Institutt for lærerutdanning og pedagogikk

En komparativ studie av matematikkoppgaver i et norsk og et finsk læreverk

—

Marthe Kristin Mathisen Johnsen

Ane Evensen Storaas

Mastergradsoppgave i Lærerutdanning 5.-10. trinn *Mai 2015*

LRU-3903 Mastergradsoppgave i matematikkdidaktikk

Sammendrag

Dette er en masteroppgave i matematikkdidaktikk som sammenligner ett matematikklæreverk for ungdomstrinnet fra Norge og ett fra Finland. På bakgrunn av Finland sine gode resultater i de internasjonale undersøkelsene TIMSS og PISA, ville vi undersøke problemstillingen:

Hvilke læringsmuligheter får norske og finske elever gjennom lærebøker i matematikk?

- Hvilke kognitive ferdigheter og kognitive nivåkrav, hvilken kompleksitet og hvor mye kontekst er det i oppgavene i de utvalgte læreverkene?
- Hvilken sammenheng er det mellom de utvalgte rammeverkene *kognitive domener, levels of cognitive demands, aritmetisk kompleksitet* og *kontekst*?

For å svare på denne problemstillingen har vi satt sammen et konseptuelt rammeverk på bakgrunn av de fire forskjellige rammeverkene, som skal kunne si noe om ulike læringsmuligheter elevene kan få, og i tillegg se hvilke forhold som er mellom dem. Vi har benyttet oss av mixed methods (Creswell, 2003), og har dermed brukt kvantitativ og kvalitativ metode, men det vi har gjort går også under dokumentanalyse og komparativ studie. For den kvantitative delen har vi kodet oppgavene i forhold til vårt konseptuelle rammeverk, mens den kvalitative metoden ble utført i form av et mer detaljert dypdykk.

Generelt så vi at hvert av de fire rammeverkene hadde én kategori som skilte seg spesielt, da disse inneholdt flertallet av oppgavene. I den prosentvise fordelingen kunne man se like tendenser for de to landenes lærebøker. Tendensen samvarierte også over de tre årstrinnene, og mellom de ulike tema i lærebøkene. Vi så videre at elevene i veldig stor grad får øve på basale ferdigheter, og oppgaver som bygger på tidligere gitte forklaringer og eksempler, og at dette for det meste bygger opp om det Skemp (1976) kaller instrumentell, heller enn relasjonell, forståelse. Vi har konkludert med at Kilpatrick, Swafford & Findell (2001) sin matematiske kompetanse ikke kan oppnås kun ved bruk av disse lærebøkene.

Vi fant tydelige sammenhenger mellom rammeverkene *kognitive domener* og *levels of cognitive demands,* samt *levels of cognitive demands* og *artimetisk kompleksitet. Kontekst* så også ut til å ha en viss grad av sammenheng med de tre andre rammeverkene.

Forord

Med denne oppgaven avslutter vi vårt integrerte mastergradsprogram i lærerutdanning for 5.-10 trinn ved Universitetet i Tromsø – Norges arktiske universitet. Gjennom denne mastergradsoppgaven har vi fått en ny og annerledes innsikt i matematikkoppgaver som elevene får øve på gjennom lærebøkene sine. Den undersøkelsen vi har gjort, har gitt oss et nytt syn på matematikkoppgaver for ettertiden.

Vi vil med dette takke vår veileder Per Øystein Haavold ved Institutt for lærerutdanning og pedagogikk, som har engasjert seg i oppgaven vår, og gitt oss idéer og hjelp i forhold til veivalg. I tillegg vil vi takke Ove Gunnar Drageset, studieleder ved Institutt for lærerutdanning og pedagogikk, for å ha har fulgt oss fra første stund. Til slutt vil vi også rette en stor takk til våre medstudenter, som alle har vært med og bidratt på fellesveiledninger og i andre mer uformelle settinger.

Tromsø, mai 2015

Marthe Kristin Mathisen Johnsen

Ane Evensen Storaas

1 Innledning ... 1
2 Teori ... 5
2.1 Begrepsavklaringer ... 5
2.1.1 Læreplan ... 5
2.1.2 Lærebok og læreverk ... 7
2.2 Skolegangen i Norge og Finland ... 8
2.2.1 Norge ... 8
2.2.2 Finland ... 8
2.3 Muligheter for læring ... 9
2.4 Lærebøker ... 10
2.4.1 Hvorfor forske på lærebøker? ... 10
2.4.2 Tidligere forskning på lærebøker ... 12
2.4.2.1 Matematisk innhold og emner ... 12
2.4.2.2 Sammenligning av ulike lærebøker ... 13
2.5 Teoretisk rammeverk ... 14
2.5.1 TIMSS 2015 Mathematics Frameworks ... 14
2.5.1.1 De tre kognitive domenene ... 15
2.5.2 The Mathematical Tasks Framework ... 17
2.5.2.1 De fire levels of cognitive demands ... 18
2.5.3 Aritmetisk kompleksitet ... 22
2.5.3.1 Tre kategorier av steg ... 22
2.5.4 PISA 2012 Mathematics Framework ... 23
2.5.4.1 Fire kontekster ... 24
2.6 Begrunnelse for teoretisk rammeverk ... 26
3 Metode ... 29
3.1 Valg av metode ... 29
3.1.1 Dokumentanalyse ... 29

3.1.2 Mixed methods ... 30
3.2 Utvalg ... 32
3.2.1 Årstrinn ... 33
3.2.2 Lærebøker og oppgaver ... 33
3.3 Gjennomføring av analysen ... 34
3.3.1 Før selve kategoriseringen ... 34
3.3.2 Selve kategoriseringen ... 35
3.3.2.1 Kognitive domener ... 36
3.3.2.2 Levels of cognitive demands ... 37
3.3.2.3 Aritmetisk kompleksitet ... 38
3.3.2.4 Kontekst ... 39
3.4 Kvalitativt dypdykk ... 40
3.4.1 Utvalg ... 40
3.4.2 Gjennomføring ... 41
3.5 Validitet og reliabilitet ... 41
3.5.1 Validitet ... 41
3.5.1.1 Innholdsvaliditet ... 42
3.5.1.2 Konstruktvaliditet ... 43
3.5.1.2 Ekstern validitet ... 43
3.5.2 Reliabilitet ... 44
3.5.2.1 Stabilitet og ekvivalens ... 45
3.6 Merknader ... 45
3.7 Etikk ... 46
4 Funn ... 47
4.1 Generelt om lærebøkene ... 47
4.2 De fire rammeverkene ... 49
4.2.1 De tre kognitive domenene ... 49

4.2.2 De fire levels of cognitive demands 50
4.2.3 Aritmetisk kompleksitet 52
4.2.4 Kontekst 52
4.2.5 Samlet overblikk 53
4.3 Temafordeling i læreverkene 54
4.3.1Vektlegging av tema 54
4.3.2 De fire rammeverkene fordelt på tema 56
4.3.2.1 De tre kognitive domenene 56
4.3.2.2 De fire Levels of Cognitive Demands 57
4.3.2.3 Aritmetisk kompleksitet 58
4.3.2.4 Kontekst 59
4.3.3 Samlet overblikk 59
4.4 Forhold av kontekst fordelt 59
4.4.1 Kontekst i de tre kognitive domenene 60
4.4.2 Kontekst i de fire kognitive nivåkravene 60
4.4.3 Kontekst i aritmetisk kompleksitet 61
4.4.4 Sammenhenger i fordeling av kontekst 62
4.5 Sammenhenger mellom rammeverkene 62
4.6 Kvalitativt dypdykk 63
4.6.1 Faktor 64
4.6.1.1 To likninger med to ukjente 64
4.6.1.2 Grafisk løsing av likningssett 66
4.6.2 Pi 66
4.6.2.1 Två ekvationer och två obekanta 66
4.6.2.2 Ekvationssystem – grafisk lösning 68
4.6.3 Sammenligning 69
4.6.3.1 Struktur 69

4.6.3.2 Innhold ... 70

4.6.3.3 Spørsmålsstilling ... 73

4.6.3.4 Variasjon innad kategorier i rammeverket ... 73

5 Diskusjon ... 77

5.1 Mulige konsekvenser ... 78

5.2 Sammenheng mellom kognitive domener og kognitive nivåkrav ... 81

5.3 Læringsmuligheter ... 82

5.3.1 Matematisk kompetanse ... 83

5.3.2 Matematisk forståelse ... 85

6. Oppsummering og konklusjon ... 89

6.1 Oppsummering ... 89

6.2 Konklusjon ... 89

7 Referanser ... 93

8 Vedlegg ... 105

Vedlegg A: Veileder til kategorisering ... 105

Vedlegg B: Forkortninger til analyse ... 115

Vedlegg C: Eksempel på koding fra Excel-ark ... 117

Vedlegg D: Notater og idéer til analysen av oppgaver ... 119

Vedlegg E: Tabeller til diagrammer ... 123

1 Innledning

Gjennom vår lærerutdannelse har vi lært mye om de internasjonale undersøkelsene TIMSS og PISA (UiO, u.å., a og b), og at Finland alltid har gjort det bedre enn Norge i disse undersøkelsene. I PISA har Finland befunnet seg oppe på 1.- 6. plass, mens Norge har ligget nede på 14.- 24. plass (Lie, Kjærnsli, Roe & Turmo, 2001; Kjærnsli, Lie, Olsen, Roe & Turmo, 2004; Kjærnsli, Lie, Olsen & Roe, 2007; Kjærnsli & Roe, 2010; Kjærnsli & Olsen, 2013). I tillegg var Finland bedre enn Norge i TIMSS 2011, der de lå på en 8. plass, mens Norge lå på en 20. plass (Grønmo et al., 2012). Finland har altså helt frem til 2012 vært det europeiske landet med best skår i matematikk, og særlig de tidligere årene har de ligget svært høyt på resultatlista.

På bakgrunn av dette fikk vi lyst til å gjøre en sammenligning mellom Norge og Finland. De ulike resultatene var spesielt iøynefallende fordi landene ligger så nært hverandre både geografisk og kulturelt, og at det derfor ble en sammenligning i et nordisk perspektiv. Ifølge Grønmo (2013) kan vi snakke om en felles nordisk *profil* i matematikk fordi det er kommet frem at ulike grupper av land er forholdsvis stabile og like når det kommer til hva de vektlegger i sin matematikkundervisning. Dette gjelder altså for de nordiske landene, som jevnt over legger stor vekt på den dagligdagse og realistiske matematikken (Olsen & Grønmo, 2006).

Denne likheten ville man nok kunne se i landenes læreplaner, men vi hadde lyst til å komme ned på nivå med elevene – som er de som i hovedsak testes og spørres i disse undersøkelsene. Dette førte oss over på lærebøkene, som vi antar er bygd opp og følger de respektive lands læreplaner. Dette fordi vi tenker at både de som arbeider i skolene og velger læreverk til bruk i undervisning, og de som er ansvarlige for å produsere lærebøkene i begge landene, er kompetente mennesker med utdannelse på feltet. Likevel vet vi at læreplanene kan tolkes på forskjellige måter, og at dette kan medføre visse variasjoner mellom lærebøker.

Vår generelle oppfattelse og erfaring er at lærebøker brukes i stor grad, kanskje særlig i matematikkundervisning, ettersom det er mange oppgaver og eksempler å følge i dem. Ifølge tall fra TIMSS 2011 (Mullis, Martin, Foy & Arora, 2012) er lærebøker noe lærere både i Norge og Finland benytter seg av i svært stor grad i sin daglige undervisning. Hele 94 % av norske elever og 88 % av de finske elevene, oppga at de hadde matematikklærere som brukte lærebøker som utgangspunkt for undervisningen, heller enn et supplement. Begge de to landene ligger over det internasjonale gjennomsnittet på 77 %, og bruker altså lærebøkene relativt mye i motsetning til en del andre land. Det vi i tillegg visste, var at lærebøker som regel inneholder store mengder matematikkoppgaver som elevene skal løse i matematikktimene sine. Ikke minst er det *oppgaver* de internasjonale prøvene tester elevene i.

Det at Finland er kjent for å gjøre det bra i de internasjonale matematikkundersøkelsene, fikk oss til å undre over hva dette kunne komme av. Vi tenkte at det kunne være utallige grunner for dette, men ble nysgjerrige på om forskjellene kunne ligge i lærebøkene. Det vi kanskje var mest spente på, var om de finske lærebøkene inneholdt oppgaver som bygde bedre opp om forståelse for matematikken, om finske elever fikk øve på noe de norske ikke fikk, eller om de hadde en høyere vanskegrad på oppgavene sine. Siden Finland gjorde det bra i PISA-undersøkelsene, og at disse fokuserer på hverdagsmatematikk – ville det i så fall være mere kontekst i lærebøkene fra Finland? Dette ledet oss frem til problemstillingen vår:

Hvilke læringsmuligheter får norske og finske elever gjennom lærebøker i matematikk?

- Hvilke kognitive ferdigheter og kognitive nivåkrav, hvilken kompleksitet og hvor mye kontekst er det i oppgavene i de utvalgte læreverkene?
- Hvilken sammenheng er det mellom de utvalgte rammeverkene *kognitive domener*, *levels of cognitive demands*, *aritmetisk kompleksitet* og *kontekst*?

Vi har altså valgt å sette en generell problemstilling, for så å følge opp med to spesifiserte forskningsspørsmål. Den overordnede problemstillingen gir retning til undersøkelsen, og mulighet til å se ulike aspekter ved læreverkene som kan gi læringsmuligheter for elevene. Denne hovedoverskriften gir oss anledning til å ta for oss både antall oppgaver, vektlegging av tema og det pedagogiske innholdet ved matematikkbøkene. Dette vil kunne gi bredde i forhold til hvilke muligheter for læring som finnes i de to landenes læreverk.

I det første forskningsspørsmålet vil vi undersøke læringsmuligheter ved bruk av de fire utvalgte rammeverkene, TIMSS 2015 sine tre *kognitive domener* (Grønmo, Lindquist, Arora & Mullis, 2013), Stein, Smith, Henningsen & Silver (2000) sin *levels of cognitive demands*, *aritmetisk kompleksitet* av Leung & Silver (1997), samt PISA 2012 sine *kontekster* (OECD, 2013). Dette vil vi gjøre i forhold til hver enkelt lærebok i hvert land, og i hvert enkelt tema, og setter slik landene opp mot hverandre. De tre kognitive domenene tenker vi kan beskrive hvordan oppgavene i lærebøkene dekker opp om ulike matematiske ferdigheter, mens de kognitive nivåkravene (levels of cognitive demands) vil kunne si noe om hvilken kognitiv taksonomi som finnes i de ulike oppgavene. Aritmetisk kompleksitet kan si noe om hvor sammensatte oppgavene er. I tillegg vil vi finne ut hvorvidt den virkelige verden er tilstede i matematikkoppgavene som elevene skal løse, og har derfor valgt å bruke PISA 2012 sine kontekster (OECD, 2013). Hver og ett av disse rammeverkene vil kunne si noe om hvilke læringsmuligheter elevene får av matematikkbøkene sine.

Det andre forskningsspørsmålet går ut på hvordan de ulike rammeverkene vi har brukt, står i forhold til og komplementerer hverandre. Dette vil kunne gi et mer helhetlig bilde av flere rammeverk på samme tid, både i forhold til matematikkoppgavene og hverandre. I motsetning til det første forskningsspørsmålet, som kun går på ett og ett rammeverk i forhold til hvert av de to landene og ulike tema, vil vi her kunne krysse oppgaver innenfor ulike rammeverk opp mot hverandre. Vi vil også kunne sammenligne de forskjellige rammeverkene direkte med hverandre. Dette er interessant fordi det da er mulig å kunne se flere læringsmuligheter i en og samme oppgave på én gang. Ikke minst har dette noe å si for validiteten i oppgaven vår, fordi det kan vise hvor bredt eller dypt vi undersøker med tanke på i hvilken grad de ulike rammeverkene måler det samme.

Vi tar utgangspunkt i ett matematikklæreverk fra hvert av de to landene. Dette er lærebokseriene *Faktor* (Hjardar & Pedersen; 2006a; 2006b; 2006c; 2007a; 2007b; 2008) og *Pi* (Heinonen et al., 2010; 2011; 2012; 2013)[1]. Studien vår baserer seg på mixed method (Creswell, 2003), der vi både har en kvantitativ og en kvalitativ del. Hovedvekten vår er på den kvantitative fremstillingen, som baserer seg på koding og kategorisering av matematikkoppgaver. De ulike kategoriene kommer av de fire utvalgte rammeverkene, satt sammen til vårt eget konseptuelle rammeverk, som vi har brukt for å se ulike læringsmuligheter i matematikkoppgaver. Vi tenker som Mesa (2004): «What *would* students learn if they had to solve all the exercises in the textbook?» (s. 256), og ser altså på alle matematikkoppgavene i de utvalgte bøkene fra læreverkene.

[1] Heretter henviser vi til hele lærebokseriene også når vi bare skriver «Faktor» eller «Pi»; når vi henviser til enkeltbøker vil dette presiseres. Dette er første og eneste gang vi vil oppgi alle kildene for lærebokseriene, da det ellers ville opptatt mye plass fordi de nevnes kontinuerlig utover i teksten.

Ved å gjøre en kvalitativ del, gjennomfører vi et dypdykk for å kunne fange opp flere detaljer om matematikklærebøkene. Dette for å kunne se noe utenom det konseptuelle rammeverket vårt, og for å kunne si noe generelt om læringsmuligheter utover matematikkoppgavene.

I denne mastergradsoppgaven vil vi begynne med begrepsavklaringer og relevant teori, for så å gå over på metodisk bakgrunn, gjennomførelse og kvalitet. I den andre delen av oppgaven vil vi presentere ulike funn, for så å diskutere og oppsummere disse funnene.

2 Teori

2.1 Begrepsavklaringer

Vi vil her gjøre rede for begrepene læreplan, lærebøker og læreverk ettersom disse vil bli brukt videre i oppgaven. Dette er noe som er relevant i forhold til den problemstillingen vi har satt oss, og vil slik være et viktig grunnlag for å forstå nyansene i oppgaven.

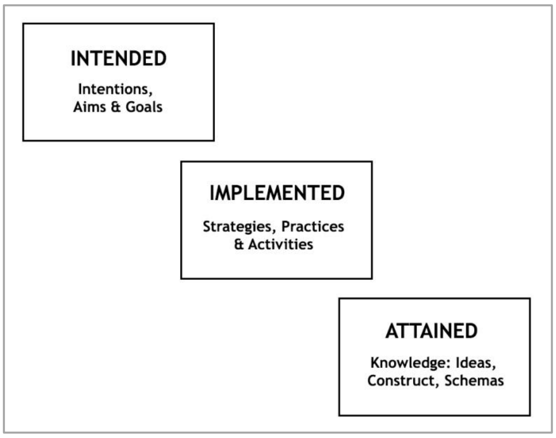
2.1.1 Læreplan

Læreplan er ifølge Imsen (2009) et sentralt gitt styringsdokument, fastsatt av regjering eller Storting, som bestemmer hva som skal foregå i skolen. Dette er et styringsdokument som «brukes som redskap både i planlegging, gjennomføring, vurdering og dokumentasjon av opplæringen» (Helland & Nore, 2010, s. 3). Læreplan kan også brukes som et begrep om undervisningsplaner som blir lagd på et lokalt plan, slik som ved en enkelt skole (Imsen, 2009).

I faglitteraturen blir begrepet *curriculum* brukt, noe som er en direkte oversettelse av ordet «læreplan», men som i motsetning til læreplan har flere betydninger. Sherin & Drake (2009) poengterer at ordet curriculum kan ha flere ulike betydninger i USA, men at det eksisterer tre hovedbetydninger. Én betydning er de skriftlige materialene som er tilgjengelig for lærerne. Eksempler på dette kan, ifølge dem, være lærebok, lærerveiledning eller kartleggingsmateriell. En annen betydning refererer til hvordan undervisningen blir utført i klasserommet, mens den siste betydningen er de læringsmålene som er på et statlig eller lokalt nivå.

Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt & Huang (2002) presenterer modellen til The International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) som står bak internasjonale undersøkelser, som blant annet FIMS, SIMS og TIMSS (IEA, 2011). Denne modellen ble utformet for bruk i The Second International Mathematics Study (SIMS), der de ville søke etter «(…) information about what mathematics is intended to be taught, what mathematics is actually taught, how that mathematics is taught, and what mathematics is learned by those taught» (Travers, 1993, s. 3). Modellen er en tredeling av curriculum, gjengitt i Figur 2.1, som blir delt inn i Intended, Implemented og Attained, som henholdsvis, ifølge TIMSS (2005), kan oversettes til intendert-, implementert- og resultert læreplan.

Valverde et al. (2002) skriver at modellen «(…) makes an analytical distinction between curriculum as system goals, curriculum as instruction, and curriculum as student achievement» (s. 5).



Figur 2.1: Den tredelte modellen av curriculum. Gjengitt etter Valverde et al. (2002, s. 5).

Travers (1993) skriver at den *intenderte* læreplanen er den som overføres av myndigheter på nasjonalt- eller systemnivå. Videre skriver han at den *implementerte* læreplanen er slik den har blitt tolket av læreren i forhold til dens tidligere erfaringer og oppfatninger, mens den *resulterte* læreplanen omhandler det elevene faktisk har lært, uttrykt gjennom elevenes prestasjoner og holdninger. Denne tredelingen blir enda brukt, og er en del av TIMSS 2015 Assessment Framework (Mullis, 2013).

Stein, Remillard & Smith (2007) har tatt for seg forskeres tidligere definisjoner av curriculum, begrepsfestet disse, og endt opp med *Written*, *Intended* og *Enacted* curriculum. Disse er henholdsvis selve den skriftlige læreplanen; undervisningsplanene til læreren; og selve undervisningen i klasserommet der implementeringen av læreplanbasert undervisning og oppgaver foregår. Alle disse vil igjen, ifølge Stein et al. (2007), påvirke elevenes læring. I motsetning til IEA modellen om curriculum (Travers, 1993; Valverde et al., 2002), der ordet *intendert* henviser til selve læreplanen, brukes det i denne sammenheng om hvordan læreren har tolket læreplanen og etter det lagd undervisningsopplegg. Det som Stein et al. (2007) bruker som den skriftlige læreplanen, mener de er det som tilsvarer den intenderte av IEA.

Vi ser altså at ordet curriculum ikke direkte kan oversettes til det vi på norsk bruker om styringsdokumentet «læreplan». Når vi skriver om læreplan, er det ment til styringsdokumentet, altså det som også inngår i det IEA (Travers 1993; Valverde et al., 2002) omtaler som den intenderte læreplan, og som Stein et al. (2007) omtaler som den skriftlige læreplanen.

2.1.2 Lærebok og læreverk

I likhet med «curriculum» har også det engelske ordet *textbook* flere betydninger. Dette kommer fram i Johansson (2003) som skriver at det i vid forstand kan omhandle en serie av materialer som eksempelvis bøker, hefter, lærerveiledning, regneark eller andre dataprogrammer. Videre vil det i snever forstand handle om selve læreboka som et trykt objekt der hensikten gjennom året er å veilede elevens arbeid. Den snevre forstanden samsvarer med Valverde et al. (2002) som beskriver lærebøker som artefakter, en fysisk gjenstand, som i de fleste klasserom blir brukt i undervisning og læring. Den vide forstanden er det som en gjerne på norsk kaller for læremidler, eller på gitte vilkår læreverk, mens den snevre forstanden henviser til selve læreboka.

Pepin, Gueudet & Trouche (2013) skriver at før i tiden ble textbook brukt om selve boka, mens i dag blir det av lærere i tillegg brukt om ulike ressurser som er tilknyttet læreboka. Stein et al. (2007) plasserer lærebøker under *Curriculum materials*, altså læringsmateriell eller undervisningsmateriell. Likevel skriver de at det er en forskjell mellom en matematikklærebok og undervisningsmateriell, ettersom sistnevnte legger vekt på pedagogikk og matematikk – altså hvordan og hva som skal undervises. Usiskin (2013) skriver at skolebøker inneholder teori og et bredt spekter av tema. Dette fordi læreren da kan bruke boken som en ressurs for begrepslæring. For at elevene skal fordype seg i de matematiske temaene, er det i tillegg oppgaver i bøkene.

Vi vil bruke ordet «lærebok» om selve boka elevene har fått tildelt, og som følger dem gjennom skoleåret, altså det Johansson (2003) refererer til som en snever forstand. Selv om en del av faglitteraturen vil bruke den vide forstanden, mener vi at den snevre vil inngå i den, og bruker derfor bare «lærebok» heretter. Når vi videre i oppgaven omtaler «læreverk», henvises det til den *serien* av lærebøker vi bruker i vår analyse. Da tenker vi kun på selve lærebøkene og ikke lærerveiledninger og annet ekstramateriell.

2.2 Skolegangen i Norge og Finland

2.2.1 Norge

I Norge begynner elevene på skolen det året de fyller seks år. Deretter går de ti år på skole, til og med det året de fyller 16. Sett bort ifra eventuelle lokale bestemmelser, så er det ifølge Utdanningsdirektoratet (2014) i utgangspunktet 190 skoledager per år i Norge, fordelt på et minimum av 38 uker. Fra 1.-4. trinn har norske elever 560 timer matematikk (á 60 min), 5.-7. trinn 328, og 8.-10. trinn 313 timer per skoleår. Dette gir et årsgjennomsnitt på 3,7 timer per uke på 1.-4. trinn, 2,9 timer per uke for 5.-7. trinn, og 2,7 timer per uke på 8.-10. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2013).

2.2.2 Finland

I brosjyren *Finnish education in a nutshell* (Ministry of Education and Culture; Finnish National Board of Education; CIMO, 2012) kan man se at det i Finland finnes en førskoleordning som barna kan begynne på det året de fyller seks. Det har hittil ikke vært obligatorisk, men ifølge brosjyren har de fleste likevel benyttet seg av dette tilbudet. Finske elever begynner altså ikke på selve grunnopplæringen sin før det året de fyller sju. De følger dermed en ni år lang skolegang, ett år mindre enn i Norge, som de avslutter det året de fyller 16. På internettsiden til Finnish National Board of Education (u.å.) blir det forklart at skolene i Finland følger en nasjonal læreplan som inneholder mål og kjernen i hvert av skolefagene. Lokale utdanningsmyndigheter, og skolene selv, legger opp et eget pensum innenfor rammene av den nasjonale læreplanen, sånn som i Norge (Utdanningsdirektoratet, 2014).

Timefordelingen for Finland, oppgitt av Finnish National Board of Education (2012), er basert på antall timer per uke i løpet av et år, og fordeler seg for faget matematikk som følger: 6 timer per uke fordelt på 1. og 2. trinn, 15 timer per uke fordelt på 3. og 4. trinn, og 11 timer per uke fordelt mellom 7.-9. trinn. Totalt gir dette 32 timer per uke fordelt utover grunnskolegangen, og er altså marginalt mer enn Norges 31,6 totalt. Men så går den norske grunnopplæringen over ti år, mens den finske bare går over ni, så tar man bort gjennomsnittet for 1. klassen i Norge, står man igjen med bare 27,9 timer per uke totalt. Det er altså ikke en helt enkel sammenligning. Ikke minst møter finske elever en del matematikk på sitt førskoleår, men uten at dette er bestemt i timeantall. Det kan dermed se ut til at tiden som brukes på matematikkfaget i norsk og finsk skole er sånn noenlunde den samme.

2.3 Muligheter for læring

Begrepet *opportunity to learn* (OTL), som oversatt til norsk betyr «muligheten til å lære» eller «læringsmuligheter» henviser, ifølge Hiebert & Grouws (2007), til en av de mest etablerte, men også den generelle sammenhengen, mellom undervisning og læring. Det er en påstand om at elever lærer best det de har mest mulighet til å lære. Forskjeller i elevprestasjoner kan derfor bli forklart ut ifra læringsmulighetene. En kan ikke noe man ikke har hatt mulighet til å lære. Forskjellige typer undervisning, og derunder også oppgaver, vil gi ulike læringsmuligheter, som igjen gir ulik kunnskap.

Lee & Luykx (2007) skriver at hvis vi tar for oss antagelsen om at de fleste barn potensielt kan oppnå en høy akademisk prestasjon, vil prestasjonsforskjellene være et produkt av de læringsmulighetene som er tilgjengelig for ulike elevgrupper, og den graden omstendighetene tillater dem å dra nytte av disse mulighetene. Læringsmulighetene består, ifølge Liu (2009), av tre nivåer av indikatorer som påvirker eleven, vist i Figur 2.2. Disse er basert på antagelsen om at det er en sammenheng mellom det som skjer i klasserommet, skolen og hjemmet og prestasjonene til elevene.

OTL			Student Outcome	
Level	Indicators		Subject	Domain
School	Equipment, labs, technology, field trips, etc.	→	Math, Science (Biology, Chemistry, Earth Science, Physics), ELA, etc.	Conceptual understanding, hands-on skills, critical thinking, etc.
Teacher	Qualification (knowledge, certification, experience), teaching (content coverage, exposure, emphasis, and delivery), etc.			
Family	Parent education level, books, computer, internet connection, etc.			

Figur 2.2: En mulig konseptualisering av OTL. Hentet fra Liu (2009, s. 11)

Videre skriver Liu (2009) at selv om andre faktorer som anlegg og motivasjon kan påvirke elevens resultater, er ikke et elevnivå tatt med i denne modellen fordi læringsmuligheter i hovedsak handler om faktorer som eleven ikke har kontroll over. «OTL should focus on what students are entitled to receive, instead of what they may contribute» (Liu, 2009, s. 11). Det handler om hva skolen, læreren og familien kan gi til eleven, og ikke omvendt; hva eleven skal prestere.

Ifølge Floden (2002) har læringsmuligheter innen matematikk vært en stor del av datainnsamling, analyse og rapportering de siste årene. Dette med bakgrunn i de internasjonale komparative studiene som har vært gjort i flere tiår av blant annet IEA. Disse studiene har vist en positiv assosiasjon mellom muligheter for læring og elevprestasjoner (McDonnell, 1995; Floden, 2002). Stevens (1993; 1997) tar utgangspunkt i disse og andre internasjonale undersøkelser og påpeker at det er fire variabler som har sterk innflytelse på lærerens undervisningspraksis og elevenes læring. De fire variablene er *Content coverage, Content exposure, Content emphasis* og *Quality of instructional delivery*. Disse inneholder henholdsvis, i korte trekk, grad av sammenheng mellom læreplan og hva elevene kan; tiden elevene får til arbeid med oppgaver samt dybden i emnet; hvilke temaer i læreplanen lærerne fokuserer på; samt hvordan undervisningspraksisen påvirker elevenes faglige prestasjoner.

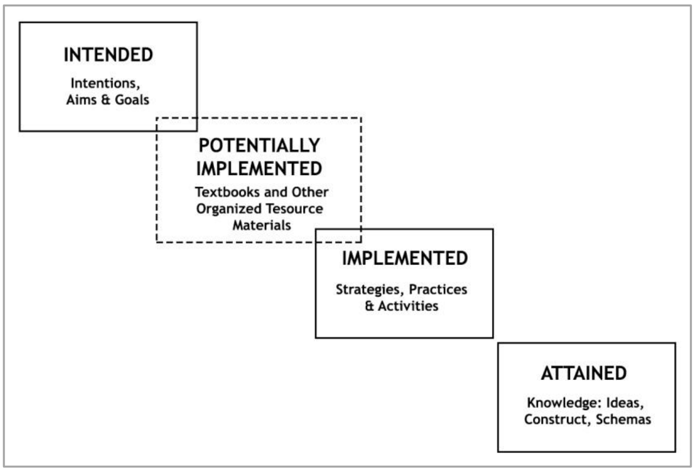
2.4 Lærebøker

Det vil her bli beskrevet ulik forsknings om har blitt gjort på lærebøker, og hvorfor det er viktig å forske på lærebøker. Dette vil kunne sette denne oppgaven i perspektiv.

2.4.1 Hvorfor forske på lærebøker?

Det å gå på skole dominerer, ifølge Valverde et al. (2002), livet til de fleste barn i verden. Hva dette innebærer varierer fra land til land, men det er likevel noen faktorer som er universelle. Videre skriver de at lærebøker er en slik faktor, og det å forstå lærebøker vil derfor være essensielt for å kunne forstå læringsmulighetene til barn utover i verden. Robitaille (1995) skriver at i alle land vil lærebøkene i matematikk utøve en betydelig innflytelse på undervisning og læring av faget, og at dette er et viktig område for undersøkelse ettersom det kan gi en forståelse av hvordan lærebøker varierer på tvers av land i innhold og tilnærming.

Valverde et al. (2002) presenterer en utvidet versjon av IEA sin tidligere nevnte tredeling av curriculum, fra Figur 2.1, til å omhandle en fjerde del, vist i Figur 2.3. De argumenterer for at lærebøker befinner seg som en mediator mellom den intenderte og implementerte læreplanen, som en potensiell implementert læreplan, ettersom lærebøkene innehar komponenter av muligheter til å lære skolefag og har sin egen karakteristiske innvirkning på undervisningen. Det er altså en sammenheng mellom lærebøker og elevenes læringsmuligheter.



Figur 2.3: Lærebøker i sammenheng med IEA sin tredelte modell. Gjengitt etter Valverde et al. (2002, s. 13)

Det samme kan en se ut av Mesa (2004), som skriver at lærebøker er en kilde for potensiell læring. Dette fordi det elever lærer fra lærebøkene, og det praktiske ved læringen, er mediert i skolesammenheng, da eksempelvis gjennom læreren, jevnaldrende, instruksjoner og oppgaver. I tillegg påpeker også Pepin & Haggarty (2001) at det er lærerne som er formidlere av lærebøker.

> Teachers decide which textbooks to use; when and where the textbook is to be used; which sections of the textbook to use; the sequencing of topics in the textbook; the ways in which pupils engage with the text; the level and type of teacher intervention between pupil and text; and so on. (Pepin & Haggarty, 2001, s. 165)

Dette samsvarer med Li, Chen & An (2009), som konkluderer med at det å forske på lærebøker, heller enn den intenderte læreplanen, vil gi et klarere bilde på hva som blir undervist og lært i klasserommet. Samtidig vil det å forske på lærebøker også være en mer tilgjengelig måte å dokumentere hvordan undervisning og læring sannsynligvis vil forløpe i en stor populasjon, og over et langt tidsrom, heller enn ved forskning på den implementerte læreplanen. Lærebøkene er dermed nærmere elevenes realitetsverden enn den overordnede læreplanen.

Jones & Tarr (2007) skriver at lærebøker i matematikk har stor innflytelse på hva som blir undervist i klasserommet, og at det derfor er viktig å forske på de som blir brukt av mange lærere, samt læringsmulighetene disse potensielt har. Pepin & Haggarty (2007) poengterer også at lærerne ofte baserer seg på lærebøker i deres daglige undervisning. Lærere formidler lærebøker ved å bestemme hva som skal læres, hvordan det skal undervises og hvilke oppgaver og øvelser elevene skal få tildelt – og bestemmer i den forstand også elevens læring. Lærebøkene vil derfor, på godt og vondt, påvirke hvordan elevene oppfatter og opplever matematikkfaget. Dette samsvarer med Hiebert et al. (1997) som skriver at «Students' perceptions of the subject are built from the kind of work they do, not from the exhortations of the teacher» (s. 18).

Hvis man skal forske på lærebøker, har Pepin & Haggarty (2007) argumentert ut ifra forskningslitteratur at matematikkoppgaver i læreboka bør bli gransket etter hvilken grad de legger vekt på relasjon heller enn prosedyrisk eller instrumentell forståelse; lager forbindelser med hva elevene allerede kan; lager forbindelser mellom de underliggende konseptene og relasjonene som blir lært; lager forbindelser i form av koblinger og utførelse av prosedyrene på en nøyaktig og hensiktsmessig måte; lager forbindelser innen matematikken samt på tvers av andre fag; tar utgangspunkt i kontekster som bidrar til å lage forbindelser med hverdagslivet; samt koble sammen ulike representasjoner (Pepin & Haggarty, 2007, s. 6, vår oversettelse).

2.4.2 Tidligere forskning på lærebøker

Ifølge Fan (2013) er forskningen på lærebøker i et tidlig stadium der de teoretiske rammeverkene og metodene enda har mangler eller er underutviklet. Fan, Zhu & Miao (2013) har tatt for seg tilgjengelige tidsskrifter som omhandler forskning på lærebøker i matematikk, og kommet fram til fem aspekter ved lærebokanalyser, der flere også kan inngå i en og samme studie. Disse fem er (1) matematisk innhold og emner, (2) kognisjon og pedagogikk, (3) kjønn, etnisitet, upartiskhet, kultur og verdi, (4) sammenlikning av ulike lærebøker og (5) konseptualisering og metodiske forhold (Fan et al., 2013, s. 637, vår oversettelse). Det vil videre bli lagt vekt på punkt 1 og 4, ettersom det er disse som er relevante for denne mastergradsoppgaven.

2.4.2.1 Matematisk innhold og emner

Ifølge Fan et al. (2013) har det meste av forskningen på lærebøker hatt fokus på forskjellene mellom innhold og tema i de ulike bøkene. Huntley & Terrell (2014) har lagt vekt på lineære likninger i matematikkbøker, og har gjennomført en undersøkelse på fem ulike lærebokserier i USA. De har blant annet sett på innholdet i lærebøkene, og kom fram til at det er forskjeller mellom mengder av oppgaver i bøkene. I tillegg har de også brukt TIMSS 2008 (Garden, et al., 2006) sine *kognitive domener* i sin studie (Huntley & Terrell, 2014).

Charalambous, Delaney, Hsu og Mesa (2010) har tatt for seg addisjon og subtraksjon av brøk. Undersøkelsen omhandlet lærebøker fra Kypros, Irland og Taiwan. De baserte seg på tidligere forskning, blant annet Stein et al. (2010) sine kognitive nivåkrav, og lagde et analyserammeverk som omfattet både en horisontal, vertikal, kontekstuell analyse av lærebøkene. De kom blant annet fram til at det både var likheter og ulikheter når det gjaldt emner innen brøk og deres rekkefølge, eksempler som ble brukt, representasjoner, og kognitive krav som ble stilt til eleven.

Felles for Huntley & Terrell (2014) og Charalambous et al. (2010) er at de alle påpeker at det er forskjeller mellom lærebøker i ulike land eller innad i eget land når det kommet til innhold og emner. Huntley & Terrell (2014) fant mest *knowing* i én av lærebøkene, mens resten inneholdt en overvekt av *applying*. Det var minst av domenet *reasoning* i alle lærebøkene de undersøkte. Charalambous et al. (2010) viste at det var mest av de lavere kognitive nivåkravene innen temaet brøk i lærebøkene fra Kypros og Irland, mens det var flertall av de høyere nivåkravene i lærebøkene fra Taiwan.

2.4.2.2 Sammenligning av ulike lærebøker

Den største internasjonale krysskulturelle sammenlikningsstudien av lærebøker har, ifølge Valverde et al. (2002), blitt gjennomført av TIMSS på 1990-tallet, og tar for seg 38 nasjoner, deriblant Norge. Studien sammenlignet 400 lærebøker innenfor matematikk og naturfag, der fokuset var på fem hovedkategorier. Disse fem var den pedagogiske situasjonen til læreboka; selve innholdet i boka – altså antall tema, om innholdet er abstrakt eller konkret, og kompleksiteten til emnene; rekkefølgen på temaene og hvor ofte bestemte tema skifter fra et til et annet; den fysiske utformingen som størrelse og lengde; og kompleksiteten av elevatferd som læreboka er ment å fremkalle. Konklusjonen deres er at lærebøker ikke er like, ettersom de fant betydelige differanser i måten de pedagogiske situasjonene ble presentert og strukturert på. De anser forskjellene til å være relatert til land, klassetrinn og emner.

Pepin & Haggarty (2001) har gjennomført en komparativ internasjonal studie, der de har tatt for seg lærebøker fra England, Frankrike og Tyskland. De fant ut at strukturen i bøkene er forskjellige fra hverandre, og at forskjellene skyldes ulike utdanningstradisjoner og -kontekster. I tillegg til å se på selve lærebøkene, har de også sett på elevers tilgang til lærebøker og hvordan de blir brukt i klasserommet.

Disse studiene vektlegger sammenlikning av lærebøker, og har funnet ut at det er store forskjeller på hvordan de framstilles pedagogisk. Ikke minst er det funnet grunnlag for videre forskning.

2.5 Teoretisk rammeverk

Vi vil her presentere det teoretiske rammeverket som er grunnlaget for vår analyse. Dette er et konseptuelt rammeverk satt sammen av fire andre rammeverk. Disse er TIMSS 2015 sine kognitive domener (Grønmo et al., 2013), levels of cognitive demands (Stein et al. 2000), aritmetisk kompleksitet (Leung & Silver, 1997) og PISA 2012 sine kontekster (OECD, 2013).

2.5.1 TIMSS 2015 Mathematics Frameworks

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) er, ifølge Grønmo et al. (2012), en internasjonal trendstudie med formål å måle ferdigheter og kunnskap innen matematikk og naturfag på 4. og 8.trinn i skolen. Rammeverket til TIMSS har som mål at det skal ligge så tett som mulig opp til læreplanene i deltakerlandene. Studien ser på elevprestasjoner og hvordan disse forandres over tid, både nasjonalt og internasjonalt. Den blir gjennomført hvert 4. år, der første gang var i 1995. I tillegg til å se på de faglige prestasjonene, ser de også på bakgrunnsvariabler ved at elevene, lærerne og skoleledere svarer på spørreskjema.

Innenfor matematikken skiller TIMSS, ifølge Grønmo et al. (2013), mellom tre vurderingsrammeverk; TIMSS Mathematics – Fourth Grade, TIMSS Numeracy og TIMSS Mathematics – Eighth Grade. Alle disse tre vil i 2015 bli organisert etter to dimensjoner, der den ene er *innholdsdimensjonen* (content dimension), altså hvilke temaer som blir testet og vurdert, og den andre er *kognitive domener* (cognitive dimension), som spesifiserer hvilke tankegangskompetanser som skal bli testet og vurdert. I innholdsdimensjonen blir de på 4. trinn testet i emneområdene «tall», «geometri» og «statistikk», mens de på 8. trinn testes i «tall», «algebra», «geometri» og «statistikk». Når det gjelder de *kognitive domenene* så skilles det mellom tre ulike tankegangskompetanser; *knowing*, *applying* og *reasoning*. Garden et al. (2006) skriver at for å kunne forstå et tema innen matematikken, må man inneha kompetanse innenfor hvert av disse tre kognitive domenene.

2.5.1.1 De tre kognitive domenene

Knowing er det første domenet, og den består ifølge Grønmo et al. (2013) av den kunnskapsbasen av kjennskap til matematiske begreper og ferdigheter som elevene bør ha, for å kunne anvende eller resonere matematisk. Dette innebærer å kunne huske definisjoner, terminologier, tallegenskaper, måleenheter, notasjoner og geometriske egenskaper. Desto mer relevant kunnskap eleven klarer å huske, og jo bredere utvalg av konsepter eleven forstår, desto større er potensialet for å kunne engasjere seg i et bredt spekter av problemløsningssituasjoner. Domenet inneholder også det å kunne gjenkjenne tall, uttrykk, mengder, former, samt likeverdige verdier som eksempelvis kjente sammenhenger mellom brøk, prosent og desimaltall. Tall, uttrykk, mengder og former må også kunne klassifiseres samt organiseres i ulike rekkefølger.

Kunnskapsbasen innebærer også det å kunne beherske de fire regneartene, både som naturlige tall, heltall, brøk og desimaltall. Dette gir et grunnlag for å kunne løse algebraiske oppgaver der utregningen er rett frem. *Knowing* innebærer i tillegg det å kunne hente informasjon fra ulike kilder som grafer, tabeller og tekst, samt å kunne bruke måleinstrumenter. Figur 2.4 viser et eksempel på en matematikkoppgave innenfor «Tall» som ifølge Foy, Arora & Stanco (2013) er plassert under *knowing*, der oppgaven nedenfor er hentet fra de frigitte oppgavene for 8. trinn fra 2011 (UiO, 2015). Her skal elevene finne det desimaltallet som svarer til den oppgitte brøken.

Hvilket tall er lik $\frac{3}{5}$?

Ⓐ 0,8

Ⓑ 0,6

Ⓒ 0,53

Ⓓ 0,35

Figur 2.4: Talloppgave innenfor *knowing* fra UiO (2015) og kategorisering hentet av Foy et al. (2013).

Det andre domenet, *applying*, omfatter ifølge Grønmo et al. (2013) bruk av matematikk i et vidt spekter av sammenhenger. Fakta, konsepter, prosedyrer og problemer skal i dette domenet være kjent for elevene. Elevene skal derfor selv kunne bestemme hvilke operasjoner, strategier og verktøy som er hensiktsmessige for å løse oppgaver der det kan brukes kjente løsningsmetoder. Dette domenet inneholder også det å kunne anvende matematisk kunnskap om fakta, ferdigheter, prosedyrer og forståelse av matematiske konsepter, for å kunne lage representasjoner og modeller. Dette innebærer det å kunne presentere data i tabeller og grafer, samt lage ulikheter, likninger, geometriske figurer eller diagrammer som modellerer problemsituasjoner.

Applying vil også innebære det å kunne lage likeverdige eller tilsvarende representasjoner for et gitt matematisk forhold eller enhet. Det å kunne representere sine ideer danner kjernen i matematisk tenking og kommunikasjon, og det å skape likeverdige representasjoner vil være en fundamental faktor for å lykkes i matematikkfaget. I tillegg er også oppgaveløsing sentralt i dette domenet, men da med vekt på det som for elevene er kjente og rutinebaserte oppgaver. Oppgaven kan være hverdagslig, eller inneholde rent matematiske spørsmål som eksempelvis algebraiske uttrykk, likninger, funksjoner, geometriske figurer eller statistiske datasett. Elevene må derfor kunne implementere strategier og operasjoner for å kunne løse problemer som inneholder matematiske konsepter og prosedyrer. I Figur 2.5, nedenfor, skal elevene finne den lengste delen av et 40 cm langt trestykke, som er delt i tre deler og representert i tre ulike algebraiske uttrykk.

Et trestykke var 40 cm langt.

Det ble delt i 3 deler.

Lengdene (målt i cm) er

$2x - 5$

$x + 7$

$x + 6$

Hvor lang er den lengste delen?

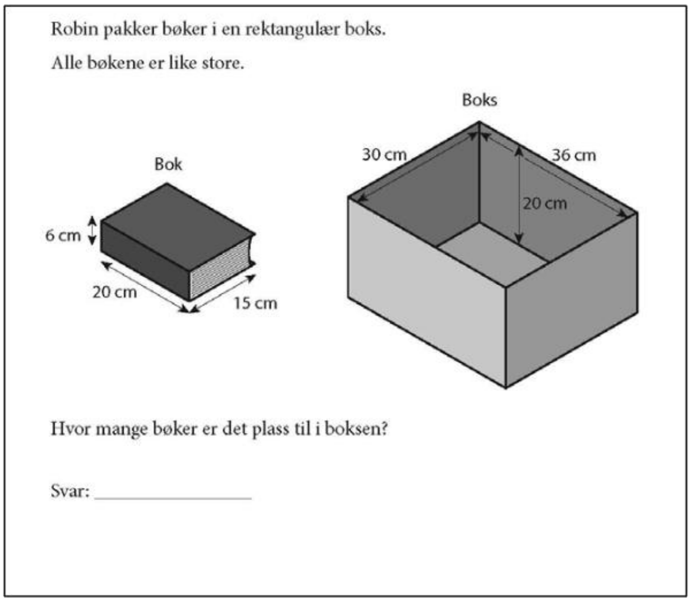
Svar: ______________ cm

Vis framgangsmåten din (også om du bruker kalkulator).

Figur 2.5: Algebraoppgave innenfor *applying* fra UiO (2015) og kategorisering hentet av Foy et al. (2013).

Reasoning er det siste domenet og innebærer, ifølge Grønmo et al. (2013), det å resonnere matematisk og å kunne tenke logisk og systematisk. Dette inkluderer intuitiv og induktiv resonnering basert på mønstre og regelmessigheter som kan benyttes for å løse nye eller ukjente problemsituasjoner, i motsetning til *applying* der oppgavesituasjonene er kjente. Problemer innenfor *reasoning* kan være hverdagslige eller rent matematiske. For å kunne løse ukjente problemer må elevene analysere, for så å kunne bestemme, beskrive eller bruke relasjoner mellom tall, uttrykk, former og mengder. Elevene må også integrere og syntetisere, noe som vil si å kunne knytte ulike elementer av kunnskap sammen; relatere representasjoner og prosedyrer for å løse problemer; samt evaluere alternative problemløsningsstrategier og løsninger.

Dette domenet inneholder også det å kunne trekke gyldige slutninger på bakgrunn av informasjon og bevismateriale. Oppgaver innenfor *reasoning* kan kreve at elevene må generalisere, altså komme med uttalelser der relasjoner i mer generelle og mer allment gjeldende vilkår blir presentert. I tillegg må elevene kunne bevise sin løsning og tankegang, ved å komme med matematiske argumenter, som støtter en strategi eller løsningsmetode. I oppgaven, Figur 2.6, skal elevene finne ut hvor mange bøker de kan få plass til i boksen.



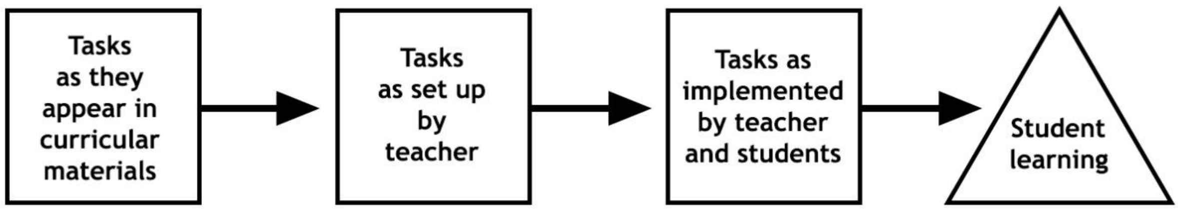
Figur 2.6: Geometrioppgave innenfor *Reasoning* fra UiO (2015) og kategorisering hentet av Foy et al. (2013).

2.5.2 The Mathematical Tasks Framework

The Mathematical Tasks Framework ble utviklet som et rammeverk for QUASAR[2]-prosjektet, der Mary Kay Stein og hennes kolleger (e.g., Stein, Grover & Henningsen, 1996; Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2000; Silver & Herbst, 2007) baserte seg på Doyle (1983) sitt arbeid med intellektuelle krav i akademisk arbeid og kognitive prosesser, som ligger til grunn i skoleoppgaver. Rammeverket, presentert i Figur 2.7, understreker den viktige rollen

[2] QUASAR (Quantitive Understanding: Amlifying Student Achievement and Reasoning) var et nasjonalt prosjekt for å forbedre matematikkundervisningen for elever i fattige, urbane strøk (Stein & Smith 1998; Stein et al. 2000).

som matematiske oppgaver har i forhold til å påvirke elevenes læringsmuligheter, og skildrer en matematisk oppgave som passerer gjennom tre faser i klasseromsundervisningen. Den første er hvordan de framstilles i læreplaner eller undervisningsmateriell, som lærebøker, hjelpematerialer og annet materiale; den andre fasen består av hvordan læreren setter opp og introduserer oppgaver; mens den siste fasen er implementeringsfasen, der elevene arbeider med oppgavene. Alle disse, men særlig implementeringsfasen, påvirker igjen elevenes læring (Stein & Smith, 1998; Stein et al., 2000; Silver & Herbst, 2007).

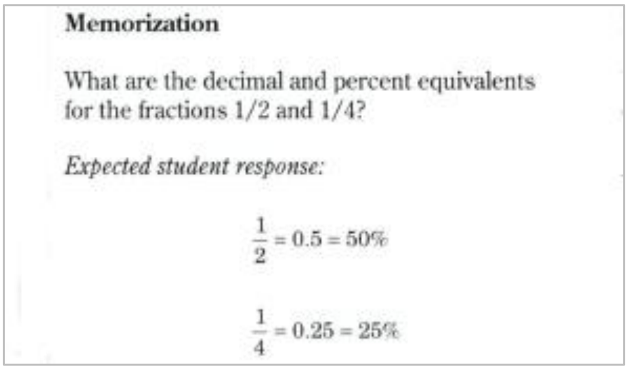


Figur 2.7: The Mathematical Tasks Framework. Gjengitt etter Stein & Smith (1998).

Matematikkoppgaver er forskjellige, og de vil derfor stille ulike kognitive krav for å kunne løses. Med kognitive krav mener Stein et al. (2000) hvilken type og nivå av tenkning som kreves av elevene for å kunne løse oppgaven. Hvis en oppgave ber elevene om å memorere en rutinemessig prosedyre, vil det føre til én type mulighet for elevtenkning, mens det i oppgaver hvor elevene må tenke konseptuelt og kunne se sammenhenger, vil føre til et annet sett med mulighet for tenkning – som igjen gir mulighet for læring (Stein & Smith, 1998). The Mathematical Tasks Framework inneholder *levels of cognitive demands*, som er en taksonomi over kognitive nivåer ment for oppgaver, før de blir presentert av en lærer, eller slik som de er skrevet i læreplanen, undervisningsmateriell og lærebøker (Stein et al., 2000). En veileder til disse nivåene blir presentert i *The Task Analysis Guide* av Stein et al. (2000, s. 16). Der skilles det mellom høyere og lavere kognitive nivåkrav, der det lavere inneholder *memorization* og *procedures without connections*, mens det høyere består av *procedures with connections* og *doing mathematics*. Disse ser vi i sammenheng med tidligere nevnte Doyle (1983) sine Memory tasks, Procedural and routine tasks, Comprehension or understanding tasks og Opinion tasks.

2.5.2.1 De fire levels of cognitive demands

I The Task Analysis Guide av Stein et al. (2000), er *memorization* det laveste nivåkravet, og omhandler matematikkoppgaver som spør elevene om å reprodusere tidligere lærte fakta, formler, regler eller definisjoner. Slike oppgaver kan bli løst uten bruk av noen form for prosedyre, og har heller ingen tilknytning til de konseptene, forståelsen eller begrunnelsen som ligger bak de fakta, formler, regler eller definisjonene som blir lært eller reprodusert. Stein & Smith (1998) eksemplifiserer *memorization* og de andre nivåkravene i Figur 2.8, der eksempelet på denne går ut på å finne prosent og desimaltall på ½ og ¼ som, ifølge dem, er noe man bare skal huske eller vite.



Memorization

What are the decimal and percent equivalents for the fractions 1/2 and 1/4?

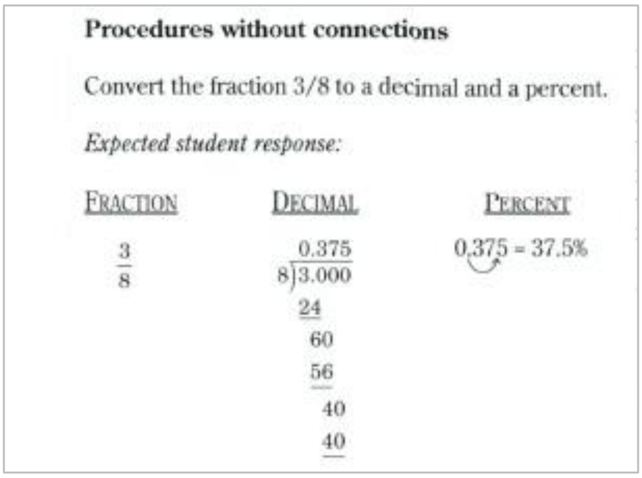
Expected student response:

$$\frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

$$\frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

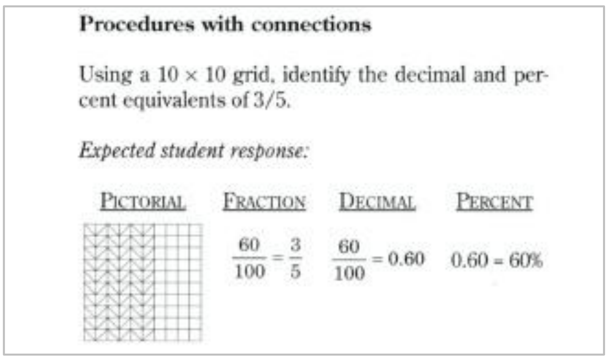
Figur 2.8: Eksempeloppgave på *memorization*. Hentet fra Stein & Smith (1998, s. 269).

Matematikkoppgaver som krever *procedures without connections* er, etter Stein et al. (2000), vanligvis algoritmiske. Fremgangsmåten er enten gitt, eller tydelig fra tidligere instruksjoner, erfaringer og plassering av oppgaven. Ettersom slike oppgaver ikke har forbindelse til de konsepter eller den betydning som ligger til grunn for prosedyren som blir brukt, vil denne typen matematikkoppgaver kreve en begrenset kognitiv forståelse. De vil fokusere på å produsere riktige svar i stedet for å utvikle matematisk forståelse. Eksempel på en oppgave som kun krever *procedures without connections* (Stein & Smith, 1998), er å gjøre om ⅜ til desimaltall og prosent ved først å dividere teller på nevner, og etterpå flytte komma to plasser til høyre, vist i Figur 2.9.



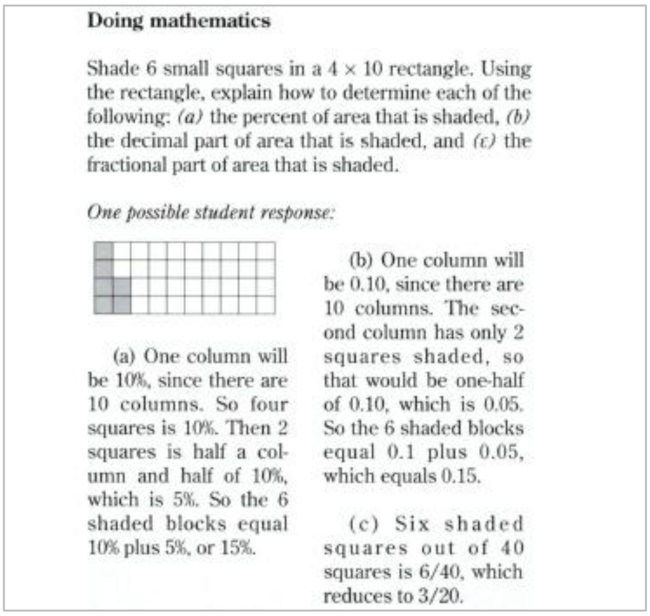
Figur 2.9: Eksempeloppgave på *procedures without connections*. Hentet fra Stein & Smith (1998, s. 269).

Ifølge Stein et al. (2000) befinner *procedures with connections* seg i det høyere nivåkravet, og vil i motsetning til det lavere nivåkrav fokusere på å bruke prosedyrer med hensikt å gi en dypere forståelse av matematiske konsepter og idéer til elevene. Selv om generelle prosedyrer kan brukes, vil de kreve en høyere grad av kognitiv tenkning, og kan ikke gjøres uten forståelse, slik som oppgaver som kan løses ved *procedures without connections*. Det blir foreslått løsningsveier, direkte eller indirekte, som er brede generelle prosedyrer og har en nær tilknytning til de underliggende konseptuelle ideene. Ettersom det å lage forbindelse mellom flere representasjoner bidrar til å utvikle forståelse, vil denne typen matematikkoppgaver ofte inneholde flere representasjoner, slik som visuelle diagrammer, konkretiseringsverktøy, symboler og problemløsning. I Figur 2.10 eksemplifiserer Stein & Smith (1998) *procedures with connections* ved bruk av et 10x10 rutenett der elevene skal representere $^{3}/_{5}$ både som desimaltall og prosent.



Figur 2.10: Eksempeloppgave på *procedures with connections*. Hentet fra Stein & Smith (1998, s. 269).

Det høyeste kognitive nivåkravet er *doing mathematics*, og ifølge Stein et al. (2000) krever slike matematikkoppgaver en kompleks ikke-algoritmisk tenkning. Dette ettersom det ikke er mulig å løse denne oppgavetypen med en forutsigbar eller tillært fremgangsmåte, og fordi løsningsmetoder heller ikke er foreslått av oppgaven eller av tidligere gitte eksempler. Det vil kreve at elevene undersøker og forstår prinsippene av matematiske konsepter, prosesser og forhold, og at elevene selv kan hente frem relevant kunnskap fra tidligere erfaringer for å løse oppgavene. Slike oppgaver vil også kreve at elevene aktivt analyserer og undersøker oppgavens begrensninger, for å avgrense mulige løsningsstrategier og løsninger. Elevene må altså inneha selvovervåking og selvregulering av sine egne kognitive ferdigheter, og fordi denne typen matematikkoppgaver krever en merkbar kognitiv anstrengelse, kan den uforutsigbare oppbygningen medføre angst. Stein og Smith (1998) viser eksempler på dette i Figur 2.11 nedenfor, der man blir bedt om å fargelegge seks ruter i et rektangulært rutenett på 4x10 ruter. Videre skal man forklare hvordan en kan bruke dette til å finne hvor mange prosent av arealet som er fargelagt, og hvor mye dette er i desimaltall og brøk.


Doing mathematics

Shade 6 small squares in a 4 × 10 rectangle. Using the rectangle, explain how to determine each of the following: *(a)* the percent of area that is shaded, *(b)* the decimal part of area that is shaded, and *(c)* the fractional part of area that is shaded.

One possible student response:

(a) One column will be 10%, since there are 10 columns. So four squares is 10%. Then 2 squares is half a column and half of 10%, which is 5%. So the 6 shaded blocks equal 10% plus 5%, or 15%.

(b) One column will be 0.10, since there are 10 columns. The second column has only 2 squares shaded, so that would be one-half of 0.10, which is 0.05. So the 6 shaded blocks equal 0.1 plus 0.05, which equals 0.15.

(c) Six shaded squares out of 40 squares is 6/40, which reduces to 3/20.

Figur 2.11: Eksempeloppgave på *doing mathematics*. Hentet fra Stein & Smith (1998, s. 269).

Stein et al. (2000) poengterer viktigheten av sammenheng mellom hvilke mål læreren har for undervisningen, og hvilke matematikkoppgaver som blir brukt. Hvis lærerens mål er at elevene skal kunne bevise og forklare, vil det være nødvendig med en oppgave innenfor det høyere kognitive nivåkravet. Ønsker læreren å øke hastigheten og nøyaktigheten til elevene på en rutineoppgave, vil det være forsvarlig å bruke en oppgave innen *procedures without connections*. Samtidig, hvis læreren kun fokuserer på oppgaver som befinner seg innenfor det lavere kognitive nivåkravet, vil det kunne gi elevene en smal forståelse av hva matematikk innebærer. Motsatt vil det å kun fokusere på de høyere nivåkravene, ifølge Stein et al. (2000), igjen kunne gi for lite øvelse og ferdigheter innenfor grunnleggende kunnskap og algoritmer.

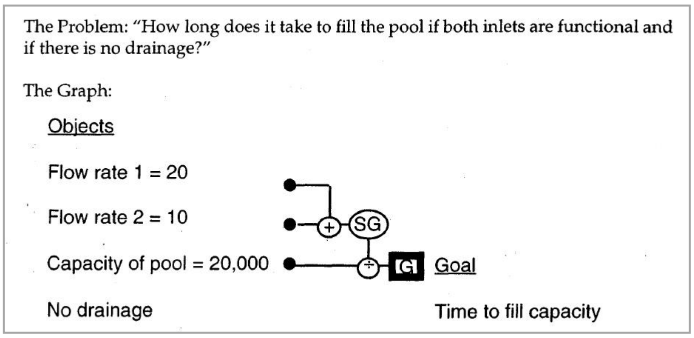
2.5.3 Aritmetisk kompleksitet

Leung & Silver (1997) har gjennomført en studie der 63 lærere på barneskolen ble testet i det å stille opp aritmetiske oppgaver; sammenhengen mellom å kunne stille opp aritmetiske oppgaver og deres matematiske kunnskap; samt deres verbale kreativitet. Et av hovedmålene deres var å utvikle og anvende et kognitivt analyseskjema til denne undersøkelsen. De tre testene de gjennomførte kaller de for the Test of Arithmetic Problem Posing, the mathematics subtest of Pre-professional Skill Tests og the verbal subtest of the Torrance Test of Creative Thinking.

I undersøkelsen til Leung & Silver (1997) testet *the mathematics subtest of Pre-professional Skill Test* lærernes matematiske kunnskap, og besto av 40 flervalgsoppgaver som målte matematiske ferdigheter og kunnskap på tvers av flere temaområder. *The verbal subtest of the Torrance Test of Creative Thinking* ble brukt for å måle lærernes verbale kreativitet og besto av seks oppgaver som gikk ut på å spørre, gjette årsaker, gjette konsekvens, produktforbedring, uvanlige bruksområder og bare å anta. I *The test of Arithmetic Problem Posing* skulle lærerne stille opp aritmetiske oppgaver basert på tekstbokser med og uten tallinformasjon. For å evaluere svarene i denne, ble de delt inn etter to dimensjoner; kvalitet og kompleksitet. Svarene ble innenfor *kvalitet* klassifisert som enten matematisk eller ikke-matematisk, sannsynlig eller usannsynlig samt tilstrekkelig og utilstrekkelig. Innenfor *kompleksitet* ble de kategorisert etter *aritmetic complexity*, altså aritmetisk kompleksitet, som tar for seg hvor mange steg som kreves for å løse en matematikkoppgave.

2.5.3.1 Tre kategorier av steg

Leung & Silver (1997) skiller i sin aritmetiske kompleksitet mellom matematikkoppgaver der svarene trenger *zero-step, one-step og multi-step,* altså *null-*, *ett-* og *fler-steg*, i løsningen. Ettersom de ser på hvilke oppgaver lærere klarer å framstille, har de valgt å slå sammen alt over *ett-steg* til *fler-steg* fordi en oppgave ikke nødvendigvis trenger å være mer kompleks om det er fem eller fire steg i oppgaven. Videre gir de eksempel på en *fler-steg*s oppgave, Figur 2.12, som inneholder to steg. Oppgaven går ut på å finne tiden det tar å fylle et basseng når en har to ulike vanntilførsler. Det første steget er et delmål, markert med SG (subgoal), der Flow rate 1 blir addert sammen med Flow rate 2. Det andre steget er selvet målet, markert som G (goal), der man har dividert «Capacity of pool» på «Flow rate»-ene.



Figur 2.12: Fler-stegsoppgave innenfor aritmetisk kompleksitet. Hentet fra Leung & Silver (1997, s. 12)

2.5.4 PISA 2012 Mathematics Framework

PISA (Programme for International Student Assessment) er, ifølge Kjærnsli & Olsen (2013), en internasjonal studie som undersøker 15-åringers kompetanse innenfor fagområdene lesing, naturfag og matematikk, der det ved hver gjennomføring blir lagt større vekt på ett av fagområdene. Undersøkelsen ser på endring over tid og har blitt gjennomført hvert tredje år siden år 2000. I tillegg til å se på de faglige ferdighetene innen fagområdene, har PISA en spørreundersøkelse til elever og skoleledere. I 2012 var det 65 land som deltok, hvorav 34 av landene, deriblant Norge og Finland, er OECD-medlemmer.

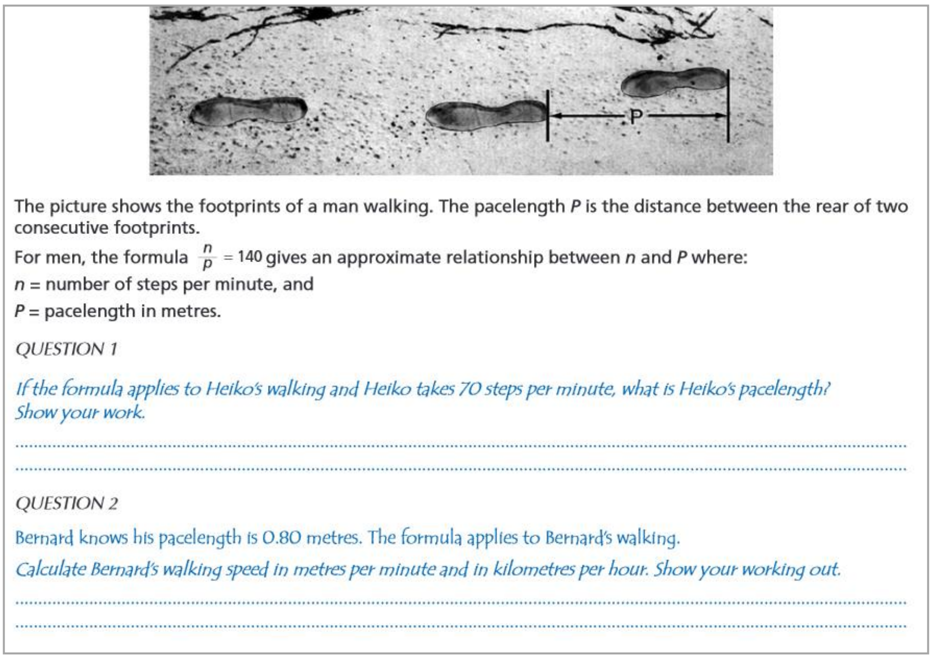
Ifølge OECD (2013) er PISA 2012 Mathematics Framework en beskrivelse av rammeverket i matematikk, som ble brukt i 2012 da det var dette faget som ble tildelt størst vekt. Rammeverket er delt inn i tre seksjoner; Definisjon av matematisk literacy, Organisering av domenet og Vurdering av matematisk literacy (OECD, 2013, s. 24, vår oversettelse). *Matematisk literacy* ble i 2012 definert av PISA som:

> (…) an individual's capacity to formulate, employ, and interpret mathematics in a variety of contexts. It includes reasoning mathematically and using mathematical concepts, procedures, facts and tools to describe, explain and predict phenomena. It assists individuals to recognise the role that mathematics plays in the world and to make the well-founded judgments and decisions needed by constructive, engaged and reflective citizens (OECD, 2013, s. 25).

Det blir altså i PISA 2012 lagt stor vekt kontekster samt den virkelige verden og deres betydning på matematisk literacy. Innenfor *organisering av domenet* presiserer OECD (2013) at konteksten er det aspektet av et individs verden hvor problemene er plassert, og det å velge passende løsningsstrategier og representasjoner ofte avhenger av konteksten som problemet oppstår i. Videre skriver de at rammeverket for PISA 2012 er designet for å lage matematikkoppgaver relevant for dagens 15-åringer ved å gjøre dem mer klar og eksplisitt, samtidig som de forblir i en meningsfull og autentisk kontekst. De prøver å nå et bredest mulig spekter av individuelle interesser, og har derfor delt inn i fire kategorier hvor elevene vil møte matematiske utfordringer; personal, occupational, societal og scientific.

2.5.4.1 Fire kontekster

Personal, eller personlig, kontekst inneholder, ifølge OECD (2013), oppgaver som fokuserer på aktiviteter hos en selv, ens familie eller ens jevnaldrende. Eksempler på oppgaver innenfor denne konteksten er de som involverer matlaging, shopping, spill, sport, personlig transport, -reise, -planlegging og -økonomi. Videre trekker de frem oppgaven «Walking», vist i Figur 2.13, som en oppgave som hører inn i den personlige kontekstypen.



The picture shows the footprints of a man walking. The pacelength *P* is the distance between the rear of two consecutive footprints.

For men, the formula $\frac{n}{P} = 140$ gives an approximate relationship between *n* and *P* where:

n = number of steps per minute, and

P = pacelength in metres.

QUESTION 1

If the formula applies to Heiko's walking and Heiko takes 70 steps per minute, what is Heiko's pacelength? Show your work.

....

....

QUESTION 2

Bernard knows his pacelength is 0.80 metres. The formula applies to Bernard's walking.

Calculate Bernard's walking speed in metres per minute and in kilometres per hour. Show your working out.

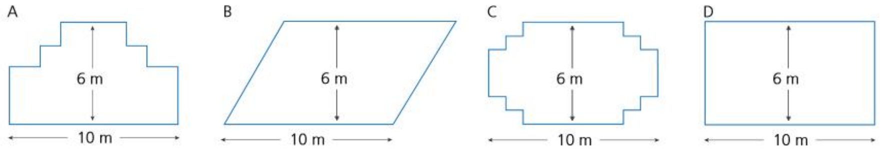
....

....

Figur 2.13: Oppgave innenfor konteksten personal. Hentet fra OECD (2013, s. 53-54)

Ifølge OECD (2013) er oppgaver innenfor kategorien *occupational* sentrert rundt arbeidslivet. Slike oppgaver kan inneholde, men begrenser seg ikke til, måling, lønn/regnskap, design/arkitektur, betaling og bestilling av materialer til byggebransjen og jobbrelaterte beslutninger. I Figur 2.14 blir oppgaven «Carpenter» trukket frem som eksempel på konteksten occupational ettersom den omhandler en snekker som skal legge tømmer rundt et blomsterbed.

A carpenter has 32 metres of timber and wants to make a border around a garden bed. He is considering the following designs for the garden bed.



Circle either "Yes" or "No" for each design to indicate whether the garden bed can be made with 32 metres of timber.

Garden bed design	Using this design, can the garden bed be made with 32 metres of timber?
Design A	Yes / No
Design B	Yes / No
Design C	Yes / No
Design D	Yes / No

Figur 2.14: Matematikkoppgave innenfor konteksten occupational. Hentet fra OECD (2013, s. 55)

Konteksten *societal* fra OECD (2013) fokuserer på ens samfunn, da enten lokalt, nasjonalt eller globalt. Slike kontekster kan eksempelvis være valgsystemer, myndigheter, offentlig politikk, offentlig transport, nasjonal statistikk og økonomi. Selv om enkeltpersoner på en personlig måte kan være involvert i alle disse, vil det i denne kontekstkategorien være fokus på det samfunnsmessige perspektivet. «Rock Concert» blir trukket frem som eksempel på societal, vist i Figur 2.15 nedenfor.

For a rock concert, a rectangular field of size 100 m by 50 m was reserved for the audience. The concert was completely sold out and the field was full with all the fans standing.

Which one of the following is likely to be the best estimate of the total number of people attending the concert?

A. 2 000
B. 5 000
C. 20 000
D. 50 000
E. 100 000

Figur 2.15: Oppgave innenfor societal. Hentet fra OECD (2013, s. 52)

Den siste konteksten er *scientific*, som etter OECD (2013) handler om det vitenskapelige, og er knyttet til anvendelse av matematikk i naturens verden, samt det som omhandler teknologi og vitenskap. Slike kontekster kan for eksempel inkludere vær, klima, økologi, medisin, genetikk og romforskning. I tillegg plasserer de her *intramatematiske* oppgaver, altså oppgaver hvor konteksten ligger i en matematikkverden. I Figur 2.16 fra PISA 2012

Mathematics Framework, vises oppgaven «Litter» som typisk scientific ettersom den omhandler miljø.

For a homework assignment on the environment, students collected information on the decomposition time of several types of litter that people throw away:

Type of litter	Decomposition time
Banana peel	1-3 years
Orange peel	1-3 years
Cardboard boxes	0.5 years
Chewing gum	20-25 years
Newspapers	A few days
Polystyrene cups	Over 100 years

A student thinks of displaying the results in a bar graph.

*Give **one** reason why a bar graph is unsuitable for displaying these data.*

....

Figur 2.16: Kontekstoppgave innenfor scientific. Hentet fra OECD (2013, s. 51)

2.6 Begrunnelse for teoretisk rammeverk

I vår tilvirkning av et konseptuelt rammeverk, satt sammen av fire eksterne og uavhengige rammeverk, har vi nærmet oss det Cobb (2007) omtaler som *bricolage*. Dette uttrykket brukes som metafor for å beskrive hvordan en som forsker trekker av ulike kilder med idéer og teorier, som så kan settes sammen og tilpasses de behovene og idéene en selv har. «The pragmatic spirit of the bricolage metaphor indicates that the goal in doing so is to fashion conceptual tools that are useful for our purposes as mathematics educators» (Cobb, 2007, s. 30). Slik har vi hatt en pragmatisk tilnærming til den matematikkdidaktiske teorien og metoden vi har brukt, og plukket med oss det vi antok ville fungere for å svare på vår problemstilling. Vi vil her begrunne valgene av de ulike rammeverkene.

Vi har valgt å bruke de *kognitive domenene* fra TIMSS 2015 Mathematics Framework av Grønmo et al. (2013), fordi disse kan belyse hvilke kognitive ferdigheter, altså *knowing*, *applying* og *reasoning*, elevene trenger for å løse en matematikkoppgave. For å være kompetent i matematikk bør en inneha alle disse ferdighetene. Ved å undersøke hvilke av disse kognitive ferdighetene som trengs for å løse en matematikkoppgave, vil en kunne se en fordeling av graden de utvalgte lærebøkene fra Norge og Finland dekker disse domenene. Dette vil kunne vise hvilke læringsmuligheter elevene har tilgang på. Vi vil kunne se i hvor stor grad lærebøkene består av hverdagslig, grunnleggende kunnskap i matematikk, og hvor mye elevene må anvende denne kunnskapen – og videre også resonnere og tenke logisk innenfor matematikken. De *kognitive domenene* er i tillegg laget for å kategorisere oppgaver i

TIMSS, og er derfor meget godt egnet til å kategorisere generelle matematikkoppgaver. Dette er blant annet, som tidligere nevnt, vist av Huntley & Terrell (2014), som undersøkte fordelingen av de tre kognitive domenene i lærebøker innenfor temaet likninger.

Levels of cognitive demands er et mye omtalt rammeverk (e.g., Stein et al., 1996; Stein & Smith, 1998; Stein et al., 2000; Silver & Herbst, 2007), og sier noe om hvor kognitivt krevende de tilbudte matematikkoppgavene i læreboka er, i forhold til tidligere gitte eksempler og instruksjoner. Dette er en form for taksonomisk hierarki og er derfor nyttig for oss, ettersom vi da kan se hvordan matematikkoppgavene fra de to ulike læreverkene fordeler seg i ulike kategorier av høyere og lavere nivåkrav. De vil altså kunne påpeke om elevene får tenke selv, eller om de kun får gjøre eller huske det de blir fortalt fra tidligere instruksjoner og eksempler i den pedagogiske delen av læreboka. Dette vil kunne si noe om hvilke læringsmuligheter elevene kan få. I tillegg til å kunne se på den taksonomiske fordelingen, har vi valgt dette rammeverket fordi det er laget for kategorisering av oppgaver. Stein et al. (2000) har blant annet utviklet en veileder til de fire kognitive kravene til hjelp ved kategorisering, som også er brukt av andre (e.g., Jones & Tarr, 2007; Charalambous et al., 2010). Vi tenker at levels of cognitive demands og de kognitive domenene til sammen kan utgjøre en horisontal og en vertikal fordeling av den tankegangen elevene bør inneha, og at de derfor kan utfylle hverandre.

Aritmetisk kompleksitet av Leung & Silver (1997), viser antall steg, eller delmål, innen en matematikkoppgave. Den angir hvor kompleks en matematikkoppgave er, og kan slik også indikere vanskegrad. Vi tenker at stegene antyder hvor kognitivt krevende det er å løse en matematikkoppgave, og angår dermed problemstillingen vår. Jo flere steg og ulike regneoperasjoner elevene har å forholde seg til, desto vanskeligere blir oppgaven å ha oversikt over og å løse. I tillegg tenker vi at denne delen av rammeverket kan komplementere Stein et al. (2000) sine høyere og lavere nivåkrav, i og med at begge kan si noe om vanskegrad, og hvilke kognitive ferdigheter som kreves for å løse en oppgave. Både *aritmetisk kompleksitet*, *kognitive domener* og *levels of cognitive demands* kan altså alle si noe om hva som brukes og kreves i oppgaveløsning, men sier dette på ulike måter.

Vi valgte å se på *kontekster* i oppgaver, fordi det er noe de legger stor vekt på i PISA 2012 Mathematics Framework (OECD, 2013), hvor Finland skårer høyt. Vi har også sett at det å få løse oppgaver innenfor ulike kontekster vil, ifølge OECD (2013), utvikle elevenes matematiske literacy – som er viktig for å kunne ta seg nytte av matematikken i hverdagen og i verdenssammenheng. Vi tenker at hvordan de ulike kontekstene fra PISA 2012 sitt rammeverk fordeler seg på matematikkoppgavene i de to landene, og i hvor stor grad oppgavene i det hele tatt tilhører en kontekst, kan påvirke elevenes muligheter for læring innenfor matematikken.

Vi ser at alle disse til sammen gir en dypere innsikt i hvilke kognitive ferdigheter en elev må inneha, og hvilke kognitive krav som kreves for å løse matematikkoppgaver. Dette viser videre hvilke læringsmuligheter læreboka kan gi elevene.

3 Metode

Vi vil i denne delen forklare hvilke metoder vi har benyttet oss av, hvordan vi har brukt dem, hvilke utvalg vi har gjort, og ikke minst hvordan vi rent praktisk har gått frem for å besvare problemstillingen vår. Fordi vi i denne mastergradsoppgaven har hatt hovedvekt på det kvantitative, vil denne metodedelen i all hovedsak bestå av dette. Det vil likevel bli presentert utvalg og gjennomføring av vårt kvalitative dypdykk, men på grunn av plassmangel og omfang blir dette presentert kort, og vil heller ikke bli diskutert under validitet og reliabilitet.

3.1 Valg av metode

Her vil vi ta for oss de ulike metodene vi har benyttet oss av i vårt forskningsdesign. Vi begynner med dokumentanalyse for så å gå over på mixed method.

3.1.1 Dokumentanalyse

I valget av metode sier Thagaard (2003) at man må ta i betraktning hvor en vil ha fokus for undersøkelsen, og hva som må gjøres for å få den informasjonen man søker. Dette er noe vi har gjort ved valg av problemstilling, og som førte til at vi bestemte oss for å analysere lærebøker. Scott (1990) argumenterer for at dokumenter er alt av skriftlige kilder, og inkluderer slik også lærebøker. Ved å gjøre det Thagaard (2003) kaller en dokumentanalyse, har vi satt oss inn i en tradisjon der vi hadde mulighet til å gjøre en undersøkelse som var mer uavhengig av tid og rom, og slik også mer passende å gjennomføre i forbindelse med en mastergradsoppgave.

Det vi har gjort er ikke bare en dokumentanalyse, men derunder også det som Grønmo (2004) refererer til som en innholdsanalyse. Vi har foretatt en systematisk gjennomgang av de utvalgte dokumentene, der vi har kategorisert og analysert det innholdet vi ville undersøke, noe Grønmo (2004) mener er særlig passende å gjøre der innholdet er verbalt, altså muntlig eller skriftlig, slik matematikkoppgaver oftest er.

Vi sammenlignet to sett med dokumenter, noe som førte oss over på komparative studier, som Grønmo (2004) hevder at vektlegger sammenligning heller enn dyptgående undersøkelse. Videre skriver han at dette innebærer å se på to ulike analyseenheter, som systematisk sammenlignes ved bruk av samme metode. Det å sammenligne lærebøker i to ulike land, er noe som både er spennende fordi det gir innblikk i hvert av læreverkene, men også det å se de to ulike lærebøkene i forhold til hverandre kan gi ny innsikt i det norske læreverket Faktor, som vi kjenner godt til her i Norge.

3.1.2 Mixed methods

Ifølge Grønmo (2004) snakker en ofte om kvalitative og kvantitative *metoder* i forskningen, men at det i bunn og grunn er i *datasettet* forskjellene mellom disse ligger. Data er den informasjonen man henter inn for så å systematisere og bearbeide til noe man kan benytte seg av. Videre skriver han at data, ifølge hovedregelen, er kvantitative hvis de fremstilles som tall eller andre former for mengder, og ellers kvalitative.

«To include only quantitative and qualitative methods falls short of the major approaches being used today in the social and human sciences» (Creswell, 2003). Å velge bare én forskningsmetode kan altså gi en for smal studie på visse fagfelt. For vår del så vi at det var mye informasjon som gikk tapt i den kvantitative fremstillingen av det konseptuelle rammeverket vårt, og bestemte oss derfor for å gjennomføre et rent kvalitativt dypdykk. Dette skulle gi større innsikt gjennom et mer detaljert bilde av bøkene, som ikke kom frem gjennom den kvantitative fremstillingen. Siden vi har brukt både kvalitativ og kvantitativ metode, medfører dette at vi har gjennomført det Creswell (2003) omtaler som *mixed methods*.

Ifølge Creswell & Plano Clark (2011) blir det forskningsdesignet en velger å bruke, en ledetråd for avgjørelser man må ta i forbindelse med datainnsamling, analyse, tolkning og rapportering av funn i studier. Når man skal utføre det de videre kaller et mixed method design, må en tenke over sitt filosofiske og teoretiske grunnlag, for slik å kunne bestemme det spesifikke designet som best passer det en skal gjøre. Creswell (2003) sier at det i dag ikke er et så stort fokus på om en studie er enten kvalitativ eller kvantitativ, fordi det er flytende overganger mellom disse. En kan altså tillate seg å være pragmatisk både i bruk av metoder, fremgangsmåter og utvalg, og jobbe ut ifra hva en ser vil gjøre nytten. Grønmo (2004) hevder også at de to retningene komplementerer og supplerer hverandre. Siden det er flytende overganger, kan en derfor variere hvor man velger å sette grensen mellom dem. Hvordan man velger å benytte seg av dette, avhenger igjen av problemstillingen som skal besvares. Vi så altså at oppgavene i lærebøkene kunne gi grunnlag for både kvantitative og kvalitative oppdagelser.

Ved å bruke et mixed methods design får man, ifølge Creswell (2003), tilgang til å bruke flere metoder sammen, et annet verdenssyn, og nye antagelser på bakgrunn av datainnsamling og analyser – i en og samme studie. Creswell & Plano Clark (2011) hevder at mixed methods ofte består av svært komplekse forskningsdesign. Likevel er det visse gjentagende fellestrekk, blant annet det de kaller «fixed-» og «emergent mixed methods designs». Det er flytende overganger mellom disse to ytterpunktene, så mange mixed methods-studier vil ligge imellom dem en plass. Den sistnevnte er design som oppstår etter at et behov har kommet til overflaten, underveis i forskningen, og ikke var planlagt på forhånd, slik som den førstnevnte. I mange tilfeller dreier dette seg om at man har påbegynt en kvantitativ eller kvalitativ studie, for så å se at den motsatte hadde gitt mye verdifull tilleggsinformasjon og derfor legges til. For vår del så vi behovet for å tilføye noe mer kvalitativt mens vi kategoriserte oppgaver for den kvantitative delen, da den ikke viste et fullstendig bilde av de forskjellene vi fant.

Creswell & Plano Clark (2011) nevner videre at ulike tilnærminger til design av forskning kan brukes. De deler dem inn i «typology-based approach» og «dynamic approaches», der den første, som er det vi har gjort, legger vekt på å velge ut og tilpasse et spesielt design – mens den andre vurderer og inkluderer ulike deler av forskningsdesign. Det er også denne første Creswell & Plano Clark (2011) anbefaler for de som er ny på denne typen forskning, da den gir et variert, men solid grunnlag for utførelse.

Aktuelle grunner, for vår del, for å velge *mixed method,* baserer seg blant annet på det Greene, Caracelli & Graham (1989), basert på Mark & Shotland, (1987), kaller *complementarity*. I denne begrunnelsen for mixed method ønsker man å utdype, illustrere og klargjøre resultater fra bruk av en metode ved å bruke en annen. Bryman (2006) utledet på bakgrunn av Greene et al. (1989) i tillegg *completeness,* der man ønsker en mer forståelig utredning; *explanation,* som altså bruker én metode for å forklare den andre; *context*, der kvalitativ forskning kan gi en bedre forståelse for den konteksten den kvalitative og mer vidtgående delen er hentet ut av; og *illustration*, som putter mer kjøtt på beina og altså gir en fyldigere forståelse av det som undersøkes. For vår del er det disse som gjør seg gjeldende fordi vi gjennom tilføyelsen av en kvalitativ del, vil vise at det er et stort spenn innen type oppgaver i de ulike kategoriene vi har brukt i den kvantitative delen. Vi vil altså bruke det kvalitative til å forklare det kvantitative, gi en mer helhetlig vurdering av undersøkelsen, og slik se et større bilde og gi en dypere forståelse på en og samme tid.

Creswell & Plano Clark (2011) hevder at det i tillegg er fire prinsipper som avgjør hvilken type mixed method en har. Den første er *level of interaction*, der vi har benyttet oss av den delen som er *independent* fordi alle delene av undersøkelsene innen de to metodene er gjort separat, men først sammenlignes i sluttfasen. Den andre er *priority*, der vi altså har en kvantitativ prioritet i vår oppgave. Den tredje er *timing*, som bygger på når de to ulike metodene tredde i kraft i forhold til hverandre, og der vi har *sequential timing* fordi det kvalitative og kvantitative ikke ble satt i gang samtidig. Den fjerde, og siste, er *mixing*, der de to metodene i vårt tilfelle har et felles utgangspunkt i datamaterialet vi har benyttet oss av. Dette betyr at vi har *mixing during data collection*, fordi det var da vi så at vi ville dra nytte av å gjøre en kvalitativ undersøkelse i tillegg til den kvantitative vi begynte med; det er datamaterialet som er felles for de to metodene.

Det overordnede forskningsdesignet vi har endt opp med, blir dermed det Creswell & Plano Clark (2011) kaller et *the explanatory sequential design*. Dette designet starter med den kvantitative metoden, hvor man undersøker teorier og konsepter, for så å følges opp av en kvalitativ metode, der man utforsker detaljer basert på noen utvalgte eksempler. Ifølge Creswell (2003) vil det i den kvantitative delen gjøres en undersøkelse på grunnlag av forhåndsbestemte instrumenter som gir statistiske data, og slik er en deduktiv metode, mens den kvalitative er induktiv, fordi man her går fra å ha mange løse tråder til å finne fellestrekk. Fordi vi i vår kategorisering tolker oppgaver, noe som altså er en kvalitativ metode, men fremstiller dem kvantitativt i tall og mengder, ser vi at dette blir en kvantitativ del. Slik ser vi at vi har en kvalitativ metode for datainnsamling, men en kvantitativ framstilling av dataene våre. I det kvalitative dypdykket derimot, vil vi også fremstille dataene *kvalitativt*.

Ved å ha gjort en mixed method, har vi gått mer analytisk og objektivt til verks, og fått et bredere innblikk i hva slags matematikk elever i norsk og finsk skole får mulighet til å lære gjennom oppgaver i de utvalgte lærebøkene. Sammenligningen mellom landene, bredden over hele ungdomstrinnet, inkludert alle de matematiske emnene i de aktuelle læreverkene, og det dypdykket vi i tillegg gjorde, mener vi gir et godt helhetsbilde av hvilke oppgaver elevene som bruker de to utvalgte læreverkene får mulighet til å lære utav.

3.2 Utvalg

For å få en helhetlig og sammenhengende undersøkelse, måtte vi gjøre noen avklaringer og avgrensninger i forhold til område for datainnsamling. Vi vil her presentere hvordan vi har kommet fram til ulike utvalg, hvordan vi har brukt disse utvalgene for gjennomføring av undersøkelsen, og ikke minst hvordan vi har ivaretatt kvaliteten på produktet. Begrunnelse for land, samt valg av rammeverk, har vi allerede begrunnet innledningsvis og i teoridelen, og vil derfor utelates her.

3.2.1 Årstrinn

Vi går et studie rettet mot 5.-10. trinn, og siden noe av det vi la til grunn for oppgaven var PISA-undersøkelsen, som tester 15 år gamle elever, ble det naturlig for oss å ta for oss ungdomstrinnet. Vi har derfor også sett på TIMSS-undersøkelsen for 8. og ikke 4. trinn. Dette ledet oss inn på hvilke lærebokverk vi hadde å velge mellom for videre analyse. Vi måtte avgjøre om vi skulle se på et enkelt trinn, eller alle tre trinnene i ungdomsskolen. I Norge begynner elevene på skolen allerede det året de fyller seks, mens de venter til de er sju år i Finland (NOKUT, 2012). Dette betyr at norske 15-åringer begynner på 10. trinn, mens de i Finland begynner i 9. På grunn av dette, tenkte vi først at vi skulle undersøke disse to avsluttende trinnene i de to landene. Men fordi PISA-undersøkelsen ikke utføres på slutten av dette skoleåret, ville det være det de lærte på tidligere trinn som ga utslag her. Derfor mener vi at det vil være mer helhetlig for vår masteroppgave om vi undersøkte læreverk for 8.-10. trinn i Norge, og tilsvarende, 7.-9. trinn i Finland. Dette ga også fordeler når det kom til sammenligning mellom temaer i de to landenes læreverk, da det ville variere hva slags matematiske temaer de tok for seg først og sist i de to landene.

3.2.2 Lærebøker og oppgaver

Vi undersøkte hvilke finske lærebøker som fantes i matematikk på ungdomstrinnet og hvilke som var oversatt til svensk, slik at vi skulle kunne lese dem og forstå oppgavene skikkelig – noe som gjorde at vi valgte Pi. Forlagene ville ikke gå ut med salgstall og opplag, da dette er konkurransesensitiv informasjon, men det finske forlaget kunne forsikre oss om at dette var et læreverk som ble mye brukt i hele Finland[3]. I tillegg blir Pi brukt i over halvparten av de svenske skolene i Finland – som består av 3500 elever til sammen[4]. Fra Norge valgte vi Faktor-serien av Hjardar & Pedersen, ettersom den ifølge forlaget er mye brukt[5].

---

[3] Mailkorrespondanse med Mervi Korhonen 29.10.2014, Publishing Manager, Math and Sciences, Otava Publishing Company Ltd.

[4] Mailkorrespondanse med Kenneth Nykvist 16.10.2014, Marknadsföringschef (läromedel), Schildts & Söderströms

[5] Mailkorrespondanse 28.10.2014 med Hilde Bjørklund, Markedsansvarlig i realfag, Cappelen Damm Undervisning.

Tabell 3.1

Oversikt over utvalgte matematikklærebøker.

Land	Forfatter	Lærebok
Norge	Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2006-2008)	Faktor 1. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet. Faktor 2. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet. Faktor 3. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet. Faktor 1. Oppgavebok. Matematikk for ungdomstrinnet. Faktor 2. Oppgavebok. Matematikk for ungdomstrinnet. Faktor 3. Oppgavebok. Matematikk for ungdomstrinnet.
Finland	Heinonen et al. (2010-2013)	Pi 7. Matematik. Pi 8. Matematik. Pi 9. Matematik. Pi. Matematik. Statistik och sannolihet.

Som en ser av Tabell 3.1, har Pi-serien altså plassert temaet statistikk og sannsynlighet i en egen bok. Denne boka skal benyttes til ulike, valgfrie tider på ungdomstrinnet, noe som setter den i særstilling. Vi har valgt å ta den med ettersom den inngår i alt elevene skal kunne etter endt ungdomsskole, samtidig som det gir oss mulighet til å sammenligne tema på tvers av land. I hver av lærebøkene i tabellen, har vi sett på alle matematikkoppgavene, unntatt de oppgavene i Faktor-serien som omhandlet øvingsoppgaver til digital manual, altså å øve seg på å bruke kalkulator og Excel. Vi ville se på alle de oppgavene som elevene har mulighet til å lære matematikk utav, og ikke hvordan dataprogrammet Excel fungerer. Ikke minst har ikke Pi noe tilsvarende.

3.3 Gjennomføring av analysen

Vi vil her forklare hvordan vi benyttet oss av de ulike analyseverktøyene og gjennomførte kategorisering av oppgaver. Videre vil vi utdype hvordan vi har utviklet verktøyene til vårt bruk, og hvilke begrensinger og generaliseringer vi har gjort for å kunne bruke dem på en effektiv måte.

3.3.1 Før selve kategoriseringen

For å i det hele tatt prøve ut de ulike kategoriseringsverktøyene, og lære oss å bruke dem til å kategorisere matematikkoppgaver, startet vi med å velge oss ut til sammen 100 oppgaver fra de to landene. Dette var 50 oppgaver fra Pi 9, og 50 fra Faktor 3. I Faktor 3 valgte vi ut de ti første oppgavene i de fem første kapitlene, mens vi i Pi 9 valgte ut ti oppgaver fra tilfeldig utvalgte delkapitler utover i boka, ettersom Pi 9 bare har tre hovedkapitler. Dette gjorde vi for å få prøvd oss på litt forskjellige oppgaver fra ulike matematiske temaer i begge landenes bøker. I Pi 9 var det en del repetisjonsoppgaver med i denne runden, noe som ga særlig mangfold av oppgaver, men som også var utfordrende når det gjaldt å ha oversikt over hva elevene hadde fått forklart gjennom tidligere gitte eksempler, og hvilke metoder det var lagt opp til at de skulle bruke.

Vi diskuterte oss først igjennom de ulike teoriene for kategorisering, og hvordan vi skulle bruke dem for vår oppgave. Vi tok notater og lagde begynnelsen på *Veileder for kategorisering* (se Vedlegg A), som skulle guide oss gjennom videre kategoriseringsarbeid. Videre prøvde vi å kategorisere de 100 oppgavene hver for oss, og så godt vi kunne på bakgrunn av forberedelsene, uten å samsnakkes om valgene vi tok. Først da vi begge hadde gjort dette, sammenlignet vi resultatene vi hadde fått og diskuterte oss fram til enighet om hvordan dette skulle gjøres. Mye ble avklart i denne prosessen, og dette dokumenterte vi i veiledningsskjemaet, som da stort sett ble ferdig. For det meste var det antall steg (Leung & Silver, 1997) vi var uenige om, noe som greit lot seg løse ved å diskutere veiledningsskjemaet og teori.

Fordi vi hadde tilgang til de frigitte oppgavene fra TIMSS 2011 (Foy et al., 2013), og hvordan de selv hadde valgt å kategorisere oppgavene sine inn i de tre kognitive domenene, bestemte vi oss for å ta en blindtest på oss selv der vi kategoriserte de frigitte oppgavene for så å sjekke om det stemte overens med hvordan det var gjort i TIMSS 2011. Vi plasserte flesteparten av oppgavene innenfor de samme kognitive domenene som det TIMSS hadde gjort, men noen lærdommer tok vi – og disse ble da føyd til i veilederen.

3.3.2 Selve kategoriseringen

Kategoriseringen startet ved at vi fordelte alle kapitlene i alle bøkene mellom oss, slik at hver enkelt av oss kategoriserte oppgaver innen lignende tema i hver av bøkene. Dette ville forenkle prosessen, i og med at vi da ville kjenne igjen mange av oppgavetypene og ikke minst sikre lik kategorisering innad temaene på tvers av bokseriene i hvert land. Det måtte i tillegg innenfor hvert nye tema vi påtok oss, gjøres en rekke valg i forhold til kategoriseringen.

Selve gjennomføringen av kategoriseringen foregikk ved at hver enkelt av oss tok for oss én og én oppgave innen et tema, og delte den opp i deloppgaver hvis oppgaven inneholdt flere spørsmål om ulike ting. Dette fordi en matematikkoppgave med flere deloppgaver vil kunne plasseres i flere ulike deler av et rammeverk, noe som de også gjør i TIMSS sine frigitte oppgaver for 2011 (Foy et al., 2013). Oppgaver som inneholdt flere spørsmål, uten at spørsmålene var inndelte, måtte vi selv dele inn i deloppgaver, slik at de ble kategoriserbare. Slik tok vi for oss hver og en av oppgavene, for så å avgjøre hvilket kognitivt domene, hvilket nivåkrav, hvor mange steg, og hvorvidt den var underlagt en kontekst. For oppgaver som var særlig vanskelige å kategorisere, var det oftest lettest å begynne med å se hvor de passet inn i de to sistnevnte kategoriene. Ellers så begynte vi med å kategorisere innenfor de to førstnevnte.

Dette var et arbeide som vi valgte å utføre i Excel, der vi kunne fylle inn de ulike opplysninger om hvilket land, hvilken bok, hvilken oppgave, antall deloppgaver og de bestemte kategoriene for hvert av rammeverkene inn i rutenett nedover i dokumentet (se eksempel i Vedlegg B og C). Disse tabellene brukte vi siden i analysearbeidet for å sortere ulik informasjon for seg, og lage krysningsskjemaer mellom landene og temaene innen og mellom hvert av rammeverkene.

Underveis i kategoriseringen kom vi til et delkapittel i Pi 9 som besto av et tema med oppgaver som var særlig vanskelig å kategorisere. Dette var kapittel *1.10 Två ekvationer och två obekanta*, som gir en innføring i forståelse og utregning av likninger, først med en, og så med to ukjente. Her brukes det par av skålvekter med to armer, som hver holder ulike former og figurer, som til sammen gir likevekt mellom skålene. Ved hjelp av denne informasjonen skulle elevene finne figurer som tilsvarte et spørsmålstegn, og seinere også både x og y.

Vi kategoriserte alle de 40 oppgavene i dette delkapittelet hver for oss, for så å sammenligne resultatet. Vi var stort sett ganske enige, og det vi hadde ulikt berodde på usikkerheter og valg mellom enten det ene eller det andre domenet eller steget. Vi ble raskt enige om hvordan det måtte være, og kunne gå videre i kategoriseringen med ny sikkerhet i de valgene vi hadde tatt.

3.3.2.1 Kognitive domener

Fra TIMSS 2015 Mathematics Framework (Grønmo et al., 2013), brukte vi de tre kognitive domenene *knowing*, *applying* og *reasoning* for å kategorisere matematikkoppgavene i de norske og finske lærebøkene. For å kunne kategorisere oppgaver inn i de tre domenene, studerte vi de ulike frigitte oppgavene fra TIMSS (Foy et al., 2013), hvilket domene de var blitt plassert under, og ikke minst hvordan de ulike domenene ble beskrevet i rammeverket.

I *knowing* plasserte vi de matematikkoppgavene som gikk på grunnleggende, enkel viten og utføring av matematikk – som alle og enhver bør kunne og huske. Dette baserte vi på de ulike verbene som utgjorde underkategorier til dette domenet; altså det å huske, gjenkjenne, klassifisere/ordne, regne ut, hente og måle (Grønmo et al., 2013, s. 26, vår oversettelse). Under dette første domenet inngikk da for eksempel det å lese noe direkte ut av grafer, tabeller og lignende sortering, og ikke minst tegning og måling av ulik sort. Veilederen fra TIMSS var grei å forholde seg til, men vi måtte lage oss et tydeligere skille for hvor det gikk over fra å regne ut enkle oppgaver innenfor *knowing*, til å faktisk anvende matematikken i *applying*.

Under domenet *applying*, satte vi generell bruk av matematikk, der elevene måtte velge fremgangsmåter eller passende verktøy for å løse oppgavene, men hvor metoder som kunne føre til løsningen ville være kjente og rutinebaserte for elevene. Dette gjaldt de mer sammensatte oppgavene, der elevene ville måtte benytte seg av det de kunne – og kanskje flere typer kunnskap – for å klare å utføre utregninger og oppsett. I tillegg så rommet dette domenet det å lage tabeller, konstruere figurer, sette opp likninger og regne ut oppgaver basert på informasjon gitt i tekstoppgaver. Dette omhandler altså underkategorien for *applying*, modellere og representere, så lenge det ikke bare var snakk om en enkel skisse eller tegning som skulle lages. Det måtte være mer innfløkt og sammensatt enn det.

I *reasoning* inngikk alle de mer tankebaserte oppgavene som vi ofte refererer til som problemløsningsoppgaver, hvor elevene altså ikke kan basere seg direkte på en algoritme eller klare fremgangsmåter, men derimot må tenke logisk og systematisk. Strategier kan benyttes, men oppgaven må først tolkes og analyseres – det kreves en viss betenkningstid. Vi har ikke tatt høyde for hvor mange problemer hver enkelt elev trenger å løse før det blir hverdagslig nok til å settes under *applying*, men derimot sett hva oppgavene i seg selv legges opp til å være.

3.3.2.2 Levels of cognitive demands

Vi har benyttet oss av Stein et al. (2000) sin The Task Analysis Guide over *levels of cognitive demands*, for å få en taksonomisk inndeling av matematikkoppgavene. For at vi skulle kunne kategorisere med mest mulig sammenheng med dette verktøyet, har vi sett på hvilke eksempler og regler elevene får tilgang til i forkant av oppgavene i lærebøkene. Dette i motsetning til det vi gjorde for de *kognitive domenene*.

Modellen til levels of cognitive demands er delt inn i fire taksonomiske nivåer. Vi tolket og bestemte det laveste nivåkravet, *memorization*, til å omhandle det man kunne se rett ut ifra teksten i oppgaven, tidligere eksempler eller der man skulle gjenhente og huske tidligere tilegnet informasjon og kunnskap. Dette nivået er altså ikke knyttet til hverken sammenheng eller forståelse. Det neste lave nivåkravet, *procedures without connections*, lot vi være enkle utregninger basert på tidligere viste eksempler, eller som baserte seg på vanlige og mye brukte algoritmer. Dette var typiske oppgaver der eleven bare måtte gjøre det som ble vist og fortalt.

På de to høyeste nivåkravene, har vi først *procedures with connections*. Dette var oppgaver der elevene ville måtte tenke mer sammensatt og forstå sammenhengene i matematikken, og som derfor ville utvikle deres forståelse for faget. Dette krevde mer av elevene, men ulikt fra *doing mathematics*, så kunne de fortsatt tenke algoritmisk og følge en viss logisk fremgangsmåte. På det høyeste nivåkravet, *doing mathematics*, var ingen fremgangsmåte antydet og ingen tillært metode kunne brukes. Her måtte elevene tenke «utenfor boksen» og på egenhånd komme frem til passende metoder og tenkemåter for å finne en løsning på problemet. Dette så vi på som den ultimate matematikkoppgaven, hvor elevene virkelig ble utfordret og måtte ha kontroll på kunnskapen sin for å finne fram til svaret.

3.3.2.3 Aritmetisk kompleksitet

Vi har basert tredelingen av steg i matematikkoppgaver på Leung & Silver (1997) sin *aritmetiske kompleksitet*. Dette førte til at vi satte *null-stegsoppgaver*, til å være oppgaver der eleven kunne hente informasjon, og svaret på oppgaven, rett ut av teksten. Ingen utregning er nødvendig. Dette tolket vi til å være oppgaver der man bare måtte telle, tegne, måle, eller lese av punkter direkte fra en graf eller tabell.

Ett-stegsoppgaver er generelt det å regne – om det gjøres i hodet, på papiret eller med kalkulator. Unntaket var når det gjaldt kalkulator er de kalkulatoroppgavene der det var mer øving i trykking, enn faktisk regning og bruk av svaret man fikk som sto i fokus. Å skrive om noe, for eksempel fra potensform til standardform, vil også være ett steg fordi man lager noe nytt. Dette ville ikke vært *null-steg* fordi det ikke alltid er noe du kan se direkte, uten å gjøre noe for å komme fram til svaret.

Når vi har kategorisert *fler-stegsoppgaver*, har vi gått ut ifra det Leung & Silver (1997) har kalt delmål (SG - subgoal). Vi tenkte oss at flere steg typisk ville være der eleven måtte regne ut én ting for å komme frem til noe annet, altså antall delmål i oppgaven. Hvor mange mellomregninger hver enkelt elev vil måtte bruke for å finne løsningen på ei likning kan være vanskelig å forutse fordi de vil utføres forskjellig og med ulik grad av automatisering i utregningene, så i slike tilfeller ble alt bare ett steg. Teknisk sett utfører du ingen delmål for å finne svaret på ei likning; alt hører sammen med ett og samme svar. Skulle eleven derimot finne to ukjente, eller sette prøve på svaret, ble de kategorisert under *fler-steg*.

3.3.2.4 Kontekst

Fra PISA 2012 Mathematics Framework (OECD, 2013) hentet vi et rammeverk for hvilke kontekster matematikkoppgaver kan deles inn i. Vi endte med å lage to egne kategorier; en for *blandet* kontekst og en for de *kontekstløse* oppgavene. Noen oppgaver omtalte ulike kontekster i en og samme deloppgave, og kunne derfor ikke settes inn i en bestemt kontekst-kategori. For å slippe å forkaste disse oppgavene, lagde vi heller en egen kategori for akkurat dette; *blandet* kontekst. Denne kategorien benyttet vi oss også av i de tilfellene der eleven selv skulle lage oppgave og sette kontekst. De kontekstløse oppgavene derimot, var de oppgavene som PISA 2012 omtaler som intramatematiske, og som ellers ville hørt inn under konteksten scientific (OECD, 2013), fordi dette var rent matematiske oppgaver. I PISA 2012 er oppgavene utformet fra kontekstene, der 25 % av oppgavene skal ligge innenfor hver kontekst (OECD, 2013). Oppgavene ifra lærebøkene derimot, er ikke laget under slike vilkår. Siden vi visste at det ville bli mange av denne typen oppgaver, valgte vi heller å sette dem for seg selv. Vi satte dermed alle de oppgavene som var rene regneoppgaver, uten noen synlig eller nevnt sammenheng til det virkelige liv, som kontekstløs.

Fremgangsmåten for å bestemme hvilke kontekster de ulike oppgavene inneholdt, har ofte vært ved å stille seg spørsmålene «Hva handler dette om?», og «Hvem har dette noe å si for?». Dette innenfor avgrensingene til rammeverket. I all hovedsak har *personal* kontekst vært alt som handler om mennesker og deres gjøren, eller eleven selv i form av bruk av «du» eller «deg» i oppgaven – og ellers det som har noe å si for enkeltpersoner i deres private liv. Konteksten *occupational* har vi satt til å være det som omhandler menneskers arbeid og skaperverk, men ikke i privat sammenheng. Oppgaver vi har satt innenfor *societal*, handler om de felles tingene og det man gjør sammen – både på lokalt, nasjonalt og internasjonalt nivå. Dette kan også være menneskeskapte ting, men da de som knyttes spesielt opp til hverdagen, daglig bruk eller generell kultur. Under konteksten *scientific* samlet vi alt det som hadde med natur, vitenskap og teknologi å gjøre, men uten at det knyttet seg direkte til arbeidslivet eller noe generelt menneskeskapt. Vei, fart og tid var noe som ofte ble satt inn i denne kategorien.

3.4 Kvalitativt dypdykk

For å fange opp informasjon som det konseptuelle rammeverket vårt ikke dekker, har vi valgt å gjøre et kvalitativt dypdykk. Vi vil her presentere kort hvilket utvalg vi har tatt, samt hvordan vi har gjennomført dypdykket.

3.4.1 Utvalg

Læreverkene inneholder mange kapitler og tema, som alle på sin måte kunne vært interessant å bruke i den kvalitative delen. De delkapitlene vi har plukket ut, valgte vi av praktiske grunner og fordi de ga gode illustrasjoner på det vi ville vise. Når vi skulle velge fokusområde, tok vi også utgangspunkt i overskrifter innad lærebøkene, ettersom vi da kunne anta at innholdet der var det samme. Valget falt da på *To likninger og to ulike* fra Faktor 3 sin Grunnbok og Oppgavebok (Hjardar & Pedersen, 2007a; 2008). Dette temaet har også underkategorien, *Grafisk løsing av likningssett*, og vi har derfor valgt tilsvarende delkapitler fra Pi 9 (Heinonen et al., 2012); *Två ekvationer och två obekanta* og *Ekvationssystem – grafisk lösning.* En annen bakgrunn er at læreplanene i begge landene inkluderer løsning av likningssystemer med to ukjente, og Norge presiserer at dette skal skje både praktisk og teoretisk, mens Finland poengterer at det også skal inkludere grafiske løsninger (Utdanningsdirektoratet, 2013; Finnish National Board of Education, 2004a).

I begge lærebøkene er dette det første møtet de har med likningssett med to ukjente, og vi tenkte at det derfor var godt egnet for å se på introduksjon og eksempler som blir vist. Innenfor disse to temaene, har Pi 9 80 matematikkoppgaver, mens Faktor 3 sin Grunnbok og Oppgavebok til sammen bare har 27. Likevel tror vi at dette ikke er til hinder, ettersom utgangspunktet og kriteriet vårt går direkte på overskriftene, og oppgaveantall i dette tilfellet ikke vil ha mye å si.

3.4.2 Gjennomføring

Vi begynte med å kode tekstene hver for oss. Dette innebærer at vi har gjort en systematisk gjennomgang av innledning, eksempler og oppgaver, og dratt essensen ut av dette. Kodingen gjorde vi for så vidt svært ulikt, der den ene av oss så det store bildet med større overskrifter, mens den andre fokuserte på å beskrive de mindre detaljene. Til sammen utgjorde dette noe som kunne settes sammen til en helhet. Etter at vi hadde kodet hver for oss, diskuterte vi det vi hadde funnet og slo alt sammen til et dokument som ble utgangspunkt for de funnene vi senere vil presentere. Dette for å gi en oversikt over alle små detaljer vi hadde funnet, samt de store sammenhengene.

3.5 Validitet og reliabilitet

Vi vil her trekke frem sterke og svake sider ved oppgaven vår, og ulike grep vi har gjort for å styrke oppgaven. Vi begynner med validitet for så også å gå over på reliabilitet.

3.5.1 Validitet

Validitet, eller *bekreftbarhet* som det gjerne kalles innenfor kvalitative studier, er ifølge Thagaard «(…)kvaliteten av tolkningen, og om den forståelsen det enkelte prosjekt fører til, støttes av annen forskning.» (2003, s. 21). Cohen, Manion & Morrison (2007) sier at hvis forskning ikke er valid, så er den verdiløs. Kvalitative data valideres gjennom ærligheten, dybden, mangfoldet og omfanget av det innsamlede datamaterialet, hvem som deltar, graden av triangulering, og objektiviteten (Winter, 2000) til den som forsker (Cohen et al., 2007).

Cohen et al. (2007) sier at det er her feilene kan komme; fra deltakernes subjektive meninger, holdninger og perspektiver. Gronlund (1981) vil heller snakke om en *grad* av validitet heller enn at det enten er rett eller galt, og det er da ifølge Cohen et al. (2007) mulig å gjøre små grep for å gjøre feilene minst mulig og validiteten størst mulig. For helt uten feil og helt objektiv kan man aldri bli når man forsker på den verdenen man lever i. Dette innebærer videre at metoden man velger for å finne ut av forskningsspørsmålene sine, har mye å si for hvor valid studien blir.

Vår metode bygger på et konseptuelt rammeverk som vi har satt sammen på bakgrunn av flere andre rammeverk. Vi har plukket ut og valgt det vi trengte, og slik vært pragmatisk motivert for det vi ville se på. Slik har vi lagd oss et skreddersydd analyseverktøy for den problemstillingen vi har satt oss, og gjort det Cobb (2007) omtaler som bricolage. Selv om dette egner seg godt i praktisk bruk, kan det være problematisk i forhold til om de utvalgene vi har gjort passer sammen og egner seg til bruken vi ønsker. I tillegg må de data som samles være representative for det feltet de skal si noe om (Cohen et al., 2007). Det er våre data, i og med at vi har brukt matematikkoppgaver, som ifølge forlagene, er fra mye brukte lærebøker.

I denne sammenheng har vi også en viss grad av deskriptiv og tolkende validitet (Cohen et al., 2007), i og med at vi har vært nøye på å omhandle fakta nøyaktig, og ikke har funnet på noe selv, valgt ut etter det som har passet oss eller rotet til de fakta vi har. Vi har også vært nøye på å kontrollere overfor hverandre at vi har fanget opp den faktiske meningen i teksten og tolket oppgavene og teoriene på en god måte. Likevel må det ikke glemmes at det er et tolkningsarbeid vi har gjort, noe som alltid vil kunne innebære en viss usikkerhet med tanke på feilkilder. Dette også i sammenheng med at vi har tolket teoriene vi har brukt.

En svakhet man må være klar over når en driver med dokumentanalyse, er ifølge Thagaard (2003), at det er vanskelig å få svar på spørsmål om det skulle være feil eller mangler ved dokumentet man undersøker. Det som står nedskrevet begrenser seg til akkurat det som alltid har, og alltid vil, stå der. Videre skriver hun at dokumenter, i motsetning til observasjon og intervju, ikke inneholder sett av data som nødvendigvis var tenkt til det forskeren velger å bruke dem til. Dette utgjør ikke nødvendigvis et problem, men er noe man må ta hensyn til i noen sammenhenger. Fordi det er lærebøker i daglig bruk, og ikke gamle relikvier fra fortiden vi skal analysere er det, ifølge Grønmo (2004), ikke mange tankene vi trenger å ofre hverken til tilgjengelighet, relevans, autentisitet eller troverdighet – slik som en ofte må ved denne typen analyse.

3.5.1.1 Innholdsvaliditet

Ifølge Cohen et al. (2007) går *innholdsvaliditet* (content validity) ut på hvorvidt det instrumentet du bruker for forskning er dekkende for det utvalgte området på en forståelig og god måte. Dette innebærer at man som forsker må passe på at hovedelementene i undersøkelsen er en ærlig og dekkende representasjon for de større sammenhengene. Dette gjelder også for de mindre elementene en velger ut til sitt forskningsområde, som altså i seg selv må være gjennomgått både i dybde og bredde. For vår del har dette noe å si både for de bøkene vi har valgt å bruke, oppgavene vi har gjennomgått og ikke minst rammeverkene vi har benyttet oss av; er de representative og dekkende for det de skal fortelle noe om, og måler vi det vi sier vi skal?

3.5.1.2 Konstruktvaliditet

Konstruktvaliditet (construct validity) omhandler ifølge Cohen et al. (2007) en abstrakt type validitet, som innebærer artikulering av hva et fenomen faktisk er og hva som legges i begrepet. Det handler om hvorvidt det forskeren omtaler i undersøkelsen sin, er det som ellers også er oppfatningen av fenomenet. Ikke minst innebærer dette hvorvidt det forskeren gjør, egner seg for å finne ut mer om det faktiske fenomenet. Det å vite hva noe er, kan også bekreftes ved hva det ikke er. Å søke falsifiserbarhet ved bruk av moteksempler for å avkrefte ens påstander, kan gi styrke til det som ikke lar seg avkrefte.

Det vi har måttet spørre oss om, er altså hvorvidt de tolkningene vi har gjort av de fire rammeverkene og andre teorier vi har brukt, er forenlige med det som andre ville ha sagt. Slik må vi videre også spørre oss om det vi tester faktisk er kognitive ferdigheter, nivåer, kompleksitet og kontekst. Dermed var det greit å ha teorier for de ulike rammeverkene og begrepene vi skulle bruke, slik at en hadde noe å støtte seg til når man skulle gjøre en egen studie. Når det kommer til å være selvkritisk og å se etter motbevis for om det man har gjort er riktig, så har vi utført sammenligninger rammeverkene imellom. Dette for å se om de sto i forhold til hverandre slik som vi hadde tolket og tenkt at de skulle. Dette ville også vise om rammeverkene skapte nok bredde og dybde i undersøkelsen vår, noe som i så fall ville virke styrkende.

3.5.1.2 Ekstern validitet

Ekstern validitet, eller generaliserbarhet som det ofte refereres til, forteller Cohen et al. (2007) at går på hvorvidt det som gjøres, og de resultatene som dukker opp i undersøkelsen, er overførbare og nyttige i andre sammenlignbare situasjoner. Ifølge Thagaard (2003) snakker man i kvalitative studier gjerne heller om *overførbarhet*, og om tolkninger fra én undersøkelse også kan gjelde for andre. Det at vi har undersøkt matematikkbøker som er mye brukt i de to landene, gjør at vi har undersøkt noe som allerede i utgangspunktet gjelder for mange. I tillegg så er dette standard lærebøker, og det er ingenting som tilsier at de hverken inneholder eller tar opp noe som er helt forskjellig fra det andre lærebøker gjør. Ikke minst kunne vi generalisert utover Norge og Finland, og sett det i sammenheng med andre lands lærebøker. Men i all hovedsak så sier undersøkelsen vår noe om disse utvalgte lærebøkene, i disse to landene.

De analysene vi har gjort, og altså analyseskjemaet vårt, vil kunne brukes på andre lærebøker. Dette skjemaet er utviklet på bakgrunn av relevant teori, og kan slik også brukes som grunnlag for videre studier og analyser. Fordi de lærebøkene vi har valgt ut er store aktører på det norske og finske markedet, vil studien vår i høy grad være generaliserbar for resten av ungdomstrinnene i de to landene. De vil si noe om en stor del av den matematikken og pedagogikken som møter disse elevene i klasserommet, og slik være representative.

3.5.2 Reliabilitet

Christoffersen & Johannessen (2012) sier at reliabilitet i et datasett handler om hvor nøyaktige dataene i undersøkelsen er. Det vil avhenge av hvilke data som er samlet inn, hvordan dette gjøres, og hva som gjøres videre med dem. Ifølge Thagaard (2003) kalles dette i kvalitative studier gjerne *Troverdighet,* og «(…) sier noe om forskningen utføres på en tillitsvekkende måte.» (s. 21). I vårt tilfelle har vi spesielt tatt hensyn til spørsmålet om inter-rater reliabilitet, altså om vi to som gjør denne datainnsamlingen, og bearbeider den, er enige om hva vi ser etter, hvordan arbeidet skal utføres, og hva som bør tas hensyn til. Vi har som nevnt gjort noen av de samme oppgavene hver for oss, for å se om vi gjorde de samme inndelingene mellom kategoriene. Eksempelvis da vi sammenlignet vår kategorisering innenfor kognitive domener opp mot det TIMSS 2011 (Foy et al., 2013) hadde gjort.

Det var rom for tolkning både av kategoriene i seg selv og matematikkoppgavene i forhold til dem. Dette vil påvirkes av forskerens bakgrunn og kunnskap om læring innenfor matematikk. For å opprettholde reliabiliteten er det derfor viktig å legge egne meninger til side, og støtte seg nært opp mot den teorien som ligger til grunn for analysen. Oppgaver som har vært spesielt vanskelig å kategorisere, har vi diskutert oss fram til enighet om. Dette har hjulpet på subjektiviteten, da det ikke bare er én person som står bak avgjørelsen. Et grep vi gjorde her, var veilederen vi lagde, og som ble gjort så detaljert som overhode mulig og nødvendig, for å ha faste holdepunkter for kategoriseringen. Jo mer detaljert og dekkende vi klarte å være i veilederen vår, desto lettere var det å kategorisere. Og jo lettere oppgaver lot seg kategorisere, desto mer sikre kunne vi være på at vi gjorde det på en konsekvent og tilstrekkelig god måte.

Vi har basert oss på tidligere studier og teorier i vår analyse, noe som gjør at egne holdepunkter undertrykkes og vi får en mer objektiv kategorisering. Dette gjør det videre mer tilgjengelig for andre som skal gjøre samme undersøkelsen å sjekke reliabiliteten og få samme resultat som oss; både bøkene og rammeverkene vil være tilgjengelig for etterprøvbarhet. De resultatene vi har produsert kan hentes frem igjen ved å bruke de samme analyseverktøyene som vi har brukt, og ved å følge de fremgangsmåtene vi har tolket oss fram til. Helt likt vil det likevel ikke nødvendigvis bli, da folk har ulik bakgrunn og erfaring som de tar med i tolkningene sine.

3.5.2.1 Stabilitet og ekvivalens

Grønmo (2004) skiller mellom to typer reliabilitet; stabilitet og ekvivalens. *Stabilitet* handler om hvor godt data som er samlet inn til ulik tid samsvarer, men det er også viktig når vi undersøker noe for et bestemt tidspunkt slik vi har gjort. Videre skriver han at en ustabil studie kan minske tilliten til analyseresultatene, og gi undersøkelsen et dårlig generelt standpunkt og en mer kortvarig vitenskapelig verdi. *Ekvivalens* handler om likhet i resultater fra samme innsamlingsmetoder utført av ulike personer. Datamaterialet skal ikke avhenge av og variere etter hvem som samlet det inn. Dette er noe vi har tatt hensyn til i vår kategorisering, ved at vi har samkjørt oss og sjekket opp mot hverandre underveis. Ved å også lage oss en veileder, og å ha konkrete eksempler på oppgaver innenfor hver kategori, har vi sikret oss både ekvivalens og stabilitet over tid. I tillegg gis dette også av at hver av oss har kategorisert de samme temaene på tvers av bøkene.

For best mulig datakvalitet (Grønmo, 2004) har vi gjort kontinuerlige notater underveis (se Vedlegg D), både for nye bestemmelser i forhold til metode for innsamling, grep vi har sett oss nødt til å gjøre, og hva som i det hele tatt skal tas med og ikke. Vi mener også at vi har lagt et godt grunnlag for kvalitetsvurdering av dataene våre. Vi har dokumentert de prosessene og stegene vi har gjennomgått under arbeidet med oppgaven, slik at det skal komme klart frem hvordan vi har tenkt, hva vi har gjort, og hvordan vi har gjort det.

3.6 Merknader

I forhold til de kategoriseringene vi har gjort, må man være oppmerksom på at ulike personer ville tatt ulike valg, fordi det er flytende overganger mellom de ulike kategoriene i de rammeverkene vi har valgt. En ting som likevel skiller seg spesielt ut, og som derfor må presiseres, er at vi selv har måtte dele opp oppgaver inn i deloppgaver. I Faktor-serien deler de matematikkoppgavene inn etter a, b, c, d og så videre, bortsett fra på flere av stjerneoppgavene der vanskegraden er ment å være høyere. I Pi-serien derimot er en svært stor andel av oppgavene ikke delt inn i deloppgaver. Flere spørsmål inngår i en og samme oppgave. Det ble derfor naturlig for oss å dele disse opp selv, ettersom de spurte om svært forskjellige ting, som ikke lot seg kategorisere på en og samme måte. Dette fordi en og samme oppgave kunne gå både på *knowing* og *applying*. Ikke minst var dette gjenkjennbart ifra Faktor-serien, og TIMSS selv (Foy et al., 2013), hvor slike oppgaver ville vært delt i ulike deloppgaver.

Læreverket Pi i Finland deles inn i Pi 7, Pi 8, Pi 9 og Pi Statistik och sannolikhet, der de tre første er laget for hvert av årene på ungdomstrinnet. Pi Statistik och sannolikhet derimot, går på tvers av årstrinnene. Dette innebærer at det vil være stor variasjon i hvilke matematikkoppgaver som vil bli gjort for hvert år på ungdomstrinnet, og gjør at denne læreboka blir vanskelig å ta med i en direkte sammenligning klassetrinn for klassetrinn. Fordi boka hører til i læreverket, har vi valgt å ha den med i de ulike diagrammene. Den blir likevel stående mer som en påminnelse om at den er der enn noe vi faktisk tar med i vår analyse av læreverkene hver for seg. Samtidig har vi valgt å ha den med ettersom vi da får mulighet til å sammenligne tema mellom de to landenes bøker.

3.7 Etikk

I enhver forskning har man som forsker en forpliktelse for å ivareta det etiske. Dette både i forhold til hva som blir forsket på og de som omtales i forskningen. Retningslinjer for forskningsetikk er nedfelt av Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora, NESH, og er utarbeidet for å «(…) hjelpe forskere og forskersamfunnet med å reflektere over sine etiske oppfatninger og holdninger, bli bevisst normkonflikter, styrke godt skjønn og evnen til å treffe velbegrunnede valg mellom motstridende hensyn» (NESH, 2006, s. 5).

Ifølge NESH (2006) inneholder den 47 punkter, men det er ingen av disse punktene som vil være særlig aktuell for denne mastergradsoppgaven, ettersom vi gjennomfører en dokumentanalyse på offentlige dokumenter. Likevel er det viktig å ha respekt for lærebokforfatternes arbeid og presentere funnene på en nøyaktig og nøytral måte.

4 Funn

I denne delen vil vi presentere bøkene og deres innhold. Vi vil vise funn i forhold til hvert av de fire rammeverkene, både mellom land og i tematisk inndeling, samt sammenhengen mellom rammeverkene. I tillegg til diagrammene med prosentvis fordeling, som vi presenterer i teksten, vil utfyllende tabeller med tall som vi nevner ligge som Vedlegg E. Vi begynner med å gjenta problemstillingen vår:

Hvilke læringsmuligheter får norske og finske elever gjennom lærebøker i matematikk?

- Hvilke kognitive ferdigheter og kognitive nivåkrav, hvilken kompleksitet og hvor mye kontekst er det i oppgavene i de utvalgte læreverkene?
- Hvilken sammenheng er det mellom de utvalgte rammeverkene *kognitive domener, levels of cognitive demands, aritmetisk kompleksitet* og *kontekst*?

4.1 Generelt om lærebøkene

I det norske læreverket Faktor sine grunnbøker, er hvert kapittel delt inn i fire deler. Ifølge Hjardar & Pedersen (2006a) er disse lærestoff og oppgaver, prøv deg selv, noe å lure på, samt oppsummering. De opererer med symboler for når de ulike oppgavene er beregnet for bruk av kalkulator eller regneark, eller der noe skal finnes ut av eller er ekstra utfordrende. I tillegg har hver Grunnbok en tilhørende Oppgavebok. Disse oppgavebøkene (Hjardar & Pedersen, 2006c; 2007b; 2008) inneholder tre ulike vanskegrader, Kategori 1, -2 og -3, som gir alt fra enkel trening til større utfordringer. De avslutter også hvert kapittel med repetisjonsoppgavene «litt av hvert». I tillegg er det her øvingsoppgaver til digital manual, som vi har sett bort ifra i vår studie.

I motsetning til Faktor-serien består Pi-serien av kombinerte bøker der alt av øvingsoppgaver og repetisjon er i en og samme bok, for hvert årstrinn. I tillegg har de egen bok for temaet statistikk og sannsynlighet. Hver bok inneholder tre hovedkapitler som igjen har 14 delkapitler, der to av disse omhandler repetisjon. Underveis i lærebøkene er oppgavene delt inn i tre vanskegrader, markert med én og to streker under oppgavenummeret for de to vanskeligste kategoriene. I tillegg avsluttes hvert delkapittel med oppgaver tilpasset hjemmearbeid.

Begge læreverkene har en kapittelinndeling som kan kjennes igjen i forhold til hvilke tema som tas opp. Dette både i forhold til landenes læreplaner (Utdanningsdirektoratet, 2013; Finnish National Board of Education, 2004b) og hva vi for øvrig forventer i et matematikklæreverk. En kan likevel se av Tabell 4.1 og 4.2 at Pi-serien har færre kapittelinndelinger enn det Faktor har. De har også satt andre navn på kapitlene enn det som er i den finske læreplanen, men det kommer likevel klart frem hva de ulike kapitlene inneholder.

Tabell 4.1

Kapittelinndeling i Faktor-serien

Faktor 1	Faktor 2	Faktor 3
1 Tall og tallforståelse	1 Tall og tallforståelse	1 Tall og algebra
2 Brøk	2 Algebra	2 Geometri og beregninger
3 Prosent	3 Geometri	3 Funksjoner
4 Geometri	4 Statistikk og sannsynlighet	4 Likninger og ulikheter
5 Statistikk	5 Måling og beregninger	5 Romgeometri og massetetthet
6 Tall og algebra	6 Funksjoner	6 Statstikk, kombinatorikk og sannsynlighet
7 Måling og enheter	7 Økonomi	7 Økonomi

Tabell 4.2

Kapittelinndeling i Pi-serien

Pi 7	Pi 8	Pi 9	Pi Statistik och sannolikhet
1 Från siffror till tal	1 Tal och procent	1 Grafer och ekvationer	
2 Från punkter till figurer och kroppar	2 Räkning med bokstäver	2 Figurer och kroppar	
3 Från tal till bokstäver	3 Figurer och deras egenskaper	3 Från delar till helheter	

I Tabell 4.3 vises en oversikt over antall deloppgaver innenfor hvert årstrinn i det norske og finske læreverket, og for Pi Statistik och sannolikhet. Dette er antall matematikkoppgaver slik vi har valgt å dele dem. Totalt i Faktor-serien er det 10137 deloppgaver mens det i Pi-serien er 13664, noe som utgjør 3527 flere enn i Faktor. Slik som inndelingen i denne tabellen vil vi i resten av denne teksten henvise til både Grunnbok og Oppgavebok som «Faktor», med mindre noe annet er presisert. Som nevnt tidligere bruker vi «Pi» og «Faktor» om lærebokseriene i sin helhet.

Tabell 4.3

Antall oppgaver innen hver lærebok

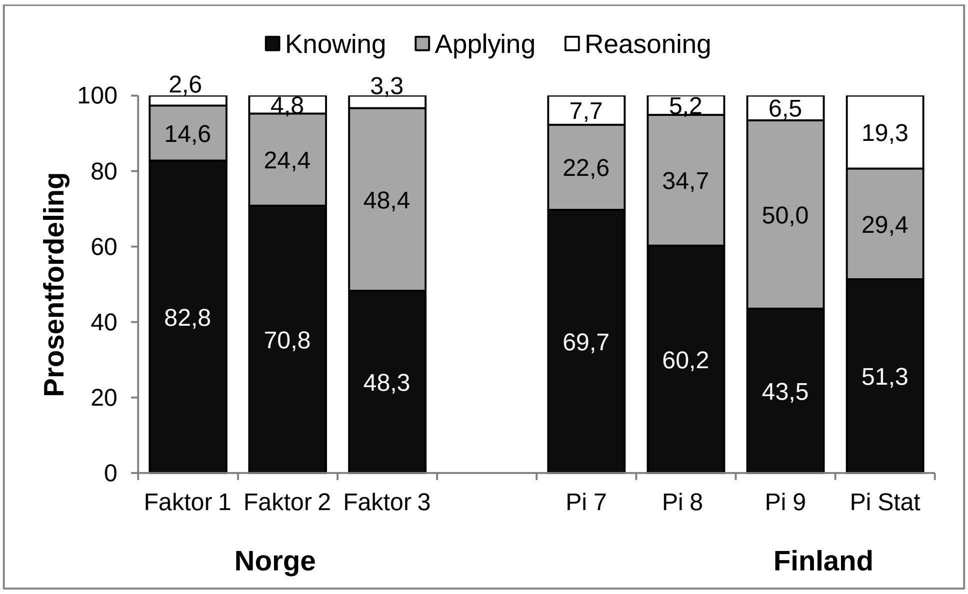
Lærebok	Antall oppgaver	Totalt antall oppgaver
Faktor 1 Grunnbok og Oppgavebok	3775	
Faktor 2 Grunnbok og Oppgavebok	3108	
Faktor 3 Grunnbok og Oppgavebok	3254	
Faktor-serien		10137
Pi 7	4793	
Pi 8	4088	
Pi 9	3821	
Pi Statistik och sannolikhet	962	
Pi-serien		13664
Begge læreverkene		23801

4.2 De fire rammeverkene

Vi vil her presentere hvordan de fire ulike rammeverkene fordeler seg utover lærebokseriene i de to landene. Det må nevnes at ett av de 14 delkapitlene i *Pi Statistik och sannolikhet* handler om problemløsning og ikke statistikk og sannsynlighet som resten boka. Dette vil kunne gi visse utslag i diagrammene vi presenterer her.

4.2.1 De tre kognitive domenene

Figur 4.1 vises det hvordan de tre kognitive domene til TIMSS (Grønmo et al., 2013), *knowing*, *applying*, *reasoning*, fordeler seg prosentvis i hver av lærebøkene valgt fra Norge og Finland.

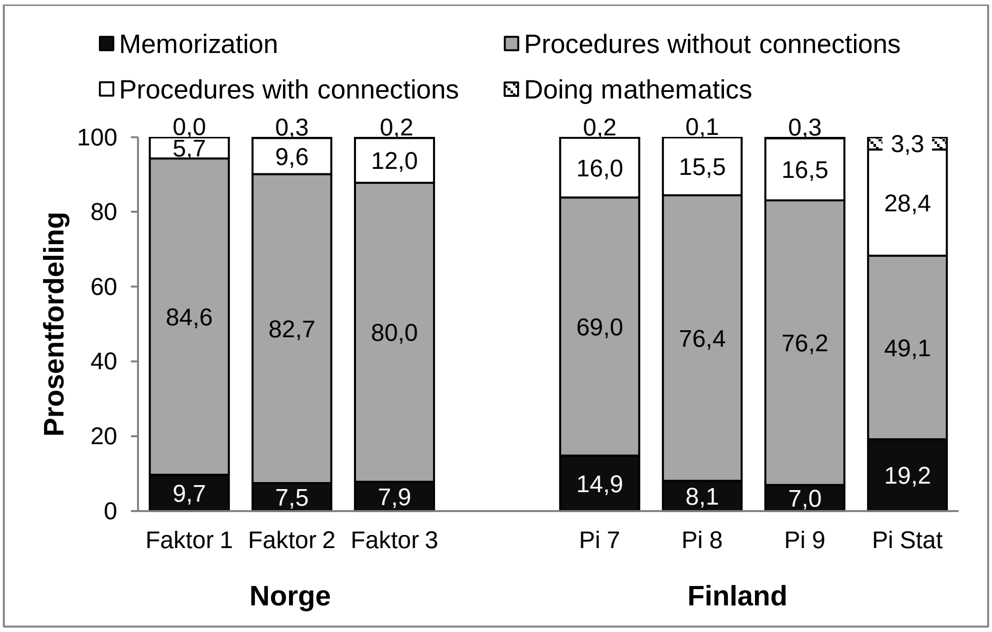


Figur 4.1: Prosentvis fordeling av kognitive domener.

I det norske læreverket kan man se at det er høyest prosentandel av matematikkoppgavene som havner inn under *knowing*, deretter oppgaver innenfor *applying* og til slutt innen *reasoning*. En ser at andelen innenfor *knowing* gradvis minker fra Faktor 1 til Faktor 3, mens oppgaver innenfor *applying* gradvis øker. Andelen oppgaver innenfor *reasoning* er jevnt lav. Samme tendensen ser vi også innenfor lærebøkene Pi 7, Pi 8 og Pi 9 i Finland, hvor andelen *knowing* er noe lavere, mens andelen *applying* og *reasoning* er noe høyere enn for de norske bøkene. *Reasoning* er det domenet det er lavest prosentandel av oppgaver i begge landenes læreverk. Selv om det er lave prosenttall, har likevel Pi-serien 658 flere oppgaver i dette domenet enn det Faktor har.

4.2.2 De fire levels of cognitive demands

Nedenfor, i Figur 4.2, presenterer vi en oversikt over den prosentvise fordelingen av matematikkoppgaver i hver lærebok innenfor de fire nivåkravene. Disse fire er Stein et al. (2000) sine *memorization*, *procedures without connections*, *procedures with connections* og *doing mathematics*.



Figur 4.2: Prosentvis fordeling av levels of cognitive demands.

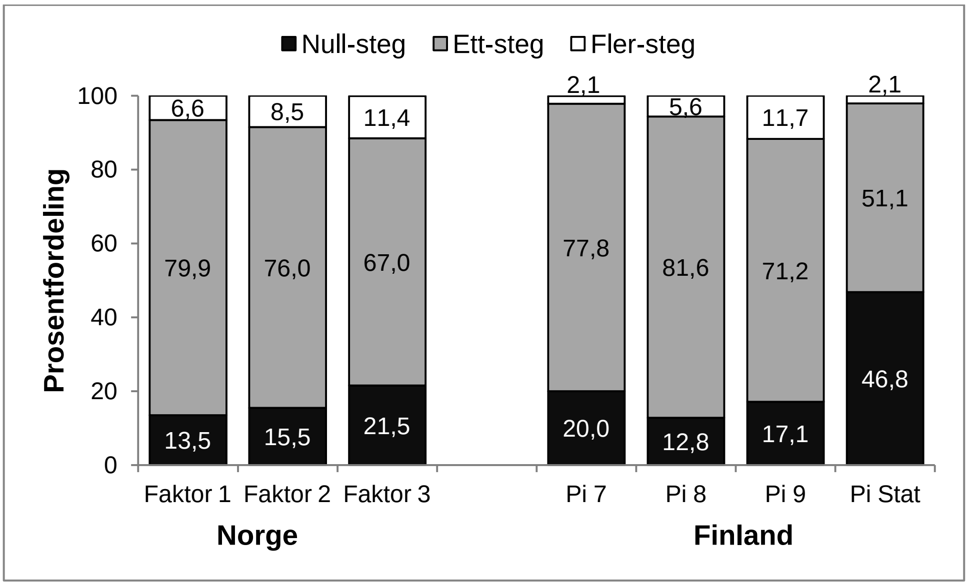
For de norske lærebøkene er det en relativ lav forekomst av oppgaver innenfor *memorization*, mens over 80 % av matematikkoppgavene i hver av de tre bøkene ligger inn under *procedures without connections*. Det er disse to de lavere kognitive nivåkravene består av. De to høyere nivåkravene utgjør en svært liten andel av matematikkoppgavene. Minst er det av *doing mathematics* som til sammen utgjør omtrent 0,15 % for alle tre bøkene. I Faktor 1 er det så få av disse oppgavene at vi må gå ned på hundredeler for å se det. Det er en liten økning av *procedures with connections* utover ungdomstrinnet, samtidig som det er en liten nedgang i *procedures without connections.*

Denne endringen over tid ser vi ikke i det finske læreverket, selv om den prosentvise fordelingen er noenlunde lik. Det er jevnt over noe mer av *procedures with connections* og noe mindre av *procedures without connections* alle tre årene. Det er i tillegg en liten prosent andel mer oppgaver innenfor *memorization* i Pi 7 enn i Faktor 1, som begge er bøker for første året på ungdomstrinnet.

Selv om det kan se tilsynelatende jevnt ut innad noen kategorier mellom landene, er det likevel noen forskjeller som ikke kommer frem i en prosentvis fordeling. Dette på grunn av den store ulikheten i totalt antall oppgaver i de to læreverkene. Vi ser eksempelvis at læreverket Pi har hele 1442 flere oppgaver innenfor de to høyere nivåkravene *procedures with* *connections* og *doing mathematics*. Det vil si at Pi har 1442 flere matematikkoppgaver med mulighet til å lære matematikk på disse høyere nivåene enn det Faktor har.

4.2.3 Aritmetisk kompleksitet

I Figur 4.3 fremstilles den prosentvise fordelingen av *aritmetisk kompleksitet* (Leung & Silver, 1997), altså *null-steg, ett-steg* og *fler-steg*, i de to læreverkene.

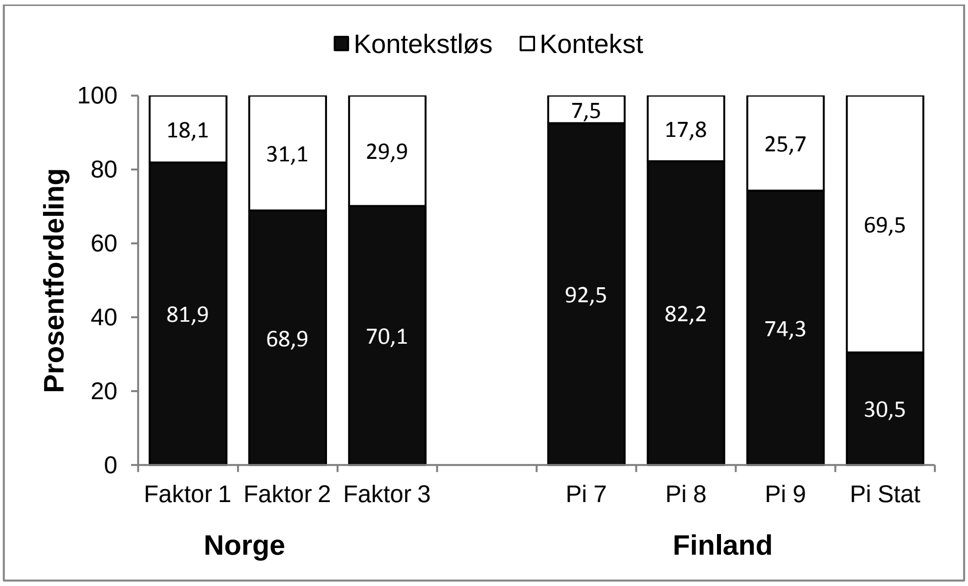


Figur 4.3: Prosentvis fordeling av aritmetisk kompleksitet.

Figuren viser for det norske læreverket flest oppgaver innenfor *ett-steg*, færrest innen *fler-steg* og noen flere innenfor *null-steg*. Det er en jevn økning av både *null-steg* og *fler-steg* fra Faktor 1 til Faktor 3, mens andelen *ett-steg* minker. For lærebøkene fra Finland derimot, øker den prosentvise andelen *fler-steg* gradvis, mens både *null-steg* og *ett-steg* varierer. Også her er det flest matematikkoppgaver innenfor *ett-steg*.

4.2.4 Kontekst

Her vil vi vise en prosentvis fordeling over de fire kontekstene til rammeverket for PISA 2012 (OECD, 2013) samlet som én av to kategorier, *kontekst* og *kontekstløs*, presentert i Figur 4.4 nedenfor. Grunnen for at vi presenterer alle kontekstene samlet, er at det ikke ble av betydning hva slags område innen kontekst de ulike oppgavene var lagt inn under, men derimot bare om de hadde kontekst eller ikke. Dette fordi de kontekstene som var i lærebokoppgavene ikke var like tydelig utformet og brukt, slik som de som er laget for PISA 2012 (OECD, 2013) er.



Figur 4.4: Prosentvis fordeling av kontekst i matematikkoppgaver.

Det er svært mange oppgaver uten kontekst i det norske læreverket. Man ser en økning av oppgaver med *kontekst* fra Faktor 1 til Faktor 2 og 3. Den samme utviklingen finnes også i det finske læreverket, men her er den prosentvise andelen *kontekstløse* oppgaver enda høyere enn i Faktor-serien. Hvis vi tar for oss prosentandelen av den totale summen av oppgaver i hvert læreverk, så inneholder kun 20 % av oppgavene i Pi-serien en *kontekst*, mot omtrentlig 26 % av oppgavene i Faktor. Likevel innebærer dette 115 flere matematikkoppgaver med *kontekst* som elevene med det finske læreverket får muligheten til å lære av, ettersom totalsummen av matematikkoppgaver i de to læreverkene er ulik.

4.2.5 Samlet overblikk

Samlet for alle disse analysene er at de stort sett fordeler seg likt mellom læreverkene i de to landene, og har stor grad av samvariasjon. Noen forskjeller er det, men tendensene er likevel de samme. Innenfor hver av de fire analyseverktøyene er det i hvert tilfelle overvekt av en av kategoriene. Dette er oppgaver innen *knowing*, *procedures without connections*, *kontekstløs* og *ett-steg.* I det norske læreverket er det hele 41,7 % av oppgavene innenfor akkurat denne kombinasjonen, mens det i det finske læreverket er 36 %. Tatt i betraktning alle de 72 mulige kombinasjonene mellom kategoriene i de ulike rammeverkene, er dette en høy prosentandel. Nedenfor vises et eksempel på en oppgave som vi har plassert under disse fire kategoriene. Dette kan anses å være en typisk matematikkoppgave for de aktuelle kategoriene.

1.25 Regn ut kvadrattallet x^2 når x er

a) 5	c) 10	e) 20
b) 8	d) 15	f) 100

Figur 4.5: Eksempeloppgave. Hentet fra Hjardar & Pedersen (2006b, s. 17).

Denne matematikkoppgaven i Figur 4.5 er plassert under *knowing* fordi vi mener den blant annet omhandler underkategoriene «husk» (recall) og «regn ut» (compute) av Grønmo et al. (2013). Dette innebærer å vite at x^2 er det samme som å multiplisere x med seg selv, og å kunne sette inn tall for en enkel multiplikasjonsutregning. Øverst på siden i Faktor 2 står regelen «Hvis x er et helt tall, er $x \cdot x = x^2$ et kvadrattall» (Hjardar & Pedersen, 2006b, s. 17). Dette gjør at oppgaven helt klart skal plasseres under *prosedures without connections*, da det er en algoritme som skal utføres basert på tidligere gitte regler og eksempler (Stein et al., 2000). Elevene vil ikke kunne hente ut svaret på oppgaven direkte, samtidig er det ingen delmål, derfor er dette en oppgave med kun *ett-steg*. Videre har oppgaven kun en matematisk kontekst og er altså en *kontekstløs* oppgave etter vår definisjon.

Det må bemerkes at læreboka Pi Statistik och sannolikhet (Heinonen et al., 2013) kun tilsvarer ett kapittel i de andre bøkene i Pi-serien. Dette betyr at den har såpass få oppgaver, at det som skiller den ut i diagrammene likevel ikke vil ha store utslag på den totale prosentfordelingen.

4.3 Temafordeling i læreverkene

Vi vil her fremstille vektlegging av temaene i antall og prosent. Vi vil også se på de prosentvise fordelingene av de ulike kategoriene i det konseptuelle rammeverket vårt utover temainndelingen. Vi minner om at antall matematikkoppgaver er basert på våre inndelinger, og antall deloppgaver – og ikke oppgavenummer slik som i bøkene.

4.3.1Vektlegging av tema

På bakgrunn av temainndelingene i de to læreverkene, har vi gjort en sammenligning av overskrifter og tema i de to bøkene. Slik kom vi frem til egne, felles temainndelinger på tvers av de to lærebokseriene, vist i Tabell 4.4. Disse er i hovedsak bygd opp etter kapittelinndelingen i Faktor, da Pi hadde en noenlunde lik inndeling innad sine kapitler, bare med andre navn. I det siste kapittelet i Pi 9 har de noen delkapitler som vi har definert som *blandede oppgaver*, dette fordi disse faller utenfor de øvrige og mer tradisjonelle tematiske inndelingene.

Tabell 4.4

Tall- og prosentvis oversikt over antall oppgaver i hver bokserie og innenfor de ulike tema

Tema	Faktor N=10137		Pi N=13664	
	#	**%**	**#**	**%**
Tall og tallforståelse	1827	18	1904	13,9
Tall og algebra	**2425**	**23,9**	**4679**	**34,2**
Brøk og prosent	962	9,5	1306	9,6
Statistikk og sannsynlighet	1021	10,1	859	6,3
Geometri og beregninger	1526	15,1	2751	20,1
Funksjoner	593	5,8	915	6,7
Måling og massetetthet	**1155**	11,4	**496**	3,6
Økonomi	496	4,9	68	**0,5**
Problemløsning	132	**1,3**	261	1,9
Blandede oppgaver			425	3,1

I begge læreverkene er det størst andel matematikkoppgaver innenfor «tall og algebra», med 23,9 % i Faktor-serien og 34,2 % i Pi-serien. Selv om det bare er om lag 10 % større andel oppgaver innenfor dette temaet i Pi enn det er i Faktor, så utgjør dette hele 2254 flere matematikkoppgaver med muligheter for å lære, noe som utgjør en stor del av differansen i antall oppgaver mellom landene. Relativt små prosentvise forskjeller kan altså utgjøre et stort sprang i antall oppgaver når det totale antallet i hvert læreverk er ulikt. I læreverket Faktor er det færrest oppgaver innenfor «problemløsning» med 1,3 %. I Pi er det også en lav prosentandel innenfor dette temaet med 1,9 %, likevel er det omtrentlig dobbelt så mange problemløsningsoppgaver i Pi enn i Faktor. I det finske læreverket er det færrest oppgaver innenfor *økonomi* med kun 0,5 %, noe som tilsvarer 428 færre oppgaver enn i Faktor.

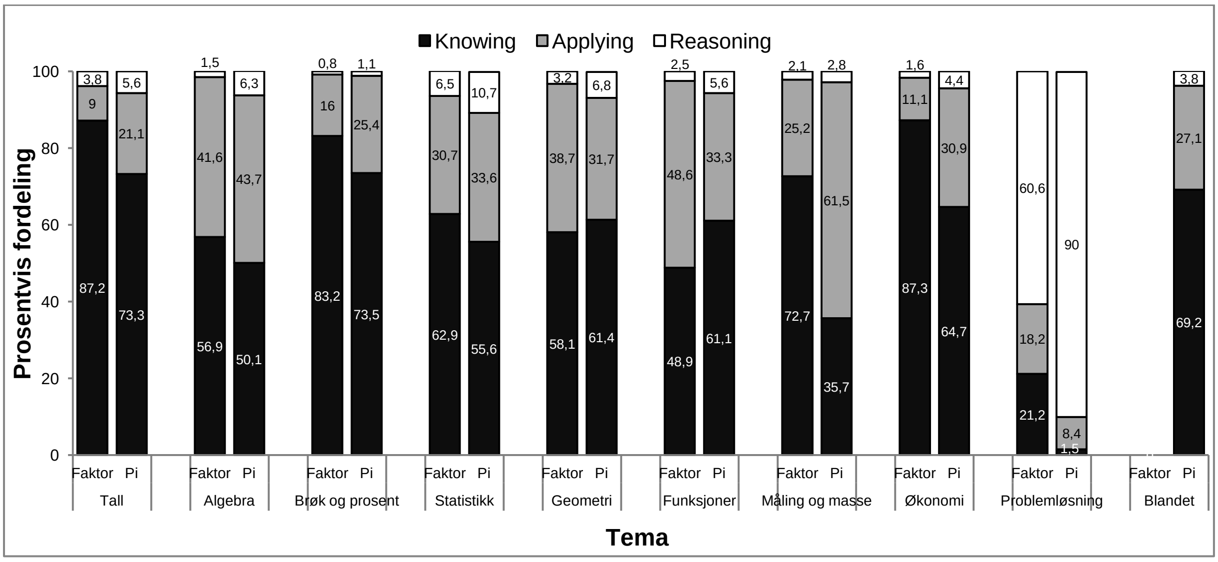
Innenfor temaet «måling og massetetthet» er det 659 flere oppgaver i Faktor-serien enn i Pi-serien, mens det omvendt er 1225 flere matematikkoppgaver innen temaet «geometri og beregninger» i læreverket Pi enn i Faktor. Vi ser altså at det er en del forskjeller i vektlegging av de ulike temaene i de to landenes læreverker. Utenom dem vi har nevnt som forskjeller her, er det stort sett likhet enten mellom prosentandel eller i antall oppgaver innenfor de andre temaene. Vi stiller oss likevel undrende til at det på tross av at Pi-serien har en egen bok for «statistikk og sannsynlighet», fortsatt er flere oppgaver innenfor dette temaet i Faktor-serien.

4.3.2 De fire rammeverkene fordelt på tema

Med utgangspunkt i de tematiske inndelingene ovenfor, presenterer vi her fordelingen av de ulike temaene i de fire rammeverkene. Det er henholdsvis de samme inndelingene som i Tabell 4.4, men her forkortet på grunn av plassmangel. Dette er noe vi gjorde for å kunne se hvilke muligheter elevene har til å lære de ulike temaene.

4.3.2.1 De tre kognitive domenene

I Figur 4.6 vises de ulike temaene med prosentvis inndeling i de kognitive domenene *knowing, applying* og *reasoning* (Grønmo et al., 2013). Det er de samme tendensene og fordelingene som vises for begge læreverkene i alle tema. Vi ser stadig at det er noe lavere prosentandel av oppgaver innen *knowing* i Pi enn i Faktor; kun for «geometri og beregninger» og «funksjoner» er det mer av dette domenet. Bortsett fra disse to temaene er det mer *applying* i det finske læreverket enn i det norske. Prosentvis er det mer *reasoning* i alle tema for Pi, selv om det likevel er marginalt flere oppgaver i «måling og massetetthet» og «økonomi» i Faktor. Det kan være verdt å merke seg at «problemløsning» i det norske læreverket har hele 21,2 % oppgaver innenfor *knowing*, som bare er det å vite og å gjøre enkle utregninger i matematikken. I dette temaet er det i Pi-serien 155 flere oppgaver som havner under domenet *reasoning*. Dette tallet under *reasoning* er høyere enn det totale antallet problemløsningsoppgaver i Faktor, vist i Tabell 4.4 forrige side.

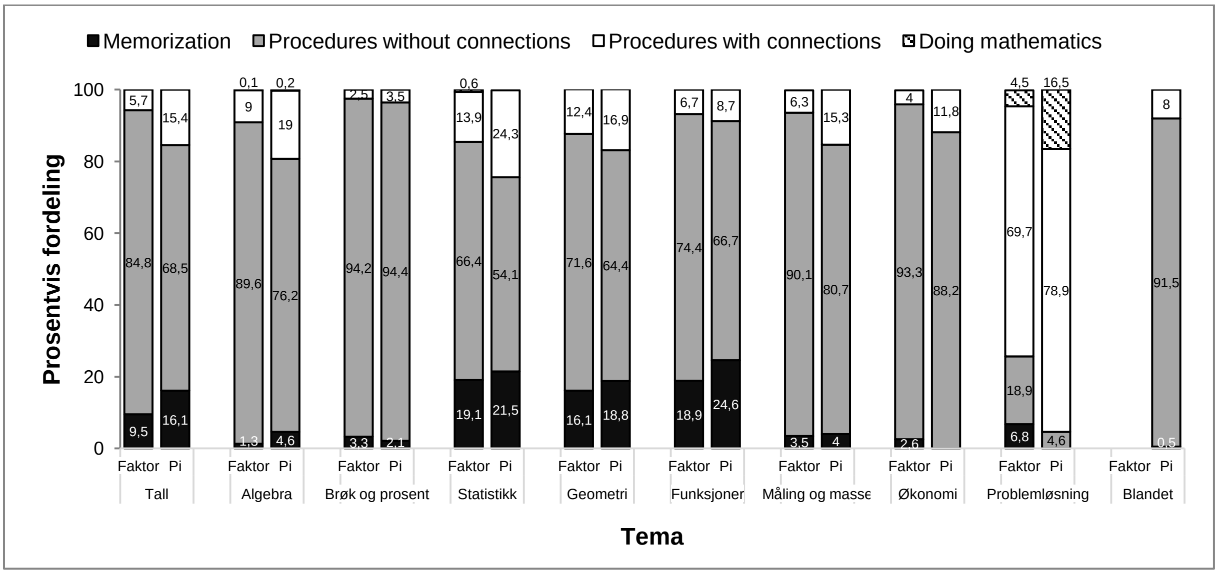


Figur 4.6: Prosentvis fordeling av de kognitive domenene innad tema.

4.3.2.2 De fire Levels of Cognitive Demands

I Figur 4.7, vises prosentandelene av matematikkoppgaver innenfor de kognitive nivåkravene (Stein et al., 2000) fordelt etter tema. Umiddelbart kan en se den samme tendensen som for de *kognitive domenene* i Figur 4.6. De lavere nivåkravene opptar desidert mest plass i søylene, og Pi har stadig mindre av disse enn det Faktor har. Det er ikke store forskjellene mellom datasettene om en ser på prosentfordelingen, men som tidligere nevnt vil det i de temaene med stor forskjell i mengde av oppgaver likevel gi utslag.

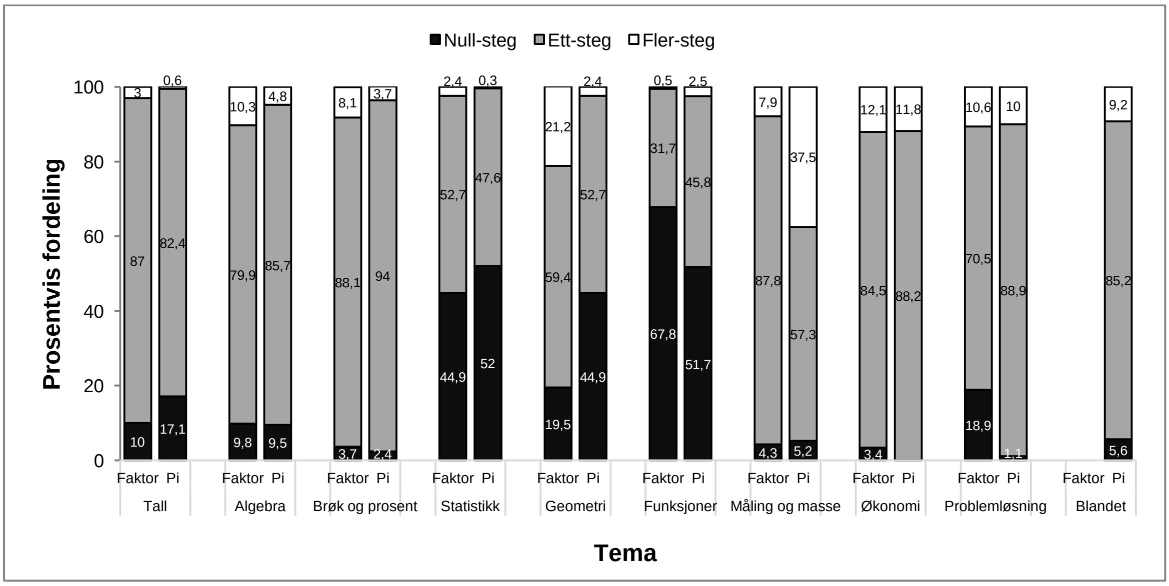
Innenfor «måling og massetetthet» er det, som nevnt tidligere, mange flere oppgaver i læreverket Faktor enn i Pi. Likevel er det flere matematikkoppgaver på det høyere nivåkravet *procedures with connections* i Pi-serien. Generelt har det finske læreverket flere oppgaver innenfor de høyere nivåkravene i alle tema. Innenfor det høyeste nivåkravet *doing mathematics* kommer hele 53 av 68 oppgaver fra læreverket Pi. 43 av disse ligger under temaet «problemløsning» mens kun seks oppgaver fra Faktor finnes her.



Figur 4.7: Prosentvis fordeling av levels of cognitive demands innad tema.

4.3.2.3 Aritmetisk kompleksitet

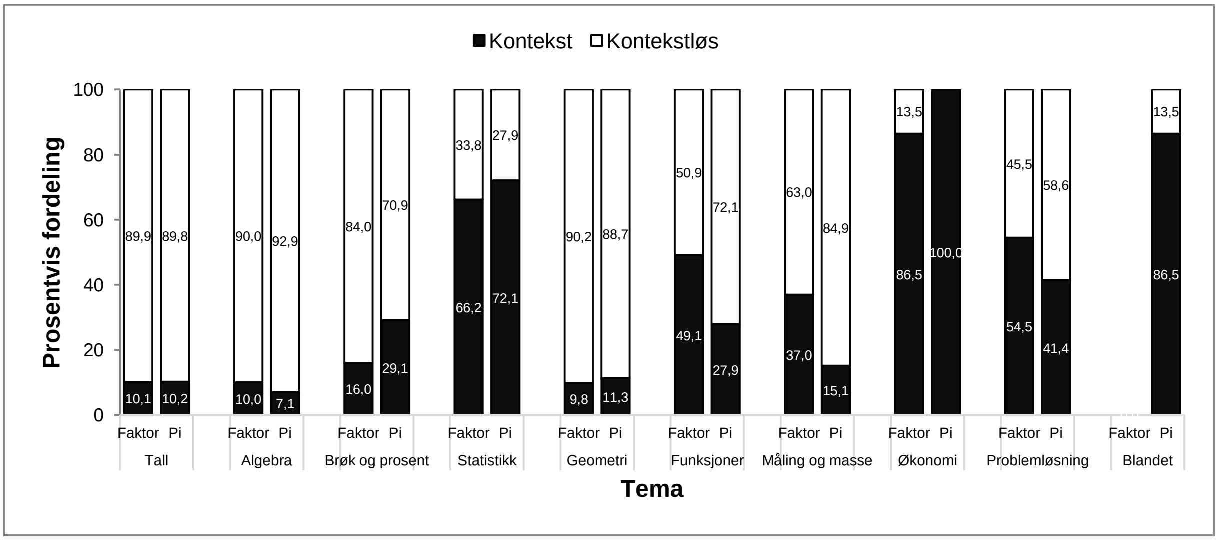
Den prosentvise fordelingen av oppgaver innen *aritmetisk kompleksitet* (Leung & Silver, 1997) i de ulike temaene, presentert i Figur 4.8, viser et flertall av matematikkoppgaver med *ett-steg*. På tross av dette er det noen tema som skiller seg ut ved å ha noe mer *null-steg* og *fler-steg*. Læreverket Pi har en stor prosentandel oppgaver uten steg, særlig innen temaene «statistikk og sannsynlighet», «funksjoner» og «geometri og beregninger». Dette gjelder både i forhold til temaene i seg selv og sammenlignet med antall oppgaver i de andre temaene. I Pi er det innenfor temaene «tall og algebra», «geometri og beregninger» samt «måling og massetetthet», en relativt stor andel oppgaver med *fler-steg*.



Figur 4.8: Prosentvis fordeling av aritmetisk kompleksitet innad tema.

4.3.2.4 Kontekst

Generelt for begge læreverkene, er at det er lite *kontekst* innenfor temaene «tall og tallforståelse», «tall og algebra» og «geometri og beregninger», vist i Figur 4.9. Motsatt er det mange matematikkoppgaver med kontekst innenfor «statistikk og sannsynlighet», «økonomi» og «problemløsning». Dette gjelder også de «blandede oppgavene» fra det finske læreverket. Det er stort sett ganske jevnt mellom landenes læreverk når det kommer til antall oppgaver med kontekst. Det er likevel en stor forskjell i antall oppgaver innenfor «økonomi», hvor alle oppgavene i Pi-serien har kontekster, men samtidig er dette 361 færre enn i Faktor-serien.



Figur 4.9: Prosentvis fordeling av kontekster innad tema.

4.3.3 Samlet overblikk

Etter å ha sett på disse fordelingene mellom tema og de fire rammeverkene, kan en se at det er noen av temaene som stadig skiller seg ut prosentvis. Dette er særlig «statistikk og sannsynlighet» og «problemløsning», der særlig den sistnevnte kanskje ikke er så overraskende da en kan forvente å finne mer kognitivt krevende oppgaver der. I forhold til de faktiske antall oppgaver, så er det «tall og algebra» og «problemløsning» som skiller seg ut fordi dette er de temaene med henholdsvis flest og færrest oppgaver til sammen mellom læreverkene.

4.4 Forhold av kontekst fordelt

Ved å lage forskjellige krysstabeller kunne vi undersøke ulike sammenhenger mellom rammeverkene vi har benyttet oss av. Vi har tidligere sett at andelen oppgaver med *kontekst* øker utover ungdomstrinnet i begge landene, men vi var interessert i å finne ut hvilken sammenheng *kontekst* kunne ha med kognitive nivå og ferdigheter fra de andre rammeverkene. Derfor vil vi her se på forholdet mellom antall oppgaver med og uten *kontekst* innad de enkelte kategoriene i de forskjellige rammeverkene.

4.4.1 Kontekst i de tre kognitive domenene

I Tabell 4.5, ser vi en oversikt over hvordan matematikkoppgaver i Faktor fordeler seg både i forhold til *kontekst* og de tre *kognitive domenene*. Ut ifra de utregnede forholdstallene fra kontekst til kontekstløs, ser man tydelig en utvikling fra *knowing* til *reasoning*. Særlig i *reasoning* er antall oppgaver med kontekst høyt sammenlignet med antall oppgaver uten kontekst.

Tabell 4.5

Faktor: Fordeling av kontekst i TIMSS

	Knowing	Applying	Reasoning
Kontekstløs	5254	2039	218
Kontekst	1639	850	137
Forhold	0,31	0,42	**0,63**

Samme tendens ser en ikke i Pi-serien, i Tabell 4.6, der forholdene mellom *kontekst* og *kontekstløse* oppgaver er forholdsvis jevnt i de tre ulike domenene. En liten økning ser en likevel fra *knowing* til *applying* og *reasoning*.

Tabell 4.6

Pi: Fordeling av kontekst i TIMSS

	Knowing	Applying	Reasoning
Kontekstløs	6582	3576	767
Kontekst	1361	1131	247
Forhold	0,21	0,32	0,32

4.4.2 Kontekst i de fire kognitive nivåkravene

I Faktor-serien ser man en svært tydelig endring i forholdet mellom antallet *kontekst* og *kontekstløse* oppgaver ifra de lavere til de høyere kognitive nivåkravene. I Tabell 4.7 ser vi at det er få oppgaver innen *doing mathematics*, og at det da til og med er én oppgave mer innenfor kontekst.

Tabell 4.7

Faktor: Fordeling av kontekst i levels of cognitive demands

	Memorization	Procedures without connections	Procedures with connections	Doing mathematics
Kontekstløs	670	6301	533	7
Kontekst	184	2065	369	8
Forhold	0,27	0,33	**0,69**	**1,14**

For disse rammeverkene ser man samme tendensen som ovenfor, også i Pi, bare ikke med det samme store spranget i forholdstallene fra de lavere til de høyere nivåkravene. Likevel ser vi i Tabell 4.8 at det er høyere forholdstall i de høyere nivåkravene, og høyest innenfor *doing mathematics*.

Tabell 4.8

Pi: Fordeling av kontekst i levels of cognitive demands

	Memorization	Procedures without connections	Procedures with connections	Doing mathematics
Kontekstløs	1189	8032	1668	36
Kontekst	306	1778	638	17
Forhold	0,26	0,22	**0,38**	**0,47**

4.4.3 Kontekst i aritmetisk kompleksitet

Vi undersøkte om det var en sammenheng mellom kompleksiteten i matematikkoppgavene og innhold av kontekst. I Tabell 4.9 ser en hvordan disse fordeler seg i forhold til hverandre i Faktor-serien. Vi ser at forholdstallet mellom *kontekst* og *kontekstløs* er størst innenfor *null-steg*, mens forholdstallene for *ett-steg* og *fler-steg* ligger nærmere hverandre.

Tabell 4.9

Faktor: Fordeling av kontekst i aritmetisk kompleksitet

	Null-steg	Ett-steg	Fler-steg
Kontekstløs	1077	5784	650
Kontekst	612	1777	237
Forhold	**0,57**	0,31	0,36

I Pi derimot, i Tabell 4.10, er forholdstallet for kontekst høyest for oppgaver innen *fler-steg*. Dette står i skarp kontrast til fordelingen i Faktor-serien. Både i Faktor og Pi ser vi at andelen oppgaver med kontekst er lavest for *ett-steg*, noe som er særlig tydelig i læreverket Pi.

Tabell 4.10

Pi: Fordeling av kontekst i aritmetisk kompleksitet

	Null-steg	Ett-steg	Fler-steg
Kontekstløs	1910	8514	501
Kontekst	678	1764	297
Forhold	0,35	0,21	**0,59**

4.4.4 Sammenhenger i fordeling av kontekst

Både i de tre *kognitive domenene* og *levels of cognitive demands* ser vi at de største andelene av *kontekst* i forhold til *kontekstløs* er innen *reasoning*, *procedures with connections* og *doing mathematics*. Vi ser altså at forholdet *kontekst* er høyest i de oppgavene der elevene må resonnere, se sammenhenger og forstå matematikken. Dette forholdet kan vi se er splittet innen de ulike stegene i de to læreverkene. I Pi var forholdstallet høyest innen *fler-steg*, der oppgavene skal være mer komplekse og sammensatte, fordi en der må løse delmål. Dette gjaldt ikke for Faktor der forholdstallet, altså hvor mange kontekstoppgaver det er i forhold til *kontekstløse*, er høyest for det minst komplekse steget.

4.5 Sammenhenger mellom rammeverkene

For å sammenligne de ulike rammeverkene, satte vi opp krysstabeller for å se fordeling av mønstre mellom dem. Slik kunne vi se at de tre kognitive domenene til TIMSS (Grønmo et al., 2013) fordelte seg i et gitt mønster i tabellene sammen med levels of cognitive demands (Stein et al., 2000). I Tabell 4.11 nedenfor presenteres en krysning mellom disse to rammeverkene i de to læreverkene sammenlagt, da det var svært like tendenser dem imellom. Det vi ser er at alle oppgaver innenfor *knowing* havner enten inn i *memorization* eller *procedures without connections*. Matematikkoppgaver innenfor *applying* vil alltid også ligge innen *procedures without connections* eller *procedures with connections*. Samme mønster ser vi innenfor *reasoning* der oppgavene bestandig er i kategoriene *procedures with connections* eller *doing mathematics*. I disse tabellene vil det dermed alltid være noen tomme ruter, ettersom *knowing* for eksempel aldri vil komme på de to kategoriene under høye nivåkrav.

Tabell 4.11

Prosentvis krysstabell for levels of cognitive demands og kognitive domener i læreverkene Faktor og Pi

	Knowing	Applying	Reasoning
Memorization	**9,9**		
Procedures without connections	52,5	23,9	
Procedures with connections		8,0	5,5
Doing mathematics			0,3

En tilsvarende fordeling av matematikkoppgaver finner vi også i krysstabellen mellom *levels of cognitive demands* og *aritmetisk kompleksitet*. Tabell 4.12 under er en krysning mellom disse to i det norske og finske læreverket sammen. Den viser at *memorization* ikke forekommer i oppgaver med *ett-steg* og *fler-steg* til løsning. Sammen med tabellene ovenfor, blir det tydelig at matematikkoppgaver som havner inn under *memorization* nødvendigvis også må ligge innenfor *knowing* og *null-steg*. Dette gjelder ikke motsatt vei; oppgaver kan ligge innenfor *knowing* eller *null-steg* uten å tilhøre kategorien *memorization*. Av tabellen kan en også se at *null-steg* kan variere i vanskegrad, og slik også være resonneringsoppgaver.

Tabell 4.12

Prosentvis krysstabell for levels of cognitive demands og aritmetisk kompleksitet i Faktor- og Pi-serien

	Null-steg	Ett-steg	Fler-steg
Memorization	**9,9**		
Procedures without connections	6,2	64,9	5,3
Procedures with connections	1,9	9,8	1,8
Doing mathematics	0,0	0,2	0,1

Kort oppsummert kan en si at det definitivt er en sammenheng i vårt konseptuelle rammeverk. Dette er særlig uttalt mellom *kognitive domener* og *levels of cognitive demands*, alle kategoriene er med i sammenhengen. I den sistnevnte er det bare kategorien *memorization* som er linket opp mot *aritmetisk kompleksitet*.

4.6 Kvalitativt dypdykk

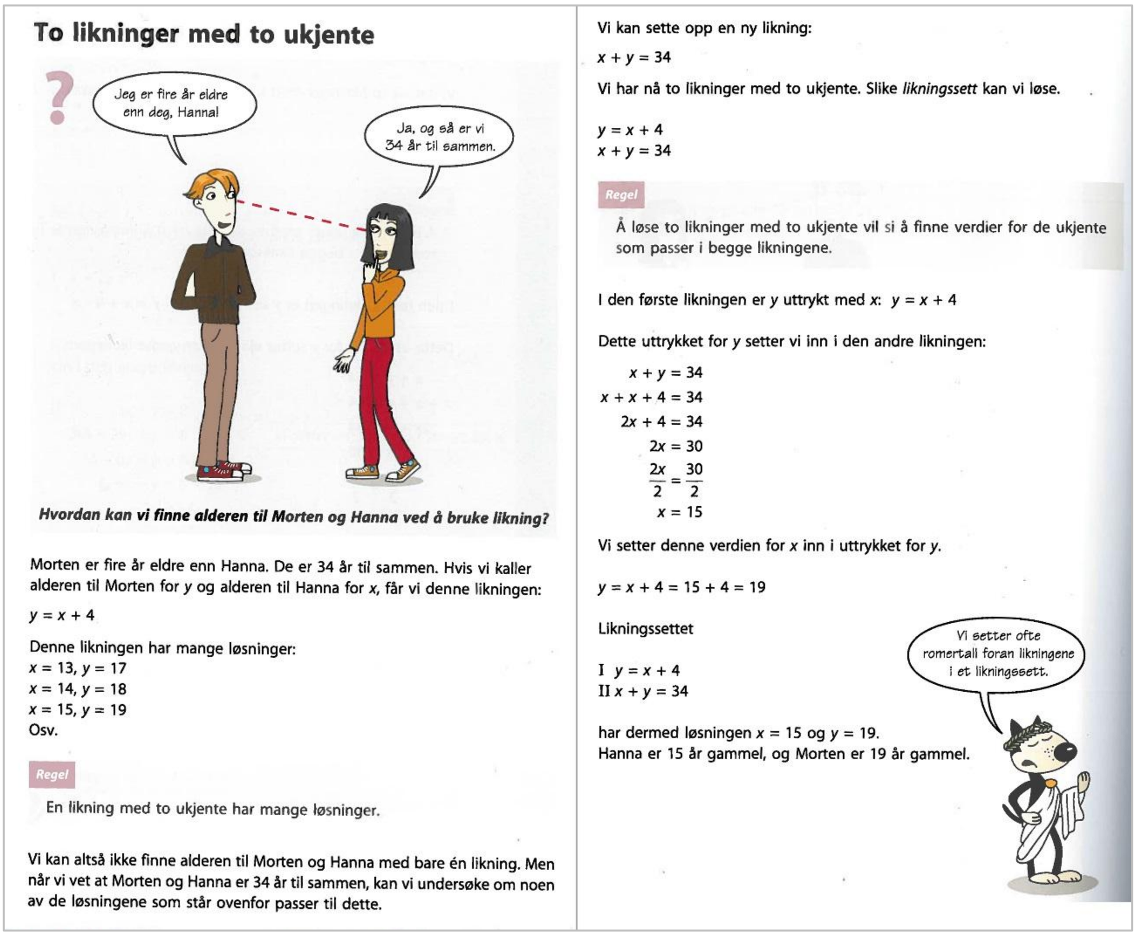
Vi vil her presentere funnene for vårt kvalitative dypdykk. Vi har tatt for oss delkapittelet *To likninger med to ukjente* samt underkapitlet *Grafisk løsing av likningssett* fra kapittelet *Likninger og ulikheter* i Faktor 3 Grunnbok og -Oppgavebok. Tilsvarende har vi valgt delkapitlene *Två ekvationer och två obekanta* og *Ekvationssystem – grafisk lösning* fra Pi 9 sitt kapittel *Grafer och ekvationer*.

4.6.1 Faktor

Delkapittelet *To likninger med to ukjente* fra Faktor nedenfor, inneholder et eget underkapittel kalt *Grafisk løsing av likningssett*. Vi begynner med å beskrive innhold og fremgangsmåter brukt i delkapittelet, for så å gå over på underkapittelet.

4.6.1.1 To likninger med to ukjente

Delkapittelet, vist i Figur 4.10 på neste side, starter med å presentere et matematisk problem, med tilhørende illustrasjon og spørsmål som utgangspunkt. Dette følges opp med regel og eksempel på løsning av problemet. På neste side fortsetter løsningen på problemet, der en ser hvorfor man trenger mer enn en likning for å finne nøyaktig svar, noe som fører dem inn på termen «likningssett» og hvordan slike kan løses. Den metoden lærebokforfatterne presenterer er *innsettingsmetoden*, selv om dette ikke blir presisert.



To likninger med to ukjente

Jeg er fire år eldre enn deg, Hanna!

Ja, og så er vi 34 år til sammen.

Hvordan kan vi finne alderen til Morten og Hanna ved å bruke likning?

Morten er fire år eldre enn Hanna. De er 34 år til sammen. Hvis vi kaller alderen til Morten for y og alderen til Hanna for x, får vi denne likningen:

$y = x + 4$

Denne likningen har mange løsninger:
$x = 13, y = 17$
$x = 14, y = 18$
$x = 15, y = 19$
Osv.

Regel

En likning med to ukjente har mange løsninger.

Vi kan altså ikke finne alderen til Morten og Hanna med bare én likning. Men når vi vet at Morten og Hanna er 34 år til sammen, kan vi undersøke om noen av de løsningene som står ovenfor passer til dette.

Vi kan sette opp en ny likning:

$x + y = 34$

Vi har nå to likninger med to ukjente. Slike *likningssett* kan vi løse.

$y = x + 4$
$x + y = 34$

Regel

Å løse to likninger med to ukjente vil si å finne verdier for de ukjente som passer i begge likningene.

I den første likningen er y uttrykt med x: $y = x + 4$

Dette uttrykket for y setter vi inn i den andre likningen:

$$\begin{aligned} x + y &= 34 \\ x + x + 4 &= 34 \\ 2x + 4 &= 34 \\ 2x &= 30 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{30}{2} \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Vi setter denne verdien for x inn i uttrykket for y.

$y = x + 4 = 15 + 4 = 19$

Likningssettet

I $y = x + 4$
II $x + y = 34$

har dermed løsningen $x = 15$ og $y = 19$.
Hanna er 15 år gammel, og Morten er 19 år gammel.

Vi setter ofte romertall foran likningene i et likningssett.

Figur 4.10: Introduksjon til *To likninger med to ukjente*. Hentet fra Hjardar & Pedersen (2007a, s. 157-158).

Etter dette følger et mer teknisk og presist eksempel, som går på det samme som introduksjonsproblemet, men her uten kontekst og med merking av romertall gjennom hele eksempelet. I tillegg viser de hvordan man setter prøve på begge likningene.

Det er fem matematikkoppgaver i denne delen, der de følger en viss utvikling fra å be om generell løsning, til å følge introduksjonsproblemet sin løsningsmetode, for så å følge det siste eksempelet. Til slutt er det et par tekstoppgaver der den første er lik introduksjonseksempelet, bare med nye tall, mens den siste er stjernemerket, noe som betyr at den skal være vanskeligere. Samme tendens ser vi også for oppgavene i Oppgaveboka (Hjardar & Pedersen, 2008) innen *Kategori 2*; fra generell løsning, via innsetingsmetoden, til modellering og løsing av tekstoppgaver. I *Kategori 3* begynner de rett på innsettingsmetoden, der disse oppgavene krever flere mellomregninger før metoden kan tas i bruk. *Kategori 1* har ikke matematikkoppgaver innenfor dette området.

4.6.1.2 Grafisk løsing av likningssett

Dette er et underkapittel av delkapittelet *To likninger med to ukjente*. I likhet med introduksjonen til delkapittelet, starter også dette med et problem. Her introduseres løsning av to ukjente ved bruk av tabeller og grafer, med tilhørende kontekst og illustrasjon, der det stilles opp en likning på bakgrunn av tekstinformasjonen. Videre finner de uttrykket for y, lager tabeller, tegner linjer inn i koordinatsystemet, og viser løsningen i grafen. Også her har de rett etterpå et eksempel som er mer teknisk og som ikke er underlagt en kontekst.

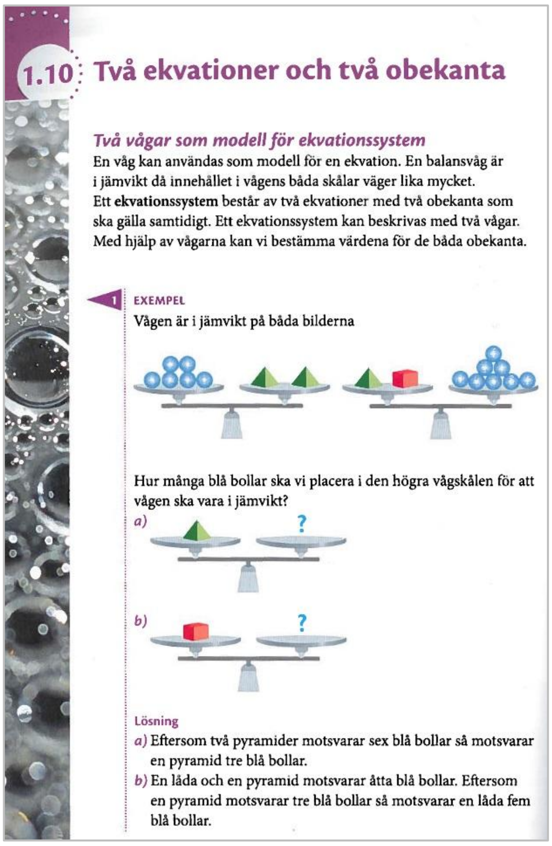
Videre følger fem oppgaver, der de begynner med grafisk løsing, går videre til å løse både grafisk og ved regning – og der det først må uttrykkes for y, for så å be om grafisk løsing til tekstoppgaver. I den siste oppgaven bes det igjen om løsing både grafisk og ved regning. Samme mønster finnes i *Kategori 2* og *Kategori 3*.

4.6.2 Pi

Det som tilsvarer det vi så på i Faktor 3, er i Pi 9 de to delkapitlene *Två ekvationer och två obekanta* og *Ekvationssystem – grafisk lösning*. Begge disse er delt inn i flere underoverskrifter.

4.6.2.1 Två ekvationer och två obekanta

Den første underoverskriften i dette delkapittelet er *Två vågar som modell för ekvationssytem*, og er også den de introduserer med, se Figur 4.11. Her begynner de med å forklare likninger på bakgrunn av skålvekter som modell. I eksempelet under har de par av vekter – med kuber, pyramider og kuler, som de refererer til som likningssystemer, og illustreres ved bruk av skålvekter i likevekt. I løsningen forklares sammenhengene mellom skålvektene ved bruk av logisk resonnement som man må følge for å forstå oppgaven.



1.10 Två ekvationer och två obekanta

Två vågar som modell för ekvationssystem

En våg kan användas som modell för en ekvation. En balansvåg är i jämvikt då innehållet i vågens båda skålar väger lika mycket. Ett **ekvationssystem** består av två ekvationer med två obekanta som ska gälla samtidigt. Ett ekvationssystem kan beskrivas med två vågar. Med hjälp av vågarna kan vi bestämma värdena för de båda obekanta.

1 EXEMPEL

Vågen är i jämvikt på båda bilderna

Hur många blå bollar ska vi placera i den högra vågskålen för att vågen ska vara i jämvikt?

a) ?

b) ?

Lösning

a) Eftersom två pyramider motsvarar sex blå bollar så motsvarar en pyramid tre blå bollar.

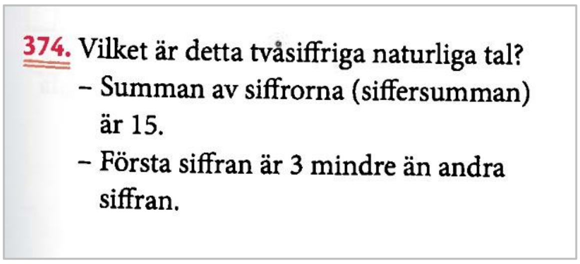
b) En låda och en pyramid motsvarar åtta blå bollar. Eftersom en pyramid motsvarar tre blå bollar så motsvarar en låda fem blå bollar.

Figur 4.11: Introduksjon til *Två ekvationer och två obekanta*. Hentet fra Heinonen et al. (2012, s. 78).

Den andre underoverskriften er *Lös ekvationssystem genom resonemang*. Her forklarer de overgangen fra én til to likninger, og at likninger med to ukjente har ett tallpar (x, y) som løsning. Denne delen har tre eksempler, der de to første også inneholder skålvekter, men med x, y og kilo i likevekt. Det siste av disse to, Eksempel 3, er noe mer avansert enn de foregående fordi man må se på hele systemet under ett. Det holder ikke å se på én og én skålvekt for å finne løsningen – begge må vurderes samtidig. Det siste eksempelet i denne delen, bruker ikke skålvekter, men inneholder derimot sirkler og kvadrater på ene siden av likhetstegnet, og et tall på den andre. Disse kommer i sett av to, som man skal se i sammenheng for å finne ut hvilke tall som skal stå istedenfor sirklene og kvadratene. Løsningene til disse tre eksemplene baserer seg på logisk resonnement.

Den siste underoverskriften, *Talpar som lösning till ekvationer*, begynner med å forklare at et tallpar er sant dersom begge likningene i likningssettet stemmer hvis disse tallene settes inn. Deretter viser de to eksempler ved bruk av skålvekter, ett der tallparet ikke stemmer og ett der det gjør det. Siden følger tre eksempler der det samme vises, men ved bruk lite tekst og bilder, og mye matematisk notasjon – som blant annet krøllparentes foran likningssettet. De bruker tankebobler underveis for å forklare hva som skjer mellom hvert steg i løsningen.

Etter disse innledende eksemplene, kommer det 40 øvingsoppgaver. Alle unntatt fem av disse, baserer seg på tidligere gitte eksempler. Dette betyr ikke nødvendigvis at du direkte kan bruke eksemplene, ettersom man i de fleste oppgavene må resonnere seg fram til svaret. De fem uten eksempler, hadde alle to streker under spørsmålet, noe som tilsvarer høyest vanskegrad i Pi-serien. Disse oppgavene hadde lignende oppsett som Figur 4.12, nedenfor. I den siste av disse oppgavene skulle man derimot finne likningssettet til en gitt løsning.


374. Vilket är detta tvåsiffriga naturliga tal?
- Summan av siffrorna (siffersumman) är 15.
- Första siffran är 3 mindre än andra siffran.

Figur 4.12: Matematikkoppgave med høy vanskegrad. Hentet fra Heinonen et al. (2012, s. 83).

4.6.2.2 Ekvationssystem – grafisk lösning

Dette delkapittelet starter også med en forklaring; denne gangen av hva skjæringspunktet er, og forståelse av at skjæringspunktet er løsningen til likningssettet. Etter innledningen kommer det fire eksempler. Både Eksempel 1 og 2 viser hvordan man løser et likningssett grafisk, men der den siste er mer kortfattet. Det tredje eksempelet er også likt de to foregående, bortsett fra at det her må løses med hensyn på y. I Eksempel 4 modelleres det et likningssett ut ifra et spørsmål, der de videre løser med hensyn på y, for så å stille funksjonene opp i et koordinatsystem der skjæringspunktet leses av. Under løsningen av likningene viser de den matematiske notasjonen for at hvert ledd i en av mellomregningene skal divideres med (-1).

Videre kommer vi til underoverskriften *Närmevärde för lösning*en. Her vises det hvordan man leser av omtrentlige løsninger i grafer. Det er to eksempler som viser dette, og der de bruker tegnet tilnærmet lik (≈) i notasjonen. Også her kommer det første eksempelet med likninger ferdig sortert med hensyn på y, mens det siste ikke gjør det. Siste underoverskrift er *Parallella linjer*, og omhandler linjer som enten aldri krysser hverandre eller som ligger på samme punkter. Dette vil enten medføre ingen eller uendelig mange løsninger på likningssettene. Videre viser de eksempler på dette.

I dette delkapittelet er det også 40 oppgaver. Alle matematikkoppgavene unntatt oppgave 432 følger tidligere gitte eksempler, enten i dette delkapittelet eller tidligere i læreboka. I oppgave 432 derimot må en bruke det en kan og har av erfaring for å resonnere seg fram til svaret.

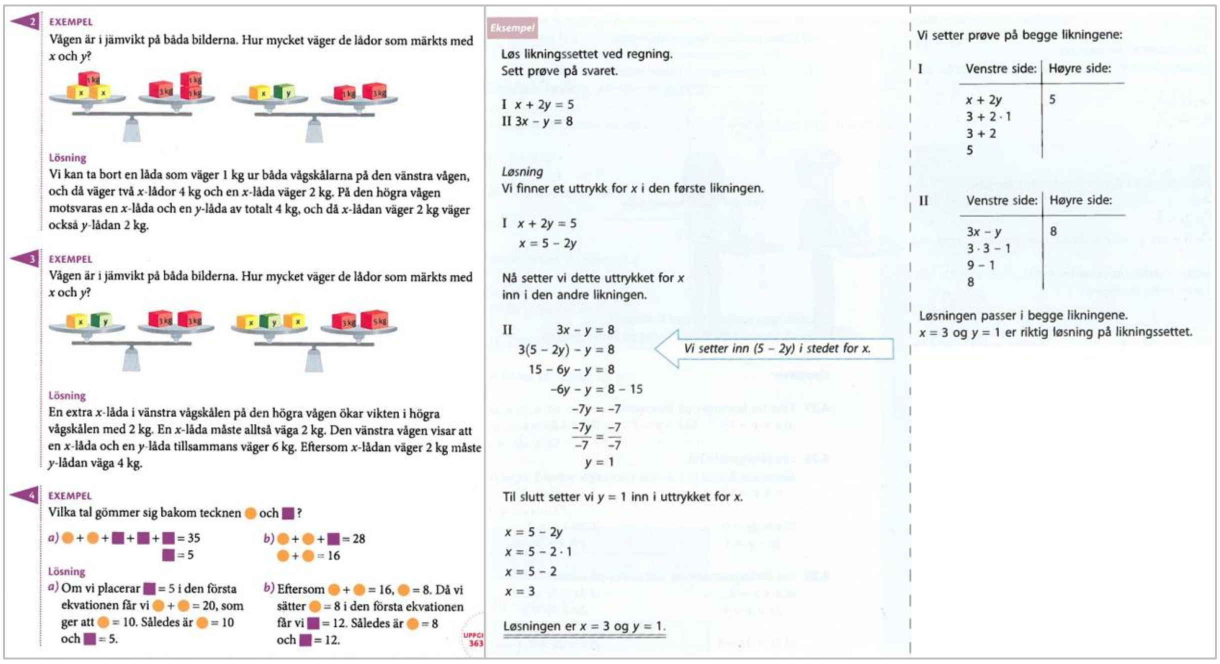
4.6.3 Sammenligning

Vi vil her bruke det vi har sett for å kunne si noe om struktur, innhold og spørsmålsstilling i de to lærebøkene. I tillegg vil vi vise frem variasjon innad kategorier i rammeverket.

4.6.3.1 Struktur

Introduksjonen til Faktor 3 og Pi 9 har vi tidligere vist i Figur 4.10 og Figur 4.11. Det vi ser er at de to læreverkene har ulike tilnærminger til matematikken, der den ene går ut ifra et problem mens den andre begynner med forklaringen. Selv om Faktor 3 starter med et praktisk problem, lagt til en kontekst, så går de svært fort over til tallene i likningssettet. Pi 9 holder seg til skriftlige og illustrative forklaringer, som altså ikke per vår definisjon er en kontekst.

Eksemplene i de to bøkene er også forskjellig lagt opp. Faktor 3 har bare ett eksempel i tillegg til introduksjonseksempelet i del- og underkapittelet vi har sett på. Pi 9 har henholdsvis ni og sju eksempler i hvert av delkapitlene. Faktor har altså bare to eksempler totalt, mens Pi 9 har 16 i disse delkapitlene. I sistnevnte kommer alle eksempler og forklaringer før oppgavene, mens de i Faktor 3 kommer vekselvis. Figur 4.13 består av fire eksempler fra Pi 9 der de bruker vekter og tomme ruter som illustrasjon på likningssett, og ett fra Faktor 3, som viser hvordan man løser likninger med to ukjente ved hjelp av innsettingsmetoden.



2 EXEMPEL

Vågen är i jämvikt på båda bilderna. Hur mycket väger de lådor som märkts med x och y?

Lösning

Vi kan ta bort en låda som väger 1 kg ur båda vågskålarna på den vänstra vågen, och då väger två x-lådor 4 kg och en x-låda väger 2 kg. På den högra vågen motsvaras en x-låda och en y-låda av totalt 4 kg, och då x-lådan väger 2 kg väger också y-lådan 2 kg.

3 EXEMPEL

Vågen är i jämvikt på båda bilderna. Hur mycket väger de lådor som märkts med x och y?

Lösning

En extra x-låda i vänstra vågskålen på den högra vågen ökar vikten i högra vågskålen med 2 kg. En x-låda måste alltså väga 2 kg. Den vänstra vågen visar att en x-låda och en y-låda tillsammans väger 6 kg. Eftersom x-lådan väger 2 kg måste y-lådan väga 4 kg.

4 EXEMPEL

Vilka tal gömmer sig bakom tecknen ● och ■?

a) ● + ● + ■ + ■ + ■ = 35
■ = 5

b) ● + ● + ■ = 28
● + ● = 16

Lösning

a) Om vi placerar ■ = 5 i den första ekvationen får vi ● + ● = 20, som ger att ● = 10. Således är ● = 10 och ■ = 5.

b) Eftersom ● + ● = 16, ● = 8. Då vi sätter ● = 8 i den första ekvationen får vi ■ = 12. Således är ● = 8 och ■ = 12.

UPPG! 363

Eksempel

Løs likningssettet ved regning.
Sett prøve på svaret.

I $x + 2y = 5$
II $3x - y = 8$

Løsning
Vi finner et uttrykk for x i den første likningen.

I $x + 2y = 5$
$x = 5 - 2y$

Nå setter vi dette uttrykket for x inn i den andre likningen.

II
$$
\begin{aligned}
3x - y &= 8 \\
3(5 - 2y) - y &= 8 \\
15 - 6y - y &= 8 \\
-6y - y &= 8 - 15 \\
-7y &= -7 \\
\frac{-7y}{-7} &= \frac{-7}{-7} \\
y &= 1
\end{aligned}
$$

Vi setter inn (5 – 2y) i stedet for x.

Til slutt setter vi $y = 1$ inn i uttrykket for x.

$x = 5 - 2y$
$x = 5 - 2 \cdot 1$
$x = 5 - 2$
$x = 3$

Løsningen er $x = 3$ og $y = 1$.

Vi setter prøve på begge likningene:

I

Venstre side:	Høyre side:
$x + 2y$	5
$3 + 2 \cdot 1$	
$3 + 2$	
5	

II

Venstre side:	Høyre side:
$3x - y$	8
$3 \cdot 3 - 1$	
$9 - 1$	
8	

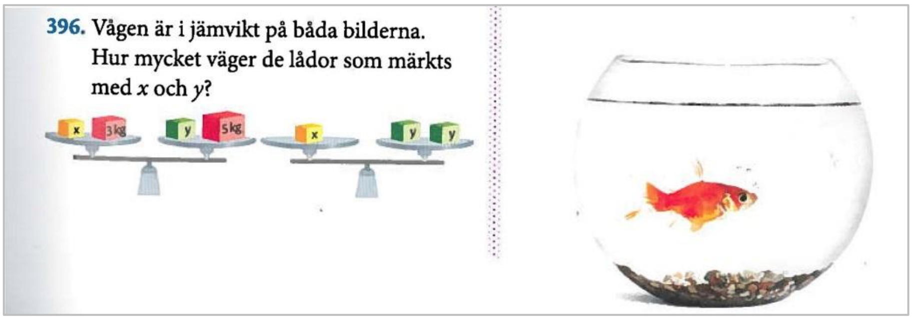
Løsningen passer i begge likningene.
$x = 3$ og $y = 1$ er riktig løsning på likningssettet.

Figur 4.13: Eksempelsider fra Pi 9 (Heinonen et al., 2012, s. 79) og Faktor 3 (Hjardar & Pedersen, 2007a, s. 159-160).

Oppgavene i de to læreverkene, baserer seg i begge tilfellene i stor grad på de tidligere gitte eksemplene. I likhet med eksemplene er antall oppgaver i disse delkapitlene større i Pi 9 enn i Faktor 3. Pi 9 har til sammen 80 nummererte oppgaver i sine delkapitler, mens Faktor 3 har 27. I Pi kommer alle oppgavene sist i kapittelet, altså etter alt av eksempler, og det er slik mer opp til eleven å avgjøre hvilken metode som skal brukes. I Faktor 3 kommer oppgavene etter hvert eksempel de hører til, altså vekselvis. I begge bøkene følger oppgavene en viss progresjon i vanskegrad, altså sammensatthet og antatt utfordrende for flere og flere elever. Særlig gjelder dette for Oppgaveboka til Faktor 3, som er delt opp etter vanskegrad i de ulike kategoriene.

4.6.3.2 Innhold

Når det kommer til *illustrasjoner* og *kontekst*, så har det første delkapittelet i Pi svært mange eksempler illustrert ved skålvekter. Disse er nødvendige for å se hva oppgaven går ut på, og løse den, men vi anser dem ikke for å tilføre hverken eksemplene eller oppgavene noen kontekst. Vi ser på vekter som intramatematiske, da de bare er måleinstrumenter som oppgir vektenheter – og klossene er bare geometriske figurer. I tillegg til de nødvendige illustrasjonene, har Pi 9 også mange unødvendige bilder som kun fyller opp tomrom mellom oppgavene og ikke har noen sammenheng med hverken oppgaver eller eksempler, som for eksempel gullfiskbollen i Figur 4.14.



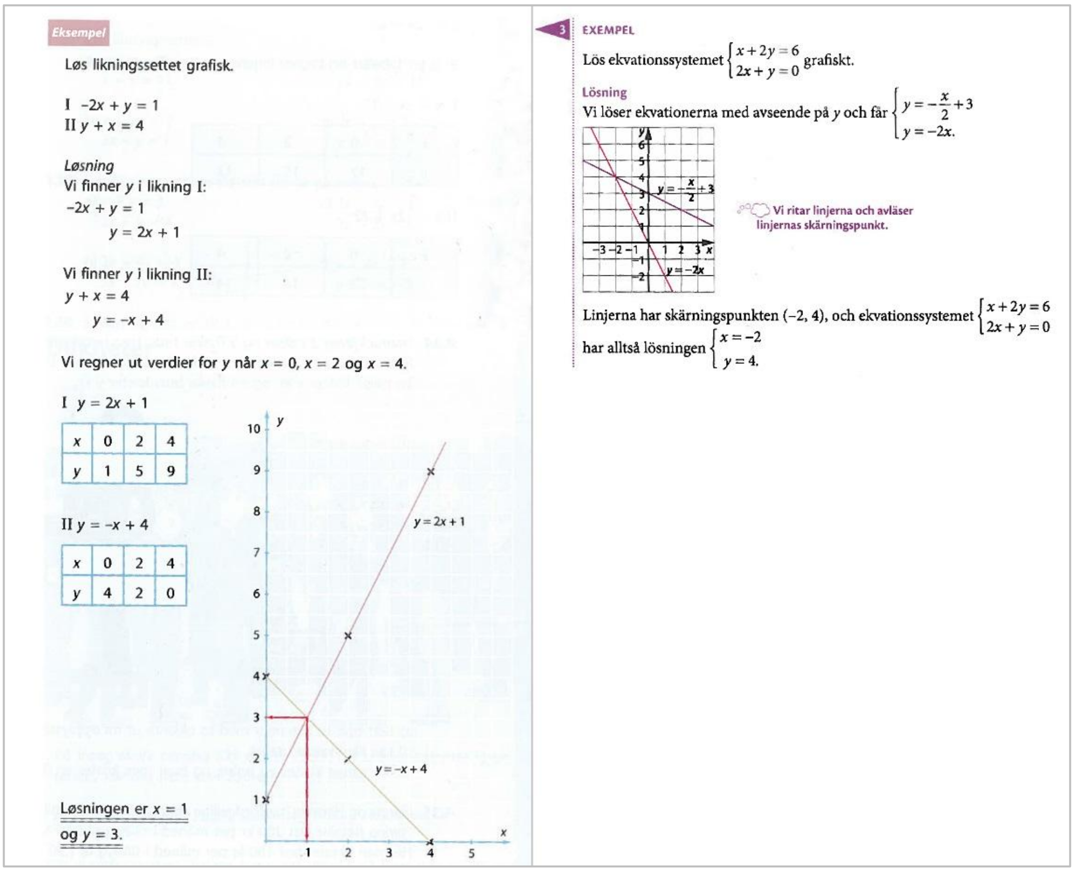
Figur 4.14: Eksempler på illustrasjoner i Pi 9 (Heinonen et al., 2012, s. 85).

I Faktor 3 har de også mange illustrasjoner som ikke er relevante for løsning av oppgaven, men derimot illustrerer konteksten i tekstoppgavene, vist i Figur 4.15. *Kontekst* er for øvrig noe de har mye av i Faktor, men ingenting av i Pi i disse utvalgte delkapitlene. I tillegg er illustrasjonen til dette eksempelet ufullstendig, ettersom «Hanna» ikke er med i bildet.

Figur 4.15: Eksempel på illustrasjon og kontekst i Faktor 3 (Hjardar & Pedersen, 2007a, s. 164).

Eksemplene og forklaringene er svært ulike i de to landenes lærebøker. Der Pi 9 er mer nøye på å forklare i detaljer, og både sier hva noe er og ikke er – sann og falsk, og har et større mangfold i det de presenterer, som unøyaktige løsninger og parallelle linjer, kan Faktor virke som de går mer overfladisk til verks. De unnlater for eksempel å nevne at de bruker innsettingsmetoden eller at skjæringspunktet mellom to grafer er løsningen på likningssettet. Det er generelt lite av det Faktor 3 gjør i eksempelet i Figur 4.13 som forklares eller begrunnes. De forklarer ikke hvorfor man skal finne et uttrykk for x, hvorfor man setter likningen inn i stedet for x, eller hvorfor de setter y = 1 inn i uttrykket for x. De forklarer heller ikke hvorfor de setter prøve på begge likningene. Alt dette til sammen skiller seg veldig fra de fremgangsmåtene vi møter i Pi 9, der de i mye større grad forklarer og viser steg i ulike resonnement. For oss kan det se ut til at Faktor generelt er mer tilbakeholden i å vise sin måte å utføre og forklare ting på.

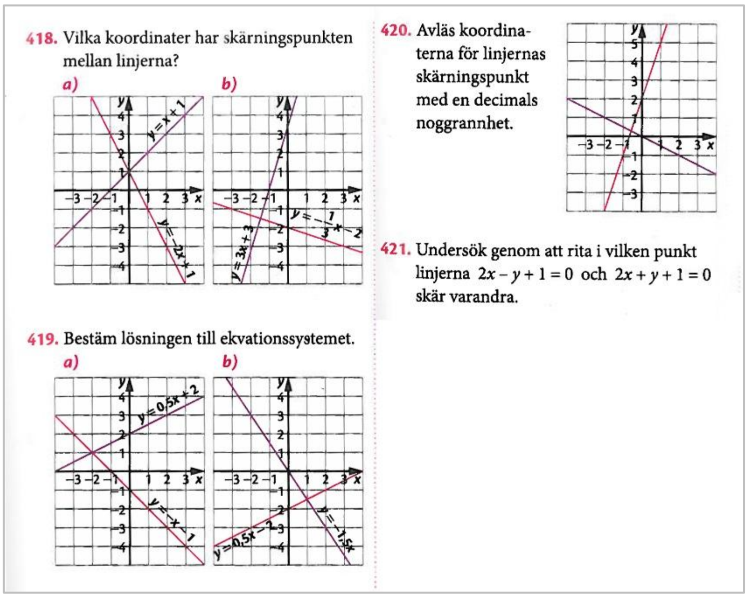
Matematisk notasjon er også noe som er ulikt i de to læreverkene. Pi 9 inkluderer flere skrivemåter enn Faktor 3, noe en ser eksempler på i Figur 4.16 nedenfor. Vi så tidligere også at Pi 9 bygger på, og skaper en skarpere sammenheng, til funksjoner i bruk av notasjoner allerede før de kommer til de grafiske løsningene. Dette eksempelvis ved bruk av tallpar (x, y) som svar på likningssett. I Figur 4.16 kan en se at de i Faktor 3 bruker romertall for å skille likningene i likningssettet, og at de bruker tabell for å komme fram til den grafiske løsningen. Dette gjør de ikke i Pi-kapittelet. Pi 9 oppgir skjæringspunktet som et koordinat i tillegg til løsningen bak en krøllparentes, noe de ikke gjør i Faktor, der de oppgir løsningen for x og y med to streker under svaret.



Figur 4.16: Eksempler på grafisk løsning fra Faktor 3 og Pi 9. Gjengitt etter Hjardar & Pedersen (2007a, s. 162-163) og Heinonen et al. (2012, s. 87).

4.6.3.3 Spørsmålsstilling

Vi merket oss at det var stor forskjell i spørsmålsstillingen og beskrivelsen av utførelse av oppgavene i de to bøkene til Faktor 3 og læreboka til Pi 9. I Faktor 3 brukte de verbene «finn», «løs», «sett opp» og spørsmål om antall, altså «hvor -». Særlig verbet «løs» var mye brukt. Selv i oppgavene med kontekst sto det «Løs likningen grafisk» (se Figur 4.15). I Pi 9 brukte de blant annet «hur många/mycket», «hvilket tal/talpar», «undersök», «fyll inn», «tegn», «avläs», «løs», «visa», «bestäm», «avgör», «när», «beräkna», «bilda». De bruker mange flere verb i Pi, og forskjellige uttrykk, for å be om samme ting. Dette vises i Figur 4.17 nedenfor.



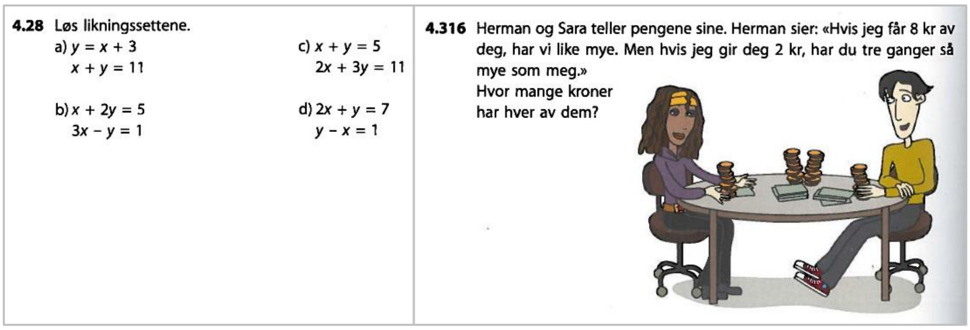
Figur 4.17: Oppgaver med eksempler på verbbruk i Pi 9. Hentet fra Heinonen et al. (2012, s. 91).

I figuren ovenfor vises det fire ulike måter å spørre om det samme på. Det at det er såpass mange flere oppgaver i delkapitlene fra Pi 9, kan være med og bidra til den store variasjonen i antall oppgaver, og bør derfor tas hensyn til.

4.6.3.4 Variasjon innad kategorier i rammeverket

Underveis i kategoriseringen så vi at det var et stort spenn innad ulike kategorier i det konseptuelle rammeverket vårt. På grunn av dette var det mye informasjon som ikke ble like synliggjort i de kategoriseringene vi gjorde. Vi vil eksemplifisere dette ved å vise noe av det spennet som fantes innad *applying* og *procedures without connections* i de utvalgte delkapitlene. Tydeligere eksempler vil forekomme om man ser på begge læreverkene i sin helhet, men vi vil her holde oss til disse delkapitlene siden det er de vi har valgt å trekke frem.

I Figur 4.18 ser vi to matematikkoppgaver som skal vise *applying*. I den til venstre, er det likningssett som skal løses. Denne er plassert her fordi det er en kjent og rutinepreget oppgave der man bruker det en har lært. På høyre side er det en tekstoppgave. Denne er satt under *applying* fordi elevene må modellere et likningssett ut fra en kontekstuell situasjon.



4.28 Løs likningssettene.

a) $y = x + 3$, $x + y = 11$

b) $x + 2y = 5$, $3x - y = 1$

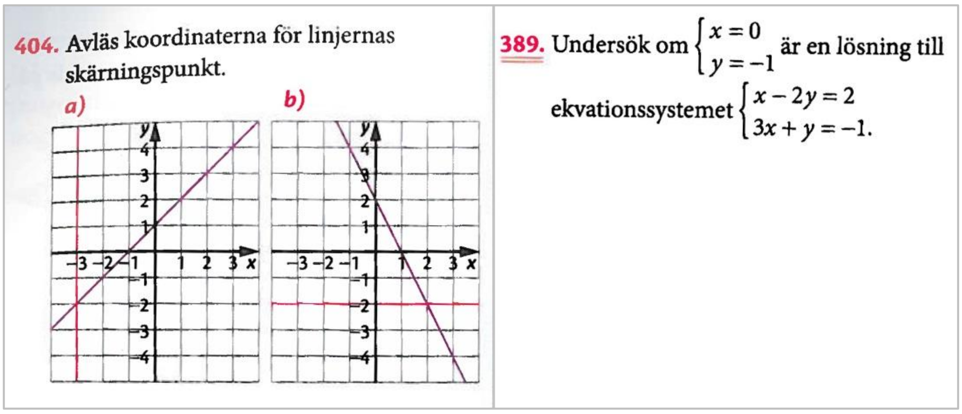
c) $x + y = 5$, $2x + 3y = 11$

d) $2x + y = 7$, $y - x = 1$

4.316 Herman og Sara teller pengene sine. Herman sier: «Hvis jeg får 8 kr av deg, har vi like mye. Men hvis jeg gir deg 2 kr, har du tre ganger så mye som meg.»
Hvor mange kroner har hver av dem?

Figur 4.18: Variasjon innen *applying*. Oppgaver fra Heinonen et al. (2007a, s. 160) og Hjardar & Pedersen (2008, s. 118).

Figur 4.19 tar for seg *procedures without connections*, og viser på venstre side en matematikkoppgave der en skal lese av skjæringspunktet for grafene. Denne har vi kategorisert hit fordi vi tenker at det å lese av et punkt ikke bare er noe man kan huske, men derimot krever en viss prosedyre for gjennomføring – man må ha en forståelse for sammenhengen i koordinatsystemet. På høyre side ser vi en oppgave der elevene skal undersøke om de oppgitte verdiene er løsning på likningssettet. Oppgaven baserer seg direkte på Eksempel 8 (Heinonen et al., 2012, s. 81) og er derfor kategorisert til *procedures without connections*. Hadde det ikke vært for at denne oppgaven følger dette eksempelet til punkt og prikke, så ville den kunne vært på et høyere kognitivt nivå.



404. Avläs koordinaterna för linjernas skärningspunkt.

a) b)

389. Undersök om $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ är en lösning till ekvationssystemet $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 3x + y = -1. \end{cases}$

Figur 4.19: Variasjon innen *procedures without connections*. Oppgaver fra Heinonen et al. (2012, s 90 og 84).

Selv om hver av disse oppgaveparene er innenfor samme kategori, så ser vi at noen er mer enkle i utformingen mens andre er mer sammensatte og krever flere mellomregninger. Slike variasjoner finner vi innenfor alle kategoriseringene, men særlig i disse to, og også i stor grad innenfor domenet *knowing* – som omfatter en stor kunnskapsbase av både fakta og enkle regnemetoder.

5 Diskusjon

I forrige kapittel trakk vi frem ulike funn i forhold til rammeverket vårt både når det gjaldt lærebøkene separat og innad tema. Vi gjorde en sammenligning mellom rammeverkene og mellom landenes læreverk. Det kvalitative dypdykket ble presentert, og vi vil her, sammen med den kvantitative delen, oppsummere og diskutere dette.

I den kvantitative undersøkelsen fant vi ut at det var noen kategorier innad hvert av rammeverkene som det havnet flest matematikkoppgaver inn under. For det meste var det like tendenser i hvor mye av hver kategori det var i hvert av landene, men noen forskjeller var det likevel. I Pi-serien var det prosentvis mindre oppgaver både innenfor *knowing* og *procedures without connections*. Det var derimot prosentvis flere oppgaver med *kontekst* i Faktor, mens det var en mer eller mindre jevn fordeling mellom landene når det kom til *aritmetisk kompleksitet*.

Når det gjaldt temafordeling i læreverkene var det noen forskjeller i hvordan de to landene vektla de ulike temaene. Dette så vi ut ifra opptellinger av antall oppgaver og prosentvis fordeling av dem innad hvert tema. «Tall og algebra» var noe som den prosentvise fordelingen viste at begge landene vektla. Når det kom til antall oppgaver derimot, så vi at det finske læreverket hadde omtrent dobbelt så mange oppgaver i dette temaet, og denne differansen utgjorde nesten hele forskjellen i antall oppgaver totalt mellom hvert læreverk. Vi så på samvariasjonen mellom lærebokseriene innad hvert enkelt tema. Vi fant en viss sammenheng i den prosentvise fordelingen for hver kategori i rammeverket, selv om det var noen forskjeller.

Vi undersøkte også spesielt kontekst, og hvordan forholdet var mellom oppgaver med og uten *kontekst* utover i de andre rammeverkene. Vi fant ut at forholdstallene var større i de høyere kognitive nivåkravene og i det kognitive domenet *reasoning*. Når det kom til *aritmetisk kompleksitet* derimot, ble mønsteret mellom de to læreverkene omvendt. I motsetning til hvor de høye forholdstallene lå i *kognitive domener* og *levels of cognitive demands*, var det kun i Pi-serien at det høyeste forholdstallet lå under det mest komplekse steget. I Faktor lå det under det minst komplekse steget, *null-steg*.

Vi har også sett på hvordan de *kognitive domenene, levels of cognitive demands* og *aritmetisk kompleksitet* fordeler seg etter like mønstre, og slik har en sterk sammenheng. Dette gjelder særlig de to førstnevnte. I den kvalitative delen så vi at det var forskjeller i lærebøkenes struktur, bruk av illustrasjoner, innhold, matematisk notasjon, spørsmålsstilling samt variasjon innad *applying* og *procedures without connections*.

Våre funn kan relateres til Valverde et al. (2002) og Pepin & Haggarty (2001), som begge har gjort komparative studier på lærebøker. Valverde et al. (2002) så at det var forskjeller mellom lærebøker når det gjaldt den pedagogiske situasjonen, noe de mente særlig relaterte seg til land, klassetrinn og emne. Vi har bare sett på lærebøker innenfor ett emne, men har innenfor matematikken funnet forskjeller mellom landene og klassetrinnene. Ikke minst har vi i det kvalitative dypdykket sett ulikheter mellom de pedagogiske fremstillingene i de to læreverkene. Pepin & Haggarty (2001) har også sett at strukturen i bøkene er forskjellige fra hverandre, noe de mener kommer av ulike utdanningstradisjoner og utdanningskontekster.

Videre kan våre funn også ses i sammenheng med Charalambous et al. (2010), som blant annet tok for seg kognitive nivåkrav da de gjorde en studie innen temaet brøk i lærebøker. I likhet med de to landene vi har undersøkt, der det i begge læreverkene var en overvekt av de lavere kognitive nivåkravene, så de det samme for to av de tre landene de undersøkte. I motsetning til vårt tema «tall og algebra», fant Huntley & Terrell (2014) i sin undersøkelse av likninger, at det var mest av *applying*, som er det domenet rammeverket for TIMSS 2015 vektlegger mest (Grønmo et al., 2013). I likhet med oss så de at det var minst av *reasoning*, og at det var forskjell i mengder av matematikkoppgaver i bøkene.

5.1 Mulige konsekvenser

En så stor samling med matematikkoppgaver innenfor *knowing, procedures without connections, kontekstløs* og *ett-steg* vil begrense elevenes læring til nettopp dette; det er dette lærebøkene gir elevene mulighet til å lære. Den store overvekten av oppgaver innenfor Grønmo et al. (2013) sin *knowing* betyr at elevene kun får arbeide med de basale aspektene ved matematikken. De får øve mye på å huske, gjenkjenne, klassifisere, måle og å gjøre enkle utregninger, altså det som ligger til grunn for de to andre domenene, *applying* og *reasoning*.

I rammeverket for TIMSS 2015 av Grønmo et al. (2013), presenterer de et mål for prosentvis fordeling mellom de tre domenene, både på 4. og 8. trinn for deres matematikkoppgaver. For

8. trinn ønskes kun 35 % av oppgavene innenfor *knowing*, mens det er 40 % i *applying* og 25 % i *reasoning*. Dette viser at det er viktig med en grunnleggende kunnskapsbase, men det er minst like viktig å kunne benytte seg av denne kunnskapen. Ikke minst omhandler ¼ av oppgavene resonnering. I og med at vi ser en økning av prosenter innen *applying* og *reasoning* utover ungdomstrinnet i de to landenes læreverk, er det tydelig at disse blir lagt mer vekt på etter hvert som elevene blir eldre og kommer videre i sin matematikkopplæring.

Garden et al., (2006) skriver: «Understanding a mathematics topic consists of having the ability to operate successfully in three cognitive domains» (s. 17). Den fordelingen vi har sett i vår undersøkelse, er lite forenelig med den fordelingen de har lagt opp til i TIMSS. Når også temaene er så ulikt fordelt med hensyn på de *kognitive domenene*, får ikke elevene mulighet til å forstå matematikken slik som de bør. Likevel sier ikke dette noe om *antall* matematikkoppgaver elevene bør få tilgang til å løse og lære av, for at de skal kunne oppnå en fullverdig forståelse innen matematikkfaget.

Procedures without connections utgjør omtrent 76 % til 85 % av matematikkoppgavene i hver av de årsspesifikke lærebøkene. Sammen med *memorization* som også er i det lavere kognitive nivåkravet, utgjør disse til sammen avrundet mellom 83 % og 94 % av oppgavene. Dette betyr at elevene i stor grad kun får mulighet til å øve på å huske og å gjenskape tidligere sette regler og eksempler, noe som kan gi elevene en smal forståelse av hva matematikk egentlig innebærer. Det samme gjelder også innenfor de enkelte tema, der det jevnt over bygger opp om en smal forståelse for matematikk. Unntaket er temaet «problemløsning», som har desidert høyest forekomst av oppgaver innenfor de høyere nivåkravene – noe som en bør kunne forvente.

Matematikkoppgaver innenfor de ulike kognitive nivåkravene øver opp ulike ferdigheter hos elevene. Som vi har vært inne på tidligere, mener Stein et al. (2000) at ulike oppgaver krever tenking av ulike former og nivåer. Det er derfor viktig å variere typen oppgaver med tanke på de ulike kognitive nivåkravene, noe som ikke gjøres i disse to læreverkene. Med en så stor overvekt av oppgaver innenfor lavere nivåkrav, får elevene aldri møtt de større utfordringene med muligheter for å se sammenheng og få forståelse for matematikken. De får derimot mye øvelse i oppramsing og å følge algoritmiske fremgangsmåter.

Matematikkoppgaver med *ett-steg* er dem det er flest av innenfor *aritmetisk kompleksitet*. Det prosentvise antallet ligger på om lag 67 - 82 %, noe som utgjør en stor overvekt. Desidert minst er det av *fler-steg*, noe som kan bero på hvordan vi har tolket og definert denne kategorien, ettersom vi eksempelvis ikke anser likninger som *fler-stegsoppgaver* fordi en ikke gjennomfører delmål men mellomregninger. Uavhengig av dette er det stor forekomst av *null-steg*, som vil si at elevene gjør en del oppgaver der de kan hente svaret direkte ut av oppgaven. Vi ser at elevene for det meste får løse enkle regneoppgaver, mens de derimot får mindre av de mer sammensatte og komplekse oppgavene. Innenfor noen temaer er det flere *null-stegsoppgaver*, som betyr at elevene får en god del øvelse i informasjonshenting i akkurat disse temaene. En må likevel ikke glemme at *null-steg* også kan forekomme innenfor resonneringsoppgaver. I tråd med de to foregående rammeverkene, er det nærliggende å tro at det innenfor *aritmetisk kompleksitet* også vil være fordelaktig for elevenes læring at de får en jevn fordeling.

De *kontekstløse* oppgavene har en sterk overvekt i begge landenes læreverk. Den prosentvise fordelingen viser at Faktor har lagt større vekt på *kontekst* enn det Pi har gjort. Fraværet av kontekst er også noe som kan gi elevene en snever forståelse av hva matematikk er, og ifølge Boaler (1994) kan det være fordi de da ikke ser matematikken i sammenheng med omverdenen. Videre skriver hun at den konteksten som inngår i oppgavene bør hjelpe elevene til å avgjøre hvilken retning de skal ta for løsning, og hjelpe dem å *tenke* heller enn å huske, og slik se helheten i situasjonene. Det er altså ikke alle kontekster som er gode kontekster, noe som kan påvirke elevenes oppfatning av kontekst i matematikkoppgaver – og slik matematikken for øvrig. Matematikkoppgaver uten *kontekst* kan i så måte være å foretrekke foran oppgaver med en overflødig og meningsløs kontekst.

Funnet vårt om at forholdsverdien til kontekstuelle oppgaver er større innen det kognitive domenet *reasoning*, og de høyere kognitive nivåkravene *procedures with connections* og *doing mathematics*, kan tyde på at kontekst er noe som til en viss grad forbindes med mer avansert matematikk. Det må likevel bemerkes at antallet oppgaver med *kontekst* generelt er større i de lavere nivåkravene samt domenene *knowing* og *applying*, men at dette har sammenheng med at det er mange flere oppgaver totalt i disse kategoriene. Vi ser at de relativt store forekomstene av *kontekst* innenfor de høyere nivåkravene, inkludert *reasoning*, kan ha en sammenheng med det Boaler (1994) skriver om kontekst som skal lede til tenking. Dette i kontrast til det hun skriver om å huske, som vi tenker vil være *kontekst* innenfor *memorization*, og til dels innenfor domenet *knowing* og *null-steg*. Hvilke konsekvenser dette får for elevenes læringsmuligheter, tenker vi i stor grad vil avhenge av hvor nyttig den oppleves å være av elevene.

5.2 Sammenheng mellom kognitive domener og kognitive nivåkrav

Som tidligere vist i Tabell 4.11, er det en sammenheng i fordelingen av *kognitive domener* og *levels of cognitive demands*. I etterkant av analysen kan dette virke svært opplagt, men i utgangspunktet var det ikke noe vi forventet da vi valgte ut disse rammeverkene. Slik vi tolket de to rammeverkene, var de *kognitive domenene* ikke noe som bygde på hverandre i høyden, men derimot en horisontal fordeling av likestilte ferdigheter. *Levels of cognitive demands* derimot, var vi svært klar over skulle være en vertikal fordeling av vanskegrad og innhold. Dette fordi Stein et al. (2007) omtaler disse kognitive nivåkravene som «(…) a taxonomy of mathematical tasks based on the kind and level of thinking required to solve them» (s. 348).

Noe liknende er ikke eksplisitt forklart i TIMSS sitt rammeverk for 2015 (Grønmo et al., 2013) som vi har brukt som utgangspunkt i denne mastergradsoppgaven. Det nærmeste en kan komme en beskrivelse av sammenhengen mellom de tre domenene, er der de skriver at elever må kunne benytte seg av kunnskapen, at *reasoning* «(…) goes beyond the solution of routine problems» (Grønmo et al., 2003, s. 24), og nevner at det å benytte seg av matematikk og å resonnere avhenger av kjennskap til konsepter og regneferdigheter i matematikken. Om man går lenger tilbake i tid, og ser på TIMSS sitt rammeverk for 2003, stadfester Mullis et al. (2003) at «(…) cognitive complexity should not be confused with item difficulty. For nearly all of the cognitive skills listed, it is possible to create relatively easy items as well as very challenging items» (s. 25). Dette gjør det klart at de tre *kognitive domenene* viser ulik kognitiv kompleksitet, men ikke var tenkt å fordeles etter vanskegrad.

Særlig det Mullis et al. (2003) skriver om de *kognitive domenene*, går imot funnet vårt om at *knowing* konsekvent ligger innenfor de lavere kognitive nivåkravene, *applying* alltid vil ligge innenfor *procedures without connections* eller *procedures with connections*, og at domenet *reasoning* alltid ligger innenfor de høyere kognitive nivåkravene. Dette viser at det er et taksonomisk forhold mellom TIMSS 2015 (Grønmo et al., 2013) sine kognitive domener.

Studerer man listen av ferdigheter under domenet *knowing*, ser man at noen helt klart går på det samme som *memorization*, som det å måtte huske og gjenkjenne. Ferdigheter som å regne ut, tilsvarer innenfor *knowing* kun *procedures without connections*, som er algoritmiske utregninger som følger tidligere gitte fremgangsmåter. Den samme koblingen finnes til *applying*, der mange av matematikkoppgavene som skal utføres også skal være kjente for eleven. Dette domenet inkluderer også ferdigheter i form av å modellere og representere, som vil høre inn under *procedures with connections*, fordi det er å skape noe nytt uten å nødvendigvis måtte følge tidligere eksempler. *Reasoning* baserer seg på bruk av sammenhenger, alternative løsningsstrategier og matematiske argumenter, noe som tilsvarer de høyere kognitive nivåkravene fordi de legger vekt på dypere forståelse, kognitiv anstrengelse og en kompleks, ikke-algoritmisk tankegang. Disse sammenhengene mellom kategoriene i *kognitive domener* og *levels of cognitive demands* gir mening i forhold til de opprinnelige teoriene.

Videre så vi også at *aritmetisk kompleksitet* (Leung & Silver, 1997) vil ha en sammenheng med disse to. I Tabell 4.12 har vi sett at *memorization* alltid vil være *null-steg*, og vil derfor også i mange av tilfellene falle inn under domenet *knowing*. Ifølge Mullis et al. (2003) øker den kognitive kompleksiteten i domenene fra *knowing*, via *applying* og til *reasoning*. Som nevnt tidligere, skiller de altså mellom kompleksitet og vanskegrad, der kompleksitet også er noe som kan variere *innad i* hvert av de tre domenene. Denne kompleksiteten er noe vi kan se i sammenheng med *aritmetisk kompleksitet*, der vi tydelig ser at det ikke nødvendigvis er vanskegrad som skiller stegene, ettersom en kan finne alle typer steg på alle de taksonomiske nivåene, utenom *memorization*. Vi ser altså at vi har tre områder med kompleksitet; mellom domenene, innen hvert av domenene, og mellom de ulike steg-typene. Den kompleksiteten Mullis et al. (2003) omtaler innad domenene, har vi sett nærmere på i dypdykket vårt, Figur 4.18, der vi sammenligner oppgaver innen *applying*, noe vi også ser på for *procedures without connections* i Figur 4.19.

5.3 Læringsmuligheter

Generelt kan vi si at de læringsmulighetene elevene får av de ofte forekommende kategoriene fra rammeverkene, altså *knowing*, *procedures without connections*, *ett-steg* og *kontekstløs*, ikke dekker mer enn basiskunnskapen i matematikken og de mest grunnleggende ferdighetene for oppgaveløsning. Det at lærebøkene i så stor grad legger hovedvekt på én kategori i hvert av rammeverkene, påvirker elevenes læringsmuligheter. Desto mindre variasjon og jevnfordeling mellom de ulike kategoriene i rammeverkene, desto færre muligheter for variert og helhetlig læring. Slik påvirkes også elevenes muligheter for å bli kompetente innenfor matematikkfaget.

5.3.1 Matematisk kompetanse

I teorikapittelet vårt skrev vi om matematisk literacy i forbindelse med PISA 2012 (OECD, 2013) sine *kontekster*, men i definisjonen ser vi at dette også handler om å ha kunnskap om fakta og fremgangsmåter, og å kunne resonnere i matematikken, samt kunne se matematikken i et verdensbilde. Dette sier altså noe om hva det vil si å kunne matematikk, og kan slik knyttes opp til Kilpatrick, Swafford & Findell (2001) sin kompetansetenking.

Hvilke kompetanser elvene får mulighet til å lære, kan belyses av Kilpatrick et al. (2001) sine fem *strands*, oversatt til *tråder* (MS, 2014). Alle disse trådene må inngå for at en skal være kompetent i matematikk, og flettes sammen til en helhet av alle aspekter av de ferdighetene, den kompetansen, kunnskapen og ekspertisen som til sammen utgjør det Kilpatrick et al. (2001) kaller *Mathematical proficiency* – altså matematisk kompetanse (MS, 2014). Disse fem trådene er conceptual understanding, procedural fluency, strategic competence, adaptive reasoning og productive disposition. Kilpatrick et al. (2001) forklarer at *conseptual understanding* handler om å kunne fakta og metoder samt forholdene dem imellom; *procedural fluency* omhandler det å kunne velge passende metoder for utregning og kunne bruke disse fleksibelt og effektivt; *strategic competence* består av evnen til å formulere, representere og løse matematiske problemer; *adaptive reasoning* handler om evnen til å tenke logisk og reflektert, og å kunne forklare og bevise sin tankegang; og *productive disposition* omhandler hvor lett man har for å se mening og nytte i matematikken.

Basert på funnet om at Grønmo et al. (2013) sine kognitive domener og Stein et al. (2000) sine levels of cognitive demands er knyttet sammen, ser vi at disse utgjør en klarere mulighet til å lære for elevene, og slik også oppnå kompetanse. Kilpatrick et al. (2001) skriver at ”Students with conceptual understanding know more than isolated facts and methods” (s. 118). De forstår forholdet mellom fakta og metoder, altså mer enn hva *knowing* og de lavere kognitive nivåkravene innebærer. *Knowing* omhandler det å kunne huske enkle fakta og regler og det å kunne bruke disse i grunnleggende utregningsmetoder. *Memorization* har vi knyttet til både *knowing* og *null-steg*. Denne kategorien handler om å kunne huske og hente ut informasjon, mens *procedures without connections* er det å kunne bruke eksemplifiserte metoder og algoritmer for utregning. Ingen av disse kategoriene innebærer forståelse og sammenheng i matematikken, men derimot adskilte grunnsteiner for videre læring og bruk av matematikk. Elevene vil derfor få begrensede muligheter til å oppnå conceptual understanding utav disse lærebøkene. Et for stort fokus på bare disse elementene i kunnskapen vil gi store hull i elevenes forståelse.

Knowing, memorization, procedures without connections samt mange av *null-stegsoppgavene* ligger alle på et så kognitivt lavt nivå, at de ikke når opp til Kilpatrick et al. (2001) sine mål for matematisk kompetanse. Hadde de innebært en større valgfrihet når det gjelder valg av løsningsmetode, eller en løsningsmetode i det hele tatt, så hadde det også stilt større krav til fleksibilitet og effektivitet, og slik vært det Kilpatrick et al. (2001) kaller *procedural fluency*. Denne tråden ser vi derimot har sammenheng med det kognitive domenet *applying* og det kognitive nivåkravet *procedures with connections* som begge omhandler det å kunne finne og bruke passende løsningsmetoder med forståelse for det som gjøres. Likevel ser vi at man kan oppnå en viss grad av procedural fluency ved oppgaver innenfor *procedures without connections*, dette fordi denne tråden i tillegg omhandler mengdetrening samt det å kunne utføre algoritmer på en korrekt måte.

Applying og *procedures with connections* henger også sammen med Kilpatrick et al. (2001) sin tråd om strategic competence. Denne tråden omhandler å kunne formulere, representere og løse matematiske oppgaver og problemer. Hvis dette ikke er kjente og rutinemessige oppgaver, kan også *reasoning* være inkludert. Er det derimot rutinemessige oppgaver basert på tidligere gitte eksempler, vil det kunne være snakk om det lavere kognitive nivåkravet *procedures without connections*. Oppgaver i denne tråden vil aldri være *null-steg*, fordi det å formulere og løse er to ulike fremgangsmåter som vil kreve bruk av flere prosedyrer og er derfor ikke noe som kan sees og gjøres direkte. Vi tenker at slike matematikkoppgaver ofte vil kunne inneholde *kontekst*, ettersom det er vanlig å formulere oppgaver ut ifra virkelighetsbaserte situasjoner.

Kilpatrick et al. (2001) sin tråd adaptive reasoning handler helt klart om det kognitive domenet *reasoning*, da begge omhandler det å tenke logisk og å kunne se sammenhenger mellom matematiske konsepter og situasjoner. Dette gjør det også klart at *procedures with connections* og *doing mathematics* vil tilhøre denne tråden, ettersom vi har funnet ut at disse høyere kognitive nivåkravene tilsvarer *reasoning*. Oppgaver innenfor denne tråden vil kunne inneholde et hvilket som helst antall *steg* og variere mellom bruk av *kontekst* eller ikke.

Særlig siden vi ser at det er så mange matematikkoppgaver innenfor *knowing, procedures without connections* og *kontekstløs*, er det rimelig å anta at dette kan påvirke det Kilpatrick et al. (2001) refererer til som elevers productive disposition, i negativ retning. Dette fordi matematikken blir lite generaliserbar og allmennyttig, og dermed reduseres til en mengdetreningssak av basale ferdigheter i matematikktimene. Elevene vil likevel kunne føle en høy grad av effektivitet både i forhold til læring og utførelse, uten at dette nødvendigvis innebærer en dypere læring og forståelse. En større andel av *applying, reasoning* samt de høyere kognitive nivåkravene vil kunne la elevene se en større mening og nytte av matematikken, og derfor gi større productive disposition. For mange oppgaver med *null-steg* og *ett-steg*, kan tenkes å hindre elevene i å se de større sammenhengene og innfløktheten i matematikkfaget. Om elevene bare får lov til å løse korte oppgaver uten delmål, kan mye forståelse og arbeidsglede gå tapt. Som tidligere nevnt, kan mangel på *kontekst* gi en smal forståelse for hva matematikk innebærer. Flere oppgaver med *kontekst* vil gi elevene innblikk og erfaring med matematikk i et stort spekter av situasjoner og kan slik påvirke deres productive disposition til faget.

5.3.2 Matematisk forståelse

Skemp (1976) snakker om to typer forståelse av matematikk; instrumentell og relasjonell. Den *instrumentelle* forståelsen er det som kan beskrives som «rules without reasons» (Skemp, 1976, s. 2), og handler om å gjøre uten å forstå sammenhengen og begrunnelsen for hva som ligger bak. Motstykket, *relasjonell* forståelse, er når man både vet *hva* som skal gjøres og forklaringen bak, altså *hvorfor*.

Disse to typene av forståelse kan sees i sammenheng med matematisk kompetanse og dermed også læringsmuligheter; ulike læringsmuligheter kan gi ulike typer forståelse som igjen vil kunne føre til forskjellige typer kompetanser. Ser man på Kilpatrick et al. (2001) sine fem tråder, kan en se at både conceptual understanding og adaptive reasoning er noe som oppnås gjennom en relasjonell forståelse. Procedural fluency og strategic competence kan komme både av instrumentell og relasjonell forståelse, selv om det er den relasjonelle som i størst grad oppfyller disse også. Productive disposition anser vi som et produkt av den typen forståelse en får, i og med at Skemp (1976) forklarer at de to ulike forståelsene kan føre til ulike oppfatninger av hva matematikk er og innebærer.

Vi ser en klar sammenheng mellom *levels of cognitive demands* og Skemp (1976) sin instrumentelle og relasjonelle forståelse. De to kognitivt lave nivåkravene, *memorization* og *procedures without connections*, forbinder vi med instrumentell forståelse. Dette fordi de baserer seg på å reprodusere og å gjøre uten å forstå. De høye kognitive nivåkravene, *procedures with connections* og *doing mathematics*, knytter vi derimot til den relasjonelle forståelsen. Disse krever nemlig til sammen en forståelse for de operasjoner som gjøres, og en ikke-algoritmisk tenking i matematikken.

Denne sammenhengen kan gi konsekvenser for elevens læringsmuligheter i de to læreverkene vi har analysert. Tatt i betraktning den lave forekomsten av høyere kognitive nivåkrav, se Figur 4.2, vil dette medføre manglende mulighet for relasjonell forståelse hos elevene. De får derimot svært mye instrumentell mengdetrening i begge lærebokseriene, noe som ikke nødvendigvis bare er negativt. Skemp (1976) har funnet tre grunner for at instrumentell forståelse kan være fordelaktig. Disse innebærer at instrumentell matematikk kan være lettere å forstå, den gir en mer umiddelbar og tydelig belønning, og påvirker slik direkte også selvfølelsen. Slik blir veien frem til riktig svar ofte både raskere og sikrere, selv for de uten så mye kunnskap. Dette samsvarer med det Stein et al. (2000) som skriver om at hvis man skal øve på en algoritme eller utførelse, så vil oppgaver innenfor de lave kognitive nivåkravene være å fortrekke. I tillegg nevner Skemp (1976) noen fordeler ved relasjonell matematikk. Disse er at det er lettere å generaliserer fremgangsmåter, bygge videre på det man allerede kan, og slik også gjenhente glemte regler – noe som gjør denne typen læring mer varig. I tillegg kan det å ha relasjonell kunnskap være motiverende, og slik være et mål i seg selv, fordi det vil kunne gi økt lyst til videre læring.

I det kvalitative dypdykket så vi at de to lærebøkene hadde ulik tilnærming til elevenes forståelse. Der Pi 9 begynte med dyptgående forklaring og logisk resonnement, hadde Faktor 3 en mer instrumentell fremstilling av sine eksempler. I eksempelet i Figur 4.13 så vi hvordan de unnlater å forklare hvorfor ting gjøres. De skriver for eksempel «Vi setter inn (5 – 2y) i stedet for x» (Hjardar & Pedersen, 2007a, s. 159), uten å forklare hvorfor. Dette eksempelet minner veldig om de Skemp (1976) gir når han skriver om instrumentell forståelse.

Begge lærebøkene har en svært stor andel oppgaver innen de lavere kognitive nivåkravene, men i motsetning til Faktor 3 bygger Pi 9 opp om en mer relasjonell forståelse i sine eksempler og forklaringer. Dette er noe som går tapt i oppgavene og derfor også i våre kvantitative funn; selv om elevene får tilbudt en relasjonell forståelse gjennom forklaring og eksempler, så viderebringes ikke dette i matematikkoppgavene. Slik kan det altså finnes en relasjonell del innenfor de oppgavene vi har kodet som *procedures without connections*, fordi disse baserer seg på de gitte eksemplene – som altså kan beskrives som relasjonelle. Spørsmålsstillingen i den utvalgte delen fra Pi var også mer variert og allsidig. Slik vil den kunne gi en større bredde og variasjon i sin tilnærming til matematikkfaget, og bygge opp om en relasjonell forståelse. Dette bekrefter Pepin & Haggarty (2007), som skriver «If we can assume that learning with understanding is enhanced by making connections, mathematical tasks should reflect this. They are likely to influence students' perception of what mathematics is and what it is to behave mathematically» (s. 1).

Skemp (1976) skriver om to typer uoverensstemmelser som kan oppstå mellom mottaker og avsender av instrumentell og relasjonell forståelse. Mottakeren er eleven, mens avsenderen i vårt tilfelle vil være læreboka. I Skemp (1976) er det egentlig læreren som står som avsender, men i teorikapittelet vårt argumenterte vi for at læreren er mediator av læreboka, så vi mener derfor at læreboka kan erstatte læreren i denne sammenhengen. Den første overensstemmelsen, sier han, er hvis målet til eleven er å forstå instrumentelt, mens læreboka forklarer på en relasjonell måte. Den andre vil være motsatt, altså en lærebok som forklarer instrumentelt til elever som vil lære relasjonelt. Dette kan bety at elever som ønsker å lære kjapt og effektivt på en instrumentell måte, kanskje vil synes Pi er for omfattende i sine forklaringer og eksempler. På motsatt vis vil en elev som ønsker å lære med forståelse og begrunnelse, altså relasjonelt, kunne bli frustrert over de manglende forklaringene i Faktor. Når dette er sagt, så kan det stilles spørsmål ved i hvor stor grad elevens læring kun er basert på lærebøkene, og om det er meningen at lærebøkene skal dekke opp om alt av matematisk kompetanse; matematikkundervisningen er mer enn bare lærebøker. Man kan også spørre seg hvilken rolle eksemplene skal trenge å ha, med tanke på de lærerne som skal formidle lærestoffet.

6. Oppsummering og konklusjon

Vi vil her begynne med en kort oppsummering av noen av de funnene vi har gjort. I tillegg vil vi i konklusjonen hente frem problemstillingen og svare direkte på den.

6.1 Oppsummering

Vi har i denne mastergradsoppgaven foretatt en mixed method-studie, der vi har kodet og analysert 23801 matematikkoppgaver for en kvantitativ fremstilling, og gjort et kvalitativt dypdykk for utfyllende detaljer. I kategoriseringen har vi satt sammen et konseptuelt rammeverk, som består av TIMSS kognitive domener (Grønmo et al., 2013), levels of cognitive demands (Stein et al., 2000), aritmetisk kompleksitet (Leung & Silver, 1997) og PISA 2012 sine kontekster (OECD, 2013).

Det vi har sett er at det er like tendenser i den prosentvise fordelingen for hvert av landenes lærebøker, når det gjelder vårt konseptuelle rammeverk. Likevel er det jevnt over flere muligheter for å lære gjennom Pi, da det er mange flere oppgaver i dette læreverket, samtidig medfører dette flere oppgaver på høyere matematisk nivå, enn det som er i Faktor-serien. Vi har også sett på kvalitative forskjeller, der det viste seg å være ulik oppbygning, innhold og pedagogisk filosofi i de to læreverkene.

Vi gjorde også et par funn når det kommer til de rammeverkene vi brukte til å analysere. Det viste seg at det var forholdsvis mye *kontekst* på de høyere matematiske nivåene, noe som vi tolket til å bety at kontekst til en viss grad har sammenheng med vanskegrad. Det var også en klar sammenheng mellom de tre *kognitive domenene* og *levels of cognitive demands*, og til en viss grad også *aritmetisk kompleksitet*. Dette viste oss at rammeverket for TIMSS 2015 (Grønmo et al., 2013) også er taksonomisk oppbygd etter vanskegrad, og er dermed ikke bare kompleks slik de selv hevder å være (Mullis et al., 2003).

6.2 Konklusjon

For å svare på problemstillingen vår, gjentar vi den her:

Hvilke læringsmuligheter får norske og finske elever gjennom lærebøker i matematikk?

- Hvilke kognitive ferdigheter og kognitive nivåkrav, hvilken kompleksitet og hvor mye kontekst er det i oppgavene i de utvalgte læreverkene?
- Hvilken sammenheng er det mellom de utvalgte rammeverkene *kognitive domener, levels of cognitive demands, aritmetisk kompleksitet* og *kontekst*?

Generelt viste det seg å være små forskjeller mellom landene når det gjaldt de prosentvise fordelingene vi fremstilte. Likevel har vi sett at det er ulike muligheter til å lære i forhold til antall oppgaver i hvert land, da Pi inneholder mange flere matematikkoppgaver enn Faktor. Vi ser at bøkene har et likt innhold når det kommer til fordeling av tema, og det at de begge inneholder eksempler og oppgaver. Det er likevel forskjell i antall eksempler og oppgaver, og hvilket pedagogisk innhold disse støtter seg på.

Vi har sett at læringsmulighetene en får av å løse alle matematikkoppgavene i hvert av disse læreverkene, har sine begrensninger både når det kommer til kognitive ferdigheter, krav og realitetsorientering. Når det gjaldt de *kognitive domenene* så vi at elevene fikk mest mulighet til å lære domenet *knowing*, og når det kom til *levels of cognitive demands* var det de lavere kognitive nivåkravene, *memorization* og *procedures without connection*, som tok opp mest plass. Disse tre til sammen gir bare mulighet til å øve opp de mer basale ferdighetene innenfor matematikk. De lavere nivåkravene baserer seg på tidligere gitte eksempler og forklaringer i læreboka, noe som er potensielt urovekkende da om lag 90 % av oppgavene for hvert av trinnene i Faktor-serien, og over 80 % av oppgavene i Pi-serien, kun innebærer reproduksjon.

Når det kom til *aritmetisk kompleksitet*, viste det seg at det var en overvekt av oppgaver innenfor *ett-steg*. Omlag 70 % av matematikkoppgavene på hvert trinn i begge lærebokseriene lå innenfor denne kategorien. Vi mener at det kan være problematisk med så store mengder oppgaver innenfor enkeltkategorier, da dette kan medføre et snevert syn på hva matematikk er. I dette tilfellet vil en risikere at elevene ikke får med seg den mer komplekse og sammensatte matematikken, da det var spesielt få oppgaver innenfor *fler-steg*, som altså er oppgaver som inneholder delmål frem mot løsningen.

Vi så at det var overvekt av *kontekstløse* matematikkoppgaver i begge læreverkene, men med en liten oppgang av *kontekst* utover årstrinnene. Forholdstallet mellom oppgaver med og uten kontekst var størst innenfor domenet *reasoning* og de høyere kognitive nivåkravene. Til tross for at det er mange flere oppgaver innenfor de lavere nivåkravene, og slik også mange flere oppgaver med *kontekst*, som dermed også gir en stor mulighet til å lære innenfor en kontekst, så er det *forholdsvis* større mulighet for å lære innenfor en kontekst i de høyere nivåkravene – inkludert *reasoning*.

Innad temaene følger de to landenes læreverk hverandre i prosentvis fordeling av de ulike kategoriene i rammeverkene. Når en ser på fordelingen av de ulike kategoriene i rammeverkene, er det tilsynelatende like muligheter for å lære de ulike temaene i begge lærebokseriene. Forskjellen utgjøres i størst grad av fordelingene på tvers av tema, men også antall oppgaver innenfor hvert av temaene.

Vi har altså sett på muligheter for læring både innenfor hvert av de fire rammeverkene, mellom landene i mengde og tema, samt diskutert hvilken kompetanse og forståelse en kan få av disse. Det vi har brukt som mål for kompetanse er Kilpatrick et al. (2001) sine fem tråder. Vi så at fordelingen innenfor vårt konseptuelle rammeverk i liten grad dekte opp om disse trådene. I tillegg så vi på Skemp (1976) sine to typer forståelse, instrumentell og relasjonell, som vi har knyttet opp mot henholdsvis lavere og høyere kognitive nivåkrav. Dette betyr at det er en større mulighet til å lære instrumentelt av lærebøkene enn relasjonelt, ettersom det var et svært stort flertall innenfor disse kategoriene. Vi tenker likevel at selv om operasjonen i seg selv er instrumentell, så kan de være knyttet opp mot en relasjonell sammenheng. Dette for eksempel i form av introduksjon og eksempler som vi så i den det kvalitative dypdykket.

Om man som lærer ønsker at elevene skal kunne oppnå en høyest mulig matematisk kompetanse, må en gi dem muligheter til å løse mer krevende og sammensatte oppgaver. Denne typen matematikkoppgaver er ikke dem det er mest av i de læreverkene vi har sett på, noe som betyr at en muligens må se etter dette andre steder. Med utgangspunkt i dette kan en stille seg spørsmål ved hvorvidt det i det hele tatt er ment at lærebøkene skal kunne oppfylle alle de fem kompetansene til Kilpatrick et al. (2001), og kunne gi det Skemp (1976) omtaler som en relasjonell forståelse. Det er mer enn lærebøker som har noe å si for elevenes matematikklæring og mulighet for å oppnå en matematisk kompetanse, som blant annet læreren, medelever, foreldre og andre eksterne ressurser. Disse, sammen med de læringsmulighetene som gjøres tilgjengelig (eksempelvis matematikklærebøkene) påvirker, ifølge Lee & Luykx (2007), elevers prestasjoner.

Det er vanskelig for oss å si noe om hva som egentlig er den mest fordelaktige fordelingen av kategorier innad rammeverkene i lærebøkene, men det kan tenkes at en mer jevn fordeling av kategoriene enn den vi har funnet, er å foretrekke. For å oppnå mest mulig kompetanse er det rimelig å anta at en større andel av høyere kognitive nivåkrav vil være å foretrekke, men uten at det dermed er sagt at det er lærebøkene som skal stå for dette.

7 Referanser

Arora, A. (2006). *TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks.* International Association for the Evaluation of Education Achievement. Boston College: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Bryman, A. (2006). Integrating quantitative and qualitative research: how is it done?. *Qualitative research*, *6*(1), 97-113. London: SAGE Publications DOI: 10.1177/1468794106058877

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y. & Mesa, V. (2010). A Comparative Analysis of the Addition and Subtraction of Fractions in Textbooks from Three Countries. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(2), 117-151. DOI: 10.1080/10986060903460070

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Oslo: Abstrakt forlag.

Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work. Coping with multiple research perspectives. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. I F. K. Lester (Red). Charlotte, N.C., Information Age: 3-38.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in education.* 6th edition. London: Routledge.

Creswell, J. W. (2003). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches* (2. utgave). USA: Sage Publications, Inc.

Creswell, J. W., & Plano Clark, V. L. (2011). *Designing and Conducting Mixed Methods Research* (2. utgave). USA: Sage Publications, Inc.

Doyle, W. (1983) Academic work. *Review of Educational Research, 53*(2), 159-199. DOI: 10.3102/00346543053002159

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: toward a common ground on issues

and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM 45*(5), 756-777.
DOI 10.1007/s11858-013-0530-6

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM 45*(5), 633-646.
DOI: 10.1007/s11858-013-0539-x

Finnish National Board of Education. (2004a). *National core curriculum for basic education 2004. National core curriculum for basic education intended for pupils in compulsory education.* [PDF] Hentet 07.05.2015 fra:
http://oph.fi/download/47672_core_curricula_basic_education_3.pdf

Finnish National Board of Education. (2004b). *National core curriculum for basic education 2004. National core curriculum for basic education intended for pupils in compulsory education.* Hentet 27.04.2015 fra:
http://oph.fi/english/curricula_and_qualifications/basic_education

Finnish National Board of Education. (2012). *Perusopetuksen tuntijako* (distribution of lesson hours in basic education). [PDF] Hentet 15.04.2015 fra
http://www.minedu.fi/export/sites/default/OPM/Koulutus/koulutuspolitiikka/vireilla_koulutus/perusopetus/liitteet/asetusehdotus_1_2.pdf

Finnish National Board of Education. (u.å.) *Basic Education. Basic education is non-selective*. Hentet 15.04.2015 fra
http://oph.fi/english/education_system/basic_education

Floden, R. E. (2002). The measurement of opportunity to learn. I A. C. Porter & A. Gamoran (Red.), *Methodological advances in cross-national surveys of educational achievement*. (s. 231–266). Washington, DC: National Academy Press.

Foy, P., Arora, A. & Stanco, G. M. (Red.) (2013). *TIMSS 2011 User Guide for the*

International Database. Released Items Mathematics – Eighth Grade. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Garden, R. A., Lie, S., Robitaille, D. F., Angell, C., Martin, M. O., Mullis, I. V. S., Foy, P. & Arora, A. (2006). *TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks.* International Association for the Evaluation of Education Achievement. Boston College: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Greene, J. C., Caracelli, V. J., & Graham, W. F. (1989). Toward a conceptual framework for mixed-method evaluation designs. *Educational evaluation and policy analysis*, *11*(3), 255-274. DOI: 129.242.254.17

Gronlund, N. E. (1981). *Measurement and Evaluation in Teaching* (4. utg.). New York: Collier-Macmillan.

Grønmo, L. S., Lindquist, M., Arora, A. & Mullis, I. V. S. (2013). *TIMSS 2015 Mathematics Framework.* In Mullis, I.V.S. & Martin, M.O. (Red.). Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College. S.11-27.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011.* Oslo: Akademia forlag.

Grønmo, L. S. (2013). *Algebra og tall er motoren i matematikken – derfor går matematikkfaget i Norden for halv fart.* I Bedre skole nr. 1, 2013.

Grønmo, S. (2004). *Samfunnsvitenskapeilige metoder.* Bergen: Fagbokforlaget.

Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L., Tikka, T., Lindgrén, H., Mitts, H. & Söderback, C. (2010). *Pi 7. Matematik.* Helsingfors: Schildts Förlag Ab.

Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L., Tikka, T., Lindgrén, H., Mitts, H. & Söderback, C. (2011). *Pi 8. Matematik.* Helsingfors: Schildts & Söderströms.

Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L., Tikka, T., Lindgrén, H., Mitts, H. & Söderback, C. (2012). *Pi 9. Matematik.* Helsingfors: Schildts & Söderströms.

Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L., Tikka, T., Lindgrén, H., Mitts, H. & Söderback, C. (2013). *Pi. Matematik. Statistik och sannolihet.* Helsingfors: Schildts & Söderströms.

Helland, G. & Nore, H. (Red.). (2010). *Læreplanen i bruk. Fra nasjonal læreplan til lokalt arbeid med interne og individuelle planer.* Tema 2. Oslo: Utdanningsdirektoratet. Hentet 15.04.2015, fra http://www.udir.no/PageFiles/42416/UDIR_Temahefte2_nett.pdf?epslanguage=no

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Oliver, A. & Human, P. (1997). *Making Sense: Teaching and learning mathematics with understanding.* Potsmouth, NH: Heinemann.

Hiebert, J. & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. I F. K. Lester (Red). Charlotte, N.C., Information Age: 371-404.

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2006a). *Faktor 1. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet.* Oslo: Cappelen Forlag AS.

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2006b). *Faktor 2. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet.* Oslo: Cappelen Forlag AS.

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2006c). *Faktor 1. Oppgavebok. Matematikk for ungdomstrinnet.* Oslo: Cappelen Forlag AS.

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2007a). *Faktor 3. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet.* Oslo: Cappelen Forlag AS.

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2007b). *Faktor 2. Oppgavebok. Matematikk for ungdomstrinnet.* Oslo: Cappelen Forlag AS.

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2008). *Faktor 3. Oppgavebok. Matematikk for ungdomstrinnet.*

Oslo: Cappelen Forlag AS.

Howson, G., Keitel, C. & Kilpatrick, J. (1981). *Curriculum development in mathematics.* Cambridge: University Press.

Huntley, M. A., & Terrell, M. S. (2014). One-step and multi-step linear equations: a content analysis of five textbook series. *ZDM, 46*(5), 751-766. DOI: 10.1007/s11858-014-0627-6

IEA: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (2011). *TIMSS 2015*. Hentet 17. 04. 2015, fra: http://www.iea.nl/brief_history.html

Imsen, G. (2009). *Lærerens verden. Innføring i generell didaktikk.* (4. utgave.) Oslo: Universitetsforlaget.

Johansson, M. (2003). *Textbooks in mathematics education: a study of textbooks as the potentially implemented curriculum.* (Licentiate thesis), Luleå University of Technology, Luleå. (2003:65).

Jones, D. L., & Tarr, J. E. (2007). An examination of the levels of cognitive demand required by probability tasks in middle grades mathematics textbooks. *Statistics Education Research Journal*, *6*(2), 4-27.

Kilpatrick, J. swafford, J. & Findell, B. (Red.) (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. *Mathematics Learning Study Committee: National Research Council*.

Kjærnsli, M., Lie, S., Olsen, R. V., Roe, A. & Turmo, A. (2004). *På rett spor eller ville veier? Norske elevers prestasjoner i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2003.* Oslo: Universitetsforlaget.

Kjærnsli, M., Lie, S., Olsen, R. V. & Roe, A. (2007). *Tid for tunge løft. Norske elevers kompetanse i naturfag, lesing og matematikk i PISA 2006.* Oslo: Universitetsforlagtet.

Kjærnsli, M. & Roe, A. (Red.). (2010). *På rett spor. Norske elevers kompetanse i lesing, matematikk og naturfag i PISA 2009.* Oslo: Universitetsforlaget.

Kjærnsli, M. & Olsen, R. V. (Red.) (2013). *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012.* Oslo: Universitetsforlaget.

Leung, S. S & Silver, E. A. (1997). The Role of Task Format, Mathematics Knowledge, and Creative Thinking on the Arithmetic Problem Posing of Prospective Elementary School Teachers. *Mathematics Education Research Journal 9*(1), 5-24. DOI: 10.1007/BF03217299

Lee, O., & Luykx, A. (2007). Science education and student diversity: Race/Ethnicity, language, culture, and socioeconomic status. I S. K. Abell & N. G. Lederman (Red.), *Handbook of research on science education* (s. 171–197). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Li, Y., Chen, X. & An, S. (2009). Conseptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: the case of fraction devision. *ZDM, 41*, 809-826. DOI: 10.1007/s11858-009-0177-5

Lie, S., Kjærnsli, M., Roe, A. & Turmo, A. (2001). *Godt rustet for framtida? Norske 15-åringers kompetanse i lesing og realfag i et internasjonalt perspektiv*. I Acta Didactica 4/2001. Oslo.

Liu, X. (2009) *Linking Competence to Opportunities to Learn*. *Models of Competence and Data Mining.* 123 Innovations in science education and technology 17. Springer. DOI 10.1007/978-1-4020-9911-3

Mark, M. M., & Shotland, R. L. (1987). Alternative models for the use of multiple methods. I M. M. Mark & R. L. Shotland (Red.). *Multiple methods in program evaluation: New Directions for Program Evaluation 35* (s. 95- 100). San Francisco: Jossey-Bass.

MS: Matematikksenteret. (2014). *Teoretisk bakgrunnsdokument for arbeid med regning på ungdomstrinnet – Revidert våren 2014*. Hentet 21.04.2015 fra http://www.udir.no/Upload/Ungdomstrinnet/Rammeverk/Ungdomstrinnet_Bakgrunnsdokument_regning_vedlegg_2.pdf

McDonnell, L. M. (1995). Opportunity to learn as a research concept and a policy instrument. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *17*(3), 305–322. DOI: 10.3102/01623737017003305

Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, *56*(2-3), 255-286. DOI: 10.1023/B:EDUC.0000040409.63571.56

Ministry of Education and Culture; Finnish National Board of Education; CIMO. (2012). Education in Finland: *Finnish education in a nutshell.* Espoo: Kopijyvä. Hentet 15.04.2015 fra http://oph.fi/download/146428_Finnish_Education_in_a_Nutshell.pdf

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P. & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics*. Boston: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Smith, T. P., Garden, R. A., Gregory, K. D., Gonzalez, E. J., Chrostowski, S. J. & O'Connor, K. M. (2003). *TIMSS Assessment Frameworks and Specifications 2003* (2. utg.). Boston: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Mullis, I. V. S. (2013). Introduction. I I. V.S. Mullis & M. O. Martin (Red.), *TIMSS 2015 Assessment Frameworks.* (s. 3-10). Boston: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

NCTM. (2015a). *Overview*. Hentet 21.04.2015 fra http://www.nctm.org/About/

NCTM. (2015b). *Executive Summary Principles and Standards for School Mathematics*. Hentet 21.04.2015 fra http://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_ExecutiveSummary.pdf

NESH; De nasjonale forskningsetiske komiteer. (2006). *Forskningsetiske retningslinjer for* *samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. [PDF] Hentet 01.05.2015 fra https://www.etikkom.no/globalassets/documents/publikasjoner-som-pdf/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-humaniora-juss-og-teologi-2006.pdf

NOKUT. (2012). *Finland.* Hentet 25.03.2015, fra http://www.nokut.no/no/Fakta/Databaser-og-oversikter/NOKUTs-landdatabase/Finland/#Hovedtrekk

OECD. (1999). *Measuring student knowledge and skills: a new framework for assessment*. OECD, Paris. Hentet 21.04.2015 fra http://www.oecd-ilibrary.org/measuring-student-knowledge-and-skills_5lmqcr2k8rlx.pdf?contentType=%2fns%2fOECDBook%2c%2fns%2fBook&itemId=%2fcontent%2fbook%2f9789264173125-en&mimeType=application%2fpdf&containerItemId=%2fcontent%2fbook%2f9789264173125-en&accessItemIds=

OECD (2013), «Mathematics Framework», in PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy, OECD Publishing.
http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-3-en

Olsen, R. V. og Grønmo, L. S. (2006). *What are the Characteristics of the Nordic Profile in Mathematical Literacy?* I J. Mejding og A. Roe (Red.), Northern lights on PISA 2003 – a reflection from the Nordic countries (s. 47-58). Oslo: Nordic Council of Ministers

Pepin, B. & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: A way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt for the Didactics of Mathematics, 33*(5), 158-175. DOI: 10.1007/BF02656616

Pepin, B., & Haggarty, L. (2007). Making connections and seeking understanding:

Mathematical tasks in English, French and German textbooks. *Paper presentation at AERA, 7*.

Pepin, B., Gueudet, G. & Trouche, L. (2013). Re-sourcing teachers' work and interactions: a collective perspective on resources, their use and transformation. *ZDM, 45*(7), 929-943 DOI: 10.1007/s11858-013-0534-2

Robitaille, D. F. (1995). Foreword. I Howson, G. *Mathematics textbooks: A comparative study of grade 8 texts* (TIMSS monograph No. 3). Vancouver, Canada: Pacific Educational Press.

Scott, J. (1990). *A Matter of Record.* Cambridge: Polity Press og Basil Blackwell Inc.

Sherin, M. G. & Drake, C. (2009). Curriculum strategy framework: investigating patterns in teachers' use of a reform – based elementary mathematics curriculum. *Journal of Curriculum Studies, 41*(4), 467-500. DOI: 10.1080/00220270802696115

Silver, E. A, & Herbst, P. (2007). Theory in Mathematics Education Scholarship. In F. K. Lester, Jr., (Red.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics. Vol II (s. 39-67). Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*, 20-26.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics teaching in the middle school, 3*(5), 344-50. DOI: 129.242.243.74

Stein, M. K., Remillard, J. & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. I F. K. Lester (Red.). Charlotte, N.C., Information Age: 319-369.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and *reasoning*: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33*(2), 455-488. DOI: 10.3102/00028312033002455

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 268-275. DOI: 129.242.243.74

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York: Teachers College Press.

Stevens, F. I (1993). *Opportunity to learn: Issues of equity for poor and minority students.* Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Stevens, F. I. (1997). *Opportunity to learn science: Connecting research knowledge to classroom practices.* Philadelphia, PA: Mid-Atlantic Lab for Student Success.

Thagaard, T. (2003). *Systematikk og innlevelse. En innføring i kvalitativ metode* (2. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

TIMSS (2005, verifisert 2006). *Bakgrunn og dataanalyse*. Hentet 16.04.2015, fra http://www.timss.no/timss05_bakgrunn.html

Travers, K. J. (1993). Overview of the longitudinal version of the second international mathematics study. I L. Burstein (Vol. Red.), *The IEA study of mathematics III: Student growth and classroom processes* (s. 1-27). New York: Pergamon.

UiO: Institutt for lærerutdanning og skoleforskning. Det utdanningsvitenskapelige fakultet. (u.å., a). *TIMSS Norge*. Hentet 07.05.2015 fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/

UiO: Institutt for lærerutdanning og skoleforskning. Det utdanningsvitenskapelige fakultet. (u.å., b). *TIMSS Norge*. Hentet 07.05.2015 fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/pisa/

UiO: Institutt for lærerutdanning og skoleforskning. Det utdanningsvitenskapelige fakultet. (2015). *Frigitte oppgaver*. [PDF] Hentet 30.04.2015 fra http://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/TIMSS/frigitte-oppgaver/index.html

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag*. (Mat1-04). [PDF] Hentet 15.04.2015 fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/

Utdanningsdirektoratet. (2014). *Ansvaret for fordeling av skoledager utover året*. Hentet 15.04.2015 fra http://www.udir.no/Regelverk/Finn-regelverk-for-opplaring/Finn-regelverk-etter-tema/Skoleeiers-ansvar/Ansvaret-for-fordeling-av-skoledager-utover-aret/

Utdanningsdirektoratet. (2014). *Veiledning i lokalt arbeid med læreplaner*. Hentet 15.04.2015 fra http://www.udir.no/Lareplaner/Veiledninger-til-lareplaner/Veiledning-i-lokalt-arbeid-med-lareplaner/Innledning/

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. & Houang, R. T. (2002). *According to the Book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks.* Drodrecht: Kluwer Academic Publishers.

Winter, G. (2000). A comparative discussion of the notion of validity in qualitative and quantitative research. *The qualitative report*, *4*(3), 4. Hentet 14.04.2015 fra www.nova.edu/sss/QR/QR4–3/winter.html.

8 Vedlegg

Vedlegg A: Veileder til kategorisering

Generelle merknader

- Hver graf man tegner er en deloppgave og ett steg, mens det å sette inn ulike tall i samme likning (ala tabell) ikke er flere oppgaver

Oppgaver vi ikke vil kunne kategorisere:

- Oppgaver hvor eleven selv kan velge kontekst, vanskegrad, antall steg og oppbygning
- Har sett det som nødvendig å lage en kategori for blandet kontekst, men om flere kategorier varierer så vil det bli så frie oppgaver at en kategorisering av dem ikke vil gi mening
- Eks. lage oppgave eller spørreundersøkelse; kan til en viss grad forutse hvordan denne vil se ut, og vil i så fall kategorisere den. Da det sto «la en medelev løse oppgaven» (Faktor 3) måtte vi tenke at det var noe som uansett ville gjelde for alle elevene, og slik lot oppgaven seg kategorisere

Kontekst fra PISA:

- Ikke kontekst med mindre det er noe mer enn matematiske former og figurer
- Det må være nevnt navn, land eller noe konkret og virkelighetsnært
- Må se noe utenom oppgaven enn bare et regnestykke
- Hva oppgaven legger opp til… ofte kan løseren selv bringe inn en kontekst, men det kan ikke vi forutse – settes i så fall på BL
- Hvem har dette noe å si for?
- <u>Personal:</u>
    - Har det med deg eller klassen ol å gjøre, så er det også en personlig kontekst
    - Ting man skal gjøre selv – utenom de vanlige, enkle «regn ut»
    - Eks. personlig økonomi, generelle personlig eide og opplevde ting
    - «Nina og Geir…» På personnivå

- Occupational:
  - Mer offentlig, og noe utover deg selv, personlig
  - Holder ikke å si at noen «arbeider» med noe
  - Design/arkitektur – fordi det er noen som har jobbet for å lage det
- Societal:
  - På samfunnsnivå – lokalt, nasjonalt og globalt
  - Omhandler de offentlige og felles tingene
  - Noe man gjør sammen
- Scientific:
  - Naturvitenskapelig
  - Vitenskap og teknologi
  - Vi utelukker matematikkens egne verden
  - Vei, fart, tid – så lenge det ikke har betydning produksjon eller personlig
- Kontekstløs:
  - Alt som ikke passer inn i noen kontekster
  - Oppgaver med kun matematiske former og tekst
- Blandet kontekst:
  - Oppgaver der flere kontekster forekommer
  - Eks. sammensatte oppgaver som ikke er delt inn i deloppgaver
  - Oppgaver som elevene selv skal lage, der vi ikke kan forutse hvilken kontekst de vil velge

Antall steg – aritmetisk kompleksitet:

- Det er vanskelig å vite hvor mange steg hver og en trenger å bruke innenfor en og samme oppgave, men om man må regne ut en ting for å finne noe annet så er det flere steg
- Hvis utregningen kan gjøres med kun ett steg, men at vi anser det som veldig vanskelig, eller at få ville klart det, så regner vi med at det brukes flere steg
- Oppgaver som legger opp til bruk av kalkulator blir ikke ansett som et steg når det bare er øving på å trykke inn ting på denne. Er det derimot delmål som må regnes ut, men at kalkulator bare brukes for effektivitetens skyld, vil disse regnes som steg. Eks

«Regn ut tan 45» - gir ikke noe mer enn trykketrening og blir altså 1 steg. Med mindre du må forstå og tolke det du får ut – altså kunne forklare hva det er.

- PC-oppgaver: Se an hva dataen gjør for deg, og hva du ikke trenger å gjøre når du ikke må tegne opp for eksempel grafer og diagrammer selv
- Står det på papiret, eller må du finne det selv?

- Zero-step:
    - Kan hente infoen rett ut av teksten
    - Trenger ikke å regne ut noe for å finne svaret
    - Å telle (noe som allerede er der/noe konkret), tegne eller lage noe (skisser) som ikke krever utregning
    - Tegne trediagram, graf eller lignende – har den informasjonen du trenger
    - Hente ut info fra for eksempel en graf eller tabell
    - Tegne skisse (får ikke noen ny info)
    - Måle vinkler, sider osv ved hjelp av gradskive og linjal
- One-step:
    - Kun én utregning innen samme deloppgave
    - Trenger ingen delmål for å komme frem til endelig svar
    - Eks. algebra-stykker er kun en oppgave fordi det er samme greia man hele tida jobber med
    - Bare én ting som gjøres…
    - Å telle noe som ikke allerede er der (telle seg fremover eller bakover – rekker)
    - Å regne er ett steg uansett om du gjør det for hånd, i hodet eller på papiret
    - Å følge regelen for omskriving til potensform, mellom ganging/deling av potenser – bruke reglene til å skrive det på en annen måte. Du lager noe nytt.
    - Hver gang man må tenke seg til noe nytt – og ikke bare ser det med en gang
    - Å finne for eksempel et likningsSETT – hvor du har tallene som skal settes inn
    - Å måle opp og tegne noe
- Multi-step:
    - To eller flere steg – altså delmål
    - Når man skal finne både x og y eller annet enn bare én ukjent (der man for eksempel bruker den ene for å finne den andre)
    - Sette prøve på svaret

- Kun flere steg innad samme oppgave, ikke samme operasjon på to av samme type innad en oppgave (da deler man heller inn i flere oppgaver)
- To-i-en-oppgaver ala «Finn fellesnevner og regn ut.» (med faktorisering) Heller enn å dele oppgaven i to…
- Der det gjøres en ting for å finne ut av/komme fram til noe annet…

Levels of cognitive demands – vanskegrad/taksonomi:

- <u>Low-M (Lavere nivåkrav, memorisering):</u>
    - Reproduksjon av tidligere lærte fakta, regler, formler eller definisjoner (slik at man husker det)
    - Kan ikke løses ved hjelp av prosedyrer fordi disse ikke finnes, eller er for kort for det (eller fordi det ikke vil være tid til det)
    - Er ikke tvetydig, kopierer det man tidligere har sett, så det er tydelig hva som skal gjøres
    - Eks. hvordan sette opp et regnestykke, hvordan lage en spørreundersøkelse
    - Ingen sammenheng til konsepter eller mening som ligger bak fakta, regler, formler eller definisjoner – vet ikke hva som ligger bak
    - Finne de rette tallene som det spørres om
- <u>Low-P (Lavere nivåkrav, prosedyrer uten sammenheng):</u>
    - Er algoritmiske. Bruk av prosedyrer som enten er spesifikt lagt opp til, pga tidligere eksempler (men uten at uten at du må tenke deg noe særlig om), erfaringer og plassering av oppgaven (gjerne innad delkapitler)
    - I mindre grad kognitivt krevende, og det er lite tvil om hva som må gjøres og hvordan
    - Ingen tilknytning til konsepter eller mening bak prosedyren
    - Fokuserer på korrekt svar heller enn matematisk forståelse
    - Krever ingen forklaringer, eller beskrivelser av den valgte prosedyren
    - Eks enkel utregning som følger fastlagte fremgangsmåter. «Regn ut» uten kontekst
    - Finne punkt på grafen, hvis et eksempel først har oppgitt hva og hvordan du skal gjøre noe
    - Tegne hjelpefigur

- Sette opp likninger med helt eksakte eksempler i forkant. Evt bare sette inn i tabell for å finne høyere tall…

- <u>High-P (Høyere nivåkrav, prosedyrer med sammenheng):</u>
    - Krever en viss kognitiv anstrengelse. Selv om generelle prosedyrer kan følges, kan det ikke gjøres uten å tenke seg godt om.
    - Fokusere på prosedyrer med det mål for øyet at man skal utvikle en dypere forståelse for matematiske konsepter og ideer
    - Foreslår, direkte eller indirekte, veier å gå som er breie og generelle prosedyrer nært knyttet til underliggende konseptuelle ideer (ikke smale algoritmer som ikke viser noe)
    - Ofte representert på flere måter, ved diagrammer, konkretisering, symboler og situasjoner (sammenheng mellom ulike representasjoner gir mening)
    - Eks «Regn ut» med kontekst, gå fra en representasjon til en annen, lese av en graf (ny situasjon hver gang – mønster; hvor øker/minsker det mest, kurveutvikling)
    - «Trekk slutninger ut fra grafen», «Tolk grafen» Lese hvor fort grafen stiger eller synker, trekke egne slutninger utfra grafen
    - Konstruere figur (litt ettersom – se an eksempelet på forhånd, hvor mye som må brukes på en gang – hvor sammensatt den er)
    - Å sette opp likninger (problemløsning) som ikke har et helt eksakt eksempel i forkant.
- <u>High-D (høyere nivåkrav, å gjøre matematikk):</u>
    - Krever kompleks, ikke-algoritmisk tenking. Ingen forutsatt, innlært tilnærming eller veivalg er direkte foreslått (har ikke sett liknende eksempler)
    - Krever at elevene utforsker og forstår matematiske konsepter, prosesser og forhold
    - Krever selv-overvåking og selv-regulering av sine kognitive ferdigheter
    - Må bruke relevant kunnskap og erfaring, og bruke det riktig
    - Må analysere oppgaven og aktivt utforske grensene som kan begrense mulige løsningsstrategier og løsninger
    - Kreves merkbart kognitiv anstrengelse, og kan medføre angst på grunn av den uforutsigbare oppbygningen

- Eks å tenke «utenfor boksen», problemløsningsoppgaver med svært uklar løsningsmetode, krever at du tenker logisk – ikke algoritmisk

TIMSS 2015 rammeverk:

- *Knowing*:
    - Grunnmuren i matematikken – kunnskapsbase for lett å kunne huske språket, enkle fakta, vite hva som er vanlig og standard føring, hva symbolene representerer og forholdene mellom dem
    - Huske
    - Gjenkjenne
    - Klassifisere/ordne
    - Regne ut: rett fram, enkle utregninger, mer «hverdagslig»
    - Gjenhente
    - Måle, tegne vinkler og skisser
    - Mer hverdagslig enn A
    - Bare å sette inn tall for x el.
    - Noe man kan se med det samme/direkte
    - Det Hvermansen kan – «hverdagsmatte»
    - Enkel faktorisering. For eksempel 6=1*2*3
    - Selv om det er i tabell – hvis det ikke er tabellen som er det viktige
    - Hente ut informasjon fra en graf
    - Å tegne figurer ved hjelp av linjal og gradskive
    - Lage hjelpefigur
    - Kombinatorikk: Rein oppgave uten mye tekst, men med oppgitte tall – tekstoppgaver = A
    - Ca-svar
    - Sortere tall inn i tabell
- *Applying*:
    - Å bruke matematikk i en rekke sammenhenger
    - Fakta, konsepter, prosedyrer og problemer er kjent for eleven
    - Kjente og rutinebaserte oppgaver hvor man bruker det man har lært

- Bestemme fremgangsmåter, bruk av verktøy osv
- Representere/modellere: gå fra en representasjon til en annen, lage et uttrykk eller annet (kunne bruke en prosedyre for dette, eller har fastlagte eks på fremgangsmåter – ikke når du må resonnere)
- Implementere: *sette ut i live* strategier og operasjoner for å *gjøre* oppgaver der man *bruker* matematiske konsepter og prosedyrer
- Når man faktisk må gjøre noe, omså det bare er å telle
- Representere/modellere: Likninger på formen «Anne er tre ganger så gammel som… som er blablabla» og sette inn X og 3X osv
- Der man ganger inn i parenteser, men ikke der man bare løser opp og adderer eller subtraherer (K)
- Mer enn det Hvermansen kan – noe du trenger spesielle regler eller eksempler for å følge. Faktorisering
- Bruke noe for å finne ut av noe annet… følge mer sammensatte utregningsmetoder
- Lage tabell
- Konstruere figurer
- Finne info i tekstoppgaver for så å bruke det
- Eksakte svar
- Regne ut (og sette inn tall) i tabell

- Resonnering:
    - Logisk og systematisk tenking
    - Overføre kunnskap til nye og ukjente situasjoner
    - Der det ikke står direkte som eksempel eller i boka hvordan oppgaven skal løses, hvor du må «tenke omvendt» eller bruke det du kan for å komme fram til en løsning
    - Analysere
    - Integrere/Syntetisere
    - Evaluere
    - Trekke slutninger
    - Generalisere
    - Bevise

- Når man må finne frem til noe som man ikke bare kan tenke seg til (veldig kjapt – bare vet) eller regne ut
- Ikke nødvendigvis utregning, men kan se litt lenger på det for så å finne svaret
- Likninger hvor man faktisk må analysere et innhold for å komme fram til sammenhenger. Eks tabell el til likning/funksjon
- Kan bruke en strategi, men må analysere litt mer for å kunne følge den. Tolke situasjonen.

Kategorisering av geometri:

- Måle noe med gradskive eller linjal = **K, Low-P, KL, 0.** Low-P fordi det er en prosedyre og 0 steg fordi man kan se svaret direkte ved hjelp av gradskiven eller linjalen.
- Tegne noe (bruk gradskive og tegn) = **K,** (Low-P), **KL, 1.** Ett steg fordi man faktisk må lage noe.
- Tegne skisser/ting som ikke brukes noe verktøy til = **K, Low-M, KL, 0**
- Gjenkjenne figurer eller om ting er parallelle osv = **K, Low-M, KL, 0.** Det er bare noe man vet.
- Ting der man må gjøre én ting for å kunne gjøre noe annet. For eksempel må tegne linja AB før man kan tegne vinklene **= 2 steg**
- Konstruere noe = **A,** (Low-P), **KL, 1.** Alltid å Anvende. Varierer om det er Low-P eller High-P. Kan også variere i antall steg ettersom hvor utfordrende oppgaven er.
- Sum av vinkler i trekant og firkant er kun **K, Low-M**
- Regne ut vinkelsummer er **K, Low-P, KL, 1**
- ”Blir det alltid slik” = **R, High-P, KL, 1**
- Tegn et rektangel med omkrets på 16 cm = **K, Low-P, KL, 1**
- Areal og omkrets av sirkler, trekanter og firkanter = **K, Low-P, KL, 1**
- Sett av oppgaver i (tegne og konstruere) = **2 steg**, med mindre det bare er å tegne linje l eller tegne av AB som står i boka. Da er det bare **1 steg**. <u>Eksempel på 1 steg:</u> Tegn en linje l, merk av punkt P på linja. Konstruer normalen l i P. <u>Eksempel på 2 steg:</u> Tegn et

linjestykke AB=9 cm. Finn midtpunktet til linjestykket og kall punktet for P. Tegn midtnormalen til linjestykket AB i P.

- Konstruere vinkler som er halvert. For eksempel 45 grader **= 2 steg**
- Skrive forklaring til konstruksjonen = **K, Low-M, KL, 0.** Low-M fordi det bare er å memorere det du allerede har gjort, som ikke gir 1 steg fordi du ikke må regne noe.
- Tegne hjelpefigur = **K, Low-P, KL, 0.** Så lenge man ikke må regne ut noe for å tegne hjelpefigur.
- Areal av trekant, rektangel og parallellogram er K, trapes og sirkel er å Anvende.
- Pytagoras = **A, Low-P, KL, 1**, så fremt man ikke skal finne katet eller andre ting man ikke har lært.
- Konstruere sirkel= **K, low-P, KL, 1,** ikke A som andre konstruksjoner.
- Oppgaver som sier ”regn ut omkrets og areal av rektangelet” er teknisk sett to oppgaver og ikke 2 steg. Derfor er de delt.

Vedlegg B: Forkortninger til analyse

Land: F = Finland

N = Norge

Bok: FG1/2/3 = Faktor Grunnbok 1/2/3.

FO1/2/3 = Faktor Oppgavebok 1,2,3

Pi7/8/9 = Pi 7,8,9

PiS = Pi Statistik och sannolikhet.

Oppgavetype:

Faktor Grunnbok:

O = Ordinære oppgaver

PDS = Prøv deg selv

NÅLP = Noe å lure på

Faktor Oppgavebok:

K1 = Kategori 1

K2 = Kategori 2

K3 = Kategori 3

LAH = Litt av hvert

Pi:

O = Ordinære oppgaver

R1 = Repetisjon 1 (første i kapittelet)

R2 = Repetisjon 2 (andre i kapittelet)

HU = Hemuppgifter

TN= Tankenöt

TIMSS:

K = *Knowing*

A = *Applying*

R = *Reasoning*

Levels of Demands:

Low-M = Lower-level demands (*Memorization*)

Low-P = Lower-level demands (*Procedures without connections*)

High-P = Higher-level demands (*Procedures with connections*)

High-D = Higher-level demands (*Doing mathematics*)

PISA kontekst:

P = Personal

O = Occupational

So = Societal

Sc = Scientific

KL = Kontekstløs

BL = Blandet

Antall steg:

0 = Zero-step

1 = One-step

2 = Multi-step

Vedlegg C: Eksempel på koding fra Excel-ark

1	Land	Bok	Tema	Delkapittel	Oppgavetype	Oppgavenr	Deloppgaver	TIMSS	Levels of Demands	PISA kontekst	Antall steg
2	N	FG1	Brøk	Hva er brøk?	O	2,1	4	K	Low-M	KL	0
3	N	FG1	Brøk	Hva er brøk?	O	2,2	3	K	Low-P	KL	1
4	N	FG1	Brøk	Hva er brøk?	O	2,3	3	K	Low-P	KL	1
5	N	FG1	Brøk	Hva er brøk?	O	2,4	2	K	Low-P	O	1
6	N	FG1	Brøk	Hva er brøk?	O	2,5	3	K	Low-P	KL	1
7	N	FG1	Brøk	Hva er brøk?	O	2,6	2	K	Low-P	Sc	1
8	N	FG1	Brøk	Hva er brøk?	O	2,7	1	K	Low-M	KL	0
9	N	FG1	Brøk	Hva er brøk?	O	2,8	1	K	Low-M	KL	0
10	N	FG1	Brøk	Hva er brøk?	O	2,9	1	K	Low-M	KL	0
11	N	FG1	Brøk	Hva er brøk?	O	2,10	2	K	Low-P	KL	1
12	N	FG1	Brøk	Hva er brøk?	O	2,11	1	K	Low-P	KL	1
13	N	FG1	Brøk	Hva er brøk?	O	2,12	4	K	Low-P	KL	1
14	N	FG1	Brøk	Hva er brøk?	O	2,13	4	A	Low-P	KL	1
15	N	FG1	Brøk	Hva er brøk?	O	2,14	1	A	Low-P	P	1
16	N	FG1	Brøk	Utviding og forkorting av brøker	O	2,15	6	K	Low-P	KL	1
17	N	FG1	Brøk	Utviding og forkorting av brøker	O	2,16	6	K	Low-P	KL	1
18	N	FG1	Brøk	Utviding og forkorting av brøker	O	2,17	6	K	Low-P	KL	1
19	N	FG1	Brøk	Utviding og forkorting av brøker	O	2,18	3	K	Low-P	So	1
20	N	FG1	Brøk	Utviding og forkorting av brøker	O	2,19	2	K	Low-P	So	1
21	N	FG1	Brøk	Utviding og forkorting av brøker	O	2,20a, c og d	3	A	Low-P	KL	2
22	N	FG2	Brøk	Utviding og forkorting av brøker	O	2,20b	1	A	Low-P	KL	1
23	N	FG2	Brøk	Utviding og forkorting av brøker	O	2,21a	1	A	Low-P	KL	1
24	N	FG1	Brøk	Utviding og forkorting av brøker	O	2,21b-d	3	A	Low-P	KL	2
25	N	FG1	Brøk	Utviding og forkorting av brøker	O	2,22	1	A	Low-P	P	2

Tall og tallforståelse | Tall og algebra | **Brøk og prosent** | Problemløsning | Statistikk, sannsynlig ...

Figur C1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
506	F	Pi8	Tal och procent	Division av bråk	HU	144	3	K	Low-P	KL	1
507	F	Pi8	Tal och procent	Division av bråk	HU	145	3	K	Low-P	KL	1
508	F	Pi8	Tal och procent	Division av bråk	HU	146	3	K	Low-P	KL	1
509	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	147	3	K	Low-P	KL	1
510	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	148	3	K	Low-P	KL	1
511	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	149	4	K	Low-P	KL	1
512	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	150	4	K	Low-P	KL	1
513	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	151	4	K	Low-P	KL	1
514	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	152	4	K	Low-P	KL	1
515	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	153	4	K	Low-P	KL	1
516	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	154	4	K	Low-P	KL	1
517	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	155	4	A	Low-P	KL	1
518	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	156	4	A	Low-P	KL	1
519	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	157	4	A	Low-P	KL	1
520	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	158a, b og d	3	A	Low-P	KL	1
521	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	158c	1	K	Low-P	KL	1
522	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	159	4	A	Low-P	KL	1
523	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	160	4	A	Low-P	KL	1
524	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	161	3	A	Low-P	KL	1
525	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	162	4	A	Low-P	KL	1
526	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	163	4	K	Low-P	KL	1
527	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	164	4	A	Low-P	KL	1
528	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	165	4	A	Low-P	KL	1
529	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	166a og b	2	K	Low-P	KL	1
530	F	Pi8	Tal och procent	Räkna med bråk	O	166c	1	A	High-P	KL	1

Tall og tallforståelse | Tall og algebra | **Brøk og prosent** | Problemløsning | Statistikk, sannsynlig ...

Figur C2

Vedlegg D: Notater og idéer til analysen av oppgaver

Må til en viss grad se på hva boka forteller og viser elevene i forkant av oppgavene de får å løse. Det elevene får sjansen til å lære utav oppgavene avhenger jo av hva de kan fra før av. (Ble nødvendig pga kategorien for Levels of cognitive demands, som viser til om det bare brukes noe som er vist fra før av)

Kontekst fra PISA: Her er ikke oppgavene laget mtp kontekst, så der PISA ville putte alle som falt utenfor inn i scientific, laget vi en egen kategori for «kontekstløs» (KL). I tillegg så vi etter hvert behovet for en kategori for «blandet kontekst» (BL), siden noen oppgaver ikke bare holder seg til en kontekst.

Å skrive en funksjon ut fra tall i tabell; er det High-P da? Avhenger av tidligere gitte eksempler og forklaringer, men vil nok som oftest være det

Når vi skal se på antall steg i en oppgave – Arithmetic complexity – så er det egentlig antall delmål vi ser etter og teller. Det vil variere i alt for stor grad hvor mange mellomregninger hver enkelt vil bruke i en og samme utregning til at dette ville gitt mening å telle. Teller man antall delmål som må utføres derimot, får man et mer helhetlig bilde av hvor sammensatt og kompleks oppgaven egentlig er.

0 steg betyr at man kan finne den infoen man trenger i selve oppgaveteksten – du trenger ikke å regne ut noe ekstra selv. Det betyr ikke at man ikke har gjort noe – man kan ha omformulert, tegnet, konstruert el.

Ser oppgavene som separate i den forstand at selv om elevene har løst mange like oppgaver, så er de fortsatt like vanskelige…

TIMSS: A når det blir vanskeligere utregninger enn det hvermansen kan – som man må se eksempler på i forkant, eller kunne spesielle regler for å løse. Ellers K.

At det er Low-M eller -P betyr ikke nødvendigvis at det ikke er vanskelig nok for elevene – det betyr bare at det ikke er høyt nok nivå, vanskelig nok på generell basis, omfattende nok, eller går nok ut på forståelse til at det kommer såpass høyt opp i taksonomien.

Huske å si at vi har droppet dataoppgavene på slutten av Faktor 3

20/1: Testet ut ny merking på oppgaver i Pi hvor det stilles flere spørsmål innenfor en og same oppgave – uten at de har delt opp i a, b, c osv. Eks oppg. 180 i Pi9, s. 43. Måtte dele inn i 180.1 med bare en deloppgave og 180.1 med 4 deloppgaver. Vil merke egeninndelte oppgaver med q, r, s osv der det er flere oppgaver innad en oppgave.

Vi vurderte også å bare lage en egen kategori for KA fra TIMSS, men det kan være forskjeller innenfor de andre kategoriene også, så derfor prøver vi ut dette nå.

Har vi vært for strenge? Lite R og ingen (?!) High-D…

PiS, kap. 1: 33 oppgaver om akkurat det samme!

At det er Low-M og 0 steg i en oppgave, betyr ikke nødvendigvis at det ikke kan være en nyttig oppgave fordet.

10/2: Vi har prøvd å kategorisere ved å se hver og en kategori for seg, men vi så jo etter hvert at en R og en Low-M aldri vil kunne gå i hop, fordi de motstrider hverandre… Sånn sett blir vel TIMSS også taksonomisk…?

11/2: Prøvde å gjøre samme delkapittelet i Pi9 (s. 78) hver for oss, for å se om vi fortsatt tenker likt om kategoriseringene. Og fordi det var et spesielt vanskelig kapittel å kategorisere, så det var greit å få dobbeltsjekket.

Analyserer hver og en bok for seg. Det er en grunn til at ting ofte må repeteres; elever glemmer fra år til år…

Som regel har vi vært overraskende enige, mens andre ganger har det vært små nyanser som har skilt kategoriseringene våre fra hverandre. Har det noen gang skjedd at vi har vært helt på hver vår side av skalaene? …på alle punkter? Nei.

27/2-15: Kontekst – tvungen/naturlig kontekst – ikke kontekst --- Heller enn å skille mellom alle kontekstene? Teori fra undervisning: Hva kom først – matematikkoppgaven eller konteksten?

Mars -15: Måtte gå igjennom en del oppgaver etter at vi var ferdige å kategorisere, da vi oppdaget at vi hadde skrevet feil noen plasser. Som for eksempel ! i stedet for 1 på steg, bare en S på kontekst – så da måtte vi gå tilbake til de oppgavene og sjekke hva som ble det riktige.

Jo strammere og strengere veileder, dess lettere å kategorisere på en konsekvent og riktig måte… Men dette var veldig vanskelig å få til helt fra starten av, for man så tydeligere og tydeligere etter hvert som man kategoriserte mer og mer hvordan det måtte henge sammen…

Har sittet og gjort mange oppgaver i lag, i tillegg til å gjøre 100 av de samme oppgavene hver for oss, for så å sammenligne. Var stort sett ganske enige, og fikk da rettet opp i usikkerheter

Vedlegg E: Tabeller til diagrammer

Tabell E1

Kognitive domener i Faktor

	Faktor 1	Faktor 2	Faktor 3
Knowing	3127	2200	1572
Applying	550	759	1574
Reasoning	98	149	108

Tabell E2

Levels of cognitive demands i Faktor

	Faktor 1	Faktor 2	Faktor 3
Memorization	365	233	256
Procedures without connections	3195	2569	2602
Procedures with connections	214	298	390
Doing mathematics	1	8	6

Tabell E3

Aritmetisk kompleksitet i Faktor

	Faktor 1	Faktor 2	Faktor 3
Null-steg	508	481	701
Ett-steg	3017	2362	2181
Fler-steg	250	265	372

Tabell E4

Kontekst i Faktor

	Faktor 1	Faktor 2	Faktor 3
Kontekstløs	3092	2141	2280
Kontekst	683	967	974

Tabell E5

Kognitive domener i Pi

	Pi 7	Pi 8	Pi 9	Pi S
Knowing	3341	2459	1662	493
Applying	1084	1418	1910	283
Reasoning	368	211	249	185

Tabell E6

Levels of cognitive demands i Pi

	Pi 7	Pi 8	Pi 9	Pi S
Memorization	712	331	266	185
Procedures without connections	3307	3121	2911	472
Procedures with connections	767	634	632	273
Doing mathematics	7	2	12	32

Tabell E7

Aritmetisk kompleksitet i Pi

	Pi 7	Pi 8	Pi 9	Pi S
Null-steg	959	525	652	450
Ett-steg	3731	3336	2721	492
Fler-steg	103	227	448	20

Tabell E8

Kontekst i Pi

	Pi 7	Pi 8	Pi 9	Pi S
Kontekstløs	4434	3360	2838	293
Kontekst	359	728	983	669

Tabell E9

Kognitive domener i temaer

Faktor	Knowing	Applying	Reasoning
Tall og tallforståelse	1594	164	69
Tall og algebra	1379	1010	154
Brøk og prosent	800	154	8
Statistikk	642	313	66
Geometri	887	590	49
Funksjoner	290	288	15
Måling	840	291	24
Økonomi	433	55	8
Problemløsing	28	24	80
Blanda oppgaver			

Tabell E10

Kognitive domener i temaer

Pi	Knowing	Applying	Reasoning
Tall og tallforståelse	1395	402	107
Tall og algebra	2342	2043	294
Brøk og prosent	960	332	14
Statistikk	478	289	92
Geometri	1690	873	188
Funksjoner	559	305	51
Måling	177	305	14
Økonomi	44	21	3
Problemløsing	4	22	235
Blanda oppgaver	294	115	16

Tabell E11

Levels of cognitive demands i temaer

Faktor	Memorization	Procedures without connections	Procedures with connections	Doing mathematics
Tall og tallforståelse	174	1549	104	0
Tall og algebra	32	2172	218	3
Brøk og prosent	32	906	24	0
Statistikk	195	678	142	6
Geometri	245	1092	189	0
Funksjoner	112	441	40	0
Måling	41	1041	73	0
Økonomi	13	463	20	0
Problemløsing	9	25	92	6
Blanda oppgaver				

Tabell E12

Levels of cognitive demands i temaer

Pi	Memorization	Procedures without connections	Procedures with connections	Doing mathematics
Tall og tallforståelse	307	1304	293	0
Tall og algebra	213	3566	890	10
Brøk og prosent	27	1233	46	0
Statistikk	185	465	209	0
Geometri	516	1771	464	0
Funksjoner	225	610	80	0
Måling	20	400	76	0
Økonomi	0	60	8	0
Problemløsing	0	12	206	43
Blanda oppgaver	2	389	34	0

Tabell E13

Aritmetisk kompleksitet i temaer

Faktor	Null-steg	Ett-steg	Fler-steg
Tall og tallforståelse	182	1590	55
Tall og algebra	237	1938	250
Brøk og prosent	36	848	78
Statistikk	458	538	25
Geometri	297	906	323
Funksjoner	402	188	3
Måling	50	1014	91
Økonomi	17	419	60
Problemløsing	25	93	14
Blanda oppgaver			

Tabell E14

Aritmetisk kompleksitet i temaer

Pi	Null-steg	Ett-steg	Fler-steg
Tall og tallforståelse	325	1568	11
Tall og algebra	443	4010	226
Brøk og prosent	31	1227	48
Statistikk	447	409	3
Geometri	813	1710	228
Funksjoner	473	419	23
Måling	26	284	186
Økonomi	0	60	8
Problemløsing	3	232	26
Blanda oppgaver	24	362	39

Tabell E15

Kontekst i temaer

Faktor	Kontekst	Kontekstløs
Tall og tallforståelse	185	1642
Tall og algebra	242	2183
Brøk og prosent	154	808
Statistikk	676	345
Geometri	150	1376
Funksjoner	291	302
Måling	427	728
Økonomi	429	67
Problemløsing	72	60
Blanda oppgaver		

Tabell E16

Kontekst i temaer

Pi	Kontekst	Kontekstløs
Tall og tallforståelse	195	1709
Tall og algebra	332	4347
Brøk og prosent	380	926
Statistikk	619	240
Geometri	311	2440
Funksjoner	225	660
Måling	75	421
Økonomi	68	0
Problemløsing	108	153
Blanda oppgaver	396	29