UiT NORGES ARKTISKE UNIVERSITET

Institutt for lærerutdanning, HSL fakultetet

Elevers matematiske forklaringer

Praktisk og matematisk baserte likheter og ulikheter

Esben Johnsen og Espen Olsen

Masteroppgave i lærerutdanning 5.-10. trinn *mai 2015*

Abstract: I denne teksten fokuserer vi på elevenes forklaringer i matematikk. Gjennom deltakende observasjon fant vi ut at elever på 8.klassetrinn forklarer seg på et ulikt teknisk nivå i elevstyrte og lærerstyrte kontekster. Størst variasjon i forklaringene fant vi når samtalen var lærerstyrt, og her kom det frem at enkelte spørsmål satte elevene i en forklaringssituasjon hvor de ikke kunne gjøre rede for egen tankegang. De elevstyrte forklaringene viste seg å være mer praktisk basert enn de lærerstyrte, men det var små variasjoner i bruken av de praktiske baserte forklaringene.

Innholdsfortegnelse

Forord

Å skrive en mastergradsoppgave om kommunikasjon i matematikk var både en lærerik og utfordrende prosess. Mange faktorer dukket opp, både forventede og uventede, noe som henholdsvis skapte både en bekreftelse og utfordring i vårt arbeid. Vi ville aldri klart å gjennomføre forskningen uten hjelp fra de rundt oss i perioden som forskningen ble gjort og oppgaven ble skrevet. Vi vil her benytte muligheten til å rette vår dypeste takknemlighet til vår veileder, Ove Gunnar Drageset, som har vært en mentor uten sidestykke. I tykt og tynt har han fulgt oss gjennom hele prosessen og kommet med gode råd. Han har også vært den som, til tider, har hatt størst tro på at vi skulle klare å gjennomføre til normert tid. Vi har også stor takknemlighet ovenfor samarbeidsskolen, og da spesielt ovenfor læreren til elevgruppen vi fikk lov å låne. Takk for åpenheten, samarbeidet og fleksibiliteten du har vist.

En spesiell takk må gis til informantene våre. Uten dem ville ikke forskningen vært mulig. De har gitt oss mye, både frustrerende mengder datamateriale og lærdom. Men viktigst av alt har de vært frivillige og dyktige informanter for oss. En unnskyldning til våre nærmeste er på sin plass, da vi har vært fraværende for vår familie og våre venner. Med nesen nedgravet i lesing, analyse og skriving har vi ikke vært mye til stede. Derfor vil vi takke venner og familie for at de har støttet oss.

Alt i alt har hele prosessen, som mastergradsoppgaven har vært, forløpt seg som en berg- og dalbane. Spesielt dersom en ser på motivasjonen underveis. Vi har vært høyt og lavt, og kanskje til tider for lavt, men vi har kjempet oss gjennom med brask og bram. Vi er stolte over å endelig ha fullført utdannelsen med en mastergradsoppgave og gleder oss nå til å feire med alle våre nærmeste.

Team Espben takker for seg

Espen Olsen og Esben Johnsen

1 Innledning

Fokuset for vår forskning kom av flere ulike erfaringer fra vår lærerutdanning. Gjennom erfaring fra egen praksis viste elevene ulike strategier og fremgangsmåter når de forklarte og argumenterte for sine valg. Vi så en tendens til at elevene benyttet seg av formelle metoder og begrunnelser når de argumenterte til en lærer, noe som ikke var like fremtredende når de forklarte seg ovenfor medelevene. Betydningen dette hadde for strukturen i samtalene var med på å farge forskningsspørsmålet vårt. Mangfoldet i forklaringene innebærer blant annet at det kreves benyttelse av flere ulike kompetanser og forståelse for elevene. Et spesielt interessant perspektiv ligger her i kommunikasjonen, slik både Niss (2002) og NCTM (2000) tar for seg i sine kompetansemodeller, og viktigheten av å kunne kommunisere i faget.

Som regel består den vanlige undervisningen av et IRE-mønster (Mehan, 1979), noe som betyr at dialogen i klasserommet følger et fast mønster, eller fast struktur. Skillet mellom IRE-mønsteret og strukturen i gruppediskusjonene viste seg i praksis å være ulike. Dette fikk oss til å stille spørsmål om hvorfor, og hvilke forskjeller og ulikheter dette fører til i kvaliteten på samtalen. Vi har ikke funnet noe forskning som dreier seg rundt dette spesifikke emnet, men det eksisterer mye forskning rundt kommunikasjonsmønster og forklaringsteori. Blant annet viser Levenson (2009; 2012) til matematisk og praktisk baserte forklaringer i matematikk.

1.1 Forskningsspørsmål

Basert på kompetansemodellene til Niss (2002), Kilpatrick (2001) og NCTM (2000), og viktigheten av å kunne kommunisere i, med og om matematikk (Niss, 2002) ville vi undersøke hvilke ulikheter og likheter elevene viser til når de forklarer seg i mattefaget. Vårt forskningsspørsmål ble derfor:

> *Hvordan kan elevers forklaringer i matematikk beskrives med utgangspunkt i forklaringsteori og kompetansemodeller?*

For å svare på dette spørsmålet gjennomførte vi tre undervisningsøkter med en gruppe på fem 8.klassinger. Undervisningen baserte seg på oppgaver for å fremme kommunikasjonen i gruppen. Observasjon og videoopptak ble benyttet som dokumentasjonsmetode.

2 Teoridel

Skolen er en utdanningsinstitusjon som skal lære elevene varierte kunnskaper og ferdigheter. Blant disse finner vi muntlig og skriftlig kommunikasjon, slik det er nedfelt i den generelle delen av norsk læreplan, noe som vitner til et annet fokus enn kun et faglig perspektiv (Utdanningsdirektoratet, udatert). Fruktene av en satsing på disse områdene er mange, men det er flere som stikker seg frem som muligens ekstra viktige i matematikken. Gjennom Project Challenge, et forskningsprosjekt gjennomført i USA fra 1998 til 2002, ble omtrent 600 elever i fjerde klasse (amerikansk klassesystem og tilsvarer norsk femteklasse) fulgt over en fireårsperiode, hvor temaet omhandlet kommunikasjon i klasserommet. Forskerne fant ut at ved å benytte samtalene i klasserommet aktivt, kunne dette øke elevenes motivasjon og forbedre deres holdning til faget som helhet. De mente at dette kunne skyldes en oppbygning av selvtillit og tilskriver denne oppbygningen som et resultat av økt evne til å snakke (Chapin, 2009).

En av de viktige aspektene som kan knyttes til muntlig og skriftlig kommunikasjon ligger i dualiteten bak selve begrepet *kommunikasjon*. Mogens Niss (2002) nevner i sin rapport at kommunikasjon har en mottakende og utøvende side. Tilsvarende er det en person som forklarer, enten muntlig, skriftlig eller visuelt, mens en mottaker har som hensikt å fortolke det som ble ytret muntlig, skriftlig eller visuelt (Niss, 2002). Selv om dialog og samtale preges av individuelle etapper, hvor hver enkelt kommer med et utsagn etter tur, er det slikt sett ikke mulig å karakterisere dette som individuelle handlinger (Drageset, 2014). På denne måten virker kommunikasjon å være en sosial praksis hvor mottaker og avsender begge spiller en viktig rolle. Mogens Niss (2002) uttrykker at for å ha kommunikativ matematisk kompetanse, må en blant annet kunne forklare seg ovenfor ulike kategorier av mottakere. Dette betyr at en i mange sammenhenger må kunne forklare seg for personer med ulike kompetansegrunnlag, både basert på matematikkfaglige og kommunikative grunnlag.

Slik vi kjenner verden i dag, er den mulig å beskrive matematisk på en eller annen måte. Ofte innebærer denne beskrivelsen at flere arbeider sammen om oppgavene, enten i grupper eller par. Til denne type arbeid er det essensielt at en kan formulere seg klart og tydelig med et presist og effektivt språk (Chapin, 2009). Dette er etter egne erfaringer, noe som kommer tydelig frem i dagens skole – utfordringene elevene har når de skal forklare seg ovenfor læreren. I mange sammenhenger er det et relativt klart skille mellom hvordan elevene formulerer seg, både ved bruk av matematiske begreper og syntaks, ovenfor lærere og medelever.

I og med læreplanens langsiktige mål, å fremme til livslang læring (Stortinget, 2001), er det viktig at elevene er i stand til å kunne fortolke andres utsagn, uansett hvilken representasjonsform det har. Å oppmuntre til og benytte diskusjoner aktivt i klasserommet kan bryte barrierer hos elevene når det kommer til formidling og læring. Mercer og Littleton (2007) argumenterer for at spørsmål som stilles av læreren bør fokusere på kvalitet, ikke kvantitet. Betydningen bak dette ligger i å se på funksjonen som disse spørsmålene har (Drageset, 2014). Dette er noe også forskerne bak *Project Challenge* har fokusert på. Ved å legge fokus på den forventede responsen når spørsmålene stilles åpner det opp for en mer aktiv dialog som tar del i nuet. Forskerne benyttet formuleringer som hadde som hensikt å undersøke et spesifikt element hos et konsept, fremgangsmåte, forståelsen hos elevene og andre deler av undervisningen (fagstoff, prosedyrer etc.).

2.1 *Talk format* - gruppediskusjon

Som nevnt kan en som lærer benytte seg av ulike spørsmål for å skape og opprettholde en produktiv diskusjon i klassen, enten i grupper, par eller i plenum. Da vår forskning tok utgangspunkt i gruppediskusjon vil vi kun utdype hva som ligger bak denne type diskusjoner. Som regel innebærer slike gruppediskusjoner at læreren presenterer en oppgave for elevene. Denne oppgaven diskuteres i grupper på normalt 3-6 elever og læreren beveger seg mellom gruppene for å lytte til deler av hver gruppediskusjon. Denne type inndeling har både fordeler og ulemper. De mest fremtredende fordelene med tanke på kvaliteten i undervisningen, ligger i muligheten til å lytte til flere elever, samt at flere elever vil kunne få muligheten til å snakke (Chapin, 2009). Som motsetning vil ikke læreren ha fullstendig kontroll på samtalenes innhold til enhver tid, noe som åpner opp for mindre produktive samtaleemner (Chapin, 2009).

2.2 *Talk-moves* – spørsmålsstilling

Spørsmål fra læreren produserer spesifikke responser, og dette er et fokus lærere bør ha i bakhodet når de skal opprettholde faglig dialog med elevene. Chapin (2009) nevner med utgangspunkt i forskningen gjort under Project Challenge, fire kategorier spørsmål som det kan benyttes for tidligere nevnte årsak. Den første kategorien handler om å hjelpe elevene å *klargjøre og dele egne tanker* ved å benytte spørsmål som; *Kan du si mer? Du sa…?* Sistnevnte spørsmål faller under kategorien *re-voicing* som handler om å få bekreftet et utsagn ved å gjenta hva eleven nevnte. Dette kan hjelpe elevene å holde kontroll på egen tanker samtidig som det tvinger de til å følge med på andres utsagn. Den andre kategorien, *orientere seg til andres tenkning* (Chapin, 2009), inkluderer spørsmål som søker en gjenfortelling av andres utsagn. For eksempel: *Er det noen som kan gjenta hva Ola sa?*

Kategori tre innebærer å hjelpe elevene å *utdype deres egen begrunnelse* (Chapin, 2009). Denne kategorien kan i mange sammenhenger fungere som en kartlegging av elevenes matematiske kompetanse. *Hvorfor tror du det? Kan du bevise for oss? Hva får deg til å tro det? Hva er ditt bevis?* er typiske eksempler på hvordan en kan få elever til å begrunne og forsvare sine valg. Den fjerde og siste, kategorien har som intensjon å hjelpe elevene *engasjere seg i andre tenkning* (Chapin, 2009). Selv om denne kategorien kan virke meget lik kategori to, er det litt forskjell. Her handler det om spørsmål som: *Er du enig eller uenig…og hvorfor? Hvem kan legge til noe?,* og *Ventetid* – en metode som er ment å gi ekstra tid til elevene slik at de får strukturert sine tanker og får tid til å skape en mental formulering før de ytrer seg for felleskapet (Chapin, 2009).

2.3 Forklaringer

Initiation respons evaluation eller IRE er et typisk mønster i kommunikasjonen mellom lærer og elever i en undervisningssituasjon. Dette skjer typisk ved at læreren spør et spørsmål, eller initierer en samtale. Elevene svarer på spørsmålet, her kommer begrepet respons inn. Til slutt så evaluerer læreren elevens svar. Selv om denne typen klasseromsinteraksjon er sett på som den vanligste i skolen, har den også fått mye kritikk. Cobb, Yackel og Wood (1992) sier at denne måten å drive undervisning på begrenser elevenes mulighet til å lufte egne ideer og synspunkter, og kommentere på andre elevers resonnementer. At det blir for stort fokus på læreren, og at elevene står i fare for å bli en passiv deltaker i læringssituasjonene, er en annen side ved denne praksisen som Mehan (1979) trekker frem. Læreren innehar autoriteten i undervisningen og kan anses som fasiten for spørsmålet, ikke på grunn av de matematiske argumentene, men på grunn av rollen læreren har i diskusjonsmønsteret. Likevel påpekes det at selv om læreren leder evalueringen i undervisningen, så er det mulig å la de matematiske argumentene være autoriteten (Drageset, 2014).

Hvorfor så mange lærere bruker denne typen klasseromsinteraksjon, kan det være mange grunner til, men Mehan (1979) har en god forklaring på dette. IRE-mønsteret blir i følge Mehan (1979) sett på av mange lærere som et av hovedtrekkene ved utførelsen av lærerrollen. Med dette mener han at den tradisjonelle undervisningssituasjonen med læreren i fokus sitter dypt hos mange lærere. Mehan (1979) følger opp med at på bakgrunn av dette er det vanskelig for disse lærerne å endre sin praksis til en mer åpen og uformell struktur. Styrken ved denne typen lærer-elev kommunikasjon er at den fungerer meget bra når det kommer til å sjekke fakta kunnskapene til elevene (Knowledge network by and for educators, 2009).

Franke, Kazemi og Battey (2007) beskriver IRE-preget undervisning som en prosedyrebundet diskurs, slik som å kalkulere løsninger og memorere metoder. I denne type samtale legges det lite vekt på elevenes kognitive prosesser og tenking. I tillegg påpekes det at hovedvekten av samtalene i klasserommet skjer via plenumsdiskusjoner, hvor løsninger, teorier og metoder tas opp til drøfting. Brendefur og Frykholm (2000) introduserer fire nivåer av kommunikasjon i klasserommet, ensrettede, medvirkende, reflektive og instruktive. De to første nivåene passer godt inn under vår definisjon på IRE, mens den som er kalt reflektiv kommunikasjon minner mer om det vi har valgt å tolke som elevstyrt kommunikasjon. *”In reflective communication, the objective is to share ideas and for the student to participate in the evaluation rather than just respond to teacher initiatives.”* (Drageset, 2014, p. 2).

Wood, Williams og McNeal (2006) viser til fire ulike klasseromkulturer i skolen; den konvensjonelle problemløsende klasseromkulturen, strategi-rapporterende klasseromkultur, konvensjonell lærebok klasseromkultur og forespørrende/argumenterende klasseromkultur. Den konvensjonelle problemløsende klasseromkulturen består av at læreren presenterer oppgaven, og har en kort lærerstyrt diskusjon. Denne typen klasseromkultur kjennetegnes ofte ved at læreren gir elevene hint, og drar elevene mot en bestemt måte å løse oppgaven. Deretter jobber elevene i mindre grupper eller par med den aktuelle oppgaven. Til slutt diskuterer klassen det de har kommet frem til. Konvensjonell lærebok klasseromkultur går ut på at lærer og elever følger læreboken slavisk, og ikke viker mye fra det pensum som læreboken presenterer. Strategi rapporterende klasseromkultur fokuserer på elevenes forskjellige presentasjon av strategier, for løsning av matematiske utfordringer (Wood, Williams, & McNeal, 2006). Det vil si at denne typen klasseromkultur har fokus på hvordan elevene fremstiller de forskjellige løsningsstrategiene de benytter seg av. En slik økt består ofte av at læreren presenterer hva som forventes av elevene. Deretter jobber de i mindre grupper, og presenterer resultatet for klassen til slutt.

Forespørrende/argumenterende klasseromkultur handler også om at elevene presenterer forskjellige løsningsmetoder. Det som skiller denne klasseromkulturen fra den strategi rapporterende er at elevene også argumenterer for hvorfor de har valgt den løsningen som de har valgt (Wood, Williams, & McNeal, 2006). Et annet aspekt med denne typen klasseromkultur er at lærere og andre elever stiller spørsmål for å bedre sin egen forståelse og for å få en utdypelse rundt usikre elementer i elev forklaringene (Wood, Williams, & McNeal, 2006).

De to første klasseromkulturene vi har presentert, altså konvensjonell problemløsende og konvensjonell lærebok, skilles fra de andre ved at disse ofte er preget av at læreren påvirker hvilken løsningsmetode elevene skal benytte. Wood (1998) beskriver dette som funneling. Det vil si at læreren stiller spørsmål eller kommer med hint til elevene, slik at de blir ledet mot en måte å løse oppgaven som læreren er komfortabel med. Funneling er sett på som et typisk tilfelle som oppstår i undervisning som er preget av IRE mønsteret. De to andre klasseromkulturene kalles de reformorienterte, og innenfor disse har elevene større frihet til å løse oppgavene på den måten de føler passer dem best, uten at læreren påvirker deres valg (Wood, Williams, & McNeal, 2006).

2.4 Instrumentell og relasjonell forståelse

Skemp (1976), inspirert av Stieg Mellin-Olsen, tar for seg den tvetydige betydningen rundt begrepet forståelse. Han skiller mellom *instrumentell* og *relasjonell forståelse*. Her kommer det frem at den relasjonelle forståelsen innebærer kunnskap om hva en skal gjøre og hvorfor en skal gjøre det slik. Tilsvarende handler den instrumentelle forståelsen i stor grad om å vite hva en skal gjøre, noe Skemp (1976) beskriver som ”*rules without reason*” (p. 2). Dette betyr at en som elev eller lærer, kan benytte seg av en algoritme eller fremgangsmåte uten å være klar over årsaken til hvorfor den er mulig å bruke.

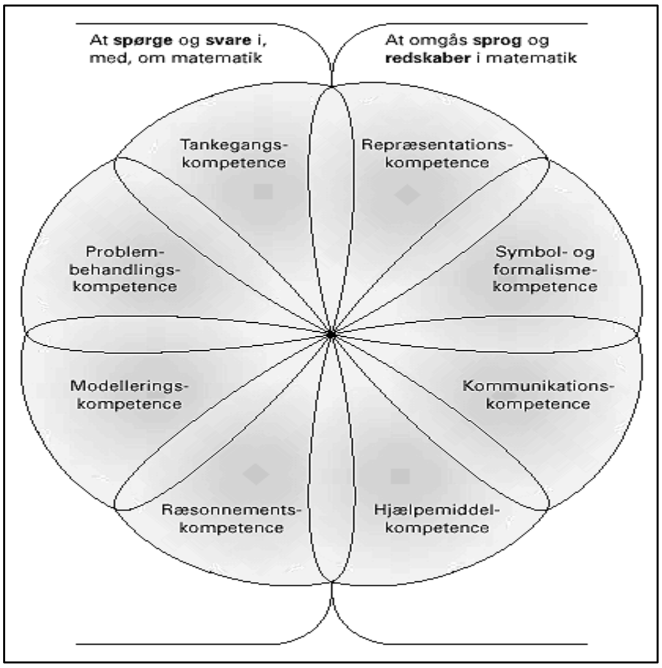
Fordeler og ulemper finnes ved begge forståelsestypene når det kommer til skolesammenheng. Fordelene den instrumentelle innlæringen har stammer ofte fra prinsippet om effektivitet, altså bruk av tid. Skemp (1976) ramser opp flere poeng, slik som at den instrumentelle matematikken er enklere å forstå, gevinsten av læringen åpenbarer seg raskere og at løsninger ofte kan finnes hurtigere. Dette kommer av den tilknytningen og sammenhengen som bygges opp i de kognitive skjemaene Piaget (Imsen, 2010) beskriver. I disse skjemaene vil den instrumentelle forståelsen stå mer individuelt og ikke være knyttet opp mot mye annen kunnskap, noe som gjør det mulig å akkomodere, altså tilpasse, kunnskap enklere og raskere. Gevinsten av læringen oppfattes raskere fordi det er kunnskap som er mulig å benytte seg av uten å nødvendigvis forstå mer grunnleggende og tidligere lært kunnskap. For eksempel kan en gjennomføre divisjon med brøk dersom en vet hvordan algoritmen er, selv om en ikke vet hva en faktisk finner ut og hvorfor metoden fungerer. Til tross for at den instrumentelle forståelsen skal være enklere og raskere kan dette bli et problem på grunn av matematikkens natur. Ofte innebærer nemlig matematisk kompetanse innenfor et emne at en må kunne benytte seg av flere algoritmer samtidig, og i slike sammenhenger stiller den instrumentelle forståelsen svakt sett opp mot den relasjonelle.

Relasjonell forståelse beskrives som mer tilpasningsdyktig til nye oppgaver, lettere å huske, er effektiv som et mål i seg selv og at den er organisk i kvalitet. Ved relasjonell læring knyttes matematiske prinsipper sammen med eksisterende kunnskap og skaper en sammenheng mellom gammel og ny kunnskap. Denne prosessen tar for seg en mer omfattende tilegning av kunnskap, ikke bare fordi en må lære hva/hvordan noe skal løses, men også hvorfor. Dette gir samtidig læringen en egenverdi og vilje til videre læring, noe som beskrives som *organisk i kvalitet*. At den relasjonelle læringen er et mål i seg selv spiller inn på motivasjonen til å arbeide med matematikk. Da denne læringen er knyttet opp mot flere ulike konsepter og annen kunnskap, vil det føre til en enklere prosess å hente tilbake tidligere lært kunnskap, altså å huske (Skemp, 1976).

Da akkommoderingen er mer omfattende vil det i overført betydning vise til en mer tidkrevende læring, noe som kan gå på bekostning av verdien denne type innlæring har i skolen (Skemp, 1976). Tradisjonelt er ikke denne type undervisning like fremtredende i skolen som IRE-metoden (Mehan, 1979). I ulike sammenhenger og emner vil den relasjonelle forståelsen være for vanskelig å bygge opp til at innsatsen er verdt tidsbruken. I tillegg har en del lærere en forutinntatthet om at den instrumentelle innlæringen er den som fungerer best, basert på empiri og erfaring, noe som gjør det vanskeligere for lærere å omstille seg fra sine gamle vaner til en mer relasjonelt orientert undervisning (Skemp, 1976).

2.5 Niss´ åtte matematiske kompetanser

Mogens Niss (2002), i samarbeid med sin forskergruppe, deler matematisk kompetanse inn i to hovedkategorier. Hver av disse inneholder fire underkategorier. De to hovedkategoriene, å kunne; *spørre og svare i, med og om matematikk* og *håndtere matematikkens språk og redskaper* er en inndeling etter innholdet i kompetansene. Hver av de åtte kompetansene er sammenfattende og generell i natur, noe som betyr at kompetansene er uavhengige av ethvert konkret matematisk emne. Tilsvarende er de også uavhengig av hvilket utdanningsnivå matematikken er på. Likevel er disse kompetansene spesifikke for matematikken, noe som gir denne kompetansemodellen en generaliserbar tyngde og relevans (Niss, 2002).



(Niss, 2002, p. 45)

Modellens utforming viser til en kompleksitet i den matematiske kompetansen som ikke er mulig å skille uten videre. Dette skyldes at alle kompetansene ikke er atskilte komponenter av den helhetlige matematiske kompetansen, men at de på ett eller annet punkt er overlappende med hverandre. For eksempel kan en ta for seg modelleringskompetansen og representasjonskompetansen. Når en konstruerer modeller i matematikken, må en kunne representere informasjon på ulike måter. Et slikt tilfelle kan være å tegne en graf når datagrunnlaget er en tabell med informasjon om x- og y-verdier. På denne måten kan en resonnerer rundt alle de ulike kompetansene. Videre bør det påpekes at denne modellen har som grunnlag å belyse kompetanser innenfor alle aspekter av matematikken, fra grunnskolen og oppover.

Førstnevnte kategori inneholder underkategoriene; tankegangskompetanse, problembehandlingskompetanse, modelleringskompetanse og resonnementskompetanse. *Tankegangskompetansen* (Niss, 2002) innebærer å være klar over hvilke spørsmål som er karakteristiske for matematikk, kunne stille slike spørsmål selv og vite hvilke svar som kan forventes av disse spørsmålene. Dette er nært knyttet formulering av spørsmål dersom en er ute etter et spesifikt svar, for eksempel på en oppgave. Tilsvarende vil læreren ha nytte av denne kompetansen for å dra nytte av nevnte *talk moves* (Chapin, 2009) i undervisning og kartlegging av elever. Ved å knytte spesifikke spørsmål inn i undervisningen vil læreren dermed kunne kartlegge de aspektene som er av interesse, ikke bare de aspektene som plutselig dukker opp, selv om at dette også er en viktig del av lærerrollen. *Problembehandlingskompetansen* går ut på å finne, oppstille, formulere, avgrense og presisere ulike matematiske problemer, både når oppgavene er åpne og lukkede, rene og anvendte og egne og andres problemer. I tillegg må en kunne løse disse problemene på ulike måter (Niss, 2002).

Modelleringskompetansen (Niss, 2002) går ut på å tolke og analysere eksisterende modeller i tillegg til at en skal kunne konstruere slike modeller selv basert på en annen representasjon. Denne representasjonen kan for eksempel være en setningsbasert, formell utledning eller et regnestykke som har blitt presentert. Analysen og tolkningen av modeller består ofte av tabeller, geometriske figurer, hjelpetegninger og grafer, noe som viser til et stort mangfold og kompleksitet i denne kompetansen. Som et ledd i modelleringskompetansen innebærer fortolkning og konstruksjon av modeller ikke bare de praktiske ferdighetene, men også det å kunne stille seg kritisk til modellens representasjon, det vil si å validere informasjonen som modellen tilbyr (Niss, 2002). Videre må en kunne kommunisere informasjonen som modellen tilbyr, noe som ofte vil innebære en fortolkning og ulik representasjon av informasjonen.

Resonnementskompetanse (Niss, 2002) går for det første ut på å følge og bedømme et matematisk resonnement, både skriftlige og muntlige, samt å skille mellom hva et bevis er og hvordan det skiller seg fra andre resonnementer. For det andre består denne kompetansen i å tenke ut og gjennomføre formelle og uformelle resonnementer, og innebærer å omforme heuristiske argumenter om til matematiske, formelle beviser (Niss, 2002).

Representasjonskompetansen tilhører kategorien *håndtere matematikkens språk og redskaper* (Niss, 2002), og innebærer å håndtere ulike representasjoner av matematiske forhold. Også denne kompetansen er todelt. For det første må en kunne avkode og fortolke ulike representasjoner, og for det andre må en kunne betjene seg av, altså formulere og konstruere ulike representasjoner. Mangfoldet av representasjoner er stort og spenner seg over et bredt spekter. Diagrammer, geometriske figurer, algebraiske utledninger og verbale representasjoner er bare noen av de ulike formene som kan benyttes (Niss, 2002).

Symbol- og formalismekompetansen (Niss, 2002) er nært knyttet opp mot representasjonskompetansen. Denne kompetansen har som basis den skriftlige kommunikasjonen og innebærer å kunne avkode symbol- og formelspråk, oversette frem og tilbake mellom naturlig og symbolholdig matematisk språk. Det innebærer også å kunne behandle og betjene seg av symbolholdige utsagn og utrykk. I tillegg må en kunne ha innsikt i karakteren og spillereglene til formelle matematiske systemer. *Hjelpemiddelkompetansen* (Niss, 2002) er tilknyttet bruk av og det å forholde seg til hjelpemidler i matematisk sammenheng. Her stilles det ikke krav til ulike tekniske hjelpemidler, men kan også være analoge tilskudd. Linjal er for eksempel et hjelpemiddel som ofte benyttes, men som ofte ikke anses som et hjelpemiddel. Tilsvarende er ulik programvare (GeoGebra, Excel), kalkulator og passer andre hjelpemidler i denne sammenheng (Niss, 2002).

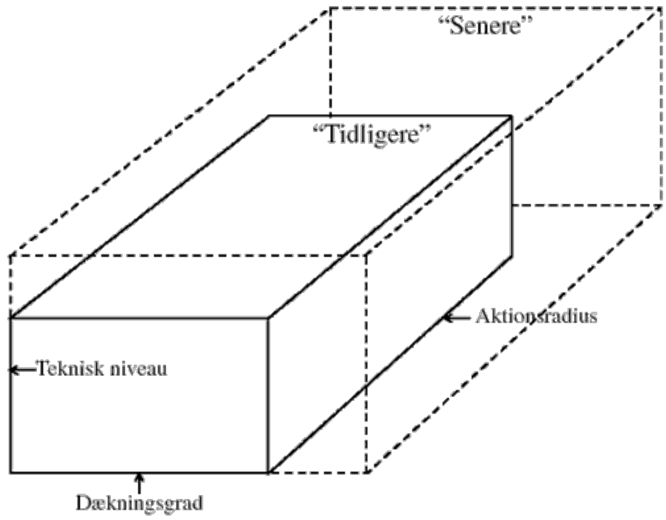
Til slutt nevner Niss (2002) *kommunikasjonskompetansen*. Denne består i å kunne sette seg inn i og forstå andres muntlige, visuelle og skriftlige utsagn og tekster, samt å kunne uttrykke seg skriftlig, muntlig og visuelt ovenfor ulike kategorier av mottakere. Ulike kategorier av mottakere vil kunne være medelever, foreldre og lærere. Her bør det nevnes at det er en særlig sterk tilknytning mellom kommunikasjonskompetansen, representasjonskompetansen og symbol- og formalismekompetansen. Dette kommer av kommunikasjonens natur, hvor all skriftlig kommunikasjon har en eller annen representasjonsform, gjerne ved bruk av matematisk notasjon og symboler. Essensen i kommunikasjon er å formidle informasjon mellom to parter, noe som understreker tilknytningen mellom avsender og mottaker (Niss, 2002).

Et av de momentene som er meget interessant i kompetanseteorien til Niss (2002), er tolkningen som har blitt gjort rundt den utøvende og passive kompetansen. Som fellestrekk i kompetansene er det en utøvende del som blant annet handler om å kommunisere til andre, formulere egne tanker, å selv være i stand til å representere og modellere informasjon. Motstående handler den passive kompetansen om å følge andres resonnementer, tolke modeller og utføre andre analytiske og kognitive prosesser. Denne inndelingen viser til den uttrykkende og mottakende siden som aktør i matematikken. Samtidig hentyder dette at kompetansen hos et individ, kan gjerne være skjult for andre. Ta for eksempel en elev som ikke presterer godt på skriftlige prøver fordi eleven ikke mestrer den utøvende siden ved matematikken. Dette betyr ikke nødvendigvis at eleven ikke forstår eller ikke er i stand til å tenke matematisk, men at kompetansen kan være mer passiv, eller at den verbale formuleringsevnen er bedre. I slike sammenhenger er det derfor at læreren benytter seg av en kartlegging som kan avsløre denne type hull i kompetansen hos eleven.

2.5.1 Kartlegging av matematisk kompetanse

Niss (2002) beskriver matematisk kompetanse som et produkt av tre dimensjoner. Som produkt indikerer dimensjonene at faktorene har en klar sammenheng med hverandre. Niss (2002) modellerer denne sammenhengen ved å vise til en volummodell. Han påpeker likevel at det ikke er gitt at alle de tre dimensjonene kan finnes hos alle individer. Dette betyr at produktet *kan* være null, selv om det bare er en teoretisk sannsynlighet. Slik sett innebærer $X * Y * Z = 0$ at en person ikke har en matematisk kompetanse dersom en av faktorene er null. Denne tolkningen innebærer også at to personer kan ha like mye matematisk kompetanse selv om faktorene varierer i størrelse. For eksempel kan person 1 sin matematiske kompetanse representeres ved at $X = 1, Y = 2 \ og \ Z = 3$, det vil si $1 * 2 * 3 = 6$. Tilsvarende kan person 2 ha en matematisk kompetanse som er like stor, men at faktorene har ulike verdier enn hos person 1. For eksempel $X = 1, Y = 3 \ og \ Z = 2$, det vil si $1 * 3 * 2 = 6$. Dette må påpekes som et poeng som er viktige for lærere å huske, når de skal vurdere og kartlegge matematisk kompetanse hos elevene i tråd med de tre dimensjonene.

Teknisk nivå, dekningsgrad og aksjonsradius definerer de ulike faktorene i denne modellen, og representerer de ulike aspektene ved en matematisk kompetanse. Niss (2002) definerer *teknisk nivå* som "*…hvor begrebsligt og teknisk avancerede sagsforhold og værktøjer personen kan aktivere den pågældende kompetence ovenfor*" (p. 65). Dette betyr at det tekniske nivået avhenger av substansen i saksforholdet som kartlegges. Kommunikasjonskompetansens tekniske nivå vil kunne karakteriseres ved å se på for eksempel begrepsbruk i forklaringene. Dette henger tett sammen med *aksjonsradiusen* i kommunikasjonskompetansen, som innebærer i hvilke sammenhenger og situasjoner kompetansen kan aktiveres i (Niss, 2002). Dette har en klar sammenheng med hva det vil si å kommunisere *ovenfor ulike kategorier av mottakere*. En lærer forventer kanskje at en elev forklarer seg på et mer teknisk nivå enn medelever forventer.



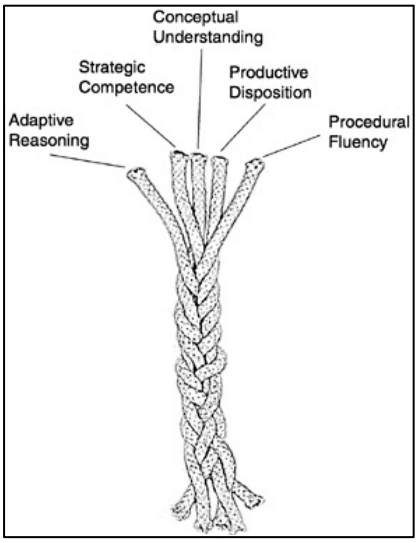
(Niss, 2002, p. 128)

Den siste dimensjonen en matematisk kompetanse kan kartlegges ved er *dekningsgraden*. Denne dimensjonen avhenger av hvor dyktig personen er til å benytte seg av de aspekter som karakteriserer en matematisk kompetanse. Sett opp mot kommunikasjonskompetansen, kan en argumentere for at en person som kun kan samtale *med* matematikk, har en lavere dekningsgrad enn en person som kan samtale *i, med og om* matematikk (Niss, 2002). Modellen viser altså til en tilknytning mellom de ulike dimensjonene og den matematiske kompetansen som kartlegges. Dette innebærer også at de tre dimensjonene er avgrenset til hver og en av de matematiske kompetansene, og at en ikke kan sammenligne kommunikasjonskompetansen med representasjonskompetansen.

2.6 Kilpatrick – fem tråder av matematisk kyndighet

Kilpatrick (2001) presenterer fem tråder av matematisk kyndighet (*the five strands of mathematical proficiency*). Prinsippet med dette er fem forskjellige matematiske ferdigheter som eleven må beherske for å kunne vise til kyndighet eller kompetanse innenfor matematikken. Kilpatrick (2001) påpeker at disse trådene ikke må sees på som uavhengige, men at de er sammenvevd. Med dette mener han at for å kunne vise til kompetanse innenfor matematikk, må man ha en viss beherskelse innenfor alle disse trådene. Modellen presenteres som et tau, og vil følgende svekkes hvis en av trådene er svake.

De fem trådene Kilpatrick (2001) snakker om er tilpasset resonnering (adaptive reasoning), strategisk kompetanse (strategic competence), konseptuell forståelse (conceptual understanding), produktiv disposisjon (productive disposition) og prosedyreflyt (procedural fluency). Strategisk kompetanse er lik det som tradisjonelt har blitt sett på som problemløsning og problemstilling i matematikken. Denne ferdigheten tar utgangspunkt i å representere, formulere og løse matematiske problemløsningsoppgaver (Kilpatrick, 2001). Konseptuell forståelse handler om å se sammenhengen mellom matematiske prinsipper, og kunne bruke dem innenfor flere felt. Hvis elevene behersker denne ferdigheten vil de ofte kunne se helheten i matematikken, og vil ofte kunne rekonstruere glemt kunnskap (Kilpatrick, 2001).



(Kilpatrick, 2001, p. 117)

Produktiv disposisjon handler om å se nytten av matematikk og ha en positiv innstilling til faget basert på at dem kjenner verdien av å beherske matematikk (Kilpatrick, 2001). Prosedyreflyt går på evnen til å kunne benytte seg av og vite når matematiske operasjoner skal benyttes. Hvis eleven behersker prosedyreflyten kan de benytte disse operasjonene på en effektiv og nøyaktig måte (Kilpatrick, 2001). Videre nevner han at: "*Adaptive reasoning refers to the capacity to think logically about the relationships among concepts and situations*" (p. 129). Kilpatrick påpeker også at under tilpasset resonnering, finner vi kunnskapen om hvordan vi begrunner og rettferdiggjør svarene våre. "*Many conceptions of mathematical reasoning have been confined to formal proof and other forms of deductive reasoning*" (p. 129). Kilpatrick følger opp dette med å si at han ser på tilpasset resonnering med et bredere perspektiv, der ikke kun formelle bevis hører til, men at også andre forklaringer passer inn. Intuitive- og induktive resonnement basert på mønster og metaforer nevnes her (Kilpatrick, 2001). Analoge resonnementer, metaforer og imaginære og fysiske objekter knyttes opp mot denne type resonnementer. Kilpatrick (2001) viser til at en kan så langt ned som i 4-årsalderen, vise sofistikerte resonnementer dersom en støtter seg opp mot representasjonsbyggende erfaringer.

2.7 Prinsipper og standarder

Prinsipper (*principles*) og standarder (*standards*) er et dokument med hensikt i å fokusere læreplanen mot de forventninger en har av elevene i skolen (NCTM, 2000). Det er formulert seks prinsipper ved opplæringen og ti standarder, fem innholdsstandarder og fem prosess-standarder. ”The principles are statements reflecting basic precepts that are fundamental to a high-quality mathematics education” (NCTM, 2000, p. 6). Prinsippene er ment som nyttige perspektiver for å hjelpe lærere å ta avgjørelser rundt undervisningen. Innholdsstandardene bygger på de grunnleggende matematiske emnene *number and operations, algebra, geometry*, *data analysis and probability* og *measurement*. Prosess standardene er retningslinjer for å behandle disse emnene. Dette medfører at man må se innholds- og prosess standardene som uatskillelige for å bygge matematisk kompetanse (NCTM, 2000).

De seks prinsippene er definert som: *equity* – som omhandler å sette høye forventninger til elevenes kompetanse og å gi god støtte til innlæringen av denne kompetansen, herunder tilpasset opplæring; *curriculum* – innebærer å formulere en sammenhengende læreplan som er fokusert mot viktig matematikk; *teaching* – at lærere forstår hva elevene kan og burde lære seg, for så å støtte og utfordre elevene til å lære det godt; *learning* – elevene må lære seg matematikk med forståelse, ikke bare prosedyriske ferdigheter. Å bygge på eksisterende kompetanse, både erfaringsmessig og kunnskapsmessig er her essensielt; *assessment* – har som hensikt å støtte elevene i deres læring ved å gi både lærer og elev konstruktiv tilbakemelding og informasjon om hva som bør og kan læres; og *technology* – å ta i bruk teknologi for å bygge opp forståelse og holde tritt med verdensutviklingen (NCTM, 2000).

2.7.1 Prosess standarder

De fem prosess standardene er problemløsning *(problemsolving)*, resonnering og bevis *(reasoning and proof)*, kommunikasjon *(communication)*, sammenheng *(connections),* og representasjon *(representation)* (NCTM, 2000). *Problemløsning* defineres som å løse oppgaver hvor løsningsmetoden ikke er gitt i forkant. Det er ikke bare et mål i opplæringen å tilegne seg ferdigheter til problemløsning, men også et verktøy for å løse oppgaver. Dette innebærer å lære seg, og benytte seg av et mangfold av metoder for å finne løsninger på oppgaver i og om ulike kontekster. *Resonnering og bevis* beskrives som verktøy for å undersøke og rettferdiggjøre matematiske metoder og løsninger. Resonnering anses av NCTM (2000) som essensielt for å bygge matematisk forståelse, mens beviser utfyller funksjonen som rettferdiggjøring og baserer seg på formelle setninger for å beskrive verdens funksjonelle trekk. Denne kompetansen innebærer ikke bare å formulere egne påstander og sjekke løsninger og metoder på egen hånd, men også følge andres resonnementer og rettferdiggjøre andres påstander (NCTM, 2000).

Matematikk blir ofte representert ved hjelp av symboler både skriftlig og muntlig, og *kommunikasjon* er derfor en essensiell del av matematikken og matematisk utdannelse. Elever snakker sjeldent matematikk i naturlige settinger, noe som skyver ansvaret over på læreren som pådriver eller initiator. Kommunikasjon i matematikken hjelper elevene å konsolidere den matematiske tenkingen og hjelper elevene å konstruere egen læring. Denne kommunikasjonen må ofte foregå ovenfor mange ulike mottakere, både foreldre, lærere og medelever. Betydningen bak å kommunisere og være kompetent i kommunikasjon innebærer ikke bare å kunne uttrykke seg matematisk, men også å kunne følge andres uttrykk, både skriftlig, muntlig og visuelt (NCTM, 2000). Et viktig poeng med kommunikasjonen er å uttrykke seg effektivt og presist, noe som henviser til korrekt begrepsbruk og setningsoppbygging. For å kunne mestre dette har en behov for å forstå betydningen bak konsepter og kjenne til egenskaper som skjuler seg bak enkelte begreper (NCTM, 2000).

Den fjerde standarden og kompetansen er *sammenheng*. Her er poenget å lære elevene å se sammenheng mellom matematiske emner, slik som forholdet mellom multiplikasjon og divisjon av brøker, eller den assosiative loven. Dette innebærer å kunne se at matematikken er bygd opp hierarkisk, at en matematisk idé bygger på en annen og skaper et helthetlig matematisk bilde (NCTM, 2000). Nært tilknyttet kommunikasjonen, finner vi *representasjon* som kompetanse. Matematiske symboler og formuleringer, kan presenteres i ulike formater, slik som i en graf og tabeller. Den er visuell i et koordinatsystem, skriftlig i et skjema og muntlig når en skal beskrive for andre hvordan den ser ut. Denne kompetansen innebærer også å kunne analysere og fortolke de ulike representasjonene, ikke bare kunne formulere selv. Et mangfold av metoder og teknikker er derfor et behov som bør inngå i denne kompetansen (NCTM, 2000).

2.7.2 Generell kommunikasjon i matematikk for 7.-9. klassetrinn

I skolen er kommunikasjon meget sentralt. Elevene uttrykker seg både skriftlig og muntlig når de skal forklare hva de tenker og mener. På 7.-9. klassetrinn møter elevene ofte matematikk som er mer abstrakt og kompleks enn tidligere i skolen (NCTM, 2000). Dette stiller krav til den matematiske kommunikasjonen, både opp mot effektivitet, presisjon, og evne til å strukturer sine tanker. Kommunikasjon på et høyere nivå vil også kunne medføre at evalueringen av kommunikasjonen er mer rigid, noe som kan forklares ved at elevene beveger seg over fra praktisk baserte forklaringer til mer matematisk baserte. Et viktig poeng NCTM (2000) nevner er at en som lærer må bygge opp en klasseromkultur som tillater at en elev kan uttrykke seg, uten å bli dømt for sine eventuelle feil. Lærerens rolle er her viktig, å velge ut oppgaver som fordrer til matematisk diskusjon, bygge opp en sunn klasseromkultur og styre kommunikasjonen i en retning som er meningsfylt for læringen.

NCTM (2000) påstår at å benytte seg av oppgaver som viser til viktige matematiske konsepter åpner opp for flere løsningsmetoder, både formelle og uformelle. Dette tillater ulike representasjoner og oppgaver som gir mulighet til å utfolde elevenes fortolkning, rettferdiggjøring og undersøkelser. For å kunne tilføre denne dimensjonen til undervisningen kan en benytte seg av ulike sammensetninger av elever, for eksempel slik som par, grupper og plenum.

2.8 Felles og ulike trekk ved kompetansemodellene

Et interessant skille som viser seg, er hvor allmenngyldig de ulike kompetansemodellene er. Ved å benytte seg av Niss´ modell (2002), finner vi at det henvises til matematisk kompetanse som en helhet. Denne kompetansemodellen stiller seg dermed i stor kontrast til Kilpatrick`s fem tråder av matematisk kyndighet (2001), som baserer seg på matematisk kompetanse opp til 9.klassetrinn. Tilsvarende har NCTM (2000) konstruert en modell som tar for seg matematisk kompetanse til og med 13. Klassetrinn. Slik sett kan Niss´ modell (2002) generaliseres til flere matematiske nivåer og kan dermed få en mer allmenngyldig aksept, men det er likevel viktig å huske at dette kan føre med seg både positive og mindre positive konsekvenser. For eksempel vil ikke Niss (2002) sin modell være like enkel å sette seg inn i og benytte seg av for en lærer. Skemp (1976) opererer med begrepet forståelse, noe som virker inn på det kognitive plan. Denne modellen er ikke knyttet spesifikt opp mot alderstrinn eller ulike aspekter av matematisk kompetanse, slik som hos NCTM (2000) og Kilpatrick (2001). På dette punktet stiller NCTM (2000) seg i en særstilling, noe som markerer et annet skille mellom disse modellene.

NCTM (2000) har knyttet hver av sine prosess standarder opp mot de såkalte innholdsstandardene. Dette betyr at innenfor hver av disse innholdsstandardene, finner vi en spesifikk type prosess standarder. Innenfor emnet algebra finner vi en egen spesifisering av de aktuelle prosess standardene. Disse formuleres som en type læreplanmål og knytter dermed matematisk kompetanse opp mot matematiske emner. Kilpatrick (2001) og Niss (2002) arbeider ut fra et generelt ståsted. Kilpatrick´s (2001) modell tar som nevnt utgangspunkt i aldersbestemte klassetrinn, men går ikke spesifikt inn på hvert enkelt klassetrinn med målformuleringer som NCTM (2000). Dette betyr derfor at det likevel er tatt hensyn til hva som kan forventes av elevene opp til et visst klassetrinn.

Hvilken kompetansemodell en vil benytte seg av i undervisningssammenheng avhenger av lærerens intensjoner med evalueringen. Skemps (1976) teori om relasjonell og instrumentell forståelse kan ha sin største styrke rettet mot lærerrollen og organiseringen av undervisningen. Her er det ikke snakk om spesifikke tiltak, men overordnede prinsipper som burde følges for å best lære elevene matematikk. Målformuleringen til NCTM (2000) forenkler evalueringsprosessen, men den tar utgangspunkt i amerikansk læreplan. Niss (2002) har definert begrepene aksjonsradius, teknisk nivå og dekningsgrad i en tredimensjonal modell, som viser til kompetanse over flere akser. En evaluering av matematisk kompetanse er ikke sett opp mot de matematiske emnene og kan generaliseres over alle alderstrinn og læreplaner.

Ved å studere de ulike modellene som er presentert, vil en kunne se klare likhetstrekk, selv om noen avviker fra de andre. Skemps teori (1976) for eksempel, består kun av to komponenter, men med meget omfattende betydning. Kilpatrick (2001) viser til fem, Niss (2002) til åtte og NCTM (2000) til 16 komponenter. Til tross for denne ulikheten innebærer de fleste en felles forståelse av at matematisk kompetanse eller forståelse, ikke utelukkende burde bestå av kun prosedyrisk og instrumentell kompetanse eller forståelse.

2.9 Bevisenes funksjon i skolen

Matematikkens verden blir av Efraim Fischbein (1987) beskrevet som en verden av konstrukter som skal speile den virkelige verdens funksjonelle trekk. Dette gjøres på en abstrakt måte gjennom bruk av formelle setninger. På denne måten kan de ulike trekkene ved vår verden bevises. Beviser i matematikken er et viktig element og viser seg å være gjenstand for forskning. Nicolas Balacheff publiserer på nettsiden, *The International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical proof,* om teoretisk og empirisk forskning relatert til beviser (Hanna, 2001). Dette tyder på at ikke bare teoretiske, altså rigide og formelle, beviser er eneste muligheten en har for å bevise noe matematisk.

Matematikere har muligens ulike syn på hva som bør gjelde som et matematisk bevis og hva som ikke faller under denne kategorien. Likevel virker det som det er en felles forståelse for at matematiske beviser skal være utledet ved formelle setninger. Beviser er ”*a mathematicians way to display the mathematical machinery for solving problems and to justify that a proposed solution to a problem is indeed a solution”* (Rav, 1999, p. 13). Gila Hanna (2001) peker likevel på at matematikere betrakter beviser som primært konseptuelle, hvor prosedyren vektlegges i andre rekke. Videre vektlegges funksjonen til beviset når det skal defineres. Bell (1976), de Villiers (1990; 1999) og Hanna og Jahnke (1996) har syntetisert en liste over de ulike funksjonene et bevis og bevisføring kan innebære.

- Verifikasjon (sannheten rundt en påstand)
- Forklaring (gir innsikt i hvorfor noe er sant)
- Systematisering (organisering av ulike resultater inn i et deduktivt system av aksiomer, større konsepter og teoremer)
- Oppdagelse (oppdagelsen eller oppfinnelsen av nye regler)
- Kommunikasjon (overføringen av matematisk kunnskap)
- Konstruksjon av empirisk teori
- Utforskning av betydningen til en definisjon eller konsekvensene av en antakelse
- Inkorporering av velkjente fakta til et nytt rammeverk og på denne måte skape et nytt perspektiv

For lærere og skolen, vil undervisning i alle disse funksjonene kunne være et stort eple å bite over. Det beste beviset innebærer ikke bare en hjelp i å se at noe er sant men også *hvorfor* noe er sant. Slik sett bør beviser i skolen vektlegge *hvorfor* noe er sant. Elevene møter først og fremst verifisering (sannhet) og forklaring (hvorfor) når de arbeider med matematikk, altså at noe er sant og hvorfor noe er sant (Hanna, 2001). I tillegg er det viktig å ta hensyn til formidlingen av matematisk kunnskap, altså kommunikasjonen. I undervisningssammenheng er det derfor naturlig å se på bevis først og fremst som en forklaring, for deretter å vurdere hvilken type som gir best læringsutbytte.

Steiner (1978) beskriver forklarende beviser som å karakterisere egenskaper ved en matematisk struktur, slik at det er åpenbart at resultatet er avhengig av karakteristikken. Dette vitner til en mer intuitiv forståelse av bevis-begrepet, noe som også kan være tilfelle innenfor emnet geometri. Gila Hanna (2001) nevner at geometrien inneholder mange slike forklarende beviser og at det kan være mer gunstig å benytte seg av motsetninger, matematisk induksjon eller andre ikke-forklarende metoder. Videre kommer det fram at heuristiske teknikker kan være å foretrekke ovenfor formelle beviser når det kommer til undervisningssammenheng. Her gjør Simpson (1995) et skille og påpeker at en kan dele beviser inn mellom ”beviser gjennom logikk” og ”beviser gjennom resonnering”. Førstnevnte vektlegger formelle metoder mens sistnevnte innebærer undersøkelser. Han hevder at den formelle bevisføringen ikke er noe elevene er komfortable med på grunn av den abstrakte karakteren den har, mens resonnering har større hensikt da den appellerer til den ”naturlige læringen”, gjennom heuristiske argumenter.

Vi har i vår forskning benyttet noe som kan sammenliknes med den forespørrende/argumenterende klasseromkulturen til Wood, Willams og McNeal (2006) hvor siktemålet ligger i å lære elevene å bevise og vurdere. Slik kan de utvikle mer solide matematiske argumenter og resonnering. Konseptet rundt tallinjen og dobbeltulikhet, a < b< c, danner et mentalt bilde, en modell som vil kunne gjøre det mulig å resonnere og begrunne uformelt (Fischbein, 1987). Tilsvarende kan en studere geometriske figurer og forsvare sine løsninger og fremgangsmåter ved å beskrive visuelle egenskaper som karakteriserer ulike figurer. Slik Wilder (1965) hevder:

> *Thus, in practice, the concept comes first, the axiom later. Theoretically, this is not necessary, of course. Thus we may say, ”let us take as undefined terms aba and daba and set down some axioms in these and universal logic terms”. With no concept in mind, it is difficult to think of anything to say! That is, unless we first give some meanings to ”aba” and ”daba” – that is, unless we introduce some concept to talk about – it is difficult to find anything to say at all.*
>
> (p. 19)

Borwein og Jörgenson (2002) har i en artikkel skrevet om visuelle strukturer i tallteori. Her spekulerer de i at modeller og visuelle representasjoner kan benyttes som beviser. Dette stiller seg derfor i kontrast med den gjeldende forståelsen av beviser – som en formell, skriftlig og informativ formulering. Med bakgrunn i slike argumenter har vi valgt å definere en mindre rigid og formell kategori i vår analyse - *hvorfor*. Her inkluderer vi både formelle og uformelle argumenter og setter disse opp mot om de er praktisk baserte eller om de er matematisk baserte. Basert på viktigheten av modeller i matematikken og at elevene må kunne se en relasjon mellom matematisk teori og virkeligheten, omhandler også kategorien *hvorfor* begrunnelser som underbygger en påstand ved hjelp av tidligere definerte praktisk baserte forklaringer (Levenson, 2012).

Rav (1999) benytter begrepene vise (*display)* og rettferdiggjøre (*justify)* når beviser beskrives, noe vi mener underbygger viktigheten av å se på hvordan elevene skal begrunne sine valg og meninger. Rettferdiggjøring er et begrep også Kilpatrick (2001) bruker. Han sier at bevisførsel er en type rettferdiggjøring, men ikke alle typer rettferdiggjøring er bevis. Med dette mener han at selv om kravene til et matematisk bevis ikke er møtt, kan elevene bruke en rettferdiggjøring av sine argumenter og matematiske valg gjennom tilpasset resonnering.

For det første må beviset føre til en forståelse, for det andre må det hjelpe å skape klarhet og effektivitet i tenkningen (Manin, 1992; 1998; Thurston, 1994; Rav, 1999). På denne måten skapes det derfor en subjektivitet rundt hva et bevis faktisk er. Slik Hanna (2001) uttrykker det: *"It became clear to me that a proof, valid as it may be in terms of formal derivation, actually becomes both convincing and legitimate to a mathematician only when it leads to real mathematical understanding."* (p. 7). Dersom en ikke forstår et bevis, kan en heller ikke akseptere det som et bevis.

Vårt fokus i analysearbeidet var primært på de to førstnevnte punktene i Hannas åtte funksjoner for beviser og bevisføring; verifisering - som omhandler å vise til at noe er sant, og forklaring – å vise til *hvorfor* noe er sant. Dette er et nøkkelord i vår forskning da vi blant annet observerte hvordan elevene rettferdiggjorde, forsvarte og argumenterte for sine valg å påstander.

2.10 Sammenligning av kompetansemodeller og forklaringsteori

Det kommer fram av Fischbein (1987) at en kan *beskrive* verdens funksjonelle trekk med matematikk. Disse begrepene er nært tilknyttet Niss (2002) og NCTM´s (2000) redegjørelse av kommunikasjon i matematikk. Slik Rav (1999), Manin (1992; 1998) og Thurston (1994) viser til, så må beviser føre til klarhet og forståelse, altså en overføring av kunnskap. Dette er ikke mulig uten de kommunikative karakteristikkene hvor kunnskap formidles over tre ulike plan, nemlig skriftlig, muntlig eller visuelt. Skemp (1976) nevner ikke spesifikt begrepet kommunikasjon, men er opptatt av formidling av kunnskap. Han argumenterer for at det burde være rettet mot det relasjonelle, da det innebærer både *hva/hvordan* og *hvorfor.* Som en motsetning peker Hanna (2001) på at matematikere betrakter beviser som primært konseptuelle, noe som virker inn på det kognitive plan, ikke det kommunikative. Likevel er det viktig å vise til den allmenngyldige betydningen av et bevis, de formelle setningene som beskriver de funksjonelle trekkene ved vår verden. Bevisenes funksjon er å formidle informasjon til en mottaker. Kommunikasjon og formidling viser seg å være knyttet sterkest opp mot NCTM (2000) og Niss (2002), og her har den, som nevnt, blitt formulert som en egen matematisk kompetanse.

Hanna (2001) mener at elever støter på verifikasjon og forklaring innledningsvis i skolen. Dette belyser viktigheten av å fokusere på kommunikasjon i matematikkundervisningen. Det typiske IRE-mønsteret som Mehan (1979) beskriver har som nevnt både styrker og svakheter. Dette betyr at læreren må benytte seg av varierte kommunikasjonsmønstre i undervisningen for å ivareta styrkene og unngå å bygge kompetanse på svakheter. Drageset (2014) har fokusert på ulike forklaringstyper blant elevene når han definerte begrepene forklare *handling, årsak og konsept.* Her kom det fram at elever sjeldent benyttet seg av begrunnelser i sine forklaringer, noe som harmonerer med hva Mehan (1979) har å si om IRE-mønsteret i skolen. Elevene får i følge Cobb, Yackel og Wood (1992) ikke luftet egne tanker og fulgt andres resonnementer, noe Niss (2002), NCTM (2000) og Kilpatrick (2001) peker på som en viktig del av det å ha matematisk kompetanse. Project Challenge sin metode var å benytte seg av *talk moves* (Chapin, 2009) noe som kan bidra til å skape den ønskede variasjonen i kommunikasjonsmønsteret i undervisningen, spesielt på grunn av den forventede responsen de ulike spørsmålsformuleringene kan gi.

Videre i utdanningen overtar det formelle matematiske perspektivet mye av innlæringen, noe som fører til noe mer abstrakt og rigid kommunikasjon. Den instrumentelle forståelsen (Skemp, 1976) kan innebære en mestring av flere ulike teknikker, men de kan ikke begrunnes ut fra et logisk perspektiv. En vet bare at denne metoden er den som gir riktig løsning. Slik sett er den mangelfull når det kommer til å bevisføre, ved å benytte seg av Hannas (2001) tolkning. For å kunne mestre matematikken i høyere utdanning er det derfor viktig å være familiær og komfortabel med denne relasjonelle (Skemp, 1976) måten å kommunisere og regne matematikk.

En del av debatten rundt matematiske beviser og begrunnelser omhandler bruk av de visuelle hjelpemidlene, slik som bruk av modeller og tilknytningen mellom de praktiske konseptene de formelle bevisene. Spesielt i skolen viser dette seg å være betydningsfullt. Hanna (2001) presenterer argumenter for at heuristiske teknikker og modeller burde være foretrukket foran formelle beviser i skolen. Dette støtter Barwise og Etchemendy´s (1991; 1996), argument - at en kan bygge beviser på uformelle fremgangsmåter og modeller. Utfordringen er å finne ut hvordan. Skemps (1976) utfordringer tilknyttet relasjonell forståelse er et eksempel på dette.

2.11 Matematisk og praktisk forklaring

Ved å studere elevers måter å forklare seg på innenfor matematikken, skiller vi ofte mellom matematisk og praktisk baserte forklaringer. Esther Levenson (2009) påpeker at disse måtene å forklare seg matematisk på ikke er dikotomisk, og derfor ikke er gjensidig utelukkende. Dette gjør at vi ser på disse forklaringsformene som gradvis adskilt. Levenson (2009) sier også at elevene ofte starter læringen sin gjennom praktisk basert matematikk, og går innom matematisk basert læring på veien mot den formelle matematiske uttrykksformen. På denne måten kan man se matematisk baserte forklaringer som en bro mellom praktisk baserte forklaringer og formelle forklaringer (Levenson, 2009). Et interessant aspekt med denne typen kategorisering finner vi hvis vi ser mot Mogens Niss´ (2002) modelleringskompetanse og representasjonskompetanse. Denne typen matematikk ser vi en del av i vårt datagrunnlag, og det var en ekstra utfordring i forhold til hvordan vi skulle kategorisere disse observasjonene. I utgangspunktet kunne de betraktes som både matematisk og praktisk basert, og da har vi latt det være opp til konteksten de er hentet ut fra, hvordan vi har kategorisert de.

2.11.1 Matematisk baserte forklaringer

Levenson (2012) påstår matematisk baserte forklaringer er basert på matematiske definisjoner, tidligere innlærte matematiske egenskaper og tilknyttes ofte matematisk resonnering. Videre påpekes det at forklaringene ikke nødvendigvis er rigide og formelle, slik som utleding av en algoritme vil være. Matematisk baserte forklaringer har ofte utgangspunkt i matematiske notasjoner, både formelle og uformelle, og åpner opp for trekk som kan finnes i både praktisk og matematisk baserte forklaringer. Dette er nært tilknyttet kompetansene Niss

(2002) kaller symbol- og formalisme og representasjon. En må altså velge hvordan en kan representere den matematiske forklaringen. Dette gjør at matematisk baserte forklaringer kan tjene som en bro og bindeledd mellom de praktisk baserte og de formelle forklaringene (Levenson, 2009). Disse kan ses opp mot både relasjonell og instrumentell forståelse (Skemp, 1976)

NCTM (2000) hevder at elever på mellomtrinnet og ungdomsskolen bør ha kompetanse til å benytte seg av matematisk rigide forklaringer, noe også NSW (2015) beskriver i læreplanen for australske elever. Her kommer det frem at elevene begynner skolegangen med læreplanmål som baseres på praktiske egenskaper som gradvis går over til formelle forklaringer. På denne måten beskriver de også hvordan matematisk baserte forklaringer kan benyttes som bro mellom de to ytterpunktene. Matematisk basert kompetanse er noe som er relativt til alder, noe både NSW (2015) og NCTM (2000) viser til. Likevel finnes det unntak, noe Levenson (2012) forklarer i sin forskning. Her kommer det frem at selv andreklassinger kan støtte seg på og utelukkende benytte seg av matematisk baserte forklaringer. Dette kan riktignok avhenge av hvilket tema som undervises, men påpeker fremdeles at det finnes unntak fra regelen.

2.11.2 Praktisk baserte forklaringer

I følge Levenson (2012, p. 182) mener Krummheuer at elever agerer ut fra erfaringsmessige matematiske objekter, ikke ut fra aksiomatiske systemer når de skal forklare matematiske situasjoner og problemer. Med praktisk baserte forklaringer mener vi forklaringer som tar utgangspunkt i en hverdagslig situasjon, kjent sammenheng eller som benytter seg av konkretiseringsmateriale for å gi mening til matematiske begreper (Levenson, 2009). En typisk slik situasjon som kan ses på som praktisk basert, er der en elev demonstrerer et regnestykke med en tegning eller faktiske objekter for å demonstrere hvordan regnestykket blir utført. En elevforklaring som er relativt matematisk med tanke på formelt språk og korrekt bruk av matematiske notasjoner, vil fortsatt kunne sees som praktisk basert, om forklaringen tar utgangspunkt i praktiske eksempler eller sammenlikninger for å gi substans eller mening til forklaringen. Koren sier, i følge Levenson (2009, p. 123), at uttrykket praktisk basert forklaring inkluderer alle forklaringer som ikke baserer seg utelukkende på matematiske notasjoner. Praktisk baserte forklaringer inkluderer de forklaringene som bruker konkretiseringer, visuelle hjelpemidler og eksempler fra dagliglivet. På denne måten avhenger de praktisk baserte forklaringene seg av representasjon-, modellering- og hjelpemiddelkompetanse (Niss, 2002). Forklaringene vil også være sterkt preget av relasjonell forståelse (Skemp, 1976) da en må kunne se tilknytningen mellom matematisk teori og praktiske elementer.

I denne sammenheng er det viktig å dra frem dualiteten som ligger bak å benytte visuelle og praktisk baserte forklaringer ved bevisføring. For det første er det i det matematiske miljøet kjent at matematiske beviser omhandler teoremer og algoritmer, noe som betyr at den formelle matematikken er gyldig som bevis. For det andre kommer det frem at deler av matematikken i stor grad hviler på visuelle hjelpemidler, for eksempel statistiske modeller og geometriske figurer, og at naturvitenskap og eksperimentell fysikk krever støtte i empiriske beviser så vel som teoretiske (Hanna, 2001). I tillegg konkretiseres mye av matematikken ved hjelp av modeller i dagens skole. Palais (1999) argumenterer for at visualisering i matematikken kan vise vei til rigide og formelle beviser, men utbroderer ikke om det faktisk burde være legitimert som et matematisk bevis. Resonnering og beviser (NCTM, 2000) og tilpasset resonnering (Kilpatrick, 2001) vil være sterkt representert i praktisk og matematisk baserte forklaringer. For å forklare seg må en gjøre spesifikke valg med utgangspunkt i formidlingsmetode for å avgjøre hvordan en vil resonnere og argumentere.

2.12 Forklare handling, konsept og årsak

Ove Gunnar Drageset (2014) har forsket på kommunikasjon i matematikk og har funnet ut at elever tenderer til å forklare seg på tre ulike måter. Typisk er at disse forklaringene er et resultat av lærerens spørsmål i forkant. Det henvises for det første til at elevene forklarer en fremgangsmåte eller metode, enten før prosessen har blitt utført eller etterpå, og danner grunnlaget for kategorien forklare hva/hvordan (*explaining action/how or what)*. Denne type forklaringer er viktige for læreren, fordi de gir mulighet til kartlegging og vurdering, samt at medelever har mulighet til å følge tankegangen hos den aktuelle eleven. Knyttet opp mot kategorien hva/hvordan finner vi tankegangskompetanse, resonnementskompetanse og representasjonskompetanse (Niss, 2002), fordi en må kunne argumentere for sin tankegang og representere argumentasjonen på en fornuftig måte.

Forklaringer som beskriver en metode eller fremgangsmåte kan karakteriseres av en stor andel prosedyrer og regler (Drageset, 2014), og vil dermed ofte kunne ansees å være matematisk baserte forklaringer (Levenson, 2012). En kan her komme langt med en instrumentell forståelse (Skemp, 1976), fordi en ikke behøver å forklare hvorfor noe er riktig. Forklare konsept (*explaining concept*) er andre kategori i Dragesets (2014) forskning og omhandler forklaring av konsepter som er nødvendig å vite for å løse oppgaver på en meningsfull måte. Dette kan være å beskrive for eksempel konseptet med likeverdige brøker og hvorfor ½ er det samme som 2/4. Å resonnere om og med et konsept er krevende. Dette innebærer blant annet en relasjonell forståelse, som ofte innebærer å benytte seg av et bredt utvalg av kompetanser, slik som konseptuell forståelse, tilpasset resonnering (Kilpatrick, 2001), og resonnering og beviser (NCTM, 2000).

Den tredje kategorien handler om å uttrykke *hvorfor* noe er riktig og kategoriseres som forklare årsak (*explaining reason/why).* Når en forklarer en årsak handler det om å redegjøre for hvorfor et svar eller en metode er riktig (Drageset, 2014). Sett i lys av tidligere presentert teori, vil dette kunne sammenfalle med resonnering og beviser i matematikken (NCTM, 2000). Dette innebærer derfor en relasjonell (Skemp, 1976) tilknytning mellom konsepter og årsak. Ikke alle disse forklaringene vil være matematisk formelle, men vil forholde seg til ulik gradering av matematisk fundament, noe som innebærer mer eller mindre formelle og uformelle begrunnelser, noe vi har tolket som henholdsvis matematiske og praktiske (Levenson, 2012) begrunnelser. Gødel`s incompleteness theorem sier at et matematisk system, formelt og logisk, ikke kan være helt lukket (Hanna, 2001). Med dette menes at systemene kan ikke inneholde alle de formelle forutsetningene som kreves for å avgjøre gyldigheten til alle teoremene det inneholder (Fischbein, 1987), og at det er umulig å utvikle matematikk som et sammenhengende formelt system (Wilder, 1965).

I følge NCTM (2000) burde man i grunnskolen fokusere mer på praktisk baserte forklaringer overfor elevene, da formell matematikk kan være vanskelig å forstå for de yngre elevene. I løpet av mellomtrinnene og de senere årene ved skolen burde man derimot gå over til å bruke mer matematiske forklaringer. Levenson (2009) begrunner denne overgangen med å vise til egenskapen ved praktisk baserte forklaringer. Hun påpeker at slike forklaringer benytter seg av dagligdagse kontekster og/eller konkretiseringsmaterialer som gir mening til matematiske uttrykk. På denne måten får matematisk teori en praktisk kontekst for å gi sammenheng. Hun støtter dermed opp under hva NCTM (2000) sier om emnet: ”*Young children will express their conjectures and describe their thinking in their own words and often explore them using concrete materials and examples”* (p. 56). De begrunner dette med at elevene i begynnelsen av studieløpet lærer mye matematikk basert på praktiske teknikker og praktisk tilknytning (NCTM, 2000; NSW, 2015).

Levenson (2012) nevner en gradvis overgang fra den praktisk baserte forklaringer over til formelle forklaringer i form av beviser. Koren (sitert i Levenson, 2009, p.123) stiller seg i særstilling på dette punkt og hevder at de matematisk baserte forklaringene tilsvarer det Levenson (2012) beskriver som formelle. Sett slikt kan vi tolke to utfall, enten at kompetansemodellene til NCTM (2000), Niss (2002) og Kilpatrick (2001) i stor grad er relasjonelle, eller at Korens beskrivelse er for rigid (sitert i Levenson, 2009, p.123). I lys av hva som kan forventes av elever i grunnskolen mener vi at definisjonen faktisk er for radikal og rigid, fordi en matematisk modell kan vise til akkurat det samme beviset dersom den blir benyttet på riktig sted og tid. I tillegg påpeker Hanna (2001) at deler av matematikken nesten utelukkende benytter seg av forklarende beviser, slik Steiners (1978) påpeker er karakteristisk for geometrien. Borwein og Jörgenson (2002) hevder at beviser kan representeres ved mer praktiske metoder dersom enkelte kriterier blir fulgt. De tre kriteriene går ut på at det praktisk baserte beviset er reliabelt (reliability), konsistent (consistency) og reproduserbart (repeatability). Et sentralt spørsmål er om ikke den praktiske og uformelle matematikken da kan benyttes som bevis dersom forklaringene fyller disse kriteriene?

Da Levenson (2009; 2012) opererer med en gradvis overgang mellom praktisk baserte og matematisk baserte forklaringer, er dette begreper som vi ser hensiktsmessig å benytte i vår analyse av elevforklaringer. Dette kommer av at Korens (sitert i Levenson, 2009, p.123) definisjoner blir for lite dekkende. De matematiske forklaringene mangler i hans definisjon, noe som fører til at mange forklaringer ikke vil kunne kategoriseres. Slik han definerer de praktisk baserte forklaringene, vil for eksempel ingen geometriske figurer kunne sees som matematisk baserte forklaringer. Det åpner derfor opp for at en kan observere tilfeller hvor forklaringene er verken matematisk eller praktisk basert. Fordelen med Levenson (2009) er derfor at alle forklaringer vil kunne kategoriseres, enten som praktisk eller matematisk.

Dragesets (2014) begreper viser sin styrke i at de definerer de ulike forklaringene som omhandler matematisk samtale. Begrepene dekker godt de kognitive aspektene ved de presenterte kompetansemodellene og supplerer derfor Levensons (2012) matematisk og praktisk baserte forklaringer. Levensons (2012) begreper har sin styrke ved å forklare formidlingsmetoden som blir benyttet, mens Dragesets (2014) begreper beskriver innholdet i forklaringene. I lys av dette vil begrepene være dekkende for å kategorisere både kognitive og kommunikative aspekter ved elevforklaringer.

3 Metode

3.1 Valg av metode

Vi har valgt å basere oppgaven vår på en kvalitativ forskningsmetode. Først vil vi presentere begrunnelsene for vårt valg av metode, basert på de to hovedtypene; kvalitativ og kvantitativ metode. Deretter skal vi gå nærmere inn på hvilken kvalitativ metode vi benyttet oss av, hvordan vi kom frem til utvalget av informanter og hvordan vi valgte å dokumentere innsamlingen. I denne sammenhengen vil vi argumentere for hvorfor disse valgene var gunstige for å finne et svar på forskningsspørsmålet. Senere i kapittelet vil vi forklare prosessen vi gikk gjennom når vi gjennomførte datainnsamlingen vår, herunder vise til bruken av metoden. Til slutt vil vi ta for oss etiske problemstillinger tilknyttet forskningen og redegjøre for hvordan kodingen ble benyttet i etterarbeidet.

Kvalitativ forskning innebærer at en går i dybden av datagrunnlaget. Med dette mener vi at vi samler inn mange opplysninger om få deltakere (Larsen, 2007). Et kvalitativt perspektiv åpner også opp for å kunne følge opp uklarheter og interessante aspekter på en annen måte enn den kvantitative forskningen muliggjør. Dette betyr ikke at en ikke kan gå i dybden eller følge uklarheter og interessante aspekter i den kvantitative forskningen, men at tilnærmelsen og informasjonen tilgjengelig er ulik. I den kvantitative forskningen vil dataen ofte være numerisk, altså i tallformat, og analysen foregår ved å studere fordeling av de numeriske verdiene. Som en motsetning vil ikke den kvalitative dataen bestå av numeriske verdier, men av tekst (Holter & Kalleberg, 2002). Dette betyr ikke nødvendigvis at all kvalitativ data er i tekst form, men Holter og Kalleberg (2002) påpeker at kvalitativ data skal være utfyllende. Her er det et poeng å påpeke at det ikke er et definitivt skille mellom kvalitativ og kvantitativ data, men at innsamlingsmetodene varierer etter hvilke data man skal samle inn.

Ann Kristin Larsen (2007) sier, det er færre som trekker seg fra en forskning basert på den kvalitative metoden. Dette begrunnes med at som oftest så innebærer kvalitativ forskning at man må møte informanten ansikt til ansikt, og da er det lettere å få gjennomført datainnsamlingen. Tilsvarende kan være reelt for kvantitativ forskning også, noe som betyr at en ikke kan påstå at et møte ansikt til ansikt medfører en kvalitativ tilnærming. En av de store fordelene og svakhetene som åpenbarer seg ved kvantitativ forskning, er krav om en høyere andel deltakere (Larsen, 2007). Som fordel vil et høyt antall deltakere gjøre det mulig å generalisere funnene. Svakheten ved metoden er at når en skal observere kvantitativ data blir datamengden meget stor. Som et resultat av dette er spørreskjema et hyppig brukt verktøy i innsamlingen av kvantitativ data. Ulempen med denne type innsamling er, slik Larsen (2007) påpeker, at det er mange som unnlater å fylle ut tilsendte skjemaer, noe som vil kunne skape problemer dersom utvalget er for lite. Det er også mange informanter som kan falle bort, enten ved å trekke samtykke eller ved å ikke besvare i skjemaet.

I vårt tilfelle ønsker vi å se på kommunikasjonene mellom fire til fem elever, og da ble det naturlig for oss å gå for en kvalitativ metode. Når vi tok dette valget var det ikke bare det faktum at vi ønsket å se på et smalt utvalg, som ble avgjørende for at vi valgte en kvalitativ tilnærming. Det hadde også bakgrunn i de metodiske fordelene kvalitativ forskning representerer. De største bakdelene som er tilegnet kvalitativ forskning er at en ikke kan generalisere på lik linje med kvantitativ forskning. I tillegg vil en med et stort utvalg få enorme mengder datamateriale å analysere i etterarbeidet. Disse bakdelene med kvalitativ forskning er overordnede og generelle utfordringer, men ulike metoder innenfor kvalitativ forskning kan medføre egne styrker og svakheter.

Innenfor kvalitativ forskning snakker vi ofte om de to mest brukte datainnsamlingsmetodene, som er intervju og observasjon (Holter & Kalleberg, 2002). Postholm (2010) sier følgende om observasjon som metode; "*Vi forstår det vi observerer gjennom våre subjektive, individuelle teorier, som innebærer at tidligere erfaringer og opplevelser er med på å farge og fokusere hva vi observerer*." (p. 55). Christoffersen og Johannessen (2012) sier at en burde observere elever i sin naturlige setting, men at en kan skape en arrangert setting for å studere et gitt fenomen. "*Det vil være en relativt stor fare for at de som observeres, blir påvirket av den spesielle situasjonen det er å være med i en slik undersøkelse*." (Larsen, 2007, s. 88). Larsen snakker her om laboratorieobservasjon og påpeker at dette er denne metodens største ulempe. Den andre hovedtypen observasjon er feltundersøkelse, der den som blir observert befinner seg i sitt naturlige miljø. Fordelen med dette er at den observerte vil oppføre seg mer naturlig, da omgivelsene ikke vil ha for stor påvirkning (Larsen, 2007).

Christoffersen og Johannessen (2012) beskriver, i samsvar med Postholm (2010), deltakende observasjon som en åpen observasjon hvor forskeren er deltakende. Forskjellen på åpen og skjult observasjon omtaler Christoffersen og Johannessen (2012) på følgende måte; "*Fullstendig åpenhet innebærer at alle i feltet vet at de blir observert, mens skjult observasjon innebærer at ingen av de som blir observert, kjenner til at det foregår observasjon*" (s. 68). I tillegg til åpen og skjult observasjon så skiller Christoffersen og Johannessen (2012) mellom hvor mye informasjon deltakerne får om undersøkelsens hensikt. I vårt tilfelle utdelte vi en fullstendig informasjon, det vil si at elevene som deltok i undersøkelsen hadde tilgang på all informasjon om opplegget, og hensikten til prosjektet. Deltakende observasjon medfører at en også kan dra nytte av metodens positive sider. Katrine Fangen (2010) nevner i sin bok "Deltakende Observasjon", at vi kan få tilgang på informasjon som vanligvis ikke ville blitt avdekket ved intervju og at vi kommer nærmere inn på deltakerne enn man ofte gjør med andre metoder.

Vi var tidlig ute med å velge observasjon som metode, men vi måtte endre fokus før vi fikk startet datainnsamlingen. I utgangspunktet ønsket vi å ta så lite del i undervisningssituasjonen som mulig. Dette for å minimere vår påvirkning på elevene, slik Larsen (2007) beskriver som en av de store ulempene med deltakende observasjon. På grunn av personvern i forhold til bruk av videoopptak, ble vi nødt til å isolere de elevene som skulle delta i prosjektet vårt fra resten av klassen. Dette medførte at vi måtte ta på oss lærerrollen i gruppen, noe som igjen medførte at vi fikk en mer aktiv rolle enn det som først var tenkt. En annen påvirkning i forhold til vår metode som dukket opp, burde også nevnes. Nemlig det faktumet at vi satte elevene i en arrangert setting, da vi isolerte dem fra resten av klassen. Vi så for oss at vi skulle se på elevenes faglige kommunikasjon innenfor en mindre gruppe elever. Dette ville det vært naturlig å gjøre i klasserommet. Vår forskning havnet dermed innenfor rammene av hva Christoffersen og Johannesen (2012) kaller for arrangert setting, eller hva Larsen (2007) beskriver som laboratorieobservasjon.

Disse punktene må nok sees på som en svakhet i forhold til vår metode. Et annet aspekt som spiller inn her, er det som går på det rent metodiske. Vi hadde valgt å fokusere på observasjon som metode for innsamling av data. I vårt tilfelle så valgte vi deltakende observasjon som metode for datainnsamling, basert på endringene i forutsetningene. En utfordring som meldte seg når vi valgte deltakende observasjon som metode er at ved observasjon så spiller vår subjektive oppfattelse inn på hvordan vi tolker situasjonen som observeres. Dette kan nok være en særlig utfordring når det er to personer som begge er deltakende i observasjonen. Dette var vi bevisst på når vi valgte hvordan vi skulle dokumentere observasjonen, og det ble et tungtveiende argument når det ble bestemt at vi skulle benytte oss av video- og lydopptak som hjelpemiddel.

Kommunikasjon er en dynamisk prosess som involverer samspillet mellom to eller flere deltakere, noe som kompliserer datamaterialet og mulighetene for å gjøre en observasjon med gode notater. Muligheten for å gå tilbake i opptak og gjenoppleve situasjonene vi hadde observert, så vi på som en måte å minimere eventuelle subjektive oppfatninger vi var uenige om, samtidig som det åpnet opp for muligheten å gå tilbake i det helhetlige datamaterialet senere.

Vi ser ikke vårt arbeid som en laboratorieobservasjon, men ser at noe av det samme kan være gjeldende siden vi gjør enn viss endring i elevenes naturlige klasseroms setting. Bare det faktum at elevene isoleres på et grupperom, med to ukjente voksne som skal lede undervisningen og observere vil kunne ha en påvirkning på måten elevene agerte. I tillegg vil elevene påvirkes av at det plasseres et videokamera i rommet. Dette prøvde vi bevisst å motarbeide med å ha en pilot-økt med elevene, der innsamlet data ikke inngikk i datagrunnlaget vårt. På denne måten fikk elevene bli kjent med oss, den nye settingen og videoutstyret før vi begynte å registrere observasjoner for bruk i denne oppgaven.

Holter og Kalleberg (2002) nevner at ustrukturert intervju og deltakende observasjon ofte brukes i kombinasjon når det kommer til kvalitativ forskning. Ustrukturert intervju kjennetegnes ved åpne spørsmål, men at de dreier seg rundt et utvalgt tema. Rekkefølgen på spørsmålene er tilfeldig, og som Christoffersen og Johannessen (2012) sier så minner ustrukturert intervju om en samtale. I vårt tilfelle kan man si at vi var innom intervju, eller at undervisningen vår hadde elementer som vi ofte forbinder med ustrukturert intervju. Vi planla ikke at intervju skulle brukes som datainnsamlingsmetode, men vår aktive deltakelse i undervisningen gjorde at vi i perioder vinklet strukturen av undervisningen i en retning som kan minne sterkt om intervju. Basert på teorien om talk moves (Chapin, 2009) formulerte vi en liste med spørsmål som skulle benyttes i undervisningen. Disse spørsmålene ble benyttet for å skape respons hos elevene slik at kommunikasjonen ikke stoppet opp. I så måte kan man trekke en parallell til intervjuguider som oftest vil foreligge når man jobber med ustrukturerte intervjuer. Da denne sammenlikningen er gjort, vil vi igjen presisere at hovedfokuset for datainnsamlingen lå i den deltakende observasjonen.

I mange sammenhenger ville et en til en intervju vært gunstig for å undersøke elevenes forklaringer. Det er likevel en metode som ikke ville vært relevant i forhold til vår forskning, da vi ikke bare er ute etter å observere forklaringene som er rettet mot læreren, men også de som er rettet mot medelevene. Slik sett var valget av en deltakende observasjon det mest logiske valget av metode.

Når vi hadde tatt disse valgene måtte vi gjøre noen praktiske avveielser med tanke på utvalget vårt. Når det kom til utvalgsstørrelsen så begrenset vi oss til fem elever. Dette for å kunne klare å følge med på elevenes diskusjoner, og at alle elevene skulle ha mulighet til å delta uten å bli inaktiv i lengre perioder. Når det kom til vår utvalgsstrategi så ønsket vi å blande oss minst mulig i denne prosessen, så elevenes læring fikk i oppgave å sette sammen en gruppe som skulle delta. Kriteriene vi stilte var at vi ville ha en gruppe elever med variert faglig og kommunikativt nivå, og at vi gjerne ville ha en jevn kjønnsfordeling. Bakgrunnen for dette var at vi ønsket et kriteriebasert *utvalg med maksimal variasjon* (Christoffersen & Johannessen, 2012). Et utvalg med maksimal variasjon beskrives som et utvalg hvor det er så stor spredning som mulig i informantenes forutsetninger. En kan dermed se på vårt utvalg informanter som en sammensatt gruppe for å skape størst mulig spredning i de forhåndsbestemte kriteriene.

3.2 Dokumentasjon av innsamlet data

Når det kom til hvordan vi valgte å dokumentere innsamlet data, falt valget på bruk av videoopptak. I utgangspunktet skulle opptakene suppleres med notater, men det ble lagt litt begrensninger i forhold til hvor mye vi kunne notere da vi måtte aktivt inn å lede undervisningen. Som et sikkerhetsnett i forhold til teknologiske problemer med videokamera, hadde vi en lydopptaker aktiv i undervisningen. Dette for å sikre oss hvis lyden skulle bli dårlig på opptakene. Når det kom til valget om hvorvidt vi skulle bruke video- og lydopptak i datainnsamlingen eller ikke, var det flere faktorer som spilte inn. Bjørndal (2009) sier følgende om bruk av video- og lydopptak i sin bok *Det vurderende øyet*.

> *Den største fordelen er nok at opptaket klarer å holde fast observasjoner fra et pedagogisk øyeblikk, som ellers ville blitt glemt eller til og med aldri registrert. Din begrensede hukommelse svekker ikke opptaket. Situasjonen er ikke tapt for dine ører eller øyne* (s. 69).

Dette sitatet fra Bjørndal forklarer den styrken denne dokumentasjonsmetoden har, som virkelig ble verdifull for oss. Når vi i vårt arbeid skulle se på kommunikasjon, både muntlig og skriftlig, mellom fem elever, så vi behovet for å registrere så mye informasjon som mulig. Fra vårt ståsted virket video- og lydopptak som den mest effektive måten å dokumentere arbeidet på, samtidig som all informasjon kunne gjennomgås i etterkant. Bjørndal (2009) sier også at mengden detaljer man kan finne i opptaket er den andre store fordelen ved denne måten å dokumentere på. Hvis vi tenker oss alle aspektene som kommunikasjon kan innebære, som muntlig, skriftlig, kroppsspråk og gestikulering ser vi fort viktigheten av å kunne fange så mange detaljer som mulig. Andre alternativ som ble vurdert som dokumentasjonsmåte, var loggbokskriving og observasjonsnotater. Vi vurderte til slutt begge disse alternativene som for begrensede av to årsaker. For det første er faren for å ikke få med seg alle kommunikative aspekter stor. For det andre er kommunikativ dialog ofte så dynamisk at en ikke har kapasitet til å notere ned alle observasjoner på en detaljert og nøyaktig måte (Bjørndal, 2009).

Selv om bruk av video- og lydopptak har noen solide fordeler sett opp mot andre måter å dokumentere på, er det også viktig å ta hensyn til utfordringene som de medbringer. Den første man støtter på når man skal starte et slikt prosjekt er de administrative. Når det jobbes med opptak stilles det sterke krav til personvern, spesielt ovenfor barn og unge. Dette i seg selv kan være en tidkrevende, og møysommelig affære, som vi har beskrevet i delen som går på etiske overveielser lengre ned i kapittelet. Det andre er krav til teknisk utstyr og kompetanse til å bruke dette utstyret. Bjørndal (2009) nevner at slikt utstyr nå har blitt så tilgjengelig og leverer så bra kvalitet, at det nå er tilgjengelig for omtrent alle. Likevel krever det en viss teknologisk kompetanse, men dette er også noe som er blitt vanlig at folk innehar, da denne typen utstyr har blitt tilnærmet allemannseie.

En annen utfordring som det må tas hensyn til når man skal gjøre et slikt arbeid som beskrevet her, er kameraets påvirkning på deltakerne i observasjonen, noe vi også nevnte tidligere i teksten. En viss påvirkning vil man få av å ha en observatør tilstede i klasserommet. Et kamera er i tillegg med på å farge observasjonene vi gjør. Følgende fem faktorer er med på å påvirke observasjonen, i følge Bjørndal (2009):

- Hvor synlig er opptakeren/observatøren?
- Hvor sensitiv er interaksjonen?
- Hvor stor grad av tillit har de observerte til observatøren?
- Hvor intens er oppmerksomheten mot interaksjonen?

- Hvor vant er de observerte til opptakeren/observatøren?

Når det kom til synligheten av kameraet ble det vanskelig for oss å plassere det på en slik måte at det ikke ble synlig for elevene. Valget vi gjorde i forhold til plasseringen av kameraet, var å plassere det slik at det filmet ovenfra og ned på elevene. Dette valget ble tatt med to kriterier som utgangspunkt. Det første var at vi ville dokumentere elevenes skriftlige kommunikasjon, og da ville ikke være tilstrekkelig å kun samle inn elevenes notater etter timen. Ved å plassere kameraet på denne måten, fikk vi oversikt over hva elevene skrev, og vi kunne også se når de benyttet seg av modeller, slik som hjelpetegninger og figurer. Den andre begrunnelsen var at elevene skulle slippe å oppleve å ha et kamera rettet mot ansiktet deres. På den måten forsøkte vi å redusere synligheten til kameraet og påvirkningen det ville medført.

Hvis vi ser på Bjørndals (2009) tredje punkt, som går på elevenes tillit til oss som observatører, var det viktig for oss å operere med fullstendig åpenhet rundt undersøkelsens hensikt. Vi følte også at å ha gode rammer rundt vilkår og rettigheter som er knyttet til elevenes deltakelse i dette prosjektet var essensielt. På denne måten ville vi ivareta elevenes trygghet om at informasjonen som ble samlet opp ikke ville bli brukt til noe utover det de hadde gitt sitt samtykke til. Dette vil vi også utdype i delen som går på etiske overveielser. Det siste punktet Bjørndal (2009) presenterer, som omhandler hvor familiær elevene er til å bli observert, er også noe vi prøvde å påvirke. Som nevnt gjennomførte vi en pilot-økt med elevene, hvor vi konstruerte et opplegg som elevene deltok i, og som ble filmet. Dette testopplegget var ikke en del av datagrunnlaget til oppgaven vår, men var ment som en måte for oss å få testet opplegg, utstyr og praktisk gjennomførelse.

Bjørndal (2009) forklarer at gjennom gjentatt eksponering for kameraopptak, kan man påvirke personers holdning til opptak, og være med på å ufarliggjøre situasjonen. Med dette mener vi at ved førstegangs introduksjon til en skoleklasse, vil kameraet få mye oppmerksomhet. Noen vil være redd for å snakke foran kameraet, mens andre muligens vil benytte muligheten til å gjøre seg til. Desto lengre kameraet er til stedet, desto mindre fokus vil det få fra elevene. Til slutt vil mange kunne se på kameraet som et hvilket som helst stasjonært objekt som står i klasserommet. Denne tilvenningen tar nok oftest lengre tid enn hva vår 45 minutters pilot-økt gjorde, men en viss tilvenning fikk elevene av denne økten. "*Studier av opptak har vist at de observerte over tid ofte vier lite oppmerksomhet mot kameraet, og at tilvenningen ofte skjer* *overraskende raskt*" (Bjørndal, 2009, s. 73). Dette utsagnet av Bjørndal er med på å bygge opp rundt vår ide om tilvenning.

3.3 Metodisk gjennomføring

Nå som de metodiske valgene vi har gjort er beskrevet, skal vi ta en gjennomgang av gjennomførelsen av datainnsamlingen. Vi hadde planlagt fire økter på 45 minutter, der den første skulle fungere som en pilot-økt, som ikke skulle inngå i oppgaven. Øktene var fordelt over fire uker, slik at vi brukte en matematikktime i uken til dette arbeidet. Før hver økt lagde vi et gruppeopplegg som elevene skulle jobbe med. Disse oppgavene bestod hovedsakelig i gruppeoppgaver, laget for å fremme kommunikasjon mellom elevene. Da det er sagt så må det nevnes at det var noen individuelle oppgaver, ment for å sette i gang tankeprosessene rundt det aktuelle emnet. I tillegg til dette fikk elevene en kort presentasjon for å gjøre de familiære med fagstoffet de skulle arbeide med.

Når vi startet økten på skolen tok vi med de fem elevene på et eget grupperom der vi hadde rigget til kamera og lydopptaker, rundt et stort felles bord. Elevene fikk deretter utlevert et ark med oppgavetekst, notatark og fikk en kort muntlig instruksjon om hva de forskjellige oppgavene dreiet seg om. Elevene jobbet deretter med oppgavene i gruppe, mens vi observerte, og tok del i diskusjonen der det var behov. Når økten var overstått samlet vi inn notatene, slik at vi kunne støtte oss på dem når vi skulle gå gjennom datamaterialet. Etter undervisningsøkten gikk vi gjennom datamaterialet vi hadde samlet inn. Transkriberte lydopptakene, og noterte oss nødvendig informasjon som kom frem av video og elevnotater.

3.4 Etiske overveielser

Ved forskning, spesielt med barn og unge er det noen etiske overveielser vi må ta hensyn til. Når man går inn i skolen å skal påvirke undervisningen må man alltid ta hensyn til elevenes beste. I følge Christoffersen og Johannessen (2012) så snakker vi ofte om tre hovedpunkter når det kommer til etikk innen forskning. Disse punktene tar utgangspunkt i Den nasjonale forskningsetiske komite for samfunnsvitenskap og humanioras forskningsetiske retningslinjer (2011). Disse retningslinjene dekker tre hensyn som forskeren må ta hensyn til i sitt arbeid.

Det første punktet er *informantens rett til selvbestemmelse og autonomi*. Om dette punktet sier Christoffersen og Johannessen (2012) at deltakerne i en undersøkelse skal selv bestemme om de vil være med i undersøkelsen. Det vil si at elevene som har deltatt i forskningen vår har vært med frivillig, de har gitt samtykke til deltakelse, og dette samtykket kan de trekke når som helst. Hvis en elev velger å trekke seg, trenger de ikke å oppgi grunn for valget, og skal ikke oppleve noen konsekvenser på grunn av at de valgte å trekke seg. For vår del ble dette punktet særlig viktig siden vi skulle bruke video- og lydopptak for å dokumentere innsamlet data. Prosessen rundt dette kommer vi nærmere inn på i avsnittet om informert samtykke.

Det neste punktet som Christoffersen og Johannessen (2012) snakker om er *forskerens plikt til å respektere informantens privatliv*. Dette punktet handler om konfidensialitet, og at deltakerne ikke skal kunne identifiseres gjennom opplysninger som kommer frem gjennom forskningen. All vår innsamlede data er anonymisert, og det er brukt fiktive navn i eksemplene vi presenterer. Vi har ikke benyttet oss av en koblingsnøkkel, slik at bare vi som forfattere av oppgaven kan knytte de oppdiktede navnene opp mot elevene. Etter innsamlet data var transkribert og anonymisert ble alle video- og lydopptak slettet. All personidentifiserbar informasjon er utelatt fra teksten, slik at de som har deltatt som informanter er sikret anonymitet. På bakgrunn av dette vil det ikke komme frem i teksten hvilken skole vi har gjennomført datainnsamlingen ved, eller navn på vår kontakt ved skolen.

Det siste punktet Christoffersen og Johannessen (2012) viser til er *forskerens ansvar for å unngå skade*. Denne retningslinjen er i følge Christoffersen og Johannessen (2012) oftest relatert til medisinsk forskning, men må også tas i betraktning når man driver samfunnsvitenskapelig forskning. I vårt undervisningsopplegg var det en lav risiko for å volde deltakende informanter skade. Dette mener vi med utgangspunkt i at vi ikke var ute etter å avdekke personlig og følsomme aspekter ved elevenes privatliv. Det som derimot kunne vært en risiko var at vi tok elevene ut av den vanlige undervisningen. Dermed fratok vi dem noe av den obligatoriske opplæringen, og slik kunne de gå glipp av noe faglig undervisning. Da det er sagt, hadde vi en god dialog med elevenes faglærer, og alle våre undervisningsopplegg tok utgangspunkt i det aktuelle fagstoffet som elevene jobbet med i perioden. For å sikre relevansen i vårt undervisningsopplegg, tok vi utgangspunkt i elevenes lærebøker og læreplanen når vi satte tema for hver undervisning.

Ann Kristin Larsen (2007) nevner et annet viktig aspekt innenfor etikk i forskning. Hun snakker om informantenes fremstilling i det ferdige arbeidet. Kan noen føle seg støtt av hvordan de har blitt fremstilt, og har forskeren vært partisk i sin vurdering og fremstilling av informantene. Dette kan være et sårt område når det kommer til å forske på barn, og spesielt ungdom som ofte er meget opptatt av hvordan de fremstår offentlig. I vår forskning har vi ikke tatt hensyn til hvilke av informantene vi har brukt i eksempler, da det som har vært interessant for oss har vært kommunikasjonen som har fremkommet. All innsamlet data har blitt analysert. Vi har ikke utelatt eller fokusert på enkelt eksempler for å fremstille noen av informantene på en måte de selv ikke kan kjenne seg igjen i.

3.4.1 Informert samtykke

Som nevnt tidligere må man ha samtykke fra deltakerne i et forskningsprosjekt. I vårt tilfelle der vi benyttet video- og lydopptak for å dokumentere innsamlet informasjon, er dette spesielt strengt. Gjennom kontakt med Norsk Samfunnsvitenskapelig Datatjeneste fant vi ut at vårt prosjekt var meldepliktig, men ikke konsesjonspliktig. Dette medførte av vi måtte melde fra til dem om vår hensikt, formål og hvordan prosjektet praktisk skulle gjennomføres. Etter innmelding av prosjektet, og noen justeringer basert på tilbakemeldinger fra dem, utformet vi et samtykkeskjema. Dette ble sendt til elevenes og deres foresatte, da elevene var under 16 år. Dette samtykke skjema informerte om hvem vi er, hva forskningen gikk ut på og hva den skulle brukes til.

3.5 Koding

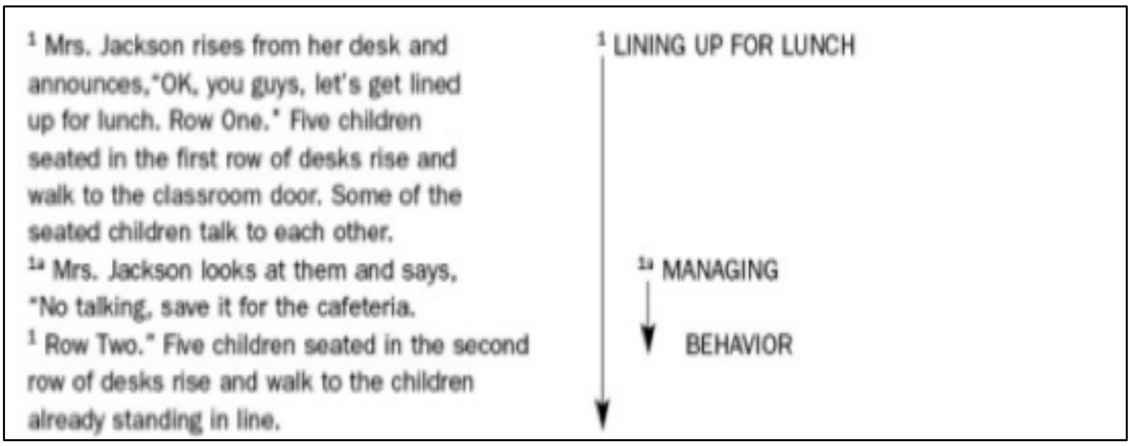
Taylor-Powell og Renner (2003) beskriver hvordan analyseprosessen kan gjennomføres ved å vise til en fem-punkts plan. Steg 1 innebærer å bli kjent med det datamaterialet en har, enten formatet er i tekst eller video. Steg 2 innebære å fokusere analysen mot et spesifikt område i datamaterialet. Dette kan være en bestemt tidsperiode, undervisningsøkt eller etter personer. Steg 3 handler om å kategorisere datamaterialet. Det er her kodingen kommer inn. Steg 4 og 5 innebærer at en tar for seg henholdsvis identifisering av mønstre og fortolkning av disse mønstrene.

En kode i kvalitativ analyse betyr ikke nødvendigvis det samme som en kode i en kvantitativ analyse. I den kvantitative analysen består kodene ofte av numerisk markering av dataen, mens i den kvalitative analysen foregår det kategorisering ved hjelp av ord (Taylor-Powell &

Renner, 2003). En kode beskrives i korte trekk som en frase eller et ord som forteller hva innholdet i en tekst eller visuell data er (Saldana , 2008). Saldana (2008) beskriver også at en ikke må se på koder som begreper eller setninger som har som hensikt å redusere datamaterialet, men at siktemålet er å skape oversikt ved å oppsummere å trekke ut essensen i informasjonen.

Alan Schoenfeld (2007) gjør rede for ulike måter å gjennomføre og benytte seg av kodingen. En kan ha velutviklede og detaljerte kodingsskjemaer som skal lette analysearbeidet, eller en kan arbeide ut fra hva han kaller for ”reasons to stop the tape” (Schoenfeld, 2007, p. 74), altså når en observerer noe interessant. Beskrivelsen av disse ytterpunktene har ikke som hensikt å vise til to ulike måter å analysere og kode dataen på, men at det er ytterpunkter som definerer et spekter av ulike kombinasjoner som kan benyttes. Saldana (2008) definerer kodingen som to separate prosesser – *de*koding og koding. Under dekodingen skapes det overordnede betydningen bak en sekvens eller ”episode” (Schoenfeld, 2007) noe som ofte er tilfelle under førstegangskodingen. Senere i kodingsprosessen *koder* man essensen i disse sekvensene.

Den tradisjonelle kodingen følger prinsippet hvor en ser gjennom dataen og noterer ned begreper eller fraser om informasjon som skiller seg ut eller virker interessant å se videre på. Alternativt så kan som nevnt disse kodene være forhåndsbestemt. En mer avansert form for koding kalles av Saldana (2008) for simultan-koding, noe som innebærer en koding i flere steg i samme datamateriale. Dette betyr at en benytter seg av flere koder i samme utvalgte datamateriale. For eksempel kan en simultan-koding se slik ut:



(Saldana , 2008, p. 5)

Kodingen handler ikke kun om å se på likheter i datamaterialet, men kan også handle om å se på ulikheter. Disse ulikhetene kan i følge Saldana (2008) også være likheter, noe som krever et skarpt øye når en studerer tekst og video. Et poeng som er viktig, slik Sipe og Ghiso (2004) sier: ”*all coding is a judgement call”*, fordi en tar med seg egen subjektivitet og forutsetninger inn i analysearbeidet. Kodingen skaper en link mellom dataen og grunntanken som ligger bak forskningen.

Vi dekodet datamaterialet med utgangspunkt i den ene undervisningsøkten – den vi så på som mest interessant. Ved å studere den dekodede dataen konstruerte vi koder, både inspirert av andre og våre egen observasjoner, som vi benyttet for å kategorisere og merke dataen. I vår forskning har vi benyttet oss av simultan-koding, slik Saldana (2008) presenterer, noe som ikke var planlagt i forkant. Dette skyldes at under dekodingen og kodingen fant vi mange interessante perspektiver innenfor samme datamengde, noe vi følte var verdt å følge opp senere. Basert på disse kodene observerte vi en tendens til at elevene begrunnet seg ulikt ovenfor læreren og medelevene, både ved kvaliteten på kommunikasjonen og ved bruk av modeller og praktiske elementer. Disse observasjonene førte til at vi så det nødvendig å definere egne koder til bruk i kategoriseringen.

De kodene som var inspirert av andre handler om hvilken type forklaringer som ble benyttet. Her har vi blant annet benyttet oss av skillet mellom matematisk og praktisk baserte forklaringer (Levenson, 2012), og om elevene forklarer en metode, konsept eller handling (Drageset, 2014). Disse kodene er ikke benyttet i teoretikernes fulle definisjoner, men vi har gjort tilpasninger til disse basert på vårt ståsted i forhold til blant annet bevisteori og våre tolkninger av samtalene. Slik sett er våre koder mer åpne enn de allerede etablerte begrepene Drageset (2014) og Levenson (2012) beskriver. De egendefinerte kodene tar utgangspunkt i strukturen i IRE-mønsteret, noe som viser til at strukturen i samtalene er essensiell. Våre koder definerer hvem som initierer til diskusjon og samtale. Kombinasjonen av disse kodene og kategoriene var riktige i vår forskning, fordi de ikke bare tar for seg *hvem* som initierer til kommunikasjon, men også hvordan de forklarer seg (Levenson, 2012) og i hvilken kontekst de forklarer seg (Drageset, 2014).

4 Funn del 1 – ulike typer forklaringer

Dette kapittelet er strukturert ved at vi i først tar for oss våre tolkninger og definisjoner av kategoriene hva/hvordan, hvorfor, lærerstyrte og elevstyrte begrunnelser. De egendefinerte kategoriene, som tar for seg lærerstyrte og elevstyrte forklaringer er et resultat av arbeidet med transkripsjonen og kodingen av datamaterialet vårt. Selv om de egendefinerte kategoriene beskriver interesseområdet i forklaringene til elevene, så vi det passende å benytte seg av allerede etablerte begreper i enkelte kategorier. Dette kommer av at de utvalgte begrepene knytter forklaringene til elevene opp mot våre egne kategorier. Kategoriene *hva/hvordan* og *hvorfor* er basert på en kombinasjon av flere teoretikeres begreper.

4.1 Hva/hvordan

I en situasjon som oppstod i en av undervisningsøktene har elevene regnet ut svaret på hver sin oppgave om divisjon av brøker. De har etter tur fått forklare hva de har gjort, og i følgende utdrag er det Thomas sin tur å forklare hvordan han løste oppgaven.

Lærer:	Ja, Thomas kan du forklare hva du har gjort?
Thomas:	Ja, jeg har tatt en ganger tre først , som er tre og den legger jeg i teller som er øverst, så tar jeg to ganger en som er to, og legger den i nevneren. Så blir det tre todeler.

Forklaringen til Thomas inneholder kun den stegvise fremgangsmåten for utregningen, og viser ikke til hvorfor han har valgt å gjøre det på denne måten. Yackel (2001) beskriver dette som en måte for elevene å forklare eller opplese hvordan dem kom frem til svaret sitt, eller hvordan man kan komme frem til svaret. Dette betyr at forklaringen til Thomas kan knyttes opp mot Dragesets (2014) *forklare handling (hva/hvordan)*. Elevforklaringer som forklarer hva elevene gjør, skal gjøre eller hvordan de gjør det når de skal løse en matematisk oppgave har vi plassert innenfor denne kategorien i tråd med Dragesets (2014) rammeverk. I vår forskning har vi utvidet kategorien til å omfatte også valg av verdier i selve regnestykket. Basert på viktigheten av å benytte korrekte verdier når utregninger skal foregå følte vi dette var en naturlig utvidelse av den eksisterende kategorien til Drageset (2014).

4.2 Hvorfor

Et annet eksempel viser en situasjon hvor elevene har presentert en løsning og en metode for å finne ut hvor lang tid det tar å tømme et basseng. Arne får i oppgave å begrunne valg av en matematisk verdi som de har benyttet i utregningen.

Lærer:	Kan du forklare hvorfor det tar tre timer å pumpe vannet tilbake?
Arne:	Dersom det tar omtrent halvparten. Det er mye mer trykk på det enn når de suger det ut.
Lærer:	Er det det?
Arne:	Jeg ville nå tro det, for vannet går ned og ikke opp.

Arne argumenterer for at det tar omtrent halvparten av tiden å fylle bassenget igjen, og forsøker å overbevise både læreren og medelevene om *hvorfor* denne matematiske verdien er legitim å benytte seg av. Dette passer godt med hva Drageset (2014) beskriver som *forklare årsak.* Arne forsøker å argumentere for hvorfor den aktuelle matematiske verdien kan benyttes for å løse oppgaven. Resonnementet baseres på en antakelse om hvordan noe fungerer i den fysiske verden, altså en praktisk tilknytning til den matematiske metoden de har benyttet seg av. Vi har derfor en mindre rigid definisjon på hva som bør falle under *hvorfor*-kategorien sett opp mot presentert teori om beviser. Som verktøy for å få elevene til å snakke om *hvorfor,* og dermed forsvare, argumentere og begrunne sine valg og løsninger, benyttet vi *talk moves* som Chapin (2009) argumenterer for.

Vi ser på dette i relasjon med undervisning og hva som kan forventes av aspirerende matematikere i opplæringen. NCTM (2000) og NSW (2015) henviser til at praktisk innlæring og resonnering kommer i begynnelsen av studieløpet, noe som burde tas i betraktning når en skal avgjøre hva som skal kunne regnes som bevis hos elever i grunnskolen. I tråd med hva Borwein og Jörgenson (2002) sier om beviser, så burde en kunne benytte seg av modeller og visualiseringer til å utfylle denne funksjonen. Kategorien *hvorfor* innebærer derfor både formelle og uformelle forklaringer, matematisk og praktisk baserte forklaringer og utregninger og bruk av modeller.

4.3 Egendefinerte kategorier

Gjennom vår forskning og vårt analysearbeid fant vi flere interessante elementer som vi ble oppmerksomme og nysgjerrige på. Spesielt ble oppmerksomheten vår rettet mot hvordan elevene argumenterte med hverandre, og hvordan de forklarte seg ovenfor oss som lærere. Dette gav utspring til en idé som baserte seg på om elevene forholder seg ulikt til medelever og lærere under diskusjon, og dersom det er slik, hvordan de forholder seg ulikt. Her tenkte vi på kommunikative ulikheter i matematiske diskusjoner. For å kunne gjøre et klart nok skille avgjorde vi at dataen måtte deles inn i elevstyrte og lærerstyrte forklaringer. Selv om vi gjorde dette skillet var det enkelte kontekster som ikke kunne kategoriseres i en kategori alene. Vi gjorde her valget om at ingen av disse skulle tas med i forskningen, fordi det kun var to observasjoner som ikke kunne defineres. I tillegg var de for lite informative til å være essensielle for oppgaven.

En av observasjonene vi gjorde tidlig i vårt arbeid med den innsamlede data var at elevenes måte å kommunisere på varierte i forhold til hvem dem snakket med. Niss (2002) beskriver kommunikasjon som et produkt mellom en mottaker og en avsender. Derfor vil kommunikasjonen påvirkes av hvem som er deltakende i samtalen. Vi kunne se tendenser til at når elevene kommuniserte med oss voksne så brukte dem til tider et mer matematisk korrekt, eller prøvde og bruke et mer matematisk språk. Når elevene derimot kommuniserte seg i mellom ble det oftere brukt et mer dagligdags språk. Dette kom til uttrykk blant annet ved samtale om brøk. I de elevstyrte forklaringene henviste de til ”tallet oppe” og ”tallet nede”, mens i lærerstyrte kontekster ble de omtalt som teller og nevner. Etter å ha gjort observasjoner rundt dette gikk det opp for oss at det ikke kun var når elevene kommuniserte direkte til læreren, at dem tilpasset seg til en mer matematisk terminologi, men at dette også var gjeldene når de førte en samtale seg i mellom, men som var i regi av eller styrt læreren.

Basert på dette, prøvde vi å dele sekvenser fra elevenes kommunikasjon opp i om det var de selv, eller læreren som hadde tatt styringen, eller initiativ til den aktuelle delen av samtalen. Neste prosess var å gå gjennom datamaterialet vårt og dele det inn i kategorier som vi har valgt å kalle lærerstyrt eller elevstyrt. Dette for å se om vi kunne se en sammenheng mellom de praktisk baserte og matematisk baserte forklaringene til elevene, sett opp mot om samtalen var lærer eller elevstyrt. Når vi har sett på elevenes kommunikasjon har vi valgt å fokusere på at det er et sosialt samspill (Niss, 2002), og slikt sett har vi ikke kunne definere enkeltsetninger og utsagn, men har sett på dem i den konteksten de er ytret i.

4.3.1 Lærerstyrte forklaringer

De lærerstyrte forklaringene inneholder flere kjennetegn som kan knyttes direkte opp mot prinsippet IRE som ofte er å finne til daglig i klasserommet (Drageset, 2014). Når vi definerer kategorien lærerstyrte forklaringer henviser vi til at læreren initierer dialogen, enten ved å stille spørsmål eller komme med ledende kommentarer, altså at læreren styrer retningen av samtalen basert på hva han/hun vil at elevene skal svare på.

Lærer:	Kan ikke dere prøve å finne ut hva som er det neste steget. Hva det neste dere må gjøre?
Arne:	Vi må bare finne ut volumet av det, så kan vi omtrent regne ut hvor lang tid det tar per kubikkmeter.
Ivan:	Okay, this is easy if you just like.
Arne:	Så når vi finner ut det, så finner vi ut hvor lang tid det er, også ganger vi det, og så får vi svar på det her spørsmålet. Så for eksempel hvis vi finner ut at det er fem sekunder per kubikkmeter, så blir det svaret som er det. Pluss, nei gange 25, nei fem.

I dette utdraget initierer læreren dialogen hvorpå eleven(e) responderer. Det foregår ikke en åpenbar evaluering av elevenes responser, noe som gjør at vi mener at vi ikke følger IRE-prinsippet til fulle. Når vi her sier at det ikke gjøres en åpenbar evaluering, mener vi at vi ikke uttrykker denne evalueringen ovenfor elevene. I eksempelet ovenfor spør vi et ledende spørsmål som har som mening å skape progresjon i diskusjonen. Alle spørsmål som er ledende av natur eller spørsmål som spør etter spesifikke svar vil defineres som lærerstyrt, og har en sterk tilknytning til funneling som beskrevet av Wood (1998).

4.3.2 Elevstyrte forklaringer

Vi har valgt å se på den faglige diskusjonen som ikke er initiert av læreren som den elevstyrte diskusjonen. Det vi legger i dette begrepet er situasjoner der elevene selv har tatt initiativet i samtalen. Dette kan være gjennom spørsmål til elevgruppen, forklaringer eller med en generell uttalelse. En ting som er verdt å merke seg her er at situasjoner der læreren har startet en diskusjon, men som en av elevene penser inn på et nytt spor har vi valgt å se på som elevstyrt. I følgende eksempel diskuterer elevene hvor lang tid det tar å tømme et basseng for vann.

Ivan:	Må vi ikke finne ut hvor mye den der støvsugeren tar av vann da?
Peter:	122 minutter på det der.
Thomas:	En liter i sekundet? Hvis vi sier det er…
Arne:	Nei, en liter i sekundet er ingenting.
Ivan:	Jeg trur den kan ta sånn der ti…
Arne:	Da, da, hvis det er, det må være ti eller 100.

Ivan viser her eget initiativ til å spørre etter hvilke verdier de må benytte i utregningen. Samtalen spores derfor over i en retning som elevene selv bestemmer. Lærerens involvering er fraværende i denne sekvensen, noe som gir elevene fritt spillerom til å diskutere oppgaven i sin helhet. Den elevstyrte sekvensen viser seg motstridende til IRE-mønsteret, i og med at læreren ikke er representert i samtalen. Dette karakteriserer hva vi har valgt å kalle for elevstyrte forklaringer.

Vi ønsker å påpeke benevnelsen av våre kategorier. Selv om de kalles for elevstyrte og lærerstyrte *forklaringer*, henviser de til forklaringer som er sett på i en kontekst. Dette kommer av at kommunikasjon er et sosialt samspill og kan ikke analyseres som enkeltstående setninger. Det som skiller de elevstyrte forklaringene fra de lærerstyrte, kan begrunnes ut fra hvem som tar initiativet til samtalen og retningen samtalen tar, og hvem som styrer denne retningen. I de lærerstyrte forklaringene går læreren aktivt inn i samtalen og stiller spørsmål for å få en spesifikk respons. En lærerstyrt forklaring kan også innebære at læreren styrer retningen på samtalen ved å dirigere eleven inn i en mer produktiv dialog. Når det er elevene selv som stiller disse spørsmålene, eller dirigerer samtalen i en annen retning, kalles det for elevstyrte forklaringer.

4.4 Kategorienes innhold og betydning

De ovenfor nevnte kategoriene, både egendefinerte og allerede etablerte begreper, dannet grunnlag for å konstruere en tabell til å hjelpe oss i analysen av forklaringene.

4.4.1.1 Tabell 1

Tabell som ble benyttet for å fordele de ulike observasjonene

Forklaringstype	Forklaringsinitiativ	MB	PB	Totalt (ES/LS)
Hva/hvordan	Elevstyrt			
	Lærerstyrt			
Hvorfor	Elevstyrt			
	Lærerstyrt			
	Totalt (MB/PB)			

MB = matematisk baserte forklaringer, PB = praktisk baserte forklaringer
LS = lærerstyrte forklaringer, ES = elevstyrte forklaringer

X-aksen i tabellen representerte de matematisk og praktisk baserte forklaringene, som er to av kategoriene. På y-aksen i tabellen, benyttet vi begrepene *hvorfor* og *hva/hvordan* i tråd med våre tolkninger av begrepene. Som underkategorier i denne aksen, har vi de elevstyrte og lærerstyrte forklaringene.

4.4.2 Lærerstyrte kategorier

De lærerstyrte forklaringene deles inn i praktisk og matematiske basert *hvorfor* og *hva/hvordan.* Elevene arbeider i det følgende eksempelet med å sammenligne og rangere fem desimaltall og brøker i stigende rekkefølge. En av elevene har allerede forklart at $\frac{3}{5}$ er mer enn en halv. Vi som lærere, følger opp med å spørre om svaret er riktig.

Lærer:	Okay, det er en over en halv. Er folk enig?
Thomas:	Ja, det er litt veldig nært, for hadde han skrevet $\frac{6}{10}$ og delt den opp i 6.
Peter:	Ja, du skjønner nå prinsippet.
Thomas:	Ja.
Lærer:	Bare fortsett... Hva tenkte du Thomas?
Thomas:	Ja, for den kunne stått litt lengre dit. For hvis vi tenker at det er cm så er det ikke en cm fra der til dit.

Læreren initierer her samtalen, ikke med å spørre spesifikt etter en begrunnelse, men styrer dialogen i en retning som skal føre til en mer produktiv dialog. Thomas begrunner og argumenterer for *hvorfor* svaret er riktig, i tråd med nevnte vinkling av dialogen. Han benytter seg av modeller for å begrunne og støtte opp om egen forklaring. Han refererer til et visuelt hjelpemiddel, i denne sammenheng tallinjen, og argumenterer ved å vise til egenskaper ved denne. Dette betyr at forklaringen er av praktisk karakter jamført med våre definisjoner av begrepet praktisk basert forklaring. Dette er en uformell forklaring som ikke tar for seg matematiske begreper, men som baserer seg på en mer intuitiv resonnering. Forklaringen til Thomas er derfor ikke utelukkende er matematisk av karakter, men av en mer praktisk tilnærming, slik Fischbein (1987) beskriver. Denne type kombinasjon av kriterier medfører at forklaringen er av praktisk karakter, lærerstyrt og konteksten tillater oss å karakterisere begrunnelsen som en forklaring på *hvorfor* en løsning er riktig.

Det andre perspektivet innenfor lærerstyrte begrunnelser for *hvorfor* en metode, verdi eller løsning er riktig eller feil, er de matematisk baserte forklaringene. Disse stiller seg som en liten motsetning til de praktisk baserte forklaringene ved at de er mer formelle i karakter. I følgende eksempel skulle elevene begrunne hvorfor $2 : 0{,}5 = 2 * 2$.

Johanne:	Fordi, liksom. Dersom du deler noe halvt, for det er det som de sier, da deler du på halvt. Fire delt på halvt det er…
Arne:	Altså den måten jeg tenker på, det her er sikkert helt feil, det jeg tenker at man ganger på det halve av det tallet man har originalt.
Johanne:	Så altså…hæ..?
Arne:	Det jeg tenker er at det egentlig bare står to der siden det er fire der. At det ganger på det halve av seg selv.

Johanne får her i oppgave å beskrive *hvorfor* regnestykkene gir samme løsning. Begrunnelsen til Johanne er ufullstendig, og den er initiert av læreren som har presentert oppgaven i forkant. Arne fyller på ved å ta initiativet i samtalen, men dette fører ikke til at dialogen er elevstyrt, fordi grunnlaget for konteksten er initiert av læreren. Elevene tar her utgangspunkt i matematiske utregninger for å begrunne metoden, og ikke ved å benytte seg av modeller og visuell støtte. Dette innebærer at den lærerstyrte begrunnelsen er matematisk basert, ikke praktisk basert.

Argumentasjoner og forklaringer som viser hva/hvordan noe har blitt gjort, enten matematisk eller praktisk basert, er de to siste kategoriene som er lærerstyrte. Som nevnt bærer disse preg av å gjenfortelle en metode eller fremgangsmåte i tråd med hva Yackel (2001) har påstått.

Thomas får her spørsmål om å forklare en metode som tar utgangspunkt i divisjon av brøker. Hver av elevene fikk ansvar for å forklare en divisjonsoppgave hver, hvorpå det her er Thomas sin tur å forklare fremgangsmåten han benyttet seg av.

Lærer:	Ja, Thomas kan du forklare hva du har gjort?
Thomas:	Ja, jeg har tatt en ganger tre først, som blir tre, og den legger jeg i telleren, som er øverst. Så tar jeg to ganger en som er to, og legger den i nevneren. Så blir det $\frac{3}{2}$.
Lærer:	Okay.
Thomas:	Så $\frac{1}{2}$.
Arne:	Det var sånn som jeg mente, bare at jeg er veldig dårlig å forklare.

Hvis vi ser på eksempelet så ser vi at det starter med at læreren spør en av elevene om han kan forklare hvordan han har løst en oppgave. Dette er et typisk eksempel på at læreren initierer en samtale. Thomas følger opp med å forklare hvordan han har utført utregningen for den aktuelle oppgaven, ved å presentere en algoritmisk beskrivelse av prosessen. Denne type forklaring karakteriserer det matematisk baserte perspektivet meget godt. En slik gjenfortelling av fremgangsmåten er hva vi har definert som en forklaring av enten *hva* eller *hvordan,* hvor læreren initierer til denne forklaringen.

De praktisk baserte forklaringene som benyttes for å fortelle *hva/hvordan* noe har blitt gjort eller skal gjøres, er siste kategori innenfor de lærerstyrte forklaringene. Elevene får i oppgave å finne andre muligheter å kontrollere et svar på, enn å benytte seg av formell utregning. Thomas følger opp tråden ved å henvise til hva en av elevenes lærere har beskrevet tidligere.

Lærer:	Finnes det noen andre muligheter for å finne ut om svaret er riktig?
Thomas:	Det var sånn rutenett tegning som ho June, var det ikke det hun heter? Gjorde for oss. Så la hun dem oppå hverandre, og så delte den delen av tegninga eller den fargelagte brøken oppå den fargelagte brøken så de fargelagte delene som ligger oppå hverandre er svaret.

Som vi ser av dette eksempelet er det et spørsmål fra læreren som setter i gang samtalen, og resten av samtalen dreier seg rundt svaret fra Thomas. Vi ser at han henviser til en kontrollmetode som innebærer bruk av tegning og modeller, og forklaringen kategoriseres derfor som praktisk basert. De lærerstyrte, praktisk baserte forklaringene av *hva/hvordan* noe skal gjøres er den kategorien som har fått færrest observasjoner. Selv om de er marginalt færre enn de lærerstyrte, praktiske begrunnelsene for *hvorfor* noe er riktig eller feil.

4.4.3 Elevstyrte kategorier

Under de elevstyrte forklaringene finner vi tilsvarende kategorier som under de lærerstyrte. Også her gjør vi et skille mellom *hvorfor* og *hva/hvordan,* og matematisk og praktisk baserte forklaringer. Forskjellen tar utgangspunkt i hvem som har tatt initiativet i samtalen. Oppgaven elevene diskuterer er hvordan en skal løse oppgaven $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, hvorpå løsningen er $\frac{3}{2}$.

Ivan:	Er det der $\frac{3}{2}$ da?
Arne:	Det blir på en måte 2 gangestykker, det er to gangetegn.
Johanne:	Jesus Arne. Men altså, om man tar 1 kake og skal dele den i 8, så får man ikke 2 kake.

Ivan tar her initiativet i samtalen og spør etter en rettferdiggjøring av resultatet. Arne forsøker så å argumentere for hvorfor metoden gir riktig resultat, som en respons på Ivans spørsmål. Den påfølgende begrunnelsen fra Johanne er den som karakteriserer dialogen i dette tilfellet, hvor hun begrunner *hvorfor* metoden er feil ved å knytte de matematiske verdiene i metoden opp mot visuelle, praktiske objekter. Dette er bruk av modeller og medfører at begrunnelsen til Johanne er praktisk basert. På denne måten har vi kategorisert forklaringer som begrunner *hvorfor*, ved et praktisk basert utsagn som er elevstyrt.

De elevstyrte, *matematiske* begrunnelsene for *hvorfor* noe er riktig eller feil, har tilsvarende, men ikke helt like trekk. Eksempelet under tar utgangspunkt i at elevene har fått presentert tre ulike matematiske verdier, hvor enhetene ikke er de samme. Elevene resonnerer seg her frem til hvilken pumpe som er mest effektiv, altså hvilken matematisk verdi som er størst.

Arne:	Jeg ser allerede at det er den kjappeste.
Ivan:	La oss nå bare regne. De blir å stoppe oss.
Arne:	343 liter.

Johanne:	Det er liksom på 10 minutter…på 20 minutter så har den tredje pumpen blitt ferdig med det som den første pumpen ville brukt en time…over det.

Arne svarer her på en oppgave uten initiativ fra læreren. Dette kvalifiserer til å falle under kategorien elevstyrt diskusjon da resten av elevgruppen følger etter Arne sitt initiativ. Johanne begrunner her *hvorfor* pumpe tre er raskest og gjør dette ved å beskrive forholdet mellom to matematiske størrelser. Disse størrelsene finner hun ut ved hoderegning, noe som gjør det vanskelig å karakterisere argumentet. Selv om hun benytter navn på fysiske objekter, mener vi at på grunn av den store mengden vann og antakeligvis lite praktisk erfaring med pumpekapasitet, har Johanne ikke noe mentalt bilde over mengden vann og dermed ikke noen visuell modell å støtte seg opp mot. Dermed vil denne dialogen kategoriseres som elevstyrt, matematisk basert og falle under kategorien *hvorfor*.

De elevstyrte, matematisk baserte beskrivelsene av en metode eller fremgangsmåte er den nest siste kategorien i vår tabell. Utregning av volum var en stor del av datamaterialet fra undervisningsøkt 3. Det følgende eksempelet tar utgangspunkt i nettopp denne utregningen, som en kontrollsjekk av svaret og at oppgaven er regnet ut riktig.

Johanne:	Jeg lurte på om noe, dere har tatt... fordi før så var det...eehh. To ganger fem, så hadde dere satt en der på vent liksom, også hadde dere tatt to ganger en, nei, ja to ganger en.
Peter:	Det blir to.
Johanne:	To ganger en pluss en som står på vent så..
Ivan:	Det blir fire.
Peter:	To pluss en.
Johanne:	Også.
Peter:	To pluss en pluss en.

I utdraget fra denne diskusjonen ser vi at det er elevene som starter samtalen, og at det kun er elevene selv som er deltakende i den, gjør det til en typisk elevstyrt diskusjon. Hvis vi ser på innholdet så handler dialogen om hvordan utregningen har blitt gjennomført ved en beskrivelse av algoritmen som har blitt brukt, uten bruk av modeller og konkretisering. Dette gjør at vi velger å plassere denne matematisk baserte forklaringen i *hva/hvordan* kategorien.

Selv om flere av de elevstyrte forklaringene viser seg å være matematisk baserte, er det også en gruppe observasjoner som har praktisk baserte karakteristikker. I slike tilfeller benytter elevene seg av modeller og henvisninger til konkreter, både fysiske og imaginære. Utdraget fra vår transkripsjon viser hvordan elevene diskuterer hvordan de skal finne ut volumet til et basseng. De forsøker altså å finne en metode som gir de den ønskede løsningen.

Johanne:	Hvor stort er bassenget?
Peter:	25 meter.
Ivan:	De setter ikke 8. klassinger på det, din potet.
Johanne:	Hvor bredt?
Ivan:	Seks. Fem meter. Hvor mye vann?
Johanne:	Så eeeh, fem ganger 25
Arne:	Så fire ganger. Det, det er tre meter dypt.
Thomas:	Tre eller fire.
Ivan:	På dypa.
Johanne:	Men, altså bredden også, lengden er 25 meter, men bredden hva med den?
Peter:	Den er 5-6 meter tror jeg.

I dette eksempelet ser vi at det er elevene som starter diskusjonen, og derfor vil vi klassifisere også dette som elevstyrte forklaringer. Vi har valgt å se på dette som en praktisk basert diskusjon. Elevene forsøker å finne ut hvor stort bassenget er, basert på sammenlikninger som knytter seg til en kjent sammenheng, eller i dette tilfellet en normert størrelse på et basseng. Elevene har i denne oppgaven ikke fått noen mål på bassenget, men må bruke den informasjonen de har fra egne empiriske erfaringer. Innholdsmessig ser vi at elevene forsøker å finne målene de trenger for å løse oppgaven samtidig som de diskuterer metoden de skal benytte seg av. Dette gjør at vi velger å plassere disse elevstyrte, praktisk baserte forklaringene innenfor *hva/hvordan* kategorien.

5 Funn del 2 – oversikt og antall

I analysearbeidets del 2 fokuserte vi på fordelingen over alle øktene. Dette var fordi det gav oss en oversikt over datamaterialet som ikke ville vært mulig ved kun å analysere enkeltobservasjoner. Først vil vi presentere den totale oversikten, før vi går videre med å vise til hver undervisningsøkt. Dette valgte vi å gjøre for å finne interessante fokusområder blant våre observasjoner. Når det kommer til å se på funnene vi gjorde i undersøkelsen vår, ble det naturlig å se på fordelingen av de ulike observasjonene og hva dette kan bety. Dette for å finne ut om det var store ulikheter i fordelingen mellom de forskjellige kategoriene i tabell 2. Det vil si at vi først skal gå gjennom tabellene som vi har presentert, for å se hvilke ting som stikker seg ut. Tabell 2 viser til hvordan fordelingen av alle observasjonene representeres i vår tabell.

5.1.1.1 Tabell 2

Total oversikt over antall observasjoner i undervisningsøktene.

Forklaringstype	Forklaringsinitiativ	MB	PB	Totalt (ES/LS)
Hva/hvordan	Elevstyrt	25	9	34
	Lærerstyrt	44	5	49
Hvorfor	Elevstyrt	21	11	33
	Lærerstyrt	23	6	29
	Totalt (MB/PB)	113	31	

MB = matematisk baserte forklaringer, PB = praktisk baserte forklaringer
LS = lærerstyrte forklaringer, ES = elevstyrte forklaringer

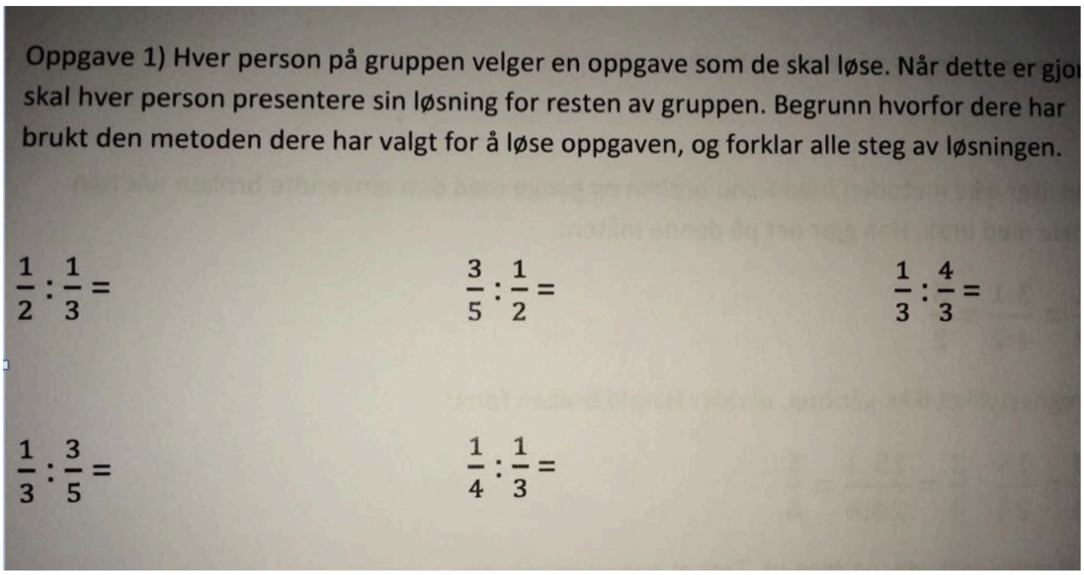
Hvis man ser til tabell 2 så ser man at vi har kategorisert 113 av våre observasjoner som matematisk baserte forklaringer. De praktisk baserte forklaringene har til sammenlikning 31 observasjoner. Dette vil si at cirka en femtedel av observasjonene vi har gjort består av praktisk baserte forklaringer. Dette samsvarer med det vi tidligere har sett fra Levensons (2009) forskning, der hun sier at ved femte trinn så fant hun flere matematisk baserte forklaringer enn hun fant praktisk baserte. Når man ser dette opp mot hva NCTM (2000) sier om emnet, altså at når elevene kommer til mellomtrinnet og ungdomsskolen, så blir forklaringene mer matematisk rigide. Dette kan sees på som at når elevene kommer høyere opp i klassetrinnene, og tilegner seg mer matematisk kunnskap, så går også forklaringene deres fra å være mer praktiske, til å inneholde flere matematiske elementer. Videre viser tabell 2 at *hvorfor*-kategorien har tilnærmet lik fordeling mellom elevstyrte og lærerstyrte forklaringer, med 33 mot 29. Her ser vi at det er nesten dobbelt så mange elevstyrte enn lærerstyrte forklaringer som er praktisk baserte, henholdsvis elleve mot seks.

Den samme tendensen ser vi om vi går nærmere inn på *hva/hvordan*-kategoriene, og igjen sammenlikner de praktisk baserte funnene. Her ser vi at det er ni av observasjonene som er praktisk basert når elevene styrer samtalen, og fem når det er læreren som har regien. De lærerstyrte *hva/hvordan*-observasjonene utgjør total 49 stykker, mens de elevstyrte utgjør 34. Hadde observasjonene vært like i antall, ville vi observert de praktisk baserte forklaringene tre ganger oftere under elevstyrte enn hos de lærerstyrte. Vi mener denne fordelingen kan komme av at elevene ser for seg at de kommuniserer kun til medelevene når det er de selv som har styring på diskusjonen. Når diskusjonen er lærerstyrt kan det være at elevene ser for seg at de trenger en mer matematisk basert uttrykksform for å tilfredsstille tilhørerne.

Det viser seg at elevene forklarer seg oftere ved å benytte seg av matematisk baserte forklaringer, noe som kommer fram av tabell 2. Dette kan tyde på at elevene, gjennom undervisningen, er stimulert til å forklare seg på denne måten. Dette vil i så fall være i tråd med NCTM (2000) og NSW (2015) som sier at elevene tilegner seg mer matematisk og formell kompetanse på høyere klassetrinn. Når de kommer til fordelingen av de elevstyrte forklaringene, tenderer det til at de forklarer seg oftere praktisk basert enn ved de lærerstyrte.

5.2 De individuelle undervisningsøktene

Fokus for den første undervisningsøkten var divisjon med brøk. Majoriteten av oppgavene i denne økten var av typen der elevene fikk hver sitt divisjonsstykke som de skulle løse.


Oppgave 1) Hver person på gruppen velger en oppgave som de skal løse. Når dette er gjo
skal hver person presentere sin løsning for resten av gruppen. Begrunn hvorfor dere har brukt den metoden dere har valgt for å løse oppgaven, og forklar alle steg av løsningen.

$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} =$ $\quad$ $\frac{3}{5} : \frac{1}{2} =$ $\quad$ $\frac{1}{3} : \frac{4}{3} =$

$\frac{1}{3} : \frac{3}{5} =$ $\quad$ $\frac{1}{4} : \frac{1}{3} =$

Oppgaven ble gitt skriftlig til elevene og de skulle i fellesskap bli enige om hvem som løste hvilken av oppgavene. De presenterte i tur og orden hvordan de kom frem til løsningen på sitt regnestykke.

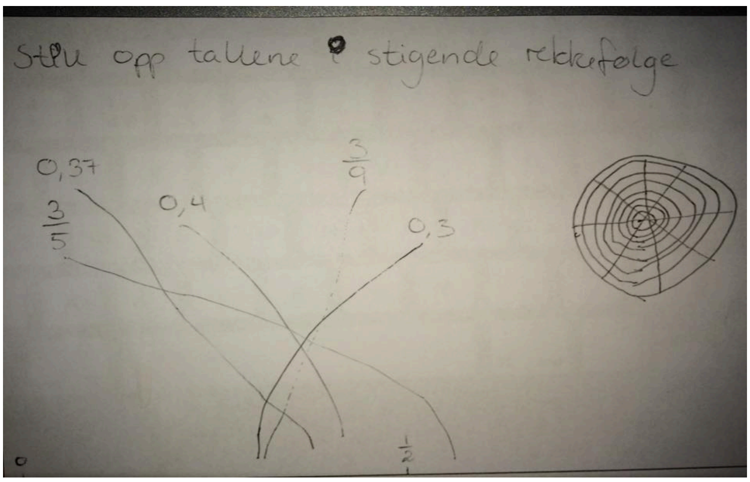
5.2.1.1 Tabell 3

Oversikt over antall observasjoner i undervisningsøkt 1

Forklaringstype	Forklaringsinitiativ	MB	PB	Totalt (ES/LS)
Hva/hvordan	Elevstyrt	11	1	12
	Lærerstyrt	13	1	14
Hvorfor	Elevstyrt	1	6	7
	Lærerstyrt	7	1	8
	Totalt (MB/PB)	32	9	

MB = matematisk baserte forklaringer, PB = praktisk baserte forklaringer
LS = lærerstyrte forklaringer, ES = elevstyrte forklaringer

Fordelingen mellom de praktisk og matematisk baserte forklaringene er forholdvis lik i antall innenfor *hvorfor*-kategorien. De elevstyrte og lærerstyrte forklaringene har likevel et meget ulikt forhold. Innenfor lærerstyrte forklaringer finner vi hovedvekten innenfor de matematisk baserte forklaringene, mens de elevstyrte forklaringene er mer praktisk rettet. Den andre undervisningsøkten omhandlet omgjøring mellom brøk og desimaltall. Oppgavene som omhandlet omgjøring var å gjøre om brøkene $\frac{5}{3}$ og $\frac{5}{8}$ til desimaltall, og omgjøring av desimaltallene 2,37, 1,10 og 0,82 til brøker. Den mest fremtredende av oppgavene elevene jobbet med i denne økten var at de fikk utlevert noen verdier i form av brøker og desimaltall. Disse verdiene skulle elevene sette på riktig plass på en tallinje.



5.2.1.2 Tabell 4

Oversikt over antall observasjoner i undervisningsøkt 2

Forklaringstype	Forklaringsinitiativ	MB	PB	Totalt (ES/LS)
Hva/hvordan	Elevstyrt	2	0	2
	Lærerstyrt	8	4	12
Hvorfor	Elevstyrt	3	0	3
	Lærerstyrt	4	1	5
	Totalt (MB/PB)	17	5	

MB = matematisk baserte forklaringer, PB = praktisk baserte forklaringer
LS = lærerstyrte forklaringer, ES = elevstyrte forklaringer

Det som stikker seg ut i denne økten er fordelingen innen de praktisk baserte forklaringene. Her kan vi se at de lærerstyrte forklaringene som omhandler *hva/hvordan* har mange observasjoner. Dette funnet viser seg å være av interesse når en skal argumentere for oppgavenes betydning for samtalens struktur. I den tredje undervisningsøkten jobbet elevene med en åpen problemløsningsoppgave. Oppgaven gikk ut på at elevene skulle rense et svømmebasseng.

Lærer: Det som er saken det er det at oppe på Alfheim (lokalt svømmebasseng), så har de et svømmebasseng. De skal bytte ut vannet der og rense bassenget.

Ivan: Skal de?

Lærer: Ja, men de lurer på hvor lang tid de bruker på det. Det må dere finne ut av.

Her fikk de presentert oppgaven muntlig og elevene fikk ikke presentert opplysninger som størrelse på basseng, eller kapasitet på vannpumpe. Dette var noe de skulle diskutere seg frem til i gruppen. Tilsvarende skulle de på egenhånd komme frem til hvilke metoder de skulle benytte seg av, verdier i utregningene og kontrollering av svarene.

5.2.1.3 Tabell 5

Oversikt over antall observasjoner i undervisningsøkt 3.

Forklaringstype	Forklaringsinitiativ	MB	PB	Totalt (ES/LS)
Hva/hvordan	Elevstyrt	12	8	20
	Lærerstyrt	23	0	23
Hvorfor	Elevstyrt	17	5	22
	Lærerstyrt	12	4	16
	Totalt (MB/PB)	62	17	

MB = matematisk baserte forklaringer, PB = praktisk baserte forklaringer
LS = lærerstyrte forklaringer, ES = elevstyrte forklaringer

Ut fra tabell 5 ser vi at vi har mange flere observasjoner under denne økten, enn hva vi hadde i de to første. Grunnen til dette er at den tredje økten var en dobbeltime, og at elevene derfor hadde mer tid tilgjengelig. Vi kan ut fra tabell 5, se at elevene benyttet seg av elevstyrte forklaringer nesten tre ganger så ofte som lærerstyrte i kategorien praktisk basert. Dette kan komme av at oppgavetypen er åpen, noe som betyr at lærerens rolle blir mer passiv enn hva IRE-mønsterets struktur ville ført til.

5.3 Fordeling og betydning

Hvis vi ser i tabell 4 på lærerstyrt forklaring under hva/hvordan kategorien, ser vi at fire av totalt fem observasjoner hører til i denne undervisningsøkten. Dette stakk seg såpass ut, at vi ønsket å se nærmere på hva som var årsaken til dette. Når vi gikk inn å så spesifikk på de fire aktuelle eksemplene, så visste det seg at grunnen til at alle disse er praktisk basert, kommer av oppgavens utforming. Den aktuelle undervisningsøkten alle disse fire observasjonene er hentet fra, handler om at elevene skulle plassere forskjellige verdier på en tallinje. Dette vil si at elevene ikke kunne komme utenom å benytte seg av noe som vi tolker som praktisk basert, og derfor er det oppgavens struktur som gjør at elevene velger denne forklaringsformen. Vi kan si at dette funnet delvis skyter hull i den tidligere antakelsen vår om at elevene ser på hvem dem kommuniserer med, og velger forklaringsmåte basert på dette. Dette er ikke helt sant, da det viser seg at begge faktorene kan spille inn på hvilken forklaringsmåte elevene benytter seg av, gjerne i kombinasjon med hverandre.

Undervisningsøkt 2 hadde en fast struktur. Her fikk elevene oppgaver som de skulle løse og presentere for medelevene. Oppgavene var matematisk formelt rettet, i og med at de skulle presentere hvordan de løste oppgaven, uten nødvendigvis å benytte seg av modeller. Dette medførte at forklaringene oftere var matematisk baserte, enn i de andre undervisningsøktene. Vi ønsket også å se på forskjellene og likhetene i forklaringene når samtalen ikke var lukket. Derfor benyttet vi oss av en åpen oppgavetype i undervisningsøkt 3. Måten denne økten var bygd opp på gjorde at vi fikk mer flyt i diskusjonen, og elevene fikk styre sin egen involvering i samtalen. Resultatet viser seg ved at elevene benytter praktisk baserte forklaringer tre ganger oftere ved elevstyrte enn lærerstyrte forklaringer.

Nærmere gjennomgang av datamaterialet vårt i tabell 2, viser at fordelingen av praktisk og matematisk baserte forklaringer, er jevnt fordelt mellom elevstyrte og lærerstyrte diskusjoner. Selv om vår data viser at ca. $\frac{1}{5}$ av forklaringene er praktisk baserte, viser tabellene oss et klart skille mellom mengden observasjoner innenfor de lærerstyrte og elevstyrte forklaringene. Selv om oppgavene påvirker om forklaringene er matematisk eller praktisk basert, viser det seg at de elevstyrte forklaringene har en praktisk basert tilnærming nesten dobbelt så ofte som de lærerstyrte forklaringene.

Denne oversikten gav oss et klarere syn på hvilke perspektiver som var interessante å se videre på. Her tenker vi spesielt på kategorien *hvorfor* som stiller et par interessante spørsmål. Hvorfor benytter elevene seg av mer praktisk baserte forklaringer når det er elevene selv som stiller spørsmål? Hva gjør elevstyrte og lærerstyrte forklaringer ulike, men samtidig skaper en lik fordeling i kategorien hvorfor? Er det noen forskjell i de praktisk baserte begrunnelsene ved lærerstyrte og elevstyrte forklaringer? Basert på disse observasjonene ønsket vi å fokusere på rettferdiggjøring, argumentasjon og begrunnelse, altså *hvorfor*-kategorien i vårt skjema.

6 Funn 3 – Likheter og ulikheter

6.1 Spredning i kommunikativt nivå

Det tekniske nivået elevene kommuniserte på fordelte seg over et helt spekter av variasjoner. Ofte hadde spørsmålet og oppgaven mye å si for hvordan elevene mestret å forklare og begrunne seg. I følgende to eksempler vil vi forsøke å belyse to ulike nivåer av den kommunikative kompetansen. Ingen av dem er dårlige forklaringer, men den ene er innholdsmessig ulik den andre, noe som vi mener fremhever de ulike nyansen som skiller forklaringene fra hverandre. Det er samme elev som begrunner seg i begge tilfellene og eleven beskriver samme situasjon, noe vi føler skaper en meget interessant nyanse.

Lærer:	Lengde, høyde og dybde?
Johanne:	Men det blir liksom feil fordi det er ikke samme dybde der som der og det er ikke samme dybde der som der.

I denne lærerstyrte begrunnelsen peker Johanne på modellen for å støtte forklaringen. Hun argumenterer ved å henvise til at dybden er ulik på begge sidene av bassenget, noe som fører til en ukorrekt løsning ved bruk av algoritmen. Videre begrunnelse har ikke Johanne. Hun formulerer seg godt, selv om det er uformelt, og er presis og effektiv i forklaringen, noe Niss legger til grunne for kommunikasjonskompetansen. Johanne viser at hun knytter sammen både teori og praksis, ved å relatere de ulike komponentene i algoritmen opp mot bassengets utforming, selv om hun ikke uttrykker dette for de andre elevene. Hun klarer derfor å se sammenhenger mellom modell og symbolikk, noe som viser til både en formell og symbolsk kompetanse, så vel som praktisk. Dette er noe både Niss (2002), Kilpatrick (2001), NCTM (2000) og Skemp (1976) beskriver i sine teorier.

Johanne:	Det er jo den her nedoverbakken, så hvis det her er seks meter, så er det bare sånn ca. en meter bortover er det seks meter, og så blir det sånn mindre og mindre, så dersom man tar 25 ganger 6 så blir det jo hele det her.

Disse to begrunnelsene beskriver samme situasjon, en lærerstyrt og en elevstyrt. Det som skiller seg ut her er det kommunikative nivået og kompetansene som benyttes i

begrunnelsene. I begge forklaringene forsøker Johanne å begrunne hvorfor algoritmen for areal av rektangler er feil å benytte seg av, når volumet av et basseng skal finnes.
Et aspekt som er verdt å merke seg ved disse begrunnelsene, er hvor ulik forklaringene er selv om de beskriver samme situasjon. Etter kun kort betenkningstid forklarer Johanne seg på nytt ovenfor medelevene, og benytter en begrunnelse som er mer nøyaktig, detaljert og kompetansekrevende. Når læreren er involvert i samtalen klarer ikke Johanne formulere seg like godt som når hun forklarer seg for medelevene. Vi tror dette kan komme av at hun er mer komfortabel med å snakke på det faglige nivået til elevgruppen.

I denne elevstyrte forklaringen er det flere likhetstrekk med den lærerstyrte, men det vises til en bedre matematisk kompetanse. Her mener vi ikke at det er flere kompetanser som kommer til uttrykk, men at begrunnelsen holder et høyere nivå, noe som krever en mer matematisk kompetanse. Dette kommer av at Johanne knytter spesifikke verdier opp mot algoritmen, noe hun ikke gjorde i det første eksempelet. Videre benytter hun utregningen i forklaringen og knytter den opp mot modellen, altså konkretiserer den abstrakte algoritmen. Hun beskriver også hva som gjør at algoritmen gir feil løsning, ved å vise på modellen hvilket område som ikke burde vært med i løsningen. Her viser Johanne en meget god kommunikativ kompetanse når hun beskriver, og gjør sitt argument både mer substansielt og legitimt. På denne måten verifiserer hun og rettferdiggjør sin påstand om at løsningsmetoden er feil.

Dette peker på en meget god relasjonell kompetanse (Skemp, 1976), som også innebærer flere kompetanser fra de ulike kompetanseteoriene. Skillet mellom lærerstyrt og elevstyrt begrunnelse går i dette tilfellet mot vår antakelse og inntrykk av vår data. Opprinnelig ville vi antatt at de lærerstyrte begrunnelsen forholdt seg mer matematisk enn praktisk, men her viser Johanne at dette ikke nødvendigvis er tilfelle da hun begrunner med mer matematisk kompetanse i den elevstyrte begrunnelsen. Dette viser seg å være ett av få unntak fra vår antakelse. Thomas og Peter viser mer til hva vi har antatt i forkant. Peter får i oppgave og begrunne hvorfor en løsning er $\frac{1}{4}$, noe følgende eksempel viser.

Lærer:	Hvorfor er det en fjerdedel?
Peter:	Fordi det er jo fire deler, og når du har to fjerdedeler har du jo to av fire også du skal dele to to, eller de her to på de to. Så bruker du den her så får han ene av de her får den her delen og den andre får den her.

Peter viser til konseptene teller og nevner, begrunner en uformell strategi med gruppering, og kommuniserer presist og effektivt. Basert på innholdet i begrunnelsen kommer det også fram at han visualiserer at det er noen som deler et halvt objekt. Det tekniske nivået Peter opererer med passer meget godt med hvem han kommuniserer til. Begrunnelsen er meget enkel å følge for læreren, men språket er likevel hverdagslig. Slik det har blitt nevnt tidligere, avhenger et bevis av at det skal gi informasjon, ikke bare om at det er riktig, men også hvorfor. Han begrunner med utgangspunkt i konseptet brøk, og viser dermed til at løsningen er avhengig av konseptet som ligger til grunne. Dette er hva Barwise og Etchemendy (1991; 1996) stiller som et av sine kriterier til et bevis.

Thomas: Jeg mente liksom at det her det har, jeg tenkte liksom at det var en delt på en halv. Det var det jeg mente det, så jeg tenkte egentlig likt. Men ja, det blir en fjerdedel blir det ikke? For det e jo to av fire og der er jo fire, det er to en halv. Og så tar vi å deler det det er snakk om som er to av fire, en halv delt på to. Det blir jo en fjerdedel.

Eksemplet viser Thomas i en elevstyrt sekvens, hvor han også forsøker å begrunne hvorfor en løsning er $\frac{1}{4}$. Etter å ha hørt på Peters forklaring sier han seg enig og formulerer et eget argument for å rettferdiggjøre løsningen. Kommunikasjonskompetansen (Niss, 2002) som Thomas viser forholder seg svak. Han har et argument som i seg selv er gyldig, og forklarer tankegangen sin slik at en kan forstå hva han mener, men det gjelder oss som lærere. Selve utsagnet er meget rotete og ustrukturert, noe som gjør det vanskelig å følge hans resonnement. I likhet med Peter beskriver han en strategi som innebærer å gruppere, som er en uformell strategi. Språket som benyttes er også uformelt, uten at det kommer frem noen matematiske begreper og prinsipper. Han beskriver at han deler to firedeler i to, eller en halv delt på to, noe som hentyder at han visualiserer et halvt objekt. Dette mentale bildet, eller modellen, blir ikke konkretisert eller utdypet og vi vet ikke her hva han henviser til. Thomas binder derimot matematikken opp mot praksis og viser at han forstår hva han skal gjøre. Til en viss grad kommer det til uttrykk at han benytter seg av ulike matematisk kompetanser, som for eksempel modellering, kommunikasjon, symbol- og formalisme og representasjon (Niss, 2002). Denne begrunnelsen er likevel kvalitativt ulik på mange områder, slik skillet mellom Johannes begrunnelser også var.

Fremstillingen av eksemplene i dette delkapittelet viser til hva vi legger til grunne når vi omtaler et høyt eller lavt teknisk nivå (Niss, 2002) på begrunnelsene. Eksemplene med høyt teknisk nivå varierte både i kommunikativt nivå og innhold i begrunnelsen. Begrunnelsene med lavt teknisk nivå viste de mest interessante variasjonene og det var også her det var størst kreativitet og særegenhet i begrunnelsene. Som utgangspunkt kunne vi observere en tendens til at elevene ikke kunne begrunne sine valg. Elevene responderte da med *"fordi…."* uten at en begrunnelse ble gitt, eller at begrunnelsene ikke hadde rot i noen matematisk kontekst som gav mening for oppgaven.

6.2 Instrumentell forståelse preger begrunnelsene

6.2.1 Begrunne en metode ved å respondere "fordi…"

Denne observasjonen omhandler flere ulike oppgaver, og innebærer som regel begrunnelser av en bestemt type spørsmål. For eksempel er følgende to eksempler på begrunnelser som elevene kom med for å rettferdiggjøre og argumentere for sine valg. I det første eksempelet har elevene regnet ut arealet av et basseng, og benyttet seg av en metode de har kommet fram til på egenhånd.

Lærer:	Hvorfor tok du 25 ganger med 2,7?
Johanne:	Fordi det føltes rett.

I følgende eksempel arbeide elevene med å finne ut hvor lang tid de bruker på å tømme et basseng. De har allerede presentert løsningen og blir av læreren utfordret til å begrunne sine valg.

Lærer:	Thomas, hvorfor delte dere 405000 på 3600?
Thomas:	Nei det er jeg usikker på.
Lærer:	Er det noen andre som vet?
Johanne:	Ja, fordi jeg tenkte feil.
Lærer:	Hva skulle du ha delt på?
Johanne:	360.
Lærer:	Hvorfor da?

Johanne: Fordi det er det som er riktig.

Denne observasjonen viste seg å være meget interessant. Det kommer av at ca. 60 % av våre forklaringer ble kategorisert som *hva/hvordan.* Koblingen mellom observasjonene "*fordi…*" og *hva/hvordan* ligger i at elevene får spørsmål om å begrunne hvorfor en metode har blitt benyttet. Her kommer det frem at elevene regner ut og forklarer hva de har gjort, men at de ikke vet hvorfor. På flere måter kan dette være bekymringsverdig, uten å kritisere noen, fordi denne relasjonen kan tolkes på flere måter. Vi ønsker ikke å påpeke hva som skjer i undervisningen, eller hva som har skjedd, men nyansere og vise til flere mulige årsaker uten å konkludere med noe.

For det første kan det tolkes dit hen at elevene tilegner seg best matematisk kunnskap på en instrumentell måte. Det vil si at de er mest komfortable med å lære seg algoritmer og få vite prosedyrer og fremgangsmåter, uten å kjenne til årsaken til at disse formelle aspektene. Dette kan knyttes opp mot hva Skemp (1976) sier om instrumentell forståelse – at den er raskere å bygge opp og at den gir åpenbare resultater hurtigere enn den relasjonelle. I et kortsiktig perspektiv vil dette kunne være et gunstig element i elevenes utdannelse, for å bygge opp den motivasjonen de har for matematikk, slik NCTM (2000) og Kilpatrick (2001) refererer til henholdsvis i begrepene *equity* og *produktiv disposisjon*. På lengre sikt vil dette være problematisk opp mot den videre utdanningen, når matematikken blir mer abstrakt og formell.

For det andre kan undervisningen de er familiær med være instrumentelt rettet, noe som vil henge sammen med foregående punkt. Her har vi ikke gjennomført en analyse av lærebøkene elevene har arbeidet med, eller vært inne i undervisningen for å observere, noe som ikke vil gi oss grunnlag for å påstå om dette er en av årsakene. Vi bare lufter ulike perspektiver av de resultatene vi har funnet. Det tredje og kanskje mest interessante og relevante synet, tilknyttes hva forskerne bak Project Challenge fant ut – at elevenes kommunikative kompetanse blir mer uforståelig og usammenhengende når de snakker om matematiske konsepter de ikke er familiære med (Chapin, 2009). Dette kommer av at den kognitive kapasiteten ikke fokuseres på å kommunisere med andre, men er rettet mot å tolke fagstoffet som er relevant for å løse oppgaven. Både Wilder (1965) og Fischbein (1987) var her inne på samme poeng, nemlig at en ikke kan si mye om et konsept dersom en ikke har erfart det på forhånd. Sett opp mot kommunikasjon, faller alle disse forklaringene under den lærerstyrte diskusjonen. Vi tror det matematiske kompetansekravet blir for høyt for elevene, og når læreren presser elevene inn i et hjørne med å spørre etter begrunnelse, er resultatet en ufullstendig og uhåndterlig begrunnelse.

Som lærere kan det derfor være gunstig å være bevisst på at elevene kan forstå et konsept selv om de ikke mestrer å kommunisere det i en muntlig sammenheng. Vi tror at de elevstyrte forklaringene tar mer støtte i modeller og pek og forklar strategier når de diskuterer med medelever på samme faglige nivå som dem selv. Sett slik vil det derfor være gunstig at læreren har en bred kompetanse rundt tankegangen til elevene, slik at undervisningen kan tilpasses gruppediskusjoner og høy grad av elevmedvirkning når de matematiske konseptene blir mer abstrakte.

For det fjerde kan det tenkes at elevene ikke var komfortable med vår aktive rolle i undervisningen, da vi ikke var deres faste lærer, og at disse gruppediskusjonene tok elevene ut av deres familiære skolehverdag. Lærerens rolle i undervisningen må derfor tas hensyn til. Ved å være en aktiv deltaker i diskusjonene, åpner det opp for å benytte seg av nevnte *talk moves* (Chapin, 2009), noe som kan føre til spesifikke responser. Utnyttelsen av ulik spørsmålsstilling, og dermed deres funksjon, kan være en forklaring på hvorfor *fordi-*responsen kun er å spore i den lærerstyrte kategorien.

6.2.1.1 Tabell 6

Total oversikt over antall observasjoner i alle undervisningsøktene. Skillet mellom antall elevstyrte og lærerstyrte begrunnelser som er praktisk baserte er markert i egen rubrikk.

Forklaringstype	Forklaringsinitiativ	MB	PB	Totalt (ES/LS)
Hva/hvordan	Elevstyrt	25	9	34
	Lærerstyrt	44	5	49
Hvorfor	Elevstyrt	21	11	33
	Lærerstyrt	23	6	29
	Totalt (MB/PB)	113	31	

MB = matematisk baserte forklaringer, PB = praktisk baserte forklaringer
LS = lærerstyrte forklaringer, ES = elevstyrte forklaringer

Hvilken av disse fire perspektivene som er mest fremtredende og har mest relevans opp mot oppgaven kan vi ikke si noe om. Vi føler likevel at det er hensiktsmessig å opplyse leseren om disse ulike årsakene. Det er ikke her sagt at det er enten det ene eller andre perspektivet som er årsak, men det kan også være en kombinasjon av flere.

Den helhetlige oversikten over fordelingen av de ulike observasjonene i tabell 6, viser oss at elevene tenderer til å vektlegge de praktiske forklaringene mer under elevstyrte begrunnelser enn ved de lærerstyrte. En forklaring på dette kan ligge bak de unike funnene som vi har definert som *"fordi"*… I en lærerstyrt sekvens vil det kunne oppstå flere situasjoner hvor elevene presses til å begrunne matematiske valg som i utgangspunktet er vanskelig for elevene. Derfor kan en i slike sammenhenger få svar slik som *fordi*. Ved de elevstyrte sekvensene vil ikke medelevene kunne presse hverandre til å havne i slike situasjoner. I tillegg kan det tenkes at elevene føler sine egne argumenter og begrunnelser som legitime når de snakker med hverandre, altså at de mestrer å snakke på et teknisk nivå (Niss, 2002) som medelevene er på. Dette kan resultere i mer hverdagslig og uformelt språk, noe som karakteriserer neste unike funn. Johanne har presentert en begrunnelse som baseres på et matematisk resonnement rundt oppgaven $4 * 0{,}5 = \frac{4}{2}$. Medelevene forstod ikke dette første eksempelet, og hun forsøker å knytte eksempelet opp mot praktiske elementer.

Johanne:	Ja men, liksom…Altså det er akkurat det samme som å ha en halv også si: *nei den her halve er en hel*, det er fortsatt en halv.
Lærer:	Forstod du hva hun mente?
Arne:	Nei
Johanne:	Dersom du har en papegøye og sier at det er en ape, det er fortsatt en papegøye

Denne måten å senke sitt tekniske nivå er ikke å finne under de lærerstyrte begrunnelsene. Vi mener dette kan komme av hva elevene tror læreren forventer og aksepterer som et gyldig svar. Vi mener også denne nedgraderingen av det tekniske nivået kan være årsaken til at vi kun finner *fordi* under de lærerstyrte sekvensene, fordi eleven ikke tør å senke sitt kommunikative, tekniske nivå. De resterende begrunnelsene, som ikke omhandler "fordi…", sprer seg over et litt større spekter. Disse forklaringene omhandler begrunnelse for valg av matematiske verdier i et regnestykke, begrunnelse for metode og begrunnelse for hvorfor et svar har en spesifikk matematisk enhet.

6.2.2 Enhetsnotasjon som begrunnelse

Den matematiske enheten som ble valgt er ikke av interesse i forskningen, men *årsaken* til valget er derimot interessant. Dette kommer av grunnlaget som valget ble tatt ut fra. Følgende er et utdrag fra den elevstyrte forklaringstypen, hvor Johanne har blitt utfordret av en medelev til å begrunne hvilken enhet svaret er gitt i. Måten Johanne argumenterer er tatt utgangspunkt i egen utregning.

Johanne:	Nei det er 405000 liter og 405 kubikkmeter.
Arne:	Hva? Hva mener du vi skal gjøre nå?
Johanne:	Det her er liter fordi det står en L der.
Arne:	Det er kult.
Johanne:	Og det er kubikk.

Hun peker på hva som har blitt skrevet tidligere og begrunner enhetene basert på dette. Hun argumenter ikke basert på matematikken og prinsippene som ligger bak konseptet volum. Dette er spesielt interessant fordi i et tidligere spørsmål om begrunnelse, tilknyttet utregning av volumet elevene arbeider med, har Johanne respondert med "*fordi…*", uten å faktisk vite hvorfor utregningen er riktig. Hvordan kan da Johanne være sikker på at dette er riktige enheter å benytte seg av? Vi tror denne begrunnelsen viser til en trygghet med de formelle algoritmene som den instrumentelle forståelsen gir. På bakgrunn av slike begrunnelser viser Johanne at hun har en sterk tilknytning til det instrumentelle og matematiske prosedyrer. Begrunnelsen som blir gitt har ikke noen substans, noe som gjør at dette ikke er en spesielt god begrunnelse. Den forteller de andre elevene "at slik er det", uten å begrunne hvorfor det er sånn. Dette var som nevnt noe som gikk igjen i både de elevstyrte og lærerstyrte forklaringene – at de hadde hørt fra andre, eller lest i læreboken at slik skulle det gjøres.

6.2.3 Begrunnelse for matematiske verdier i et regnestykke

Å begrunne matematiske verdier som har blitt benyttet, eller skal benyttes i en løsningsmetode er en viktig del av å resonnere, løse problemer og forklare tankegangen sin. Samtidig gir disse verdiene en mening bak de formelle algoritmene, og knytter dem mot praktiske situasjoner som skal beskrives med disse. Det vil si at de også kan involvere problembehandlingskompetanse (NCTM, 2000; Niss, 2002) og tilpasset resonnering (Kilpatrick, 2001). Å benytte seg av slike verdier uten å vite hvorfor de benyttes, fører til eller er et resultat av instrumentell forståelse og innlæring. Eleven i eksempelet under har konkludert med at å tømme et basseng tar seks timer, mens å fylle det igjen kun tar 3 timer.

Lærer:	Kan du forklare hvorfor det tar tre timer å pumpe vannet tilbake?

Arne:	Dersom det tar omtrent halvparten. Det er mye mer trykk på det enn når de suger ut.
Lærer:	Er det det?
Arne:	Jeg ville nå trodd det, fordi vannet går ned og ikke opp.

Arne begrunner i dette tilfellet hvorfor de har valgt å benytte tre timer som verdi på tiden det tar å pumpe tilbake vannet, når samme mengde vann ble pumpet ut i løpet av seks timer. Arne begrunner her ved å referere til mer naturfaglige prinsipper, slik som trykket som vannet har. Her gjøres det en antakelse om at vannet har mer trykk den ene vegen enn den andre, fordi vannet går ned og ikke opp. Det bør her nevnes at oppgavetypen var åpen, noe som ikke la føringer på hvordan elevene kunne diskutere, velge verdier og metoder for å løse oppgaven. Begrunnelsen sier ingenting om hvor verdien er hentet fra, bare hvilken antakelse som ligger bak. På denne måten viser argumentet seg å være meget svakt, når en ser det opp mot rettferdiggjøring ovenfor andre. Koblingen opp mot fysikkens verden viser likevel en relasjonell forståelse.

6.2.4 Begrunne en metode ved å hevde noe er ulogisk

I flere tilfeller begrunnet elevene hvorfor en metode eller løsning ikke er riktig. Dette ble gjort på ulike måter, men de fleste av disse har fellestrekk mellom de lærer- og elevstyrte begrunnelsene. Derfor vil vi ikke ta dette opp her. Det som derimot skilte seg ut, var begrunnelsen hvor noe virket ulogisk uten at *faktisk* redegjørelse for hvorfor det var ulogisk ble presentert. En av elevene hadde, på eget initiativ, kontrollert hvorfor multiplikasjon ikke kunne benyttes som metode for å løse en oppgave. Resultatet ble presentert og Thomas får i oppgave å begrunne hvorfor ikke multiplikasjon kan benyttes.

Lærer:	Hvorfor er det riktig regnemåte? Hva som gjør at det er…hvorfor skal det ikke være gange for eksempel? Thomas? Hvorfor skal man dele?
Thomas:	For det første er gange det motsatte av å dele og gange vil høres ulogisk ut.

Thomas viser her at han åpenbart ikke har en relasjonell forståelse (Skemp, 1976), eller ser sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon. Det kommunikative nivået som eleven her er på, er ikke utelukkende teknisk lavt. Det er en god sammenheng i det som blir uttrykt, og begrepene passer fint inn i konteksten av begrunnelsen. Det som skiller den ut, er at eleven begrunner en metode ved å hevde noe er ulogisk og at divisjon er det motsatte av multiplikasjon. Dette er en riktig antakelse og påstand fra eleven, men i denne konteksten gir det ingen substans i forhold til spørsmålet. Slik sett hadde denne besvarelsen vært unødvendig å gi og eleven kunne like gjerne respondert med "jeg vet ikke", eller "fordi…".

Vi hevder ikke her at alle begrunnelser for en metode er utført i samme stil, men at det var et skille om begrunnelsen hadde substans opp mot spørsmålet eller ikke. En kan tolke det slik at denne forklaringen spør etter en begrunnelse på et faglig høyere nivå enn det eleven er familiær med, eller føler seg komfortabel med å snakke om. Dette kan være en konsekvens av den språklige barrieren som Project Challenge diskuterte (Chapin, 2009), og at det kognitive skjemaet til eleven ikke har adaptert multiplikasjon og divisjon i et relasjonelt perspektiv. Vi mener her at Thomas sine kunnskaper rundt disse matematiske emnene, er konstruert enkeltstående i hans skjema, noe som viser til en instrumentell forståelse rundt disse begrepene. Videre kan en mistenke at Thomas ikke mestrer å begrunne seg ovenfor læreren, noe som vil si at å *kommunisere ovenfor ulike kategorier av mottakere* (Niss, 2002) ikke er mulig for han på dette faglige nivået og med dette emnet.

Et annet interessant poeng er at Thomas har tidligere benyttet seg av pek-og-forklar metoder når han har begrunnet sine valg, noe som knytter både modelleringskompetanse og kommunikasjonskompetanse sammen. I konteksten til eksempelet er matematikken meget abstrakt, og kan vanskelig konkretiseres med modeller. Tilsvarende har Thomas i et tidligere eksempel, som presentert i avsnittet "*fordi…*", problemer med å samtale om samme abstrakte begrunnelsestype. Da var også spørsmålet å begrunne en metode. Dette kan være et tidlig tegn på at hull i matematikken allerede er dannet, og at sammenhenger (se NCTM´s (2000) *sammenheng*) mellom de matematiske emnene ikke er fullstendig konstruert i hans skjema. Basert på egne erfaringer, vil dette kunne skape problemer ved matematikken på et mer formelt og abstrakt nivå, senere i skolegangen. Slik Kilpatrick (2001) sier, vil det være en sammenheng mellom de fem trådene av matematisk kompetanse. I dette tilfellet viser Thomas at prosedyreflyt er representert, men at den har lite eller ingen sammenheng med verken produktiv disposisjon, konseptuell forståelse eller strategisk kompetanse. I og med at Thomas refererer til at det er "ulogisk" at det skal være noe annen regneoperasjon enn divisjon, må en få en forklaring for hva Thomas tenkte, for å avgjøre om tilpasset resonnering er benyttet.

Ved å betrakte NCTM´s (2000) standarder, vil resonnering og bevis være den kompetansen som er sterkest tilknyttet Thomas sin begrunnelse. Likevel er ikke denne tilknytningen veldig solid, da begrunnelsen er teknisk svak. En kan for eksempel ikke følge bakgrunnen for hans påstand, eller betydningen bak hva han mener. Når han sier at det ville vært ulogisk å benytte seg av noe annet enn divisjon, utdyper han heller ikke hva han mener. På bakgrunn av begrunnelsen viser han heller ikke at han forstår hvorfor metoden fungerer.

For å oppsummere begrunnelsene som er preget av den instrumentelle forståelsen, er det fire typer begrunnelser som stikker seg ut. Elevene benyttet ofte uttrykket "fordi.." når de ikke hadde en bedre forklaring å presentere. Denne typen begrunnelser var i alle tilfellene knyttet opp mot lærerstyrt kommunikasjon. En annen interessant måte å begrunne seg på, var å vise til en enhetsnotasjon som de selv hadde skrevet i en løsning. De viste deretter tilbake til notasjonen, og brukte den til å begrunne hvilken enhet som skulle benyttes. Disse begrunnelsene begrenset seg til de elevstyrte diskusjonene. Vi så også i de lærerstyrte forklaringene, eksempler på at elevene begrunnet valg av matematiske verdier i et regnestykke uten at verdiene hadde en forankring til fakta. Elevene kunne ikke gi en god forklaring for hvor verdiene var tatt fra, altså var de oppdiktet. En siste begrunnelse som også var lærerstyrt, var at elevene fant oppgaven ulogisk, og da kunne det ikke være slik. Altså et motbevis, basert på elevenes logikk.

6.3 Relasjonell forståelse tilknyttes gode forklaringer

Som motsetning til at vi med vårt datamateriale kan knytte teknisk lave forklaringer til det instrumentelle perspektivet, vil de teknisk høye forklaringene kunne bindes til det relasjonelle perspektivet. Variasjonen derimot er mindre og vises kun gjennom en bestemt begrunnelsestype. Likevel er det en interessant nyanse i denne kategorien som presenteres kapittel 6.3.1 og 6.3.2.

6.3.1 Praktiske eksemplers tilknytning til egen erfaring

Til tross for elevenes mangel på begrunnelser på et teknisk høyt nivå, var det likevel flere som viste seg å være veldig tekniske og overbevisende. Disse kunne vi finne blant de elevstyrte forklaringene. Først og fremst handlet to av de unike begrunnelsene i denne kategorien om sammenligninger av kjente størrelser og sammenligninger med konkrete objekter. Førstnevnte sammenligning knyttes opp mot volum og hverdagslige elementer i elevenes hverdag. Denne begrunnelsesformen er utelukkende praktisk basert og knytter de matematiske verdiene opp mot praktiske komponenter som er familiære for elevene. I følgende eksempel argumenterer eleven for at volumet i et basseng ikke er 305 liter.

Ivan: Men! Tenk på det på den her logisk sett. Dere må bare tenke på det sånn her, tenk at det skal være plass til 305 melkepakker nedi. Er det plass til det?

I dette eksempelet henviser eleven til det logiske, noe Simpson (1995) karakteriserer som formelt. Argumentet i seg selv er ikke logisk i den forstand, men tar for seg en resonnering basert på heuristiske argumenter. Denne type argument viste seg å være veldig overbevisende for de andre elevene, noe som viser til betydningen av å knytte den praktiske verden opp mot den matematiske. Dette understrekes av Barwise og Etchemendy (1991; 1996) som sier at en kan benytte seg av uformelle fremgangsmåter og modeller når en skal bygge opp beviser. Likevel vil ikke en slik sammenligning være gyldig som et bevis i matematisk forstand, men vil likevel være overbevisende argument ovenfor andre som har erfaring med melkepakker.

Ved å ta i betraktning det forventede matematiske nivået til en på 8.klassetrinn, samt Barwise og Etchemendy`s (1991; 1996) påstand, vil vi hevde at en slik måte å argumentere for vil kunne være legitimt som bevis i grunnskolen. Om ikke annet som en rettferdiggjøring av de matematiske valgene som Kilpatrick (2001) tar for seg ved *tilpasset resonnering*. I skolen er det viktig å jobbe med både argumentasjon og uformelle bevis. Dette grunnet at det er få formelle bevis som er gjennomførbare på elevenes matematiske nivå. Denne type begrunnelse benytter seg av visualisering og viser slik Palais (1999) påpeker, til en uformell måte å rettferdiggjøre sine argumenter. Vi mener dette er en gunstig måte å la elevene begrunne seg på i skolen. Ved å knytte uformelle måleenheter opp mot verifiseringen av et svar, bygger elevene opp under forståelsen de har av måleenheter (Van de Walle & Lovin, 2006). I og med at disse uformelle verktøyene er familiære for elevene får forklaringen en tyngde som legitimerer begrunnelsen.

6.3.2 Begrunnelser på teknisk høyt nivå er ikke alltid overbevisende

En ting som virker slående på oss er hvor ulik Peter begrunner seg i de ulike undervisningsøktene. I de første øktene er oppgavene lukkede og progresjonen i samtalen er relativt rigid. Her argumenterer Peter i hovedsak instrumentelt (Skemp, 1976) og fokuserer på prosedyrene i hans begrunnelser og beskrivelse av *hva/hvordan* (Drageset, 2014). Når oppgaven blir åpen og mer praktisk rettet viser Peter til en mer relasjonell og praktisk tilnærming i argumentene sine. I likhet med Ivan, forsøker han å sammenligne en løsning med en kjent størrelse.

Ivan:	Tenk, 305 melkepakker.
Peter:	Vår lille Jacuzzi tar 120 liter.
Arne:	Deres lille Jacuzzi?

Det som skiller seg ut i denne sammenhengen er hvilke kjente verdier som det sammenlignes med. Ivan knytter løsningen opp mot en praktisk enhet som de fleste er familiær og fortrolig med. Peter derimot benytter seg av en mye større enhet, som få personer kjenner til. Vi mener dette er et like godt argument som Ivan sitt, men valg av praktiske enheter spiller her en stor innvirkning på argumentets rolle i den videre samtalen. Mens elevene fortsetter å argumentere med Ivan sitt eksempel, blir Peter sitt nærmest oversett. Vi tror dette henger sammen med at måleenheten blir for stor, i tillegg til at det er få av medelevene som klarer å visualisere mengden. Dette betyr at begrunnelsen blir for abstrakt for medelevene og at det ikke anses som en overbevisende sammenligning.

De begrunnelsene som viser seg å være særdeles overbevisende, er de som knytter det praktiske og familiære opp mot matematikken. Selv om to begrunnelser og argumenter oppleves helt like, kan små nyanser slik som subjektivitet, være med på å farge samtalen. Disse overbevisende og relasjonelt pregede begrunnelsene finner vi kun i de elevstyrte forklaringene.

6.4 Felles og særegne begrunnelser i de elev- og lærerstyrte forklaringene

6.4.1 Likhetstrekk over mange kontekster

Mange av forklaringene, enten de er elevstyrt eller lærerstyrt, har likhetstrekk i hvordan elevene begrunner sine matematiske valg. Likhetstrekkene varierer i kontekst, noe som betyr at det er et stort mangfold i likhetene. Ofte kunne en observere at elevene begrunnet sine matematiske valg ved å argumentere og referere til matematiske konsepter. Dette kunne gjerne være i sammenheng med utregninger, både med og uten algoritme, noe som også var likt mellom elev- og lærerstyrt diskusjon.

Likevel var det ikke tilstrekkelig eller mulig for elevene å argumentere og begrunne kun ved hjelp av utregninger og konseptforklaringer. Da tok elevene støtte i visuelle hjelpemidler og tegninger for å uttrykke seg. Dette harmonerer med hva Levenson (2012, p. 182) skriver at Krummheuer hevder, at elevene ofte agerer med utgangspunkt i erfaringsmessige matematiske objekter, slik som geometriske figurer og modeller. I slike sammenhenger var det også tilfeller hvor disse modellene kun var mentale bilder, men at det tydelig kom frem at elevene refererte til fysiske gjenstandene. Denne måte å argumentere på kan vise til Gødels incompleteness theorem (Fischbein, 1987) og Wilders (1965) påstand, hvor matematiske systemer ikke kan inneholde alle formelle forutsetninger og at det er umulig å utvikle matematikk som et sammenhengende formelt system. I tillegg påpekte Wilder (1965) at en ikke kan samtale om et matematisk konsept, dersom en ikke har en erfaring av hva dette konseptet innebærer, noe som understrekes ved at elevene visualiserer og benytter modeller som basis for forklaringene.

For oss viser disse likhetene at elevene stiller med varierte repertoarer når det kommer til matematisk dialog. Mange av disse forklaringene varierer også mellom praktisk og matematisk baserte, noe som kan skyldes aldersbarrieren NSW (2015) og NCTM (2000) referer til at eleven beveger seg fra praktisk til matematisk kompetanse og ferdigheter når de blir eldre.

Videre må det påpekes at en instrumentell innlæring, slik Skemp (1976) definerer den, var å spore. Både i de elevstyrte og lærerstyrte sekvensene la elevene autoriteten over på andre kilder enn den matematiske, egenerfarte sannheten. Her tenker vi på de tilfellene hvor elevene begrunnet sine valg av fremgangsmåter og utregninger ved å henvise til tre ulike instanser, lærer, faglitteraturen i skolen eller foreldre. Dette kom frem i flere situasjoner, noe som kan bety enten at elevene er familiære med å stole blindt på algoritme eller autoritetspersoner, at elevene tilegner seg kunnskap ved instrumentell tilnærming, eller at de ikke er komfortable med fagstoffet. Til å avgjøre denne koblingen har vi et for smalt datagrunnlag og vi vil derfor ikke se nøyere på dette i denne sammenheng.

Både de elevstyrte og lærerstyrte diskusjonene inneholdt begrunnelser som tok utgangspunkt i fysikkens verden, noe som henviser til den praktisk baserte forklaringstypen. Dette ble i stor grad sett i sammenheng med modeller og tegninger elevene hadde tilgjengelig. Fremgangsmåter, både formelle og uformelle, ble til tider benyttet seg av for å overbevise de andre om hva som var riktig å benytte for å komme fram til en løsning. Disse begrunnelsene varierte i mye i effektivitet og klarhet, noe som gjorde det vanskelig å tolke hva elevene faktisk mente med sitt utsagn. En stor kontrast til denne uklarheten i forklaringene fant vi i en av sammenligningsmetodene elevene benyttet seg av. I både elevstyrte og lærerstyrte begrunnelser sammenlignet elevene matematiske størrelser opp mot hverandre for å begrunne en metode, fremgangsmåte eller løsning. Dette viser til en forståelse av de matematiske enhetene og hvilke praktiske komponenter disse verdiene tilhører.

6.4.2 Ulikheter basert på innholdet i begrunnelsene

Alle begrunnelser som begynte med ”fordi…”, *og* manglet tilknytning til oppgaven og matematikken, finner vi i de lærerstyrte begrunnelsene. Tilsvarende finner vi 80 % av begrunnelsene som manglet tilknytning til oppgaven og matematikken, i tillegg til lavt kommunikativt nivå, i de lærerstyrte begrunnelsene. De tilfellene som stammet fra elevstyrt begrunnelse omhandler matematisk enhet og matematisk verdi i et regnestykke. Det eneste som var unik for de elevstyrte var valg av enhet og tok utelukkende et instrumentelt perspektiv. I tilknytning denne observasjonen viser de elevstyrte begrunnelsene, som er praktisk baserte, at ca. 80% av tilfellene tar utgangspunkt eller støtte i modeller. Disse modellene varierte mellom både mentale forestillinger og tegninger elevene hadde tilgjengelig. I de lærerstyrte begrunnelsene utgjorde samme forhold kun 60%, noe som indikerer at de elevstyrte begrunnelsene preges av hyppigere bruk av modeller. Denne sammenhengen viser seg å kunne være utslagsgivende for bruk av språket, noe som viser seg ved mengden teknisk sterke og svake begrunnelser i hver av kategoriene.

Vi har funnet klare ulikheter i begrunnelsene når det kommer til det kommunikative nivået i de lærerstyrte og elevstyrte begrunnelsene. De ulikhetene vi har funnet skyldes innholdet i begrunnelsene og hva de skal begrunne. De elevstyrte begrunnelsene tar ofte for seg begrunnelse av løsninger og matematiske verdier, noe som er meget viktig å redegjøre for. Dette for å skape den konseptuelle og relasjonelle forståelsen som kreves for å være matematisk kyndig. Disse begrunnelsene knyttes opp mot modeller som støtter elevene i deres forklaringer. På denne måten knytter de teori opp mot praksis. De lærerstyrte begrunnelsene tar oftere sikte på å forklare hvorfor en benytter seg av en metode, noe som har en klar sammenheng med nevnte talk moves (Chapin, 2009) vi har benyttet oss av. I og med at metoden er hva som læres i skolen, kan en her se viktigheten av at læreren går aktivt inn i undervisningen og styrer dialogen i riktig retning.

En kan også argumentere for at en må være aktiv med bruk av modeller, da elevene benytter seg ofte av disse for å begrunne ulike elementer av disse fremgangsmåtene, altså løsninger og verdier som benyttes i algoritmen. Våre funn viser til at de begrunnelsene som har størst innvirkning på dialogen baserer seg på modeller. Vi mistenker at dette kan ha en sammenheng med at konkreter fungerer som hjelpetegninger og gjør matematisk teori mer konkret for elevene. I de tilfellene hvor disse konkretene ikke fungerte bra opp mot dialogen, viser seg å være eksempler hvor modellen blir for abstrakt, slik som Peter sin jacuzzi.

7 Konklusjon

Vi ønsket å finne ut om det var forskjeller og likheter i forklaringene når samtalen i, med og om matematikk styres av lærer eller elev. For å undersøke gjennomførte vi deltakende observasjon som metode. På denne måten fikk vi avdekket mange interessante aspekter ved elevenes forklaringer. Vi benyttet oss av Levensons (2012) begreper, praktisk og matematisk basert forklaring, som verktøy for å beskrive ulike typer forklaringer. I analysen kom det fram at disse begrepene ikke var dekkende nok for å beskrive våre funn. Vi så oss her nødt til å definere egne begreper, lærerstyrte og elevstyrte forklaringer, da det er lite forskning som omhandler dette emnet. Dette ga oss fire ulike forklaringstyper, som alle ble benyttet for å beskrive våre funn.

I de elevstyrte forklaringene tenderer det til at elevene benytter seg oftere av en praktisk basert tilnærming enn ved de lærerstyrte forklaringene. Dette kommer blant annet frem ved den totale oversikten, hvor vi finner at 20 av 31 praktisk baserte forklaringer er i en elevstyrt kontekst. Det er få variasjoner innenfor de praktisk baserte forklaringene selv om antallet forklaringer er ulikt. Med dette mener vi at elevene benytter seg av modeller og imaginære objekter i både elevstyrt og lærerstyrt diskurs. Den variasjonen vi kunne observere var at elevene kunne knytte begrunnelser opp mot kjente, praktiske elementer i elevstyrte forklaringer, men ikke i de lærerstyrte. Det store skillet innenfor denne kategorien ligger derimot i kommunikasjonens tekniske nivå. I de elevstyrte forklaringene viser det seg å være et høyere teknisk nivå enn i de lærerstyrte forklaringene. Når eleven blir presset til å forklare seg på et høyt teknisk nivå av læreren, tenderer det til at elevene ikke får til å begrunne seg i det hele tatt. Dette kommer frem ved at elevene benytter forklaringer, slik som *fordi,* og forklaringene ender opp med å være ubegrunnede eller uten tilknytning til matematikken.

Videre kommer det frem at elevene forklarer verdier og resultater oftere i elevstyrt kontekst, mens i de lærerstyrte ligger fokuset på å begrunne metoder og fremgangsmåter. Lærerens rolle virker her åpenbar. Ved å gå aktivt inn i samtalene kan læreren gå inn å utfordre eleven til å forklare noe de ikke selv ville begrunnet på eget initiativ, og det er her vi kan se styrken til talk moves i undervisningen. Til videre forskning kunne en ha foretatt et lengre studie, for eksempel fra 8.klassetrinn til og med 10.klassetrinn, hvor fokuset var å benytte seg av talk moves for å lære elevene å forklare seg på et høyere teknisk nivå ovenfor læreren. Samtidig kan en fokusere på å la elevene begrunne metoder og fremgangsmåter for hverandre, noe som var manglende ved vårt studie. Denne type forskning kunne vært lansert som et større prosjekt hvor hele klasser ble introdusert for metoden i sin naturlige klasseromsituasjon.

8 Referanseliste

Barwise, J., & Etchemendy, J. (1996). Heterogenous logic. I G. Allwain, & J. Barwise, *Logical reasoning with diagrams* (ss. 179-201). Oxford university press.

Barwise, J., & Etchemendy, J. (1991). Viusal information and valid reasoning. I W. Zimmermann, & S. Cunninghan, *Visualization in teaching and learning mathematics* (ss. 9-24). Washington: The mathematics association of america.

Bell, A. (1976). A study of pupils proof-explanations in mathematical situations. *Education studies in mathematics* (7), ss. 23-40.

Bjørndal, C. R. (2009). *Det vurderende øyet.* Oslo: Gyldendal Akademisk.

Borwein, P., & Jörgenson, L. (2002). Visible structure in number theory. *The American Mathematical Monthly , 5* (108), ss. 897-910.

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers´ conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education* , ss. 125-153.

Chapin, S. H. (2009). *Classroom discussions: using math talk to help students learn.* Math solutions.

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Oslo: Abstrakt forlag.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992, 01). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for research in mathematics education* (23), ss. 2-33.

de Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with the geometer`s sketchpad.* Emeryville, CA, USA: Key curriculum Press.

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras* (24), ss. 17-24.

Drageset, O. G. (2014). How Students Explain and Teachers Respond. I J. Anderson, A. Prescott, & M. Cavanagh (Red.), *Proceedings of the 37th annual conference of the Mathematics Educaiton Research Group of Australasia* (ss. 191-198). Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA) Inc.

Drageset, O. G. (2014, 05 03). Student and teacher interventions: a framework for analysing mathematical discourse in the classroom. *J Math Teacher Education* .

Fangen, K. (2010). *Deltagende Observasjon.* Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Fischbein, E. (1987). Intuition and mathematical reasoning. I *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach* (ss. 15-27). Kluwer academic publishers.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. I F. K. Lester Jr., *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (ss. 225-256). Information Age Publishing.

Hanna, G. (2001). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics* (44), ss. 5-23.

Hanna, G., & Jahnke, H. (1996). Proof and proving. I A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J.

Kilpatrick, & C. Laborde, *International handbook of mathematics education* (ss. 877-908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Holter, H., & Kalleberg, R. (2002). *Kvalitative metoder i samfunnsforskning.* Oslo: Universitetsforlaget.

Imsen, G. (2010). *Elevens verden* (4.utgave, 4.opplag. utg.). Universitetsforlaget.

Kilpatrick, J. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics.*

Larsen, A. K. (2007). *En enklere metode.* Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Lester, F. K., & Kehle, P. E. (2003). From problemsolving to modeling: the evolution of thinking about research on complex mathematical activity. I R. Lesh, & H. Doerr (Red.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (ss. 501-518).

Lester, F., Garofalo, J., & Kroll, D. (1989). Self-confidence, interests, beliefs and metacognition: key influences on problem solving behavior. I D. B. McLeod, & V. M. Adams (Red.), *affect and mathematical problem solving: a new perspective* (ss. 75-88).

Levenson, E. (2012, 11 16). Exploring one student`s explanation at different ages: the case of Sharon. *Educational Studies in Mathematics* , ss. 181-203.

Levenson, E. (2009, 08 12). Fifth grade students use and preference for mathematically and practically based explanations. *Educational Studies in Mathematics* , ss. 121-142.

Manin, Y. (1992). The theory and practice of proof. *Proceedings of the seventh international congress on matehmatical education.*

Manin, Y. (1998). Truth, rigor and common sense. I H. G. Dales, & G. Oliveri, *Truth in mathematics* (ss. 147-159). Oxford university press.

Mason, J. (1991). Questions about Geometry. I D. Pimm, & E. Love, *Teaching and learning mathematics: A reader* (ss. 77-99). London: Holder and Stoughton.

Mehan, H. (1979). *Learning lessons : social organization in the classroom.*

Mercer, N., & Littleton, K. (2007). *Dialogue and the development of children's thinking: a sociocultural approach.*

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. (2002). *Kompetencer og matematiklæring.* Undervisningsministeriet.

Palais, R. S. (1999). The visualisation of mathematics: towards a mathematical exploratorium. *Notices of the AMS* (46), ss. 647-658.

Postholm, M. B. (2010). *Kvalitativ metode.* Oslo: Universitetsforlaget AS.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia mathematica* , ss. 5-41.

Saldana , J. (2008). *The coding manual for qualitative researchers.*

Schoenfeld, A. H. (2007). Method. I F. K. Lester Jr., *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (ss. 69-107).

Simpson, A. (1995). Developing a proving attitude. *Justifying and proving in school mathematics* (ss. 39-46). London: Institute of education, Uniiversity of London.

Sipe, L. R., & Ghiso, M. P. (2004). *Developing Conceptual Categories in Classroom Descriptive Research: Some Problems and Possibilities.* Wiley on behalf of the American Anthropological Association.

Skemp, R. R. (1976, 12). Realtional understanding and instrumental understanding. *Mathmatics teaching* .

Steiner, M. (1978). Mathematical explanation. *Philosophical studies* (34), ss. 135-151.

Taylor-Powell, E., & Renner, M. (2003). *Analyzing Qualitative Data.*

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin og the american mathematical society* (30), ss. 161-177.

Van de Walle, J. A., & Lovin, L. H. (2006). *Teaching student-centererd mathematics: Grades 5-8.* (T. Mueller, Red.) Boston, USA: Pearson Education.

Wilder, R. (1965). *Introduction to the foundations of mathematics.* New York: John Wiley & sons.

Wood, T. (1998). Funneling og focusing? Alternative patterns of communication in mathematics class. I NCTM. NCTM.

Wood, T., Williams, G., & McNeal, B. (2006). Childrens mathematical thinking in different classroom cultures. *Journal for Research in Mathematics Education* (3), ss. 222-255.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, *25*, ss. 1-9.

9 Nettreferanser

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (2011, 06 23). *Etikkom*. Hentet 05 09, 2015 fra Generelle forskningsetiske retningslinjer: https://www.etikkom.no/forskningsetiske-retningslinjer/Generelle-forskningsetiske-retningslinjer/

Knowledge network by and for educators. (2009, 5 9). *Knilt*. Hentet 5 9, 2015 fra knilt: http://tccl.rit.albany.edu/knilt/index.php/Why_the_IRE_Model_of_Questioning_is_Ineffective

NSW, B. o. (2015). *Mathematics K-10 syllabus.* Hentet 03 24, 2015 fra boardofstudies: http://syllabus.bos.nsw.edu.au/mathematics/mathematics-k10/outcomes-k10/

Stortinget. (2001). *Stortinget.no*. Hentet 05 01, 2015 fra https://www.stortinget.no/no/Saker-og-publikasjoner/Publikasjoner/Innstillinger/Stortinget/2000-2001/inns-200001-230/13/

Utdanningsdirektoratet. (udatert). *udir.no*. Hentet 05 01, 2015 fra Grunnleggende ferdigheter: http://www.udir.no/Lareplaner/Grunnleggende-ferdigheter/

Utdanningsdirektoratet. (Udatert). *Udir.no*. Hentet 05 09, 2015 fra Udir.no: http://www.udir.no/Lareplaner/Kunnskapsloftet/Prinsipp-for-opplaringa/Tilpassa-opplaring-og-likeverdige-foresetnader/

10 Vedlegg

Vedlegg 1: Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

Vedlegg 1

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

"Kommunikasjon påvirket av omvendt undervisning"

Bakgrunn og formål
Vi er to lærerstudenter tilknyttet HSL-fakultetet ved UIT som skal gjennomføre et prosjekt i klassen som en del av datainnsamlingen til vår mastergradsoppgave. Vi har avklart med skoleleder og faglærer at vi kan gjennomføre innsamlingen i klassen til ditt barn.

Vi vil benytte en matematikktime pr. Uke, til å gjennomføre forskning som tar utgangspunkt i omvendt undervisning. Dette betyr at i forkant av matematikktimen skal elevene se en videoforelesning hvor fagstoff presenteres. Dette fagstoffet vil bli diskutert i grupper på ca. 4 elever ved bruk av spesifikke oppgaver knyttet til den aktuelle videoforelesningen. Denne undervisningsformen vil være rettet mot alle elevene, også de som ikke deltar i studiet, slik at det ikke går på bekostning av elevenes læring i faget.

Dette prosjektet vil starte 15. Januar, og vil strekke seg ca. fire uker frem i tid.

Vi vil følge én av gruppene gjennom prosjektets varighet. For å kunne dokumentere innsamlet data på best mulig måte, vil vi filme og ta lydopptak av den aktuelle gruppen under arbeidet på skolen. Lydopptaket vil her være primærkilde til informasjonen vi samler inn, men for å dekke den skriftlige kommunikasjonen vil videoopptaket være nødvendig. Da det er det skriftlige arbeidet som her kommer til å være i fokus, vil vi montere kameraet i høyden slik at det filmer det skriftlige arbeidet til elevene, og ikke fokuserer direkte på deltakerne i gruppen.

Hensikten med dette er å undersøke om elevenes faglige kommunikasjon påvirkes av denne type undervisning.

Hva innebærer deltakelse i studien?
Fire elever med samtykke vil plasseres i samme gruppe og vil utgjøre grunnlaget for undersøkelsene våre. Faglærer har stått bak utvelgelse av elever basert på vårt ønske om en gruppe med variert nivå, både faglig og muntlig. Vårt studie skal ikke vurdere elevenes faglige nivå, men skal fokusere på kommunikasjonen innad i gruppen.

Gruppen vil gjennomføre undervisningen på lik linje med de andre elevene, og vil bli observert av oss studenter som gjennomfører forskningen. Dette for å kvalitetssikre arbeidet rundt gjennomføringen av prosjektet, ikke for å påvirke elevenes arbeid. Gruppen vil sitte atskilt fra de andre elevene slik at opptak ikke blir gjort av elever som ikke har gitt samtykke til deltakelse. Atskillelsen kan for eksempel skje ved hjelp av eget grupperom.

Hva skjer med informasjonen om deg?
Alle personopplysninger vil bli behandlet konfidensielt. Det er kun oss som studenter og vår veileder ved UIT som vil ha tilgang til datamaterialet. Deltakerne vil ikke kunne kjennes igjen ved publikasjon.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 1.juni 2015. Når prosjektet har blitt publisert og sensurert, vil datamaterialet slettes slik at det kun er publikasjonen som vil være igjen av prosjektets datamateriale.

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du/eleven trekker samtykke, vil alle opplysninger om eleven bli anonymisert. Elevens forhold til skolen vil ikke på noen måte endres dersom samtykke trekkes.

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med Espen Olsen, tlf 92 41 27 29, eller e-post: eol003@uit.no, eller Esben Johnsen, tlf 99 37 41 44 eller e-post: ejo063@uit.no. Vår veileder heter Ove Drageset og kan nås på e-post: ove.drageset@uit.no.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS.

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg har mottatt informasjon om studien, og er villig til at mitt barn

_________________________kan delta

(Signert av foresatt, dato)