Kunnskapsforlaget.

Thorstensen, R. et al., 2012. *Sigma R1.* 2. utg. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Tjora, A., 2010. *Kvalitative forskningsmetoder i praksis.* 1. utg. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Zeitz, P., 1999. *The Art and Craft of Problem Solving.* 1. utg. New York: John Wiley & Sons.

UNIVERSITY OF TROMSØ