Fakultet for humanoria, samfunnsvitenskap og lærerutdanning

Hvordan kan elevers ferdigheter i algebra måles detaljert?

En kvantitativ kartlegging av 215 elever på tiende trinns ferdigheter i algebra

Ingvill Jensaas Petersen

Mastergradsoppgave i Lærerutdanning 5.-10. trinn, mai 2015

LRU-3903 Matematikkdidaktikk

SAMMENDRAG

Forskningen presentert i denne oppgaven gjennomføres på bakgrunn av dårlige resultater i internasjonale undersøkelser, særlig i algebra. For å bidra til å motvirke den negative trenden ønsket jeg å tilegne meg en bred kunnskap om algebraundervisning, særlig hva elever opplever som utfordrende. Denne kunnskapen skal brukes i undervisningsplanlegging. TIMSS og PISA er eksempler på verktøy som kan brukes i denne sammenheng. De er imidlertid utformet internasjonalt, og må derfor bearbeides for å sees i sammenheng med den norske læreplanen. Jeg formulerte derfor følgende problemstilling:

Hvordan kan jeg måle elevers algebraferdigheter detaljert?

For måle elevers algebraferdigheter isolert utformet jeg en kartleggingsprøve. Kartleggingsprøven bygger på Kierans (2007) GTG-modell, som deler algebraiske aktiviteter inn i genererende, transformerende og resonnerende aktiviteter. Ved å anvende modelleringssyklusen til Blum og Leiß (2007) sees de tre aktivitetstypene i en syklus der matematikken oppstår i en virkelighetssituasjon, formuleres og bearbeides matematisk, og fortolkes, valideres og anvendes i virkelighetssituasjonen igjen. De tre konstruktene ble operasjonalisert i oppgaver.

Resultatene fra kartleggingsprøven tyder på at de tre typene algebraiske aktivitetene finnes empirisk. Videre sees det at den største utfordringen i algebraopplæring ligger i de genererende oppgavene, der elevene matematiserer en virkelighetssituasjon. Elevenes ferdigheter i resonnement, fortolkning og validering er relativt gode. Det sees et skille i resultatet for oppgaver som krever formell matematikk og ikke, der elevene scorer dårligere i oppgaver som krever formell bruk av matematikken. Ved å se læreplanen i forhold til GTG-modellen framkom det at læreplanen har en skjev vekting av de tre kategoriene. Dette kan sees i sammenheng med resultatene, da det er den genererende kategorien som tilsynelatende er minst vektet. Resultatene tyder også på at elevene utsettes for læringssituasjoner de ikke har de faglige forutsetningene til å takle.

FORORD

Denne oppgaven markerer avslutningen på et femårig studie. Jeg har vært så privilegert å få være en del av prosjektet «pilot-i-nord», som er den første utdanningen for integrert master i grunnskolelærer 5.-10. trinn. Her fikk jeg mulighet til å spesialisere meg på den elevgruppen jeg trives best med og de fagene jeg interesserer meg mest for. Som første kull har vi i stor grad fått være med på å forme vår egen utdanning, dette har vært både spennende og utfordrende.

Jeg ønsker å trekke frem medstudentene mine for å skape et inkluderende og ambisiøst læringsmiljø der det alltid er lov å be om hjelp. Takk for at dere har motivert meg til å alltid jobbe litt hardere, for god hjelp i eksamensforberedelser, og kortspill og latter på pauserommet. Jeg ser frem til å markere avslutningen av studiet med dere i Alicante!

Veileder og studieleder Ove Gunnar Drageset fortjener også takk, for alltid å ta seg tid til en prat, for gode råd og et givende samarbeid. En takk rettes også til biveileder Per Øystein Haavold, som har bidratt med detaljert kunnskap på kvantitativ metode.

Til slutt vil jeg også takke Carolyn Kieran, som var høyst behjelpelig via e-post.

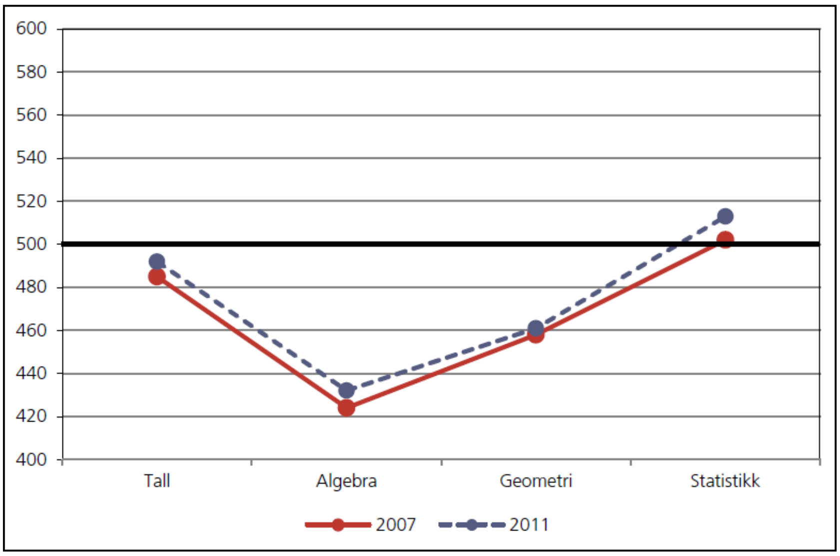
Tromsø, 10. mai 2015
Ingvill Jensaas Petersen

INNHOLD

1 INNLEDNING

1.1 Bakgrunn for oppgaven

Norske elever markerer seg internasjonalt med å være svake i matematikk, særlig i emnet algebra. Dette kan sees i for eksempel TIMSS og PISA, begge internasjonale undersøkelser som måler elevers matematikkunnskaper. De svake resultatene fra PISA i 2003 bekreftet regjeringens mistanker om at norsk skole har utfordringer i forhold til elevers læring. Behovet for en reform i grunnopplæringen framsto som enda mer nødvendig (Utdannings- og forskningsdepartementet, 2004). I 2006 kom reformen: Kunnskapsløftet, der det ble lovet et løft. Dette innebar blant annet en styrking av hovedområdet tall og algebra og en tydeliggjøring av de grunnleggende ferdighetene. Resultater siden da tyder dessverre på at algebra fortsatt er et problemområde for mange norske elever. Dette kan blant annet sees i resultatene fra TIMSS 2011 (Figur 1.1).



Figur 1.1: Resultat per emneområde, norske elever i TIMSS 2011 (Grønmo, Onstad, Nilsen, Aslaksen og Borge, 2012)

Internasjonale undersøkelser som TIMSS og PISA skaper engasjerende debatter i samfunnet, der «alle» har noe å bidra med. Alle har et forhold til skolen. For noen blir det med den erfaringen de har fra egen skolegang. Andre har fått barn som nå er i skolesystemet, eller jobber selv i skolen. Nærheten samfunnet føler til skolen gjør at debatter om skolen engasjerer i alle samfunnslag. Alle har en mening som for dem er innsiktsfull og relevant. Dette fører til at medieoppslag om skolen ofte får stor oppmerksomhet. Oppmerksomheten er ikke ensbetydende positiv for skolen og dem som jobber der. Som lærerstudent sitter jeg ofte igjen med inntrykket av at ansvaret for dårlige resultater primært tilskrives lærerne.

Dårlige resultater i algebra har også vært tema i utdanningsløpet mitt. Inntrykket av et hovedsakelig negativt mediefokus, samt erfaring og kunnskap tilegnet gjennom utdanning og praksis har ført til at algebra har blitt et særlig interesseområde for meg. Jeg ønsker å bidra til å snu trenden. Jeg ønsker at mine elever skal ha de beste mulighetene for å bli gode i algebra – da må jeg selv være god i algebra. Dette danner bakgrunnen for mitt valg av forskningsfokus.

1.2 Forskningsspørsmål

I tråd med opplæringsloven står kravet om tilpasset opplæring sentralt i den norske skolen. Elever skal ha tilpasset undervisning til sine forutsetninger og evner. En fundamental forutsetning for tilpasset undervisning blir derfor at læreren *kjenner* sine elevers forutsetninger og evner. Læreren kan tilegne seg kunnskap om dette på mange måter. TIMSS og PISA er verktøy for nettopp dette. For å anvende resultatene i egen undervisning må læreren tolke resultatene opp mot den norske læreplanen, som definerer innholdet i opplæringa. Det er ikke alltid like lett. Etter å ha lest TIMSS og PISA lurer jeg fortsatt på; hva kan egentlig norske elever i algebra, og hva kan de ikke? På bakgrunn av dette har jeg formulert følgende problemstilling:

Hvordan kan jeg måle elevers algebraferdigheter detaljert?

1.3 Oppgavens struktur

Første kapittel tar for seg oppgavens teorigrunnlag. Her presenteres teori som kan bidra til å svare på problemstillingen. For å måle algebraferdigheter er det nødvendig å definere algebra. Her presenteres historiske perspektiv og dagsaktuelle modeller for algebra, dette for å avdekke ulike aspekter av emnet. Slik får jeg mulighet til å forstå hvordan jeg kan måle algebraferdigheter presist. Ulike modeller for modellering presenteres og drøftes. Dette for å avdekke ulike prosesser i arbeid med algebra i forhold til læreplanen. Læreplanen er styrende dokument for innholdet i opplæringen. Jeg ønsker kun å måle algebraferdigheter som er læreplanfestet, derfor tar jeg for meg læreplanens rammer for algebraopplæring. Her redegjøres det for både spesifikke kompetansemål og grunnleggende ferdigheter. Til sist tar jeg for meg et forskningsperspektiv på elevers ferdigheter i algebra. Her er internasjonale undersøkelser en sentral del.

I metodekapitlet redegjøres det for valg som er tatt for å sikre valide og reliable data i innsamlingsprosessen. Valg av måleinstrument, metode, og utvalg presenteres, i tillegg til planlagt dataanalyse- og bearbeiding. Metodekritikken avslutter kapittel 3.

Resultat er presentert i 3 deler. I første del tar jeg for meg utvikling av et nytt måleinstrument. Utforming drøftes med hensyn til teori, praktiske rammefaktorer, og validitet og reliabilitet. Resultater for intern konsistens presenteres og drøftes her. I del to presenteres resultater fra datainnsamling i form av deskriptiv statistikk og korrelasjonsverdier. Jeg analyserer enkelte elevsvar på oppgaver som har interessante resultater. Resultatene drøftes opp mot teorigrunnlaget, med særlig vekt på internasjonale undersøkelser. I siste del tar jeg for meg læreplanens vekting av algebra i forhold til resultatene presentert i resultat del 2.

2 TEORIGRUNNLAG

Kapitlets struktur

Teorigrunnlaget for oppgaven tar for seg algebra i et historisk perspektiv. Modeller for algebraiske aktiviteter beskrives og sammenliknes med modeller for matematisk modellering. Læreplanens rammer for algebraopplæring redegjøres for i lys av *opportunity to learn,* teorien om at elever har størst mulighet til å lære det de gis mulighet til å lære. Et forskningsperspektiv på elevers algebraferdigheter avslutter kapitlet. Her vektlegges internasjonale undersøkelser.

2.1 Algebra

Definisjonen på algebra har variert gjennom tid og på tvers av kulturer og samfunn (Kieran, 2014). Fra gammelt av og frem til midten av 1900-tallet ble algebra kun sett på som arbeid med likninger, og som et verktøy for symbolmanipulasjon (Kieran, 2007). Bell (1996) hevder at formulering og løsning av likninger er nåtidens form for historisk algebra. Bergsten, Häggström og Lindberg (1997) skriver at algebra ble utviklet som følge av mangel på verktøy for å behandle vanskelige, aritmetiske og geometriske problemer. Ved å erstatte tall med bokstavsymboler var det mulig å regne med «snillere» tall – noe som muliggjorde en tydelig formulering av løsningsstrategier, i tillegg til at metodene fungerte på alle like tilfeller (Bergsten m. fl., 1997). Bergsten m. fl. (1997) understreker at algebra i dag er bruk av bokstavsymboler i regning. Det presiseres at dette ikke må forstås kun som prosedyremessig regning. Bell (1996) nevner fire ulike aspekter ved bokstavregning: 1) bokstavsymbol som en ukjent eller konstant i problemløsning, 2) bokstavsymbol som en beskrivelse av et mønster i generalisert aritmetikk, 3) bokstavsymbol som en variabel eller parameter i studien av relasjoner i funksjoner, og 4) bokstavsymbol som et snillere symbol i studien av strukturer (Bell, 1996).

Fra 1950-tallet og utover har perspektivet på algebra variert i takt med trender og nye læringsteorier, noe som har gitt grobunn for flere og mer nyanserte perspektiv på algebra (Kieran, 2007). En særlig viktig endring er at funksjoner, med sine grafiske tabeller og mange representasjoner, har fått status som en integrert del av algebraen (Schwarts og Yerushalmy, 1992). Også algebraisk resonnement og tenkning har fått en mer sentral rolle i definisjonen, noe som betyr at tankeprosessene som kommer i forkant av arbeid med algebraiske symboler blir tatt mer hensyn til (Kieran, 2014).

Det hersker to ulike syn på algebra i dag; tradisjonell og reformert algebra[1] (Kieran, 2007). Det tradisjonelle synet baserer seg på at algebra handler om form og transformasjoner (Pimm, 1995). Her er fokuset på den symbolske, abstrakte matematikken, for eksempel likningsløsning og forenkling av algebraiske uttrykk. I forbindelse med manipulering av symbolske uttrykk understreker Pimm (1995) algebraens dynamikk: når et uttrykk transformeres gjennom symbolmanipulasjon – men likhet likevel opprettholdes. Den reformerte algebraen fokuserer på ulike representasjoner for funksjonsuttrykk, og på å løse problemer fra den virkelige verden uten å bruke tradisjonell symbolmanipulasjon (Kieran, 2007). Oppslutningen rundt den reformerte algebraen toppet seg ved millenniumskiftet, da National Council of Teachers of Mathematics (2000) statuerte at algebra for trinnene pre-K-12[2] skal innebære forhold mellom mengder, inkludert funksjoner, måter å representere matematiske forhold på, og analyse av forandring (NCTM, 2000).

Kieran (2014) argumenterer for at det er mulig å samles om en entydig definisjon av algebra, til tross for at perspektivene har utviklet seg i ulike retninger. For flere tiår siden omtalte Freudenthal (1977) algebra som arbeid med likninger av første- og andre grad, samt aktiviteter som krever algebraisk tenkning, som gir muligheten til å beskrive sammenhenger og forhold, og å løse prosedyrer på en generell måte. Kieran (2014) mener denne beskrivelsen er tidsriktig den dag i dag. Beskrivelsen tar ikke bare hensyn til det symbolske aspektet av algebraiske aktiviteter, men også tankegangen som legger grunnlaget for algebraisk resonnement, og som skiller algebraen fra aritmetiske aktiviteter, som primært handler om beregninger.

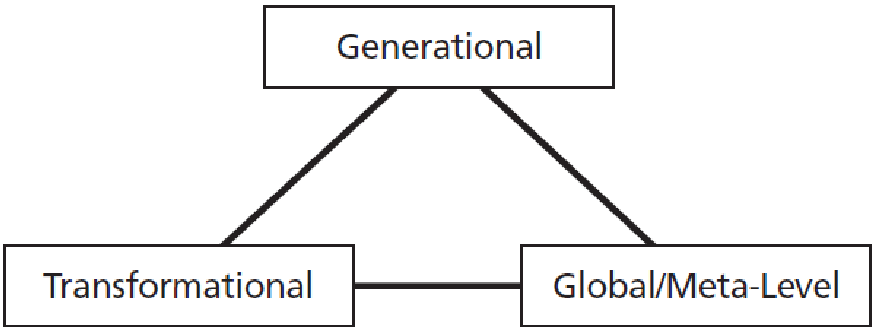
2.2 Algebraiske aktiviteter

2.2.1 GTG-modellen

Kieran (2007) skriver at Lee fant at det hersket syv ulike perspektiver på hva algebra var; 1) et skolefag, 2) generalisert aritmetikk, 3) et verktøy, 4) et språk, 5) en kultur, 6) en tenkemåte, og 7) en aktivitet. Av de syv gjennomsyret idéen om algebra som en aktivitet alle de andre

[1] Oversatt fra henholdsvis «traditional» og «reformed» algebra.
[2] Grunnskolen (Amerikansk 1.-9. trinn)

perspektivene. Kieran (2007) siterer Lee: «*Algebra emerges as an activity, something you do, an area of action, in almost all of the interviews*» (Kieran, 2007, s. 713). På bakgrunn av idéen om algebra som en aktivitet, skapte Kieran GTG-modellen (Kieran, 2007). GTG-modellen (Figur 2.1) deler skolens algebraiske aktiviteter inn i tre kategorier; genererende, transformerende, og resonnerende aktiviteter[3] (Kieran, 2007).



Figur 2.1: GTG-modellen (Kieran, 2007)

Genererende aktiviteter (Generational activities)

I genererende aktiviteter fortolkes situasjoner, verdier, mønstre og forhold, for så å bli representert med algebraiske symboler i uttrykk og likninger (Li, Silver, og Li, 2014) – som er selve objektene i algebra (Kieran, 2007). Typiske eksempel på genererende aktiviteter inkluderer arbeid med a) likninger med ukjente eller variabler som representerer en problemsituasjon, b) uttrykk for generaliserte geometriske mønstre eller numeriske følger, og c) uttrykk for styrende regler for numeriske forhold (Kieran, 2007). I et forskningsprosjekt sammenliknet Wilson, Ainley og Bills (2003) elevers ferdigheter i de genererende og transformerende aktivitetene. En av de genererende oppgavene de satte opp var denne: David er 10 cm høyere enn Con. Con er h cm høy. Hva kan du skrive for Davids høyde? (Wilson m.fl., 2003). Her skal et uttrykk formuleres for å representere en situasjon. Radford (2001) sier at algebraens rolle i de genererende aktivitetene er å tilføre språk for å uttrykke mening. Det kan sees som at hensikten med genererende aktiviteter er å bruke algebraiske uttrykk for å beskrive sammenhenger eksplisitt.

[3] Oversatt fra generational, transformational og global/meta-level activities

Kieran (2007) forutsetter kjennskap til det algebraiske språket og de symbolene som inngår i generelle uttrykk for arbeid med genererende aktiviteter. Variabler, ukjente og likhetstegnet trekkes frem som sentrale objekter (Kieran, 2007). Eleven må også kunne avdekke nyttige sammenhenger eller relasjoner i geometriske mønstre, tallrekker, eller situasjoner, for å vite hva som skal representeres med algebraiske symboler (Radford, 2010).

Transformerende aktiviteter (Transformational activities)

De transformerende aktivitetene er de regnetekniske prosessene i algebra, og refereres ofte til som de «regel-baserte» aktivitetene (Kieran, 2007). I litteraturen defineres ofte grensen mellom aritmetikk og algebra ut fra de transformerende aktivitetene (Filloy og Rojano, 1989). I de transformerende aktivitetene jobbes det eksplisitt med de algebraiske verktøyene – variabler, potenser, parenteser, og det matematiske språket. Kieran (2007) nevner for eksempel å samle like uttrykk, faktorisering, utviding, substitusjon av et uttrykk for et annet, addering og multiplisering av polynomiske uttrykk, potensregning med polynomer, løsning av likninger og ulikheter, forenkling av uttrykk, substitusjon av numeriske verdier i algebraiske uttrykk, og å jobbe med likningsuttrykk som eksempler på transformerende aktiviteter. Ofte handler transformerende aktiviteter om å endre den symbolske formen på et uttrykk for å opprettholde likhet (Kieran, 2007). Et eksempel på en transformerende oppgave er $2a + 5a$ (Wilson m.fl., 2003).

Fra beskrivelsen over kan transformerende aktiviteter forstås som prosesser som foregår helt og holdent i den abstrakte matematikkverdenen, tatt ut av sammenheng og kontekst. Også her forutsettes det kjennskap til algebraisk språk og symboler. Li m.fl. (2014) poengterer at ulike transformerende aktiviteter stiller ulike krav til ferdigheter, og de spiller ulike roller i ulike matematiske emner. I arbeid med likninger der likhet skal oppnås, kreves for eksempel ferdigheter i symbolmanipulering og substitusjon av verdier for algebraiske symboler (Li m.fl., 2014).

Resonnerende aktiviteter (Global/meta-level activities)

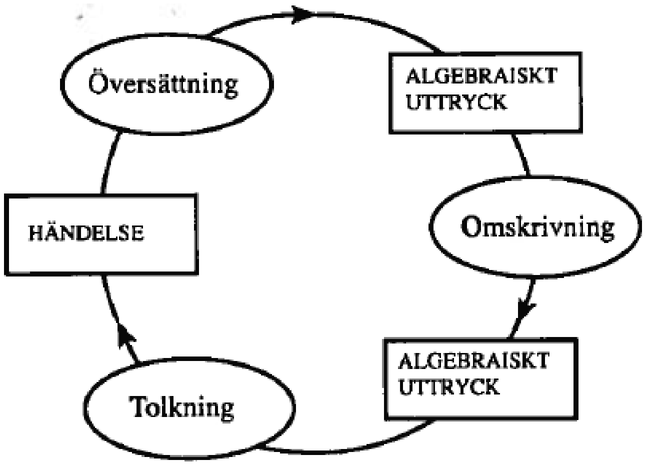
De resonnerende aktivitetene omfatter aktiviteter der algebraen er brukt som et verktøy som ikke er eksklusivt for algebraen (Kieran, 2007). Det må ikke forstås som at aktivitetene tar avstand fra matematikk. I en e-post datert 25.03.15 skrev Kieran at «global/meta-level» refererer til det kontekstuelle og resonnerende aspektet av algebra; altså er aktivitetene i denne kategorien kontekst-basert, og krever matematisk resonnement. I samråd med Kieran valgte jeg en meningsbasert oversettelse av begrepet, derav «resonnerende aktiviteter». Kontekst ble utelatt fra begrepet da kontekst ikke er eksklusivt for de resonnerende aktivitetene, kontekst kan også spille inn i de genererende aktivitetene.

Resonnerende aktiviteter gir ofte grunn og motivasjon for å jobbe med genererende objekter og transformerende prosesser (Kieran, 2007). Felles for alle resonnerende aktiviteter er at det finnes flere måter og komme frem til et svar på, og det skal være mulig å komme frem til svaret uten å bruke formell algebra (Kieran, 2007). Aktivitetene handler ikke engang alltid om å finne et svar, det kan like gjerne være å avdekke et problem eller å vurdere et svar. Som eksempler på resonnerende aktiviteter nevner Kieran problemløsning, modellering, arbeid med generaliserte mønstre, argumentasjon og bevis, prediksjon og formodning, studering av forandring i funksjonelle situasjoner, og å lete etter forhold eller struktur (Kieran, 2007).

Forstått som at en skal kunne jobbe med resonnerende aktiviteter uten å anvende formell matematikk, kan det sees at de resonnerende aktivitetene kan arbeides med uten bruk av genererende eller transformerende aktiviteter. Ved å se forklaringen over kan det forstås som at eleven må evne resonnement, samt å kunne avdekke viktige faktorer for å danne et godt grunnlag for resonnement. Mye her handler om å strukturere en kontekst, og å avgjøre hvilke aspekter som er relevante i videre arbeid med problemet. Forskning har vist at de resonnerende aktivitetene krever mer engasjement og motivasjon fra elevenes side enn transformerende aktiviteter (Li m.fl., 2014).

2.2.2 Den algebraiske syklus

Bell (1996) har skrevet om algebraiske aktiviteter i forbindelse med problemløsning som tilnærming til algebra. Han understreker verdien av å lede elevers oppmerksomhet eksplisitt mot det *han* anser som de tre typene algebraiske aktiviteter; representasjon, manipulasjon og fortolkning (Bell, 1996). Bergsten m.fl. (1997) fremstiller Bells tre algebraiske aktiviteter i en algebraisk syklus (Figur 2.2):



Figur 2.2: Den algebraiske syklus (Bergsten m.fl., 1997)

Den algebraiske syklusen (Figur 2.2) består av tre faser: 1) oversetting til et uttrykk med symboler, 2) omskriving av et symboluttrykk, og 3) tolkning av et symboluttrykk. Syklusen starter i en situasjon eller et problem beskrevet med vanlig språk, gjerne illustrert (Bergsten m.fl., 1997). Forfatterne forklarer at den første fasen er når problemet oversettes til matematisk symboluttrykk. Den andre fasen handler om å bearbeide uttrykket gjennom symbolsk manipulering. I den siste fasen av den algebraiske syklusen skal det bearbeidede symboluttrykket fortolkes opp mot situasjonen igjen (Bergsten m.fl., 1997).

Bergsten m.fl. (1997) fremstiller algebraiske aktiviteter som et problemløsningsverktøy. De understreker at alle fasene må beherskes dersom algebra skal fungere slik. Dersom en av fasene svikter faller hele syklusen sammen (Bergsten m.fl., 1997). Det er derfor med bekymring at de merker seg at fokuset i skolen primært er på bearbeiding og manipulering av algebraiske uttrykk. I likhet med Bell (1996), trekker Bergsten m.fl. (1997) prosessene i den algebraiske syklusen frem som selve essensen i algebra, og kanskje matematikk generelt.

2.2.3 Fellestrekk for algebraiske aktiviteter

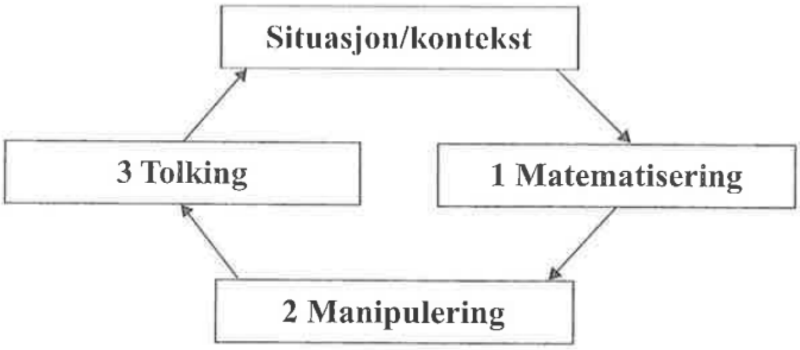
Bells (1996) algebraiske aktiviteter, som fremstilt i Bergstens m.fl. (1997) modell (Figur 2.2), har flere likhetstrekk med Kierans (2007) algebraiske aktiviteter. Den første fasen i den algebraiske syklusen handler om å oversette en situasjon til symbolsk matematikk. Dette sammenfaller med Kierans første kategori, genererende aktiviteter, der situasjoner etc. representeres symbolsk. Neste fase i den algebraiske syklusen handler om å bearbeide symbolske uttrykk. Her kan det sees en parallell til de transformerende aktivitetene, som omhandler eksplisitt arbeid med matematikk. I siste fase i den algebraiske syklusen skal symbolske uttrykk fortolkes opp mot en opprinnelig situasjon igjen. Her er det vanskeligere å se en entydig parallell. Fortolkning er som nevnt en del av de resonnerende aktivitetene til Kieran. Kierans tredje kategori handler også som argumentering, studier av forandring, samt generelt arbeid med generaliserte mønstre. Det kan virke som at Kierans tredje kategori favner noe bredere enn den tredje fasen i den algebraiske syklusen.

2.3 Modellering

Ved å se Kierans algebraiske aktiviteter i sammenheng med den algebraiske syklusen kan det sees som tre komponenter i en problemløsningsprosess. Det kan også trekkes paralleller til det Janvier (1996) refererer til som matematisk modellering. Matematisk aktivitet foregår i to dimensjoner; den virkelige verden og den abstrakte matematikkens verden. Mellom disse dimensjonene foregår det to prosesser; formulering og validering (Janvier, 1996). Et problem som oppstår i den virkelige verden formuleres med matematiske symboler, løses matematisk, for så å valideres mot virkeligheten igjen, går gjennom det som refereres til som modelleringssyklusen (Janvier, 1996). Forklart slik er det vanskelig å skille modellering og problemløsning fra hverandre. Dette drøftes ikke her. Videre vil begrepet modellering brukes som betegnelse for både modellering og problemløsning. Modelleringssyklusen har blitt fremstilt i flere ulike modeller; her presenteres to.

2.3.1 Ulike sider av matematikk

Brekke (2000) poengterer at det å kunne matematikk består av en rekke ulike typer kunnskaper. Dersom du bruker matematikken til å løse et problem vil det i mange tilfeller omfatte en syklus av matematisering, manipulering og tolkning (Brekke, 2000). Han illustrerer det i figur 2.3:

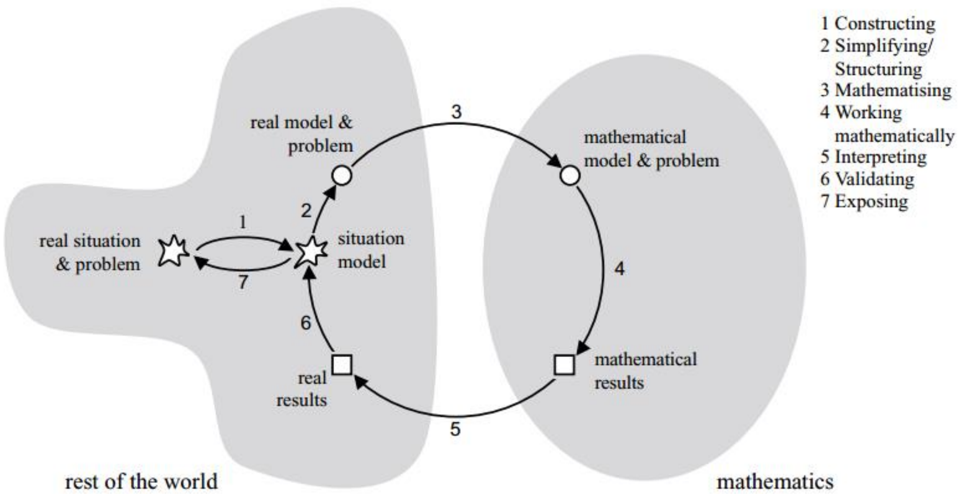


Figur 2.3: Ulike sider av matematikk (Brekke, 2000)

Matematisering går på å se relevansen av en matematisk sammenheng i en konkret situasjon (Brekke, 2000). Det går ut på å uttrykke sammenhengen ved hjelp av matematiske kunnskaper, ofte ved hjelp av matematiske symboler. Fase 2 går ut på å omforme de matematiske sammenhengene eller det symbolske uttrykket for å få fram nye aspekter ved den gitte situasjonen/konteksten. I fase 3 tolkes de nye aspektene inn i den gitte situasjonen for å få frem ny innsikt i den gitte situasjonen slik at en kan løse problemet en hadde i utgangspunktet (Brekke, 2000).

2.3.2 Modelleringssyklusen

Blum og Leiß' (2007) modell for modelleringssyklusen (Figur 2.4) ble skapt i et tverrfaglig forskningsprosjekt der matematikkundervisning, pedagogikk og undervisningspsykologi ble kombinert.



Figur 2.4: Modelleringssyklusen (Blum & Leiß, 2007)

Modellen viser en syklus med syv steg. Første steg tar utgangspunkt i en virkelighetssituasjon, og handler om å formulere et problem i klartekst (Blum og Leiß, 2007). I neste steg struktureres problemet slik at det tydelig fremkommer hvilke faktorer som innvirker på problemet, og dermed må tas hensyn til i problemløsningen. I det tredje steget representeres problemet med matematiske symboler. Det fjerde steget er løsningen av det matematisk representerte problemet, ved hjelp av matematisk manipulering. Svaret som fremkommer i det fjerde steget oversettes så tilbake, ved at det fortolkes opp mot konteksten i det femte steget. Dette innebærer å oversette fra matematikk, og tilbake til den virkelige verden. Det sjette steget er validering av det fortolkede svaret. Sett opp mot problemet; er det et realistisk svar? Er det som forventet? Hvis ikke – start syklusen på nytt fra andre steg. Dersom svaret er realistisk kan det omsider benyttes for å løse problemet i det syvende steget.

2.3.3 Fellestrekk for modelleringsmodeller

Blum og Leiß' (2007) modell har tydelige likhetstrekk med Brekkes (2000) modell, og Bergstens m.fl. (1997) modell. Alle tar utgangspunkt i en virkelighetssituasjon. Videre illustrerer modellene en syklus der et problem blir representert med symbolsk matematikk. Dette er første trinn i Brekke og Bergstens m.fl. modeller, og tredje trinn i Blum og Leiß'. Blum og Leiß har to ytterligere trinn mellom virkelighetssituasjonen og matematiseringen. De spesifiserer at et problem først må oppstå (1), deretter må alle innvirkende faktorer struktureres (2) før problemet kan matematiseres. Deretter løses matematikken med manipulasjon. Dette er andre trinn i Brekke og Bergstens m.fl. modeller, og fjerde trinn i Blum og Leiß' modell. Til sist i Brekkes og Bergstens m.fl. modeller skal svaret tolkes opp mot konteksten. Dette har Blum og Leiß' delt inn i tre trinn: et trinn for validering av svar (6), et for fortolkning mot konteksten (5), og et for anvendelsen av svaret i problemløsningen (7). Det kan sees som at Blum og Leiß' modell representerer det samme som Brekke og Bergstens m.fl., men at førstnevnte spesifiserer flere steg i overgangen mellom den virkelige verden og abstrakt matematikk.

2.3.4 Modellering i algebraiske aktiviteter

Modelleringssyklusen kan sammenliknes med Kierans algebraiske aktiviteter. Kieran beskriver (2014) de genererende aktivitetene som aktiviteter der situasjoner, verdier, mønstre og forhold representeres ved algebraiske uttrykk og symboler. Dette kan forstås som matematisering; trinn tre i Blum og Leiß modelleringssyklus, og første steg i Brekkes modell. De transformerende aktivitetene er beskrevet som aktiviteter der det jobbes eksplisitt med de algebraiske verktøyene (Kieran, 2007). Dette forstås som Blum og Leiß' fjerde steg, å jobbe med matematikken. I Brekkes modell tilsvarer det andre steg, manipulering. Resonnerende aktiviteter er vanskeligere å begrense til ett trinn. I prinsippet kan resonnerende aktiviteter omfatte hele modelleringssyklusen. Kieran understreker at essensen i de resonnerende aktivitetene er at eleven skal bruke resonnement til å løse problemer, at de helst er kontekstbaserte, og ikke krever bruk av formell matematikk. I Blum og Leiß' modelleringssyklus forbinder trinn 1, 2, 5, 6 og 7 matematikken med en virkelig kontekst. I Brekkes modell tilsvarer dette trinn 3, tolkning. Dette er også prosesser der det er naturlig å bruke resonnement for å ta seg videre. Prosessene i disse trinnene kan derfor sees som resonnerende aktiviteter.

2.4 Opportunity to learn

National Research Council (2001) hevder at den viktigste faktoren for elevers læring er «opportunity to learn» (OTL). Med dette menes omstendigheter som gir elever mulighet til å arbeide med og bruke tid på akademiske oppgaver (National Research Council, 2001). Konseptet har vært foreslått som forklaring på forskjeller i elevers læring (Floden, 2002). Fletcher (1971) fremstiller det som en uunngåelig konklusjon at læringsprestasjoner kan sees synonymt med dekning av emnet. Det virker kanskje selvforklarende - åpenbart har elever som tilbys læringsmuligheter bedre sjanser for å lære noe enn elever som ikke gis muligheten (Hiebert og Grouws, 2007). Hiebert og Grouws (2007) argumenterer for et mer nyansert syn på OTL. Elever som utsettes for læringsmuligheter må være klar for læringen (Hiebert og Grouws, 2007). Læreren må se an elevers forkunnskaper, hensikten med læringen, og sannsynligheten for engasjement og motivasjon fra elevenes side. Stein, Remillard og Smith (2007) understreker at OTL ikke er helt og holdent under lærerens kontroll. Læreren er bundet av læreplaner, dette innvirker på elevenes OTL (Stein m.fl., 2007). Det presiseres at læreren som oftest har mulighet til å forme læringen på bakgrunn av læreplanen. Ulikt vektlegging av mål og emner, ulike krav og forventninger til elevene, og disponering av tid har en stor innvirkning på elevenes læringsmuligheter, OTL (Hiebert og Grouws, 2007).

2.5 Læreplanen

I Norge er læreplanen Kunnskapsløftet (LK06) styrende dokument for innholdet i opplæringen (Udir, 2014c). I LK06 kan det leses at algebra forstås som generalisert tallregning der bokstaver eller andre symbol representerer tall, og at «*det gjev høve til å beskrive og analysere mønster og samanhengar*» (Udir, 2013).

Målene for algebraopplæringen er definert i spesifikke kompetansemål og grunnleggende ferdigheter. De fem grunnleggende ferdighetene opplæringen skal gi er digitale ferdigheter, muntlige ferdigheter, å kunne lese, å kunne regne, og å kunne skrive (Udir, 2012). I denne sammenheng er regning interessant. Målene for de grunnleggende ferdighetene er integrert i kompetansemålene for hvert fag (Udir, 2012). Regning som grunnleggende ferdighet skal altså læres gjennom de konkrete kompetansemålene.

2.5.1 Kompetansemål

Kompetansemålene for algebraopplæringen kan leses i hovedområdet «Tal og algebra». Ett kompetansemål herunder er at eleven skal *«løyse likningar og ulikskapar av første grad (…)»* (Udir, 2013). Kompetansemålet kan sees som en transformerende aktivitet, der likningsløsning og manipulering av abstrakt matematikk er sentrale aktiviteter. Et annet kompetansemål innebærer at eleven skal knytte algebraiske uttrykk til praktiske situasjoner (Udir, 2013). Dette kan sees som en resonnerende aktivitet, der fortolkning i forhold til kontekst er sentralt. Ved å kategorisere kompetansemålene under hovedområdet tall og algebra slik kan det sees at de fleste innebærer transformerende eller resonnerende aktiviteter. Det kan også sees at genererende aktiviteter har betydelig lite fokus i kompetansemålene.

2.5.2 Regning som grunnleggende ferdighet

I rammeverket for grunnleggende ferdigheter definerer Udir (2012) regning: Å kunne regne «*innebærer å gjenkjenne regning i ulike kontekster (…) velge holdbare metoder når problemene skal løses, være i stand til å gjennomføre dem og tolke gyldigheten (…), og arbeide med problemstillingen fram til en ferdig løsning*» (Udir, 2012). Det kan forstås som at regning innebærer å gjenkjenne matematiske problemer i virkelighetssituasjoner, og å løse dem.

Det defineres fire ferdighetsområder i regning; 1) *Å gjenkjenne og beskrive* innebærer å identifisere matematikk i ulike situasjoner, og finne relevante problemstillinger, og å analysere og formulere dem på en hensiktsmessig måte. 2) *Å bruke og bearbeide* innebærer å velge strategier for problemløsningen, og utføre beregninger. 3) *Å kommunisere* innebærer å kunne uttrykke, begrunne og formidle resultatet. Det siste ferdighetsområdet, 4) *å reflektere og vurdere*, innebærer å tolke resultater, å vurdere gyldigheten av svaret, og å se det opp mot problemstillingen (Udir, 2012).

I kapittel 2.2.2 fremkom det at problemløsning er når man formulerer et matematisk problem basert på en situasjon, manipulerer uttrykket, for så å fortolke det opp mot situasjonen igjen. Ved å sammenlikne de fire ferdighetsområdene i regning med den algebraiske syklusen sees flere likheter. Begge handler om å bevege seg mellom virkeligheten og den abstrakte matematikkverdenen, og å bruke matematikk for å gjøre det. Både regning og den algebraiske syklus innebærer at problemer matematiseres, løses, og fortolkes mot kontekst igjen. Forstått slik kan det antas at det kreves regning som grunnleggende ferdighet for å arbeide med modelleringsoppgaver.

Regning i algebraiske aktiviteter

Det kan trekkes paralleller mellom de fire ferdighetsområdene i regning og Kierans (2007) tre algebraiske aktiviteter. De genererende aktivitetene kan sees i ferdighetsområdet *å gjenkjenne og beskrive*, der et problem identifiseres og representeres matematisk. Det skal genereres et uttrykk for problemet. I ferdighetsområdet *å bruke og bearbeide* skal uttrykket bearbeides ved hjelp av matematisk manipulering. De transformerende aktivitetene handler om å bruke de algebraiske verktøyene til å manipulere symboler, og kan sees i det andre innholdsområdet. Kierans resonnerende aktiviteter omhandler kontekst og resonnement. Dette sees tydeligst i det fjerde innholdsområdet, *å reflektere og vurdere*, der fortolkning og validering er eksplisitt nevnt. *Å kommunisere* kan sees i alle Kierans kategorier. I de genererende og transformerende aktivitetene fremkommer det som fleksibilitet i uttrykksform, og mulighet til å bytte mellom ulike representasjoner. I de resonnerende aktivitetene kan det sees i begrunning og formidling.

2.6 Internasjonale undersøkelser

Resultatene fra internasjonale undersøkelser ansees som sentrale i arbeid med utvikling av skolepolitikken (Udir, 2014b). Trends in International Mathematics and Science Study

(TIMSS) og Programme for International Student Assessment (PISA) er blant de internasjonale undersøkelsene Norge deltar i. De kartlegger blant annet elevers ferdigheter i matematikk. Videre presenteres de to undersøkelsene og norske elevers resultater innenfor algebra og modellering kort. Relevant forskning dras inn for å belyse kunnskap om elevers ferdigheter fra flere perspektiv.

2.6.1 Trends in International Mathematics and Science Study

TIMSS kartlegger elevers læringskontekst og faglige kunnskaper i matematikk og naturfag. Hovedformålet med undersøkelsen er å bidra til bedre læring i nevnte fag, men utvikling gjennom sammenlikning er også en del av visjonen (Grønmo, Onstad, Nilsen, Aslaksen og Borge, 2012). Elevene som deltar går i 4. og 8. klasse. Her drøftes resultatene fra 8. trinn.

Dårlige algebraprestasjoner

TIMSS måler elevers ferdigheter i fire matematiske emneområder; Tall, algebra, geometri og statistikk (Grønmo m.fl., 2012). Grønmo m.fl. (2012) skriver at det norske resultatet kjennetegnes ved å være markant dårlig i emneområdet algebra. Det understrekes at resultatet er dårlig både sammenliknet med andre nordiske land, utvalgte referanseland, og internasjonalt (Grønmo m.fl., 2012).

Formelle kunnskaper avgjørende skille

Oppgavene i TIMSS deles inn i fem nivåer av vanskelighetsgrad. Grønmo m.fl. (2012) bemerker likevel at det avgjørende skillet for elevers suksess i TIMSS er hvorvidt oppgavene krever formell kunnskap. Oppgavens vanskelighetsgrad har liten innvirkning på om elevene klarer å løse den eller ikke (Grønmo m.fl., 2012).

2.6.2 Programme for International Student Assessment

PISA måler 15-åringers kompetanse innen lesing, matematikk og naturfag (Kjærnsli og Olsen, 2013). I motsetning til TIMSS, som i større grad måler elevenes tekniske ferdigheter, ønsker PISA å måle elevers evne til å aktivt bruke kunnskaper og erfaringer i konkrete situasjoner (Kjærnsli og Olsen, 2013).

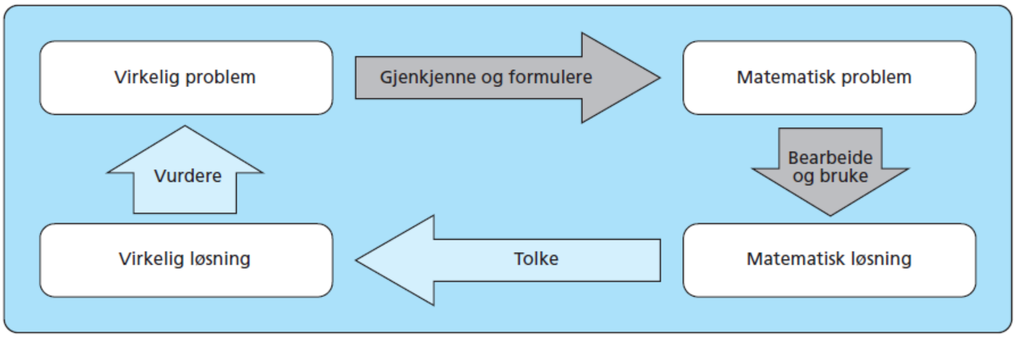
Prestasjoner i algebra

PISA deler matematikken inn i fire innholdsområder. I stedet for den tradisjonelle inndelingen etter matematiske emner er innholdsområdene delt inn etter hvilke grunnleggende fenomener, der matematikk og virkelig verden møtes, som ansees som viktige for 15-åringer (Kjærnsli og Olsen, 2013). De fire innholdsområdene er forandring og sammenheng, rom og form, tall og mål, og usikkerhet. Kjærnsli og Olsen (2013) setter innholdsområdet tall og mål likt med tall og algebra i LK06. Ved å lese beskrivelsen av innholdsområdene kan det likevel forstås at algebra fremkommer i flere av dem. Under forandring og sammenheng nevnes algebraiske representasjoner eksplisitt, og under rom og form understrekes viktigheten av å ha god innsikt i temaet algebra (Kjærnsli og Olsen, 2013). Det eneste innholdsområdet der algebra ikke nevnes eksplisitt er usikkerhet, som er det emnet norske elever scorer best i. I emneområdet tall og mål scorer elevene litt under OECD-gjennomsnittet (Kjærnsli og Olsen, 2013). I forhold til de andre emneområdene er tall og mål det emneområdet vi scorer nest best på.

Matematisk kompetanse

PISA måler elevers evne til å bruke kunnskap og erfaring i konkrete situasjoner. *«Definisjonen av matematisk kompetanse tar utgangspunkt i at elevene skal se at det i mange sammenhenger er nyttig å kunne identifisere og formulere en matematisk løsbar problemstilling»* (Kjærnsli og Olsen, 2013, s. 15). Videre må elevene kunne løse problemstillingen matematisk, og tolke og vurdere svaret opp mot problemstillingen igjen (Kjærnsli og Olsen, 2013).

Dette kan sees som tre prosesser; å gjenkjenne og formulere (formulere), å bearbeide og bruke (bruke) og å tolke og vurdere (vurdere) (Kjærnsli og Olsen, 2013). De tre prosessene i matematisk kompetanse presenteres i en syklisk modell (Figur 2.5):



Figur 2. 5: Modellerings- og problemløsningssyklusen (Kjærnsli og Olsen, 2013)

Å formulere viser til elevens evne til å gjenkjenne og formulere matematikken i en virkelig situasjon (Kjærnsli og Olsen, 2013). Her må eleven skille mellom relevant og irrelevant informasjon, og identifisere vesentlige variabler. Kjærnsli og Olsen (2013) poengterer at dette ofte refereres til som matematisering av hverdagsspråk. Norske elever scorer signifikant dårlig i denne prosessen. Å bruke viser til elevens evne til å løse et problem i sin matematiske form for å komme frem til en matematisk løsning (Kjærnsli og Olsen, 2013). Dette innebærer for eksempel bruk av de fire regneartene, likningsløsning, og dataanalyse. Også her scorer norske elever under OECD-gjennomsnittet, men ikke like dårlig som i den første prosessen. Den siste prosessen viser til elevens evne til å vurdere et svar og fortolke det opp mot konteksten (Kjærnsli og Olsen, 2013). Her må eleven kunne oversette fra abstrakt matematikk til hverdagsspråk. Norske elever scorer litt over OECD-gjennomsnittet i denne prosessen.

Trender i PISA

Kjærnsli og Olsen (2013) skriver om trender i resultatene fra PISA. En trend er at elever som scorer høyt totalt sett, scorer høyt i prosessen å formulere. Disse elevene kjennetegnes av å gjenkjenne matematikken i mange ulike situasjoner (Kjærnsli og Olsen, 2013). Videre sees det at den relative scoren eleven får i prosessen å bruke, er den samme de får totalt sett. Det er også en trend at elever som scorer høyt på prosessen å vurdere scorer lavt på å formulere, og omvendt (Kjærnsli og Olsen, 2013). Det tyder på at elever enten er flinke på formell kompetanse, eller resonnement og vurdering.

Prestasjoner i algebraiske aktiviteter i PISA

Kjærnsli og Olsen (2013) sammenlikner de tre prosessene med ferdighetsområdene i regning som grunnleggende ferdighet. De viser at tre av prosessene er direkte tilordnet hverandre. Å formulere tilordnes ferdighetsområdet å gjenkjenne og beskrive fra LK06. Begge handler om å matematisere en hverdagssituasjon. Å bruke tilordnes å bruke og bearbeide fra LK06, også her finner vi samme innholdsbeskrivelse; å jobbe med og manipulere matematikk i abstrakt form ved hjelp av regnetekniske midler. Å vurdere kan tilordnes å reflektere og vurdere fra LK06. Disse prosessene handler om å fortolke og vurdere matematikk opp mot virkelighet og kontekst, ved hjelp av resonnement og argumentasjon. I PISA inngår det fjerde ferdighetsområdet fra LK06, kommunikasjon, i de tre andre (Kjærnsli og Olsen, 2013). Som vist i kapittel 2.5.2 kan Kierans algebraiske aktiviteter sees i ferdighetsområdene. Forstått slik kan det sees at Kierans algebraiske aktiviteter måles i PISA. Sett slik scorer norske elever signifikant dårlig i genererende aktiviteter, relativt dårlig i transformerende aktiviteter, og litt over snittet i resonnerende aktiviteter.

2.6.3 Forskningsperspektiv på algebraferdigheter

Matematisering

Den genererende aktiviteten å generere likninger og algebraiske uttrykk for å representere forhold mellom tall i en tekstoppgave er kjent for å være noe elever sliter med (Kieran, 2007). Forskning viser stadig at elever foretrekker aritmetiske resonnement over likningsløsning i forbindelse med løsning av tekst- og problemløsningsoppgaver (Bednarz og Janvier, 1996). Mye av dette skyldes mangel på formell kompetanse. Forskning har også vist at det kan spores tilbake til elevers manglende evne til artikulere struktur eller mønster i en sammenheng ved hjelp av hverdagsspråk (MacGregor og Stacey, 1993). Lee (1996) fant at problemet ikke nødvendigvis ligger i å finne et mønster i en sammenheng, men å finne mønsteret som faktisk beskriver sammenhengen. Hun understreker derfor viktigheten av elevens evne til å avdekke flere mønstre, og å kunne gå bort fra mønstre som ikke beskriver sammenhengen presist (Lee, 1996).

Miyakawa (2002) fant at vanskeligheter med å formulere matematiserte bevis og argumenter kunne stamme fra elevers manglende kompetanse i matematikk generelt. Dersom de skulle formulere formelle bevis gjorde de det i to steg; først verbalisering, deretter symbolisering (Kieran, 2007). Healy og Hoyles (2000) fant at elever foretrekker å bruke eksempler på tall, deretter formulere en begrunnelse verbalt, ovenfor å bruke algebra som begrunnelse – dette til tross for at de fastslår at algebra er den måten de oppnår best karakter på. Dette skyldes primært manglende formalkompetanse (Healy og Hoyles, 2000).

Bruk av bokstaver

Brekke (2000) har forsket på elevers oppfatninger av bokstaver i matematikk. Han trekker høy grad av overgeneralisering frem som en utfordring med matematikkundervisning (Brekke, 2000). Med dette menes at elever ofte tilskriver nye ideer og begreper til alle nye situasjoner. På den måten oppstår misoppfatninger; ufullstendige tanker om et begrep som fører til systematiske feil i arbeid med matematikk (Brekke, 2000). Videre fant han at noen elever tok i bruk matematiske notasjoner som var mer avanserte enn oppgaven krevde. Brekke (2000) forklarer dette ved at elevene antakeligvis nylig har jobbet med dette i undervisning. Elever er vant med å bli testet i lærestoff som nylig er gjennomgått, og når det ikke er forankret i forståelse blir det ofte brukt ukritisk (Brekke, 2000). Dette beskrives som «*trolig et mer grunnleggende problem i matematikkundervisningen enn å ikke kunne skille mellom for eksempel 2k og* k^2» (Brekke, 2000, s. 22). Brekke (2000) hevder også at det viser at en del konvensjoner eller notasjoner i faget er «tomme for innhold» for mange elever.

Brekke (2000) fant at elever har mange, ulike oppfatninger om bruk av bokstaver og symboler i algebra. «Lack of closure» er et vanlig problem som kan sees i sammenheng med aritmetikken. Elevene er vant med å avgi ett tall som endelig svar, og vegrer seg derfor for å la en addisjon stå som svar (Brekke, 2000). Linchevski og Livneh (1999) har også undersøkt sammenhengen mellom elevers vansker med numeriske strukturer og elevers vansker med algebra. Det fremkom at elevene gjorde de samme feilene i algebraiske oppgaver som de gjorde i liknende, aritmetiske oppgaver (Linchevski og Livneh, 1999). Det har også vist seg at noen elever ser på bokstaver som koder. For eksempel er bokstaven *e* den 5. i alfabetet, bokstaven e kan derfor tilsvare tallet 5 (Brekke, 2000). Arbeid med forenkling av algebraiske uttrykk er noe som brukes relativt mye tid på i undervisningen av algebra i ungdomsskolen. Vanlige regnefeil i forbindelse med forenkling av algebrauttrykk er feil prioritering av regneoperasjoner, feil relatert til bruk av parentes, og feil relatert til bokstaver og potenser (Brekke, 2000).

Brekke (2000) foreslår at de fleste regnefeilene skyldes en instruksjonsbasert undervisning, i stedet for en undervisning som fokuserer på forståelse for de tekniske prosessene. Et balansert fokus på begrepsforståelse og ferdighetstrening vil kunne rette på elevers manglende forståelse for de regnetekniske prosessene (Brekke, 2000). Dette kan sees i sammenheng med at Graham og Thomas (2000) foreslår å koble transformerende aktiviteter opp mot genererende, for å gi mer mening til de transformerende aktivitetene. Med dette forstås at regnetekniske prosesser ikke må læres isolert, men i en kontekst og sammenheng som tilfører mening til prosessene. Meningsbyggingen bidrar til å skape en bedre forståelse for de transformerende prosessene (Graham og Thomas, 2000).

Representasjonsform

I en studie så Nathan, Stephens, Masarik, Alibali og Koedinger (2002) på elevers evne til løse problemer ved å bruke tabeller, grafiske, verbale og symbolske fremstillinger – og å oversette mellom disse. De fant at representasjonsformen hadde en sterk innflytelse på elevens problemløsning og at tabeller var foretrukken form for representasjon (Nathan m.fl., 2002). I en studie som bygde på denne så Koedinger og Nathan (2004) på elevenes evne til å oversette en situasjon til en likning. I mindre enn 5 % av tilfellene greide elevene å formulere den riktige likningen. Resultatene tydet på at elevenes vansker med matematiske likninger skyldes manglende forståelse for de formelle, symbolske representasjonene av numeriske relasjoner (Koedinger og Nathan, 2004). Videre antydet Koedinger og Nathan (2004) at elevenes problemer kunne sees i sammenheng med at det algebraiske språket krever ferdigheter av elevene som de ikke møter i aritmetisk eller hverdagslig språk.

Mason (1996) fant at bruk av tabeller i generaliseringsprosesser kunne kortslutte rikdommen og nytten i en oppgave, fordi elever automatiserte prosessen fra å sortere tallene, til å stille de opp og formulere standardiserte uttrykk. Han hevdet at framgangsmåten hindret elevene i å gjenkjenne underliggende strukturer og den algebraiske representasjonen, og foreslo visuelle fremstillinger og figurmanipulasjoner som hjelpemidler for å konstruere algebraiske formler (Mason, 1996).

3 METODE

Kapitlets struktur

I dette kapitlet redegjøres det for datainnsamling og dataanalyse. Valg gjort i forbindelse med metode, måleinstrument, utvalg og analyseverktøy presenteres med hensyn til validitet og reliabilitet. Avslutningsvis drøftes metodekritikk.

3.1 Begrunnelse for valg av metode

For å svare på problemstillingen kunne jeg valgt både kvalitativ og kvantitativ metode for datainnsamling. Valget falt på kvantitativ metode, noe som begrunnes med to argument: ønske om å måle algebra-ferdigheter isolert, og muligheter til å gjøre antakelser utover utvalget.

Det første argumentet er i tråd med problemstillingen. Jeg ønsker å måle elevenes algebraferdigheter fritatt fra kontekst og omstendigheter. Kvalitativ forskning tar for seg fenomener i en kontekstuell sammenheng, med rike beskrivelser og fleksible datainnsamlingsmetoder (Cohen, Manion og Morrison, 2007). Grundige beskrivelser av kontekst og sammenheng er nødvendig for å gi leseren et detaljert bilde av konteksten forskningen er gjort i, slik at leseren selv kan ta stilling til drøfting og resultat. Kvantitativ forskning tar for seg utvetydige, oftest numeriske data (Christoffersen og Johannessen, 2012). I tråd med positivistisk vitenskapsmetode følger kvantitativ forskning prinsipper som kontrollerbarhet, muligheter for replikasjon, forutsigbarhet, kontekst-frihet og observerbarhet (Cohen m.fl., 2007). Sett opp mot problemstillingen vil kvantitativ metode være mest hensiktsmessig.

Internasjonale undersøkelser er utgangspunkt og inspirasjon for problemstillingen. For å kunne sammenlikne forskningen min med TIMSS og Pisa ønsker jeg å ha mulighet til å generalisere. Et stort, representativt utvalg er et effektivt verktøy i denne sammenheng (Cohen m.fl. 2007). Dette er langt mer ressurskrevende i kvalitativ forskning enn i kvantitativ forskning. Grunnen til dette er at man i kvalitativ forskning ønsker å samle inn mest mulig informasjon om et fenomen, mens man i kvantitativ forskning benytter standardiserte innsamlingsverktøy (Christoffersen og Johannessen, 2012). Dette gir mindre rom for tolkning, og kan sees i sammenheng med forrige argument. Christoffersen og Johannessen (2012) understreker at dette gir et bedre grunnlag for sammenlikning og generalisering. Med hensyn til tid- og arbeidsressurser tilgjengelig var kvantitativ metode mest hensiktsmessig i denne sammenheng.

3.2 Begrunnelse for valg av måleinstrument

For å samle inn standardiserte data på elevers algebraferdigheter så jeg det som hensiktsmessig å benytte en kartleggingsprøve. Det er effektivt med tanke på tid- og arbeidsressurser, og det sikrer at alle målinger gjøres på samme måte. Videre ønsket jeg å gjennomføre forskningen deskriptivt. Dette innebærer at det ikke ble gjort noen antakelser om utfall eller bakenforliggende faktorer – målet med datainnsamling er kun å beskrive tilstanden slik den er (Cohen m.fl., 2007). En standardisert test egner seg godt til dette. Det var ikke mulig å oppdrive en kartleggingsprøve som testet det jeg ønsket å teste, jeg utviklet derfor en ny prøve. Utforming av måleinstrument beskrives grundig i kapittel 4.

3.3 Begrunnelse for valg av bakgrunnsvariabel

Utover algebraferdigheter var jeg interessert i å få et inntrykk av hvor kjent de ulike oppgavetypene var for elevene. Det var interessant å se resultatene på prøven i forhold til dette. Videre var det interessant å se hvilke oppgaver som angivelig arbeides mest med i skolen.

For å måle elevenes kjennskap til de ulike oppgavetypene valgte jeg å legge inn en bakgrunnsvariabel i kartleggingsprøven. Ved siden av hver oppgave er det plassert en skala elevene skal krysse av på. For å utvikle en skala som skulle oppfattes som utvetydig var jeg oppmerksom på ordlyd og antall alternativer i skalaen. Jeg testet flere skalaversjoner på medstudenter som ikke har matematikk. På bakgrunn av dette og hjelp fra veileder kom jeg frem til skalaen i figur 3.1 (heretter omtalt som frekvensvariabel).

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Figur 3.1: Frekvensvariabel

Frekvensvariabelen ble plassert ved siden av hver oppgave. Innledningsvis i kartleggingsprøven ble den presentert for elevene. Her ble det spesifisert at elevene skulle krysse av for hvor mange ganger de hadde jobbet med den type oppgave boksen stod ved siden av.

3.4 Utvalg

Utvalget i kartleggingen bestod av 215 elever på tiende trinn. De fordelte seg på 11 klasser og to ungdomsskoler innenfor et begrenset, geografiske område.

3.4.1 Populasjon

Første trinn i utvalgsprosessen var å bestemme populasjon. For å svare på problemstillingen ble primærkilden brukt; elevene selv. Populasjonen ble avgrenset til elever på tiende trinn i Norge. Da er det større sjanse for at alle elevene i utvalget har hatt mulighet til å lære seg det som kartlegges.

Felles krav til matematikkundervisning ved alle ungdomsskoler i Norge er kompetansemålene, samt 313 timer matematikk fordelt på 8., 9. og 10. trinn (Udir, 2014a). Ungdomsskoler planlegger ulik progresjon. Noen skoler følger spiralprinsippet og har algebra hvert år, andre skoler har det kun på niende trinn. Ved å ha elever på åttende eller niende trinn ville det altså vært en viss risiko for at elevene ikke hadde hatt algebraundervisning. Jeg ønsket å måle hva elever forstår og hva de sliter med *etter* opplæring. Ved å teste elever på tiende trinn var sjansen størst for at elevene hadde hatt mulighet til å lære det som ble testet.

3.4.2 Utvalgsmetode

Aarø (2007) poengterer at det ofte er umulig å undersøke en hel populasjon. I kvantitative undersøkelser er det derfor vanlig å trekke tilfeldige utvalg av en populasjon (Aarø, 2007). I dette tilfellet var det ikke mulig å kartlegge hele populasjonen, det ble derfor gjort et utvalg. Det er ønskelig at både utvalgets størrelse og metode for utvelging bidrar til et mest mulig representativt utvalg. I dette prosjektet har tids- og arbeidsressurser lagt begrensninger både på utvalgets sammensetning og størrelse, noe som har hatt innvirkning på utvalgets representativitet. Metode for utvalg er bekvemmelighetsutvalg, som innebærer at det velges grupper som er lett tilgjengelige (Aarø, 2007). Bekvemmelighetsutvalg gir ikke representative data (Cohen m.fl., 2007), noe som er tatt i betraktning i resultatdrøftingen.

3.4.3 Rekruttering

Skoler ble kontaktet med forespørsel om deltakelse på bakgrunn av elevantall. For å få et stort utvalg uten at det skulle være for arbeidskrevende var det attraktivt å ha få, store skoler med. Skoler kontaktes jevnlig med forespørsler om deltakelse i undersøkelser og forskning, og i en travel skolehverdag kan det være lite gevinst for lærerne å samtykke til å delta i et masterprosjekt. For å gjøre det mer attraktivt å delta ble skolene tilbudt å få resultatene ferdigrettet og satt opp i egne dokument, samt en garanti på at deltakelse ikke ville medføre noe merarbeid. De fikk også tilbud om å få resultatene presentert muntlig, med mulighet til eventuelle oppfølgingsspørsmål.

I et møte med de deltakende skolenes mattelærere ble informasjon om forskningsprosjektet formidlet. På bakgrunn av tilbakemeldinger fra lærerne ble det gjort små justeringer slik at det skulle bli lettere å gi tilbakemelding til lærerne som de kunne bruke videre i sitt vurderingsarbeid. Det ble blant annet lagt inn klasse- og elevnummer på forsiden av kartleggingsprøvene. Det ble også gjort bestemmelser som skulle sikre at deltakelse krevde minst mulig av lærerne. Alle kodinger som ble brukt i rettingen av prøvene ble loggført og samlet i et eget dokument som ble tilsendt lærerne sammen med resultatdokumentene.

Etter møte med to skoler der samtlige lærere samtykket til deltakelse var utvalget på omtrent 250 elever. Dette ga et relativt stort slingringsmonn, i tilfelle noen elever var borte da kartleggingen ble gjennomført.

3.4.4 Etikk

Nummeringen på kartleggingsprøvene var ukjent for alle andre enn de respektive lærerne. Det er derfor ikke mulig å identifisere enkeltpersoner i forskningen, og dermed ikke meldepliktig (NSD, 2015). I tråd med de forskningsetiske retningslinjene for samfunnsvitenskap, jus og humanoria har informanten rett til selvbestemmelse og autonomi (Christoffersen og Johannessen, 2012). Dette innebærer at den som deltar i forskningen skal ha mulighet til å bestemme over egen deltakelse. I dette tilfellet har lærerne tatt avgjørelsen på vegne av elevene sine. Dersom elever ikke ønsket å delta i forskningen så var dette opp til hver enkelt lærer.

I internasjonale undersøkelser og nasjonale prøver, er det en viss fritaksprosent (Udir, 2014b). Dette innebærer at en andel av elevene ikke deltar i testen, noe som gir mindre representative data. I denne forskningen er ingen fritatt, det er derfor mer representativt enn hvis for eksempel alle med IOP i matematikk hadde vært fritatt.

3.5 Validitet og reliabilitet

Validitet og reliabilitet er sentrale begrep i forskning. Aarø (2007) skrev at validitet kan oversettes til gyldighet, og at dersom en undersøkelse er valid måler den det vi faktisk ønsker å måle. Reliabilitet sier noe om påliteligheten i undersøkelsen - hvor nøyaktige data som er samlet inn (Aarø, 2007). Cohen m.fl. (2007) sier at en undersøkelse er verdiløs hvis den ikke er valid. Det er lagt mye arbeid i å utarbeide måleinstrument slik at data skal bli valide og reliable, og det redegjøres her for de grep som er gjort i den forbindelse. Utfyllende beskrivelser gis i forbindelse med utforming av kartleggingsprøve i kapittel 4.

3.5.1 Validitet

Aarø (2007) fastslår at en valid undersøkelse måler det vi ønsker å måle. Han understreker viktigheten av samsvar mellom begreper og måleinstrumenter. En annen måte å si det på er at forskning som er valid er korrekt (Murphy og Davidshofer, 2005). Selv om Cohen m.fl. (2007) erklærer invalide undersøkelser som verdiløse, understreker Gronlund (1981) at validitet ikke må sees som en absoluttilstand, men noe som kan oppnås i ulik grad. Å være for bundet av regjerende paradigmer, ville vært en oppskrift på stagnasjon og konservatisme (Cohen m.fl., 2007). Cohen m.fl. (2007) mener derfor at det er viktig at forskeren dedikerer tid og plass til å drøfte valg som er tatt for å sikre validitet.

Ulike forskere opererer med ulike typer validitet (Aarø, 2007) (Cohen m.fl., 2007) (Murphy og Davidshofer, 2005). I forbindelse med forskningen min er følgende aktuelle: innholdsvaliditet, ytre validitet og konstruktvaliditet. Det redegjøres her for hva de ulike typene innebærer, og hvordan jeg har gått fram for å sikre de i forskningen min.

Innholdsvaliditet

Innholdsvaliditet ønsker å demonstrere at forklaringen for en bestemt hendelse eller et bestemt fenomen kan vedvares av dataene (Cohen m.fl., 2007). Dersom den er oppnådd innebærer det at en «*måler et representativt eller adekvat spekter av delegenskaper ved det forhold en ønsker å måle*» (Aarø, 2007, s. 22). Hvis kartleggingen har høy innholdsvaliditet genererer den altså data som bidrar til å svare på problemstillingen (Murphy og Davidshofer, 2005). Cohen m.fl. (2007) understreker at det ikke bare handler om det teoretiske, men også hvordan praktiske forhold innvirker på forskningen.

Ved hjelp av teoretisk triangulering i konstruktkonstruksjon og resultatdrøfting, samt hjelp av flere medstudenter, elever, lærere og veileder til utforming av måleinstrument og bearbeiding av data har jeg forsøkt å sikre innholdsvaliditet i forskningen min. Med teoretisk triangulering menes at minst to teoretiske perspektiver benyttes for å belyse samme aspekt (Cohen m.fl., 2007), her algebra. Dette beskrives grundig i kapittel 4. Innholdsvaliditeten sikres også gjennom konstruktvaliditet.

Cohen m.fl. (2007) trekker også frem praktiske aspekter som tidsramme og deltakernes motivasjon som eksempler på faktorer som kan svekke innholdsvaliditeten. Det er ikke nok å tenke på at alle dimensjoner av fenomenet algebra skal måles i planlegging av datainnsamling, det må også tas praktiske hensyn (Murphy og Davidshofer, 2005). Jeg tok sikte på å utforme kartleggingsprøven beregnet til én skoletime på ca 45 minutt.

Tidsrammen la visse begrensninger på innholdet i kartleggingsprøven, dette kan svekke innholdsvaliditeten. Blant annet ble kun de mest sentrale dimensjonene tatt hensyn til i konstruktkonstruksjon. Vanskelighetsgrad ble tilpasset læreplanen, men også etter veiledning fra en erfaren ungdomsskolelærer. Slik ble oppgavene tilpasset aldersgruppen så godt som mulig, gitt de praktiske rammefaktorene. Da dette var gjort testet jeg prøven på en elev med middels måloppnåelse på tiende trinn. Eleven brukte ca 30 minutter, noe jeg mente var et godt utgangspunkt for videre justeringer. I tillegg til tidsforbruk fikk jeg tilbakemeldinger på tekstformulering og figurplassering. Oppgavene ble utformet med så lite tekst som mulig, samt i en skrifttype som har vist seg å være leservennlig for de fleste, Arial (Bernhard, Lida, Riley, Hackler, og Janzen, 2002). Dette for å sikre at minst mulig tid brukes på å lese oppgavene.

Som nevnt kan elevers motivasjon være en trussel mot innholdsvaliditeten, og en potensiell feilkilde undersøkelsen. Erfaringer viser at elever ikke legger så mye arbeid i prøver de ikke mottar vurdering på. Dette er ikke så mye å gjøre med. Kartleggingsprøven er utformet slik at det skal kreve minst mulig innsats fra elevens side å delta.

Ytre validitet

Ytre validitet forteller oss hvorvidt resultater fra undersøkelser kan generaliseres til resten av populasjonen, og til andre tilfeller eller andre situasjoner (Aarø, 2007). Flere aspekter må tas i betraktning for å oppnå ytre validitet. Det ene er sammensetningen av utvalget, som skal være representativt for sin populasjon (Aarø, 2007). Et representativt utvalg vil gi grunnlag for generalisering med økende størrelse. Videre skal det undersøkte fenomenet måles isolert, uten at omstendigheter blir tatt i betraktning (Cohen m.fl., 2007). Cohen m.fl. (2007) nevner også som krav til ytre validitet at konstruktene som brukes ikke er særegne for gruppen som testes.

Utvalget jeg har brukt er ikke representativt, og gir dermed ikke grunnlag for generalisering i seg selv. Dersom jeg skal gjøre antakelser utover utvalget må jeg derfor benytte deduksjon (Cohen m.fl., 2007). De andre kravene for ytre validitet er oppfylt. Omstendighetene rundt kartleggingen tas ikke i betraktning, algebraferdigheter måles isolert. Videre kan konstruktene generaliseres til andre grupper: Algebra er ikke relativt for mennesker med ulike kulturer, nasjonaliteter, livssyn, eller av ulike kjønn og aldre. På bakgrunn av isolerte data og et adekvat utvalg brukes logisk deduksjon til å generalisere. Det vil si at enkelthendelser, eller dataresultater belyses med teori for å drøfte og generalisere.

Konstruktvaliditet

I psykologisk og undervisningsforskning kan det ofte være vanskelig å måle et fenomen direkte (Cohen m.fl., 2007). Murphy og Davidshofer (2005) skriver at fenomener som ikke kan måles i én entydig dimensjon – idéer som kan måles i flere dimensjoner, i flere objekter samlet – kalles konstrukt. For å måle fenomenet operasjonaliseres konstruktet i flere items, f. eks. påstander i et spørreskjema, oppgaver i en test eller liknende. På denne måten forklares og måles et fenomen ut ifra aspekter som kjennetegner det (Murphy og Davidshofer, 2005). Konstruktvaliditet oppnås gjennom teoretisk drøfting og relevante begrunnelser (Murphy og Davidshofer, 2005). Dersom konstruktvaliditet er oppnådd er det enighet om operasjonaliseringen. Det er viktig at itemene som representerer et fenomen henger sammen

(Murphy og Davidshofer, 2005). Dette beskrives nærmere under reliabilitet som intern konsistens.

I prosjektet mitt operasjonaliserte jeg tre abstrakter i konstrukt, henholdsvis genererende, transformerende, og resonnerende oppgaver. Dette er de tre komponentene Kieran (2007) har nedfelt i GTG-modellen. For å oppnå konstruktvaliditet så jeg på hva ulike matematikkdidaktikkforskere har sagt om algebraiske aktiviteter. Dette for å sikre at min oppfatning, og dermed utgangspunktet for operasjonaliseringen, er mest mulig lik den «allmenne oppfatning». Ved å gjøre meg kjent både med innholdet i abstraktene, og også det som er utenfor hadde jeg et godt utgangspunkt for å avdekke alle dimensjonene.

I arbeidet med konstruktkonstruksjon gjorde jeg noen avgrensninger for å skape tydelige skiller mellom de tre kategoriene. Kieran (2007) skriver at noen av kategoriene overlapper litt – blant annet går de resonnerende aktivitetene ofte inn i de genererende og transformerende. For å kunne måle kategoriene separat anvendte jeg ytterligere avgrensninger. Dette svekker innholdsvaliditeten noe, men styrker til gjengjeld den ytre validiteten, ved at variablene måles isolert.

3.5.2 Reliabilitet

Cohen m.fl. (2007) omtaler reliabilitet i kvantitativ metode som synonymt med pålitelighet, konsistens, og mulighet for replikasjon over tid og på tvers av måleinstrument og grupper av respondenter. Videre utdyper forfatterne at det handler om presisjon og nøyaktighet. For at forskning skal være reliabel må det bevises at resultatene ville blitt like dersom data ble samlet inn fra en annen gruppe respondenter i en annen, liknende kontekst (Murphy og Davidshofer, 2005).

Cohen m.fl. (2007) definerer tre typer reliabilitet; stabilitet, likhet og intern konsistens. Murphy og Davidshofer (2005) definerer split-half metoden, som Cohen m.fl. (2007) underordner intern konsistent, som en selvstendig type reliabilitet. Reliabilitet som stabilitet beregnes gjennom retesting. Mangel på tid- og arbeidsressurser gjorde at dette ikke var aktuelt. Split-half metoden går ut på å dele prøven i to, og beregne korrelasjon mellom de to delene (Murphy og Davidshofer, 2005). Dette kan gjøres på flere måter. Imidlertid er det ikke bare ett konstrukt som blir målt i prøven, men tre. Dette innebærer at det vil være store forskjeller i de to gruppene uansett hvordan den deles opp. Som følger var det ikke aktuelt å måle reliabilitet med split-half metoden. Reliabilitet som likhet og intern konsistens er mer aktuelt i denne sammenheng. Førstnevnte ved hjelp fra medstudenter, den andre ved statistiske tester. Det redegjøres nå for grep som er gjort for å sikre reliabilitet som likhet og intern konsistens.

Likhet

For å oppnå reliabilitet som likhet må liknende resultater oppnås enten med ulike måleinstrument, eller ved at flere forskere får liknende resultater (Cohen m.fl., 2007).

For å oppnå denne typen reliabilitet fikk jeg hjelp av medstudenter til å rette noen kartleggingsprøver, for å se om måten jeg retter og gir poeng i kartleggingen er lik måten andre forskere ville gjort det. Dette øker også muligheten for replikasjon, og bidrar dermed til ytre validitet. Vi rettet et titalls prøver sammen. Ved å ha økt dette antallet ville reliabiliteten økt. Retteprosessen er beskrevet nærmere i delkapittel 3.6.1.

Intern konsistens

Som nevnt under konstruktvaliditet konstruerte jeg tre konstrukt for å representere algebra. For å måle hvorvidt konstruktene finnes empirisk måles reliabilitet som intern konsistens (Murphy og Davidshofer, 2005). Målet viser grad av sammenheng mellom de ulike itemene, hvorvidt de måler den samme underliggende faktoren (Pallant, 2001). Cohen m.fl. (2007) påpeker at reliabilitet som intern konsistens verken krever replikasjon, måling fra andre instrument, eller hjelp fra andre forskere. Det kreves altså mindre tids- og arbeidsressurser, dette var en fordel i mitt tilfelle. Den interne konsistensen beregnes gjennom statistiske analyser. Den vanligste er Cronbach’s Alpha (Pallant, 2001), denne ble derfor benyttet her.

Cronbach’s Alpha (heretter omtalt som Alpha) beregnes på bakgrunn av antall items i konstruktet og den gjennomsnittlige inter-item korrelasjonen (Murphy og Davidshofer, 2005). Verdien varierer fra 0 til 1, der 0 indikerer at det ikke finnes intern konsistens, og 1 indikerer høy intern konsistens (Cohen m.fl., 2007). Hvilke verdier som er akseptable varierer fra ulike statistikeres perspektiv, og det finnes både øvre og nedre grenser (Cohen m.fl., 2007).

Øvre grenser settes for å sikre at alle dimensjoner av et konstrukt faktisk måles. Dersom reliabiliteten er for høy kan det indikere at enkelte items er overflødig, fordi de ikke tilfører noe nytt til konstruktet (Briggs og Cheek, 1986). Streiner (2003) hevder at en Alpha-verdi høyere enn 0.9 tyder på at det i virkeligheten bare er målt én dimensjon, og ikke et sammensatt fenomen.

Nedre grenser settes for å sørge for at dimensjonene faktisk har en sammenheng. Tommelfingerregelen er en nedre grense på 0.7 (Pallant, 2001). I HEMIL-rapporten drøfter Aarø (2007) ulike forskeres perspektiv på referanseverdien for reliabilitetskoeffisienten. Det fremkommer at noen forskere har ment at den kan være så lav som 0.5-0.6 (Nunnally, 1967), mens andre har ment at den må være så høy som 0.8 (Carmines og Zeller, 1979). Pedhazur og Schmelkin (1991) mener at det bør stilles ulike krav til ulik bruk, og at det er opp til hver enkelt forsker å vurdere hvorvidt reliabiliteten er god nok i sitt prosjekt. Dersom en skala er utbredt og skal brukes av mange bør reliabiliteten være høy (Carmines og Zeller, 1979). Dersom det er snakk om å sammenlikne grupper kan en tillate seg lavere reliabilitet enn dersom en skal uttale seg om enkeltindivider (Aarø, 2007). Forskningens hensikt må også tas hensyn til (Murphy og Davidshofer, 2005). For eksempel bør reliabiliteten være høy dersom testresultater skal avgjøre opptak til videre skolegang (Cohen m.fl., 2007).

3.6 Dataanalyse

I dette delkapittelet redegjøres det for prosessen med bearbeiding og sortering av data. Det redegjøres for hvordan kartleggingsprøvene ble rettet, hvordan datamaterialet ble sortert, og hvordan det ble kontrollert at data var lagt inn riktig.

3.6.1 Bearbeiding av data

Hjelp av medstudenter

For å styrke innholdsvaliditeten og muligheten for replikasjon fikk jeg hjelp til å bearbeide data. Før jeg startet å rette kartleggingsprøvene rettet tre medstudenter et titalls prøver sammen med meg. I forkant hadde jeg utarbeidet en fasit (se vedlegg 2). Medstudentene gjorde meg oppmerksom på at enkelte oppgaver kunne besvares på flere måter. For eksempel kan uttrykkene i oppgave 2 faktoriseres på flere måter. På tilbakemelding fra medstudentene gjorde jeg derfor noen endringer i fasiten.

For å se om det var uenighet rundt poenggivning drøftet vi oppgavene hver for seg. Jeg ønsket å finne ut om det var noen oppgaver som var vanskelige å rette, enten ved at elever ga andre svar enn forventet, eller ved at grensen mellom riktig og feil var uklar. De fleste oppgavene var utvetydig riktig eller galt besvart. For å øke muligheten for replikasjon ble vi enige om at flest mulig av oppgavene skulle rettes med enten riktig eller feil – enten ett poeng, eller ingen. I noen tilfeller var dette utfordrende. Oppgave 12b trekkes frem som eksempel. Her skulle elevene begrunne avkrysningen i oppgave 12a. Begrunnelsene vi støtte på varierte mellom å være knyttet til kontekst og grafanalyse. Vi ble enige om at begge typer resonnement skulle gi poeng.

Retting alene

Det ble gjort flere justeringer underveis i rettingen. Etter å ha rettet i overkant av 150 prøver ble jeg oppmerksom på at det var noen oppgaver det ble feil å gi enten 0 eller 1 poeng på. Til eksempel trekkes oppgave 13a frem. Her skulle elevene beskrive sammenhengen mellom tallene i kolonne a og kolonne b. Flere elever svarte kun «5-gangen». Sammenliknet med fasiten ble dette noe upresist. Elevene kan ha automatisert 5-gangen (Mason, 1996). Elevene som beskrev sammenhengen ved å bruke bokstavene a og b og ved å snakke om sammenheng og tilordning, svarte presist nok. For eksempel «for hver a er det 5 i b». Det ble bestemt at elever som kun svarte «5-gangen» fikk 0.5 poeng på denne oppgaven.

For hver justering som ble gjort gikk jeg gjennom alle prøvene for å sjekke den aktuelle oppgaven, og eventuelt korrigere registrerte data. En oversikt over poenggivning ved ulike svar kan sees i vedlegg 2.

Registrering av data

Data skulle legges inn i statistikkprogrammet SPSS for beregning av Alpha-verdi og deskriptiv statistikk (beskrives nærmere i kapittel 3.6.2). Ettersom jeg er godt kjent med Excel, og Excel-dokument kan åpnes i SPSS, var det enklest å registrere data der for så å overføre data til SPSS. All data ble registrert underveis i rettingen. Data som ikke var numeriske ble kodet. For frekvensvariabelen tilsvarte aldri 1, sjeldent 2, flere ganger 3, og ofte tilsvarte 4. Manglende svar ble kodet som 0. I første omgang ble data sortert etter klasser. Dette for å gjøre tilbakemeldingsprosessen enkel. Data fra alle klassene ble deretter satt sammen i ett dokument, som ble overført til SPSS. Ved hjelp av funksjonen «compute new variable» ble det generert nye variabler for total-score på prøven, total-score for hver dimensjon og hver kategori, samt frekvensvariabelen for hver kategori.

Kontrollering av registrert data

Pallant (2001) understreker viktigheten av at data registreres riktig, og foreslår en tre-stegs-prosess for å avdekke og korrigere eventuelle feilregistreringer. Første steg innebærer deskriptive analyser i SPSS. Ved å se minimums- og maksverdi for variabler kontrolleres det at intervallene ikke går utover det som er mulig (Pallant, 2001). Neste steg i korrigeringsprosessen er å finne feilene i datasettet (Pallant, 2001). SPSS har en funksjon som gir brukeren mulighet til å søke etter en spesifikk verdi i en variabel, slik at brukeren slipper å lete gjennom hele datasettet manuelt. Når feil er avdekket er siste steg å korrigere, her må brukeren selv avgjøre hva som skal tastes inn (Pallant, 2001).

Gjennom deskriptive analyser ble det oppdaget at tre av variablene hadde data registrert utenfor det mulige intervallet. Det var enkelt å avgjøre hvilken verdi det var ment å være. For en oppgave var det for eksempel registrert 2 poeng, der 0 og 1 er eneste mulige registreringer. Ettersom 2 er rett ved siden av 1 på datatastaturet var det logisk at registreringen var ment å være 1. Tilsvarende hadde en annen oppgavevariabel fått registrering 9 – her ble det korrigert til 0.

3.6.2 Kvantitative analyser

Cronbach's Alpha

På bakgrunn av data fra elevenes oppgaver ble det beregnet Alpha for oppgavene i de tre konstruktene. Alpha-verdien forteller om de tre operasjonaliserte konstruktene finnes empirisk (Pallant, 2001). Det ble også beregnet «scale if item deleted», som viser hvilken Alpha-verdi konstruktene ville fått dersom ulike oppgaver ble slettet (Pallant, 2001). Dette viser om det er noen oppgaver som drar ned Alpha-verdien, og dermed svekker konstruktets interne konsistens. For referanseverdier, se delkapittel 3.5.2.

Deskriptive analyser

Det ble beregnet gjennomsnitt, standardavvik, skjevhet og kurtose for totalsum, for hver av de tre konstruktene, og for frekvensvariabelen for hver av de tre konstruktene. I tillegg til drøfting kan resultatene brukes i sammenlikning med annen forskning. Resultatene presenteres også i en graf, der linjen for normalfordeling er lagt inn automatisk ved hjelp av SPSS.

Gjennomsnittet gir et bilde av det typiske resultat. Ved å sammenlikne gjennomsnittsverdier kan det gjøres antakelser om hvilke oppgaver elevene har mest problemer med og hva de kan godt. Standardavviket er et mål for spredningen i resultatene. Et stort standardavvik indikerer stor variasjon i resultatet fra elev til elev. I normalfordelte data vil 68 % av datasettet ligge under ett standardavvik fra gjennomsnittet, og 95 % under 2 standardavvik fra gjennomsnittet (Vedeld og Venheim, 2008). Skjevhet og kurtose måler avvik fra normalfordelingen (Aarø, 2007). Skjevhet forteller oss om data for en variabel er symmetrisk fordelt eller om data hoper seg sammen, og kurtose forteller oss om det forekommer tilspissing av data (Pallant, 2001). Negativ skjevhet indikerer at data forskyves mot høyre, positiv skjevhet mot venstre (Pallant, 2001). Normalfordelte data gir en skjevhet og kurtose tilnærmet lik 0, noe Pallant (2001) påpeker er svært uvanlig i sosiale studier. Dersom kurtosen er positiv indikerer en opphopning på midten som er høyere enn normalfordelingen, mens en negativ kurtose indikerer en flatere fordeling enn normalfordeling (Aarø, 2007). Tabachnick og Fidell (2001) anbefaler å supplere lesing av distribusjonsverdier med fortolkning av diagrammer.

Det ble også gjort frekvensanalyser for hver av oppgavene i kartleggingsprøven. Den relative frekvensen for 1 poeng for hver oppgave ble målt. Dette kan gi en indikasjon på hvilke spesifikke regneoperasjoner eller ferdigheter som er utfordrende for mange av elevene, og hva mange mestrer.

Korrelasjon

Korrelasjonsanalyser brukes for å beskrive styrke og retning av et lineært forhold mellom to variabler (Cohen m.fl., 2007). Det omtales også som samvariasjon (Christoffersen og Johannessen, 2012). Pallant (2001) understreker at det finnes flere typer korrelasjonsanalyser. Her beregnes Pearsons korrelasjonskoeffisient. Den varierer fra -1 til 1, der fortegnet forteller om korrelasjonen er positiv eller negativ (Pallant, 2001). Positiv korrelasjon betyr at den ene variabelen øker når den andre variabelen øker, negativ korrelasjon betyr at den ene variabelen reduseres når den andre variabelen øker (Pallant, 2001). En perfekt korrelasjon på -1 eller 1 indikerer at verdien av den ene variabelen kan avgjøres på bakgrunn av den andre, mens en korrelasjon på 0 gir ingen mulighet til å forutse verdien av en variabel basert på en annen (Pallant, 2001).

Som med Alpha-verdien er det ulike perspektiv på hvilke verdier som er gode og dårlige. Pallant (2001) opererer med tre intervaller, der ± 0.1-0.29 indikerer lite korrelasjon, ± 0.3-0.49 indikerer medium korrelasjon, og mer enn ± 0.5 indikerer stor korrelasjon. Cohen m.fl. (2007) opererer med en femdelt skala. Her er alt under ± 0.1 svakt, opp til ± 0.3 er beskjedent, opp til ± 0.5 er moderat, opp til ± 0.8 er sterkt, og alt over ± 0.8 er svært sterkt (Cohen m.fl., 2007). Sistnevnte brukes som referanseverdi i denne forskningen.

Jeg beregnet korrelasjon mellom total-score og de respektive konstruktene, samt korrelasjon mellom de tre konstruktene. Dette for å avgjøre om noen av kategoriene har en tettere sammenheng, og hvorvidt de ulike konstruktene henger sammen med total-score. Grensen for signifikans settes til 0.05. Dersom signifikansen er over dette tyder det på at korrelasjonen sannsynligvis er tilfeldig (Pallant, 2001).

3.6.3 Kvalitative analyser

For å få et detaljert innblikk i elevers algebraferdigheter analyserte jeg deler av datamaterialet kvalitativt. Ved å analysere elevsvar på enkelte oppgaver fikk jeg muligheten til å avdekke enkelte elevers tankegang bak feilsvar, noe som kunne bidra til å skape et mer detaljert bilde av elevers algebraferdigheter. Oppgaver med interessante resultater ble analysert og sammenliknet med foreliggende teori på elevers tenkesett.

Jeg gjennomførte også en mindre dokumentanalyse av LK06. Dokumentanalyse innebærer at en tekst blir vurdert i forhold til problemstillingen ved hjelp av et eller flere teoretiske analyseverktøy (Christoffersen og Johannesen, 2012). Dokumentet skal være skrevet for et annet formål enn det forskeren skal bruke det til (Thagaard, 2003). Jeg vurderte kompetansemålene i hovedområdet tall og algebra, samt regning som grunnleggende ferdighet i læreplanen med GTG-modellen som analyseverktøy. Målet var å få et objektivt inntrykk av hvordan Kierans (2007) algebraiske aktiviteter er vektet i LK06 i forhold til elevenes resultater på kartleggingsprøven. Det understrekes at dette ikke var en omfattende dokumentanalyse.

3.7 Metodekritikk

Her redegjøres det for hvilke endringer som kunne økt reliabilitet og validitet i forskningen.

Utvalget er ikke representativt for populasjonen, som en konsekvens av mangel på ressurser. Som nevnt svekker dette den ytre validiteten, og dermed mulighetene til å gjøre antakelser om resten av populasjonen. Utvalget er imidlertid relativt stort, dette styrker den ytre validiteten.

En trussel mot innholdsvaliditeten er de forholdene elevene tar prøven under. Ettersom jeg ikke var ute i klasserommet og introdusert kartleggingen for elevene, vet jeg ikke hvor motiverte elevene var til å gjennomføre prøven. Noen lærere planla å bruke det i videre vurderingsarbeid, det kan tenkes at de ville oppfordre elevene til å legge mye innsats i den. Det var 11 klasser fordelt på to skoler som deltok, så å dra rundt å gjennomføre innsamlingen personlig ville bydd på utfordringer med logistikk.

I forbindelse med frekvensvariabelen må det tas høyde for noen feilkilder. Det kan tenkes at oppgavene i genererende og transformerende kategori er lettere for elevene å gjenkjenne enn de resonnerende. De resonnerende oppgavene tester ikke tekniske ferdigheter, men elevens algebraiske tenkning. Dette kan være noe elevene jobber ubevisst med. I tillegg framstår de resonnerende oppgavene som svært varierte. Dette kan gjøre dem vanskeligere å gjenkjenne som «oppgaver elevene har jobbet med før».

I forbindelse med retting hadde det vært optimalt dersom medstudentene mine hadde hatt mulighet til å rette 100-150 kartleggingsprøver sammen med meg. Det var ikke før halvveis i rettingen at flere av oppgavenes utfordringer presenterte seg. Dette er en faktor som svekker reliabiliteten.

I tillegg til oppgavene for de tre kategoriene i kartleggingsprøven ble en rekke bakgrunnsvariabler målt: kjønn, karakter i matematikk og norsk hovedmål skriftlig, og frekvens per oppgave. Det var også et spørreskjema, satt sammen av flere teorier om faktorer som innvirker på elevers resultat i matematikk. Jeg benyttet kun data fra frekvensvariabelen. Dette skyldes mangel på plass i oppgaven. Det kan tenkes at spørreskjemaet har vært tidkrevende for elevene, tid de heller kunne brukt på oppgavene i seg selv. De ubrukte bakgrunnsvariablene og spørreskjemaet blir dermed tidstyver som svekker innholdsvaliditeten.

4 RESULTAT DEL 1: UTVIKLING AV KARTLEGGINGSPRØVE

Kapitlets struktur

I dette kapitlet tar jeg for meg første del av resultat og drøfting. Her drøftes bruk av teori og metode i utformingen av kartleggingsprøvens tre konstrukt; genererende, transformerende og resonnerende oppgaver. Avslutningsvis presenteres reliabilitetsresultatene for hvert konstrukt. Endringer som kunne bidratt til økt validitet og reliabilitet for hvert av konstruktene drøftes deretter opp mot reliabilitetsresultatet.

4.1 Utforming av måleinstrument

Cohen m.fl. (2007) sier at datainnsamling gjennom en standardisert test går gjennom flere faser, fra det generelle til det spesifikke. Et generelt tema blir brutt ned til komplementære emner, som hver blir konkretisert i en eller flere oppgaver (Cohen m.fl., 2007). I dette tilfellet ble algebra brutt ned til tre typer algebraiske aktiviteter. Jeg vil nå redegjøre for utformingen av kartleggingsprøven, fra det generelle til det spesifikke.

4.2 Modeller anvendt

4.2.1 GTG-modellen

For å måle elevers algebraferdigheter detaljert tok jeg utgangspunkt i Kierans (2007) GTG-modell, som deler algebra inn i genererende, transformerende og resonnerende aktiviteter. GTG-modellen ble valgt fordi den er utledet av en anerkjent matematikkdidaktikkforsker på bakgrunn av omfattende forskning, som gir den faglig tyngde og autoritet. Videre fremstår kategoriseringen av ulike algebraiske aktiviteter som hensiktsmessig og logisk, dette gir et godt grunnlag for å operasjonalisere de ulike oppgavekategoriene. Konstruktene ble operasjonalisert i 7-12 oppgaver hver.

4.2.2 Modelleringssyklusen

Som nevnt under konstruktvaliditet avgrenset jeg kategoriene ytterligere for å skape tydelige skiller. Dette ble gjort ved å anvende Blum og Leiß’ (2007) Modelleringssyklus. Her vises det til kapittel 2.3.4 og 2.5.2. Som vist kan det trekkes paralleller fra modellering til regning som grunnleggende ferdighet, som i læreplanen kan forstås som målet med grunnskolens matematikkundervisning (Utdanningsdirektoratet, 2012). I PISA defineres de samme ferdighetene som komponentene i matematisk kompetanse (Kjærnsli og Olsen, 2013). Jeg ønsket å måle algebraferdigheter i lys av målene satt for norsk matematikkopplæring, og valgte derfor å anvende modellering som struktur. Blum og Leiß' modell ble valgt fordi den er mest detaljert av de presenterte modelleringsmodellene, noe som gjorde det lettere å spesifisere konstruktenes innhold. Ved å syntetisere stegene i en modelleringsprosess med Kierans algebraiske aktiviteter ble de ulike oppgavenes rolle i en matematisk prosess spesifisert. Det var dermed lite rom for fortolkning og overlapping.

Avgrensninger

I kapittel 2.3.4 syntetiseres Kierans (2007) tre algebraiske aktiviteter med Blum og Leiß' (2007) modelleringssyklusmodell. Her fremkommer det at genererende aktiviteter kan begrenses til trinn 3 i modelleringssyklusen, matematisering, og transformerende aktiviteter til trinn 4, å jobbe matematisk. De resonnerende aktivitetene favner noe bredere i modelleringssyklusen, ettersom Blum og Leiß er detaljerte i overgangsfasen mellom virkeligheten og den abstrakte verden. De resonnerende aktivitetene kan tilordnes trinn 1, 2, 5, 6 og 7 i modelleringssyklusen. Denne syntetiseringen legger grunnlaget for utformingen av de tre konstruktene.

Som nevnt under innholdsvaliditet innvirket LK06 på utforming av kartleggingsprøven. Dette for å sikre at elevene ikke ble testet i ferdigheter de ikke var forventet å ha på det aktuelle tidspunktet. Jeg vil komme med eksempler på avgrensinger gjort i tråd med LK06 underveis.

4.3 Genererende oppgaver

Ved å anvende Blum og Leiß' (2007) modell for å avgrense Kierans (2007) tre kategorier av aktiviteter fremkommer det at oppgaver i den genererende kategorien går ut på å formulere matematiske uttrykk. Ettersom det er algebraiske aktiviteter settes det krav til at uttrykket involverer algebraiske symboler eller algebraisk språk, eksempelvis parenteser, variabler eller likninger. Alle genererende oppgaver handler om å generalisere noe spesifikt og presentere det algebraisk.

4.3.1 Dimensjoner

Kieran (2014) nevner situasjoner, verdier, mønstre og forhold som utgangspunkt for generering av algebraiske uttrykk. På bakgrunn av dette definerte jeg tre dimensjoner av genererende oppgaver: 1) Formulering av uttrykk eller likninger på bakgrunn av en situasjon, 2) Formulering av uttrykk eller likninger på bakgrunn av geometriske mønstre og figurer, og 3) Formulering av uttrykk eller likninger på bakgrunn av numeriske forhold eller verdier. Dimensjonene er altså ulike ved at matematiseringen har ulike utgangspunkt. Felles for alle kategoriene er at eleven må forstå hva som skal representeres. Eleven må avdekke mønstre eller relasjoner og sammenhenger mellom tall, og avgjøre hvilke faktorer som er relevante for å løse problemet. Til slutt må eleven stille opp det matematiske problemet på en hensiktsmessig og riktig måte, gjennom bruk av algebraiske symboler.

4.3.2 Hva testes ikke?

Algebraiske prosesser på et mer avansert nivå enn det LK06 tilsier at elevene skal være kjent med ved fullført tiende trinn ble ikke testet. Dette innebar for eksempel at eleven ikke ble bedt om å sette opp andregradsuttrykk i generaliseringsarbeidet. Kieran vektlegger elevers meningsbygging i algebra i forbindelse med de genererende aktivitetene. Dette ble ikke målt.

4.3.3 Dimensjon 1: Formulering av uttrykk eller likninger på bakgrunn av en situasjon

I denne dimensjonen ble elevenes evne til å matematisere en situasjon testet. For mange framstod nok oppgavene i denne dimensjonen som «tekstoppgaver». Matematiseringen måtte involvere minst én ukjent for å kvalifisere som et algebraisk uttrykk. Elevene fikk presentert en kort tekst med et problem, og ble deretter bedt om å formulere et algebraisk uttrykk for problemet. Se for eksempel oppgave 1 og 9 (vedlegg 1).

Jeg ønsket å ha oppgaver der elevene måtte sette opp uttrykk med ulike regneoperasjoner. Det var i utgangspunktet oppgaver med både addisjon, subtraksjon, divisjon og multiplikasjon, men av hensikt til rammefaktorer ble noen kuttet. Jeg valgte å kun ha oppgaver for addisjon og subtraksjon, som er det enkleste. Flere elever burde derfor hatt mulighet til å klare disse.

En oppgave som ble kuttet var denne:

Per, Pål og Espen er til sammen 66 år gamle. Per er dobbelt så gammel som Espen, og Pål er 6 år eldre enn Espen. Sett opp en likning for å finne alderen deres.

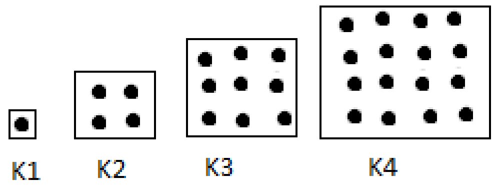
Ungdomsskolelæreren jeg samarbeidet med og veileder rådet meg til å kutte denne oppgaven, på bakgrunn av at den kunne bli for tidkrevende for elevene. Det var dermed ingen oppgaver i denne dimensjonen som krevde at elevene satt opp algebraiske uttrykk med flere enn én variabel.

Elevene skulle sette opp en likning i oppgave 9. Jeg valgte å formulere det til «sett opp et uttrykk». Ungdomsskolelæreren mente elevene ville overtenke oppgaven dersom jeg brukte begrepet «likning» i stedet for «uttrykk», som de ofte er mer kjent med. Det ble mindre presist, men innholdsvaliditeten ble styrket. Oppgave 7 er den siste oppgaven i denne dimensjonen. Den skiller seg fra de andre to ved at elevene skulle fortolke et algebraisk uttrykk og knytte det til en situasjon. Det understrekes at elevene fikk valget om de vil knytte det til en situasjon eller en figur, slik velger eleven om oppgave 7 faller inn under denne dimensjonen eller den neste. Oppgave 7 krevde at eleven viste forståelse for hva som ligger bak en matematisering.

4.3.4 Dimensjon 2: Formulering av uttrykk eller likninger på bakgrunn av geometriske mønstre og figurer

I denne dimensjonen ble elevenes evne til å beskrive geometriske mønstre og figurer med algebraiske uttrykk testet. Formler for areal og omkrets er eksempler på slike. Oppgavene i denne dimensjonen testet elevenes evne til å symbolisere noe generelt de fikk presentert visuelt. Eleven måtte benytte minst én variabel i svaret.

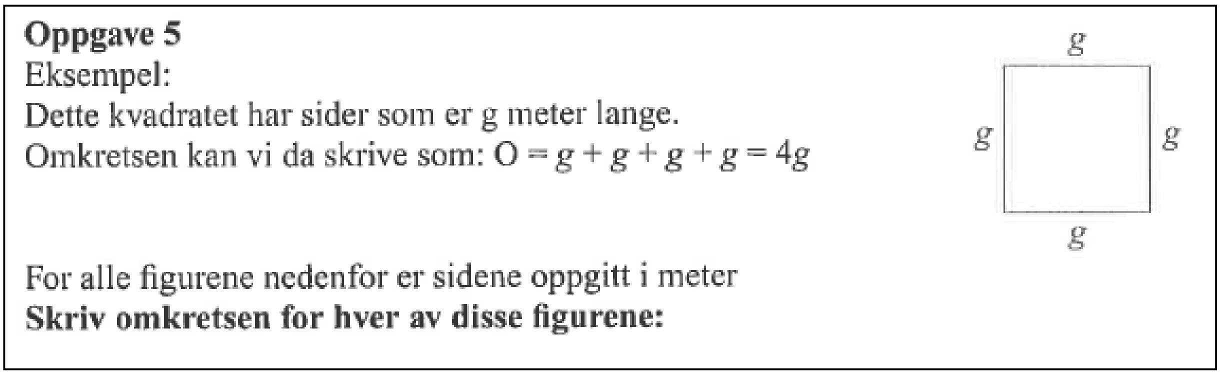
I denne dimensjonen er det to oppgaver: én for figurer og én for mønstre. Oppgave 3b tar utgangspunkt i et mønster elevene må avdekke i oppgave 3a. I utgangspunktet skulle elevene sette opp et matematisk uttrykk på bakgrunn av figurfølgen i figur 4.1:



Figur 4.1: Figurfølge

Ungdomsskolelæreren og test-eleven ga tilbakemelding om at denne oppgaven var for enkel, den ble derfor erstattet av figuren med bord og stoler. Elevene skulle da beskrive sammenhengen de observerte i den foregående oppgaven med algebraiske symboler og tall.

Oppgave 6, hentet fra *Veiledning til algebra* (Brekke, 2000), er designet slik at elever på både 6., 8. og 10. trinn kan løse den. Dette medførte at den opprinnelige oppgaveteksten ble litt for lett for elever på tiende trinn:


Oppgave 5
Eksempel:
Dette kvadratet har sider som er g meter lange.
Omkretsen kan vi da skrive som: $O = g + g + g + g = 4g$

For alle figurene nedenfor er sidene oppgitt i meter
Skriv omkretsen for hver av disse figurene:

Figur 4.2: Matematisering av omkretsformel

Elever på tiende trinn har erfaring med å kopiere formler fra lærebøker, slik som den originale oppgaven (Figur 4.2) legger opp til, noe både jeg og ungdomsskolelæreren hadde erfaring med. For å unngå dette ble oppgaveteksten endret. Elevene fikk bilde av en figur, med tilhørende oppgavetekst: «Skriv et uttrykk for omkretsen til figur x». Jeg valgte å beholde omkrets, da det er en formel som bør være kjent for de fleste på tiende trinn. Det var dermed mindre sjanse for at utfordringen lå i å forstå hva oppgaven ba om, og at utfordringen lå i selve matematiseringen.

4.3.5 Dimensjon 3: Formulering av uttrykk eller likninger på bakgrunn av numeriske forhold eller verdier

Den siste dimensjonen av de genererende oppgavene går ut på å formulere generaliserte uttrykk for å beskrive numeriske forhold, altså tallrekker. Et eksempel på et generalisert uttrykk for en numerisk verdi er uttrykket $2x + 1$ som en generell formel for alle oddetall. Elevene måtte avdekke sammenhenger eller forhold mellom tall, deretter beskrive sammenhengen med algebraiske variabler.

To oppgaver ble satt opp til denne dimensjonen. I den ene skulle elevene matematisere forholdet mellom to tallrekker presentert i en tabell. I den andre skulle de matematisere forholdet mellom tall i en tallrekke, og komme med et uttrykk for tall x i tallrekka. Oppgavene spør om det samme, men tallene er fremstilt ulikt. Det kan sees som at tabellen har gjort halve jobben, ved å sortere tallene.

Oppgavene i denne dimensjonen er tett sammenknyttet med funksjoner. Jeg vurderte å ha med en oppgave der elevene skulle sette opp et uttrykk for en graf, men det besluttet at det ikke var sentralt nok i genererende aktiviteter til å bruke tid og plass på.

4.4 Transformerende oppgaver

I likhet med genererende oppgaver begrenses transformerende oppgaver til ett trinn i modelleringssyklusen, å jobbe matematisk. For å avgrense «å jobbe matematisk» ble grunnleggende aritmetikk valgt bort. Dette innebar at kartleggingen ikke testet regning med brøk, prosent, desimaltall, samt de fire regneartene på et grunnleggende nivå. For å kvalifisere som en transformerende oppgave må matematikken eleven skal arbeide med inneholde algebraiske symboler, potenser, likninger eller parenteser.

4.4.1 Dimensjoner

Utfordringen med å definere dimensjonene i den transformerende kategorien var den store mengden ulike prosesser. Det syntes uoversiktlig å ha et titalls ulike dimensjoner, jeg valgte derfor å slå flere sammen. En konsekvens av det kan være at noen av dimensjonene favner litt bredere enn andre, og det kan være en del overlapping. Kieran (2007) ramser opp mange eksempler på aktiviteter som defineres som transformerende. Jeg valgte å bruke de jeg har erfart at det arbeides mye med på ungdomstrinnet som hovedkategorier, og forsøke å integrere de andre aktivitetene i disse. De fire dimensjonene jeg definerte er: 1) Forenkling av uttrykk, 2) likningsløsning, 3) substitusjon, og 4) faktorisering. Potens- og polynomregning er eksempler på transformerende aktiviteter som blir integrert i de fire dimensjonene. Felles for oppgavene i alle dimensjonene er at de er fri fra kontekst. For å løse dem måtte elevene arbeide med ren, abstrakt matematikk.

4.4.2 Hva testes ikke?

Også her begrenset LK06 hva som ble testet. Andregradslikninger ble ikke testet, og i polynomregning ble det kun addisjon testet. Som følge av at det er så mange prosesser som går inn under denne kategorien har en del blitt utelatt. Det var derfor ikke mulig å teste ulike tallkombinasjoner og regneoperasjoner med de ulike dimensjonene. Det var for eksempel bare to oppgaver under likningsløsning, og ingen oppgaver med ulikheter.

4.4.3 Dimensjon 1: Forenkling av uttrykk

Den første dimensjonen omfatter flere liknende prosesser; addering og subtrahering av uttrykk, regning med polynomer, samt utløsing av og regning med parenteser. Felles for disse prosessene er at målet er å forenkle et algebraisk uttrykk. For å jobbe med oppgaver i denne dimensjonen kreves det at eleven er kjent med prioritet mellom regneoperasjoner, regning med parenteser, og grunnleggende kjennskap til regning med variabler.

To oppgaver ble satt opp i forbindelse med denne dimensjonen. I den ene skulle eleven forenkle et uttrykk ved å trekke flere ledd sammen, og i den andre skulle eleven forenkle uttrykke ved å løse ut parenteser. I utgangspunktet var dette to ulike dimensjoner. Begge oppgavene er satt sammen av deloppgaver med små variasjoner.

I oppgave 8 skulle eleven regne ut uttrykk med parenteser. Uttrykket i 8a er uten variabler. Der måtte eleven kun ha kjennskap til å regne med parenteser med negativt fortegn foran. I 8b er det lagt inn variabler både utenfor og inni parentesen. Her ble elevers evne til å gange algebraiske uttrykk inn i parenteser testet. Både oppgave 8b og 8c krevde at eleven hadde kjennskap til regning med potenser. Også oppgave 4b stilte krav til potensregning. Jeg valgte å kun ha addisjon i denne deloppgaven, da regning med mer avanserte polynomer er forbeholdt videregående skole. I oppgave 4a skulle elevene kun trekke sammen så mye som mulig. Her er det ingen opphøyde variabler eller tall, elevene måtte altså kun vite hvordan man trekker sammen lineære uttrykk.

4.4.4 Dimensjon 2: Likningsløsning

Den andre dimensjonen er definert som løsning av førstegradslikninger, altså lineære funksjonsuttrykk. For å avgrense dimensjonen tydelig er det også greit å avklare hva denne dimensjonen *ikke* tester. I utgangspunktet omfattet dimensjonen også regning med likningssett og ulikheter. Med hensyn til tidsramme ble det besluttet å kun ha med regning med førstegradslikninger. Ulikheter ble droppet fordi regning med likninger og ulikheter i prinsippet er samme sak – forskjellen er at eleven skal snu ulikhetstegnet i noen tilfeller. Erfaringsmessig blir arbeid med likningssett innført ganske seint i ungdomsskolen, gjerne mot slutten av tiende trinn. Det innebærer en viss risiko for at elevene ikke har jobbet med det enda. Da heller ikke dette ble ansett som en viktig del av de transformerende aktivitetene ble det valgt bort.

Det er kun én oppgave i denne dimensjonen. Likningsløsning kan være så mangt, også når det avgrenses til førstegradslikninger. Utfordringer med divisjon i algebra kan knyttes til utfordringer med brøkregning, ikke nødvendigvis algebraen i seg selv. Jeg valgte derfor å ikke ha det med. De to deloppgavene tar dermed for seg likninger med multiplikasjon, og subtraksjon.

4.4.5 Dimensjon 3: Substitusjon

Den tredje dimensjonen handler om å erstatte variabler og andre algebraiske uttrykk med numeriske verdier eller likninger, og omvendt.

To oppgaver ble satt opp til denne dimensjonen. Forskjellen mellom dem er at den ene krever regning med potenser. I oppgave 5 måtte elevene være kjent med substitusjon av numeriske verdier for variabler, samt kunne gjøre en enkel utregning. I oppgave 10 krevdes det i tillegg flere ting. For det første måtte elevene registrere at variablenes numeriske verdi ikke ble oppgitt i samme rekkefølge som de opptrådte i oppgaven. Videre måtte de være kjent med betydningen av opphøyde tall, og regning med henholdsvis positive og negative tall.

4.4.6 Dimensjon 4: Faktorisering

Den siste dimensjonen innebærer kun faktorisering. Det er én oppgave som tar for seg dette, i den ønsket jeg både å teste faktorisering av et aritmetisk uttrykk, samt faktorisering av kvadratsetninger og parenteser.

I oppgaven testes begrepskunnskap; vet eleven hva det vil si å faktorisere? Videre måtte eleven avdekke faktorer som inngår i et produkt, i ett enkeltledd, og felles faktorer for flere ledd. En utfordring for mange elever kan være å faktorisere ledd som består både av tall og bokstaver. For eksempel er oppgave 2c lagt inn for å se om elever greier å faktorisere ledd med potenser.

4.5 Resonnerende oppgaver

Den siste av de tre kategoriene favner litt bredere, og er derfor noe vanskeligere å måle og beskrive konkret. Oppgaver som tester elevens kompetanse i resonnerende aktiviteter skal være kontekstbasert, og/eller kreve resonnement fra elevens side. Ved å anvende modelleringssyklusen ble oppgavene i denne kategorien definert som oppgaver der eleven må avdekke problemet, og/eller finne svaret, og/eller kunne validere et svar opp mot en virkelighetssituasjon ved hjelp av resonnement.

4.5.1 Dimensjoner

Kieran (2007) nevner flere eksempler på resonnerende aktiviteter: problemløsning, modellering, arbeid med generaliserte mønstre, argumentasjon og bevis, prediksjon og formodning, studering av forandring i funksjonelle situasjoner, å lete etter forhold eller struktur. Av disse er det noen som er hensiktsmessige å slå sammen. Som nevnt i kapittel 2.3 er problemløsning og modellering nært beslektet, den første dimensjonen er derfor 1) problemløsning og modellering. Argumentasjon og generalisering har en viktig plass i bevisføring, og danner derfor den andre dimensjonen 2) bevis og generalisering. Den tredje tar for seg sammenhenger, forandring og predikasjon: 3) Forandring og sammenheng. De tre dimensjonene har felles at de krever resonnement fra elevens side. Ingen av dimensjonene stiller krav til bruk av formell matematikk.

4.5.2 Hva testes ikke?

Utfordringen med resonnerende oppgaver er at de kan være vanskelige å måle på papir. Mange av oppgavene egner seg bedre til å bruke i klasseromsdiskusjoner. I resonnerende oppgaver er elevens resonnement viktig å kartlegge. Dette kan gjøres ved å be eleven om å vise utregning eller begrunne valg som er gjort i oppgaveløsning. Det kan imidlertid ikke sikres at eleven gir en grundig beskrivelse, og siden prøven er anonym er det ikke mulig å gå tilbake for å få en kvalitativ begrunnelse.

4.5.3 Dimensjon 1: Problemløsning og modellering

I denne dimensjonen ble elevenes evne til å ta i bruk en hel modelleringssyklus testet. Dette innebar at elevene ble stilt ovenfor en mer eller mindre troverdig virkelighetssituasjon, der et problem ble presentert. For å løse problemet måtte elevene bruke matematikk og/eller logisk resonnement, og tilpasse regningen og/eller svaret til virkelighetssituasjonen.

Et eksempel på en problemløsningsoppgave elevene fikk er oppgave 18. Problemet var tydelig; vi ønsket å vite kjempens høyde. Elevene måtte selv finne fremgangsmåten for å finne svaret, og ikke minst; validere det opp mot situasjonen igjen. For å finne passende fremgangsmåte krevdes det at eleven brukte resonnement. Det finnes ingen formler for å beregne kjempers høyde basert på fotlengde, eleven måtte finne den opp selv. Her kunne eleven argumentere for at en kjempe antakeligvis har like proporsjoner som et menneske, og utlede en matematisk fremgangsmåte på bakgrunn av det resonnementet.

4.5.4 Dimensjon 2: Bevis og generalisering

I denne dimensjonen skulle elevene jobbe med generaliserte uttrykk, tallrekker eller mønstre på en måte som ikke nødvendigvis krevde forståelse for det symbolske språket. Eleven kunne bli bedt om å argumentere for svarene sine. Dette er i tråd med trinn 6 i modelleringssyklusen, validering, og tester elevens evne til ikke-symbolsk bevisføring. Eleven kunne også bli bedt om å gjøre beregninger basert på sammenhenger eller mønstre. Dette er i tråd med trinn 2, at eleven må formulere en strategi for å løse problemet, men også med trinn 5 og 6.

I oppgave 16 skulle elevene finne sammenhengen mellom tallene i Fibonaccis tallrekke, og skrive de neste tre tallene. Det var i utgangspunktet satt opp at de skulle skrive 5, men for at eleven ikke skulle bruke for mye tid på regning ble det besluttet at 3 tall var nok til å vise at eleven hadde funnet riktig sammenheng. I oppgave 17 ble elevene bedt om å argumentere for at den generelle formelen for alle oddetall er $2x + 1$. Ingen krav ble stilt til argumentasjonsmetode. Her måtte eleven både vise forståelse for algebraiske symboler, og evne til resonnement – og presentere argumentene sine på en hensiktsmessig måte.

4.5.5 Dimensjon 3: Forandring og sammenheng

I den tredje dimensjonen underlagt resonnerende oppgaver skulle elevene resonnere rundt sammenheng og forandring, og bruke det til å forutsi videre utvikling eller forandring. Her jobbet elevene med kontekstbaserte funksjoner og funksjonsuttrykk.

Denne kategorien kan sees i sammenheng med dimensjon 3 av de genererende oppgavene, å formulere uttrykk eller likninger på bakgrunn av numeriske forhold eller verdier. I den resonnerende formen må elevene imidlertid ikke bruke algebraiske uttrykk for å beskrive sammenhengene. De blir bedt om å formulere setninger eller å gjøre avkrysninger på bakgrunn av resonnement.

4.6 Intern konsistens i GTG-konstruktene

Intern konsistens for de tre konstruktene kan leses i tabell 4.1:

	Oppgaver	**Cronbach's Alpha**
Genererende	1, 3b, 6, 7, 9, 13a, 15	.732
Transformerende	2a, 2b, 2c, 4a, 4b, 5, 8a, 8b, 8c, 10, 14a, 14b	.841
Resonnerende	3a, 11, 12a, 12b, 13a, 16, 17, 18	.646

Tabell 4.1: Intern konsistens GTG-konstruktene

I tabell 4.1 fremkommer det at det genererende konstruktet har en Alpha-verdi på 0.732. I henhold til referanseverdiene for reliabilitet omtalt i kapittel 3.5.2 er en intern konsistens på 0.732 høy nok til å definere det genererende konstruktet som reliabelt, der 0.7 ofte er nedre grense (Pallant, 2001). Det transformerende konstruktet har en intern konsistens på 0.841, også dette godt over nedre grense. Reliabilitetsverdien for det transformerende konstruktet så høy at det kan være aktuelt å bruke konstruktet i andre forskningsprosjekt. Likevel er den ikke så høy at det er snakk om endimensjonalitet. Ved å anvende funksjonen «scale if item deleted» fant jeg at Alpha-verdien ville synke for både genererende og transformerende konstrukt dersom noen oppgaver ble fjernet. Det fastslås at det genererende og transformerende konstruktet finnes empirisk.

I tabell 4.1 kan det leses at det resonnerende konstruktet har en intern konsistens på 0.646. Ved å anvende funksjonen «scale if item deleted» framkom det at Alpha-verdien ville synke dersom noen oppgaver ble fjernet. 0.646 er under den normale referansen for nedre grense og ansees derfor som noe svak (Pallant, 2001). Selv om reliabiliteten ikke er solid er det mulig å argumentere for at verdien er god nok i denne sammenheng. Konstruktene brukes ikke i «high-stake-testing», der det står mye på spill hvorvidt noe går bra eller dårlig. Videre er det kun jeg som bruker skalaen, og skalaen skal ikke brukes i uttalelser om enkeltindivid, men om en gruppe som helhet. Disse faktorene senker kravet til reliabilitet. En grunn til at verdien er relativt lav kan være at oppgavene er svært forskjellige. Dette kan være en konsekvens av at det resonnerende konstruktet omfatter fem steg i modelleringssyklusen, sammenliknet med det genererende og transformerende som kun omfatter ett steg hver. Det kan med sikkerhet sier at ulike dimensjoner av et fenomen undersøkes. I lys av denne argumentasjonen kan det sees at reliabiliteten for det resonnerende konstruktet er god nok i denne sammenheng, og dermed finnes empirisk.

Reliabilitetsverdiene viser altså at det er målt tre konstrukt med hver sin underliggende, felles faktor. Ved hjelp av teoretisk drøfting defineres innholdet i hver av konstruktene. Gjennom teoretisk drøfting og empiriske undersøkelser sikres konstrukt- og innholdsvaliditeten. Det fastslås at algebra måles gjennom GTG-modellen (Kieran, 2007) og Modelleringssyklusen (Blum og Leiß, 2007).

4.7 Forbedringspotensial

Som følger av at kartleggingsprøven ikke ble testet i forkant oppdaget jeg noen justeringer som kunne økt validitet og reliabilitet. Oppgave 7 i den generende kategorien kunne med fordel spesifisert at elevene skulle bruke bokstavene a og b i figuren eller regnefortellingen. Dette ville gjort det enklere å være konsekvent i rettingen (se vedlegg 2) og medført økt mulighet for replikasjon.

Blant de transformerende oppgavene er det tilsynelatende ingen misforståelser, elevene har visst hva oppgaven handlet om – og oppgaven måler ferdigheter som tilfaller transformerende aktiviteter. Ved å utvide tidsrammen for prøven ville det vært mulig å tilføye flere aspekter i kategorien, men jeg vil fortsatt argumentere for at de mest sentrale aspektene av transformerende aktiviteter er testet her.

Også blant de resonnerende oppgavene ble det oppdaget justeringer som kunne økt validitet og reliabilitet. I oppgave 18 ble elevene bedt om å regne høyden til en kjempe på bakgrunn av fotmål. I forbindelse med de resonnerende aktivitetene er det fremgangsmåten eleven har brukt som er interessant, ikke svaret i seg selv. Hvis jeg skulle gjennomført kartleggingen på nytt ville jeg endret oppgave 18 til å be eleven om forklaring på hvordan man kan finne kjempens høyde.

5 RESULTAT DEL 2: ELEVPRESTASJONER

Kapitlets struktur

I dette kapitlet presenteres resultatene fra kartleggingsprøven. Først gjengis korrelasjonsverdier, deretter deskriptiv statistikk. Resultatene drøftes og sammenliknes med forskning og internasjonale undersøkelser beskrevet i teorigrunnlaget. Problemstillingen spesifiserer at jeg ønsker å måle elevers algebraferdigheter detaljert, det er derfor relevant å trekke frem oppgaver som skiller seg negativt ut på statistikken. Oppgavene drøftes opp mot teori.

5.1 Korrelasjon

Korrelasjon mellom de ulike konstruktene og total-score er presentert i tabell 5.1:

	Genererende	Transformerende	Resonnerende	Total-score
Genererende	*1*	*0.735***	*0.650***	*0.880***
Transformerende	*0.735***	*1*	*0.652***	*0.931***
Resonnerende	*0.650***	*0.652***	*1*	*0.839***
Total-score	*0.880**	*0.931***	*0.839***	*1*

**Korrelasjon er signifikant

Tabell 5.1: Korrelasjon

5.1.1 Kommentarer til korrelasjonsverdier

Det kan leses at genererende, transformerende, og resonnerende konstrukt korrelerer henholdsvis 0.880, 0.931 og 0.839 med total-score. Alle korrelasjonene er over ± 0.8, som i henhold til Cohen m.fl. (2007) indikerer en svært sterk sammenheng. Korrelasjonen mellom transformerende konstrukt og total-score er særlig sterk. Dette tyder på at det er en svært sterk sammenheng mellom høy score i de ulike konstruktene og høy score totalt, særlig det transformerende konstruktet.

Korrelasjonen mellom de ulike konstruktene er alle i intervallet ± 0.5-0.8, som i henhold til Cohen m.fl. (2007) betyr at det er en sterk sammenheng. Korrelasjonen mellom genererende og transformerende konstrukt er 0.735. Dette er noe høyere enn de andre korrelasjonsverdiene. Sammenhengen mellom genererende og transformerende konstrukt er altså noe sterkere enn sammenhengen mellom for eksempel resonnerende og genererende konstrukt.

5.1.2 Teoretisk perspektiv på korrelasjon

Ved å sammenlikne prosessene i PISA med Kierans (2007) algebraiske aktiviteter kan trendene observert i PISA drøftes i sammenheng med korrelasjonsverdiene fra kartleggingsprøven. I kapittel 2.6.2 fremkom det at genererende aktiviteter kan sammenliknes med prosessen å formulere, transformerende aktiviteter kan sammenliknes med prosessen å bruke, og resonnerende aktiviteter kan sammenliknes med å vurdere i PISA. Trendene som beskrives i kapittel 2.6.2 forteller oss blant annet at den relative scoren elevene får i prosessen å bruke, er den samme de får totalt sett (Kjærnsli og Olsen, 2013). I resultatene fra kartleggingen sees det en svært sterk sammenheng mellom de transformerende oppgavene og total-score, så høy at det nesten kan sies å måle det samme. Videre er det en trend at elever som scorer høyt i å formulere i PISA, scorer høyt totalt sett. Korrelasjonen mellom genererende oppgaver og total-score er også svært sterk, dog ikke så sterk som korrelasjonen mellom transformerende oppgaver og total-score.

TIMSS har også resultater som er relevante å sammenlikne med. Vanskelighetsgrad har vist seg å ha lite å si for elevenes suksess i oppgaveløsningen i TIMSS (Grønmo m.fl., 2012). Det som viste seg å være skillet var i hvilken grad oppgaven stilte krav til formalkunnskaper. I genererende og transformerende oppgaver stilles det formelle krav til elevene, noe det ikke gjør i de resonnerende oppgaver. Det kan tenkes at de genererende og transformerende oppgavene har en sterkere sammenheng på grunn av kravet til formell kunnskap, som ikke stilles til arbeid med resonnerende oppgavene. Resonnerende oppgaver har en svakere sammenheng med både transformerende og genererende oppgaver.

5.2 Deskriptiv statistikk

Deskriptive statistikker fra kartleggingsprøven er presentert i tabell 5.2:

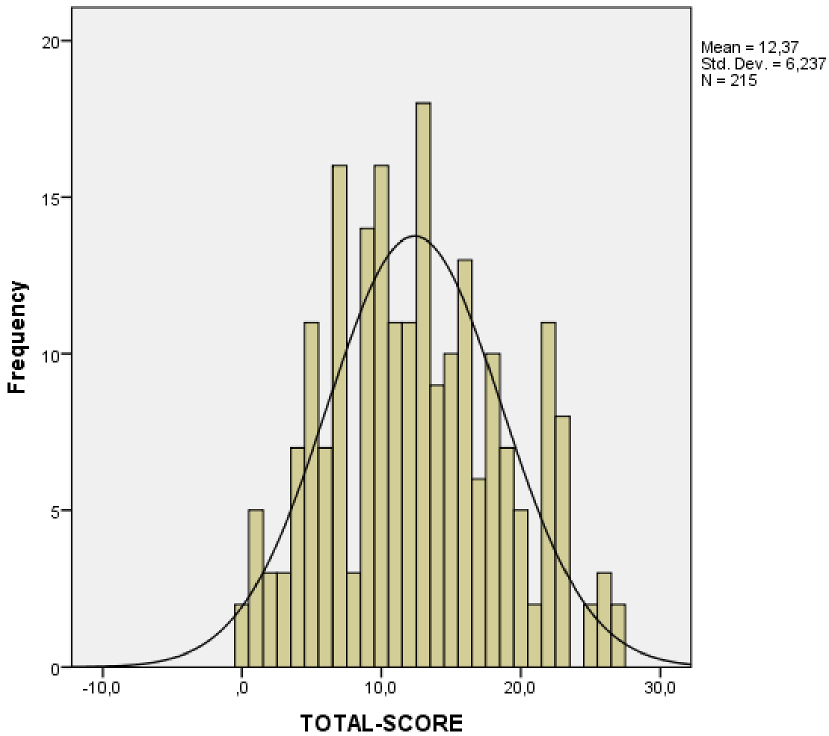
	Mulige poeng	Gjennomsnitt	Standard-avvik	Skjevhet	Kurtose
Total-score	*27*	*12.37*	*6.24*	*0.20*	*-0.63*
Genererende	*7*	*2.67*	*1.93*	*0.4*	*-0.9*
Transformerende	*12*	*5.58*	*3.13*	*0.28*	*-0.74*
Resonnerende	*8*	*4.12*	*1.94*	*-0.63*	*-0.6*

Tabell 5.2: Deskriptiv statistikk for GTG-oppgaver

I tabell 5.2 kan det leses at elevene gjør det best i resonnerende oppgaver, og relativt dårlig i genererende og transformerende oppgaver. Av hensyn til tekstens lengde må jeg være selektiv i hvilke resultater jeg drøfter. Jeg har derfor valgt å kun presentere oppgaver i forbindelse med drøfting av genererende og transformerende resultater, der elevene scorer dårligst.

5.2.1 Kommentar til total-score

I grafen under vises resultatene for total-score.



Figur 5.1: Total-score på kartleggingsprøve

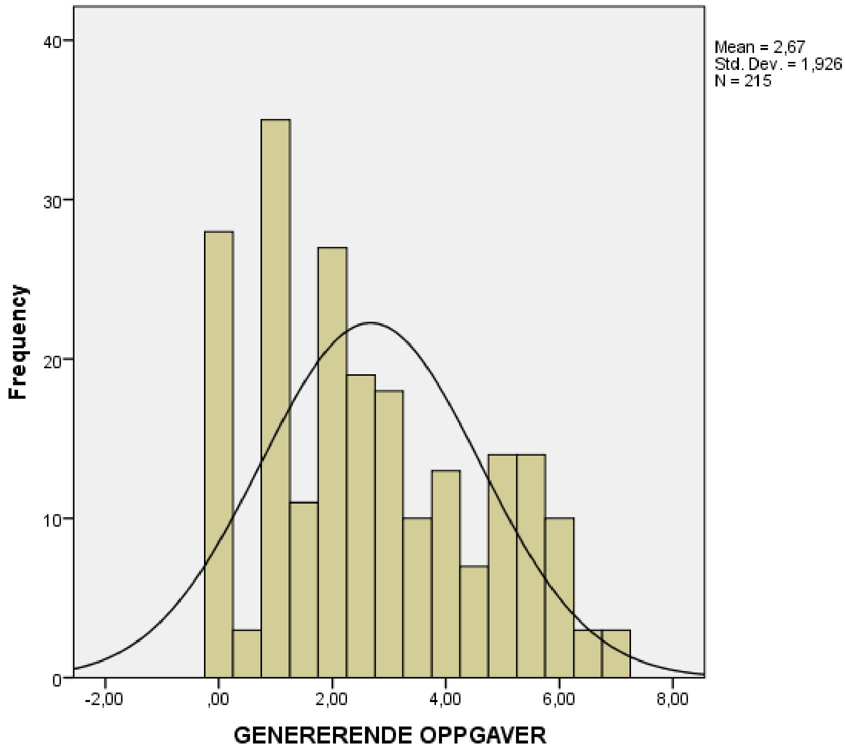
Det kan leses i tabell 5.2 at gjennomsnittlig total-score er 12.37 poeng, noe som er relativt lavt (45.8 %). Verdiene for skjevhet og kurtose viser at fordelingen ikke er normalfordelt. Skjevheten er svakt positiv, dette betyr at resultatene er svakt venstreforskyvet – altså mot det nedre poengsjiktet. Kurtosen er under 0, noe som indikerer at fordelingen er flatere enn normalfordeling. Dette kan også sees i forhold til normalfordelingslinjen i diagrammet. Standardavviket på 6.23 (22 %) er relativt høyt. Det er stor spredning i resultatene, noe som sees i diagrammet. Ingen elever fikk full score på prøven, to fikk 0 poeng. Det beste resultatet var 26.5 poeng, det var det to elever som fikk.

5.2.2 Teoretisk perspektiv på total-score

Resultatene er relativt svake. Dette støtter opp under internasjonale undersøkelser som har målt at norske elevers algebraferdigheter er relativt dårlige. Det minnes om at mange valg i utformingen av kartleggingsprøven førte til forenkling av oppgaver, for å øke innholdsvaliditeten. Dette for å understreke at prøven ikke var for vanskelig.

5.3 Resultat genererende oppgaver

I grafen under vises resultatene for de genererende oppgavene.



Figur 5.2: Genererende resultater

5.3.1 Kommentar til genererende oppgaver

Gjennomsnittet for de genererende oppgavene er 2.67 poeng (33.3 %). Dette er kategorien elevene gjennomsnittlig scorer dårligst i. Data er ikke normalfordelt, dette fremkommer både i distribusjonsverdiene og i diagrammet over. Skjevheten er positiv, dette betyr at resultatene forskyver seg mot det nedre sjikt. Kurtosen er under 0, altså indikeres en flat fordeling. I figur 5.2 sees høye frekvenser for de laveste resultatene (0 og 1 poeng) i de genererende oppgavene. Av standardavviket kan det også sees at spredningen er stor (1.92, 27 %). Tre elever fikk full score i kategorien genererende oppgaver, mens 28 fikk 0 poeng.

5.3.2 Teoretisk perspektiv på genererende resultater

Som det fremkommer i resultatene presentert i tabell 5.2 scorer elevene dårlig i denne kategorien, også sammenliknet med transformerende og resonnerende oppgaver. Dette kan sees i sammenheng med forskning presentert i teorigrunnlaget. Det fremkommer at generering av likninger og algebraiske uttrykk for å representere forhold mellom tall i en tekstoppgave er kjent for å være noe elever sliter med (Kieran, 2007). PISA-resultatene tyder på at prosessen der elevene skal formulere matematikk krever en formell kompetanse som elevene mangler (Kjærnsli og Olsen, 2013). Oppgavene i denne kategorien krever at elevene gjenkjenner matematikk i ulike situasjoner og at de klarer å oversette observasjonene til formell matematikk. Av resultatet kan det forstås som at dette er noe mange elever sliter med.

5.3.3 Genererende oppgaver, drøfting

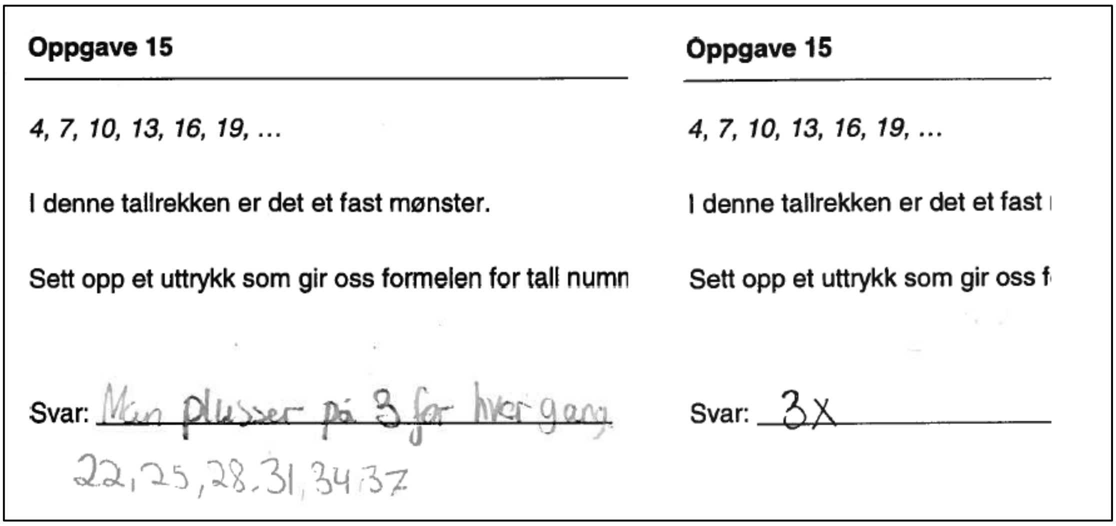
Flere oppgaver er interessante å se på i denne kategorien. Oppgaver 13b og oppgave 15 er relativt like. Begge etterspør et uttrykk for en sammenheng i en tallrekke. Representasjonsformen for tallene er imidlertid ulik; oppgave 13b presenterer tallene i en tabell, mens oppgave 15 presenterer tallene i en rekke. I tillegg bygger oppgave 13b på en formulering av observert sammenheng fra oppgave 13a. Statistikken for de to oppgavene er svært forskjellig:

	1 poeng (N)	Relativ frekvens
Oppgave 13b	*68*	*31,6 %*
Oppgave 15	*17*	*7,9 %*

Tabell 5.3: Frekvens og relativ frekvens oppgave 13b og 15

I tabell 5.3 kan det leses at mindre enn en tredjedel av elevene løser oppgave 13b riktig, og kun 7,9 % av elevene løser oppgave 15 riktig. Oppgave 15 er den oppgaven færrest elever løste riktig i kartleggingen.
I teorigrunnlaget kan det leses at representasjonsformen kan ha innvirkning på hvorvidt elever greier å matematisere en sammenheng, der tabell fremkommer som foretrukken representasjonsform for elevene (Nathan m.fl., 2002). Mason (1996) kritiserer bruk av tabell i denne sammenheng, og påpeker at elevene kan ha automatisert prosessen fra tall via tabell til symbolsk uttrykk. Større andel av elevene løser oppgaven som tar utgangspunkt i tabell, enn oppgaven som tar utgangspunkt i en tallrekke. En mulig forklaring er at tabellen fremstår som andre ledd i en automatisert prosess. I teorigrunnlaget fremkommer det at en generaliseringsprosessen ofte er todelt; verbalisering og symbolisering (Kieran, 2007). Det kan også tenkes at oppgave 13a hjelper elevene å løse 13b, ved at de først må formulere sammenhengen med hverdagsspråk, og deretter formulere sammenhengen symbolsk.

Flere svar på oppgave 15 tydet på at utfordringen lå i selve formuleringen av det matematiske uttrykket, ikke i å avdekke sammenhengen. I figur 5.3 sees to elevers løsning av oppgave 15. Det riktige svaret er *3x + 1*.


Oppgave 15

4, 7, 10, 13, 16, 19, ...

I denne tallrekken er det et fast mønster.

Sett opp et uttrykk som gir oss formelen for tall numn

Svar: Man plusser på 3 for hver gang
22, 25, 28, 31, 34, 37

Oppgave 15

4, 7, 10, 13, 16, 19, ...

I denne tallrekken er det et fast

Sett opp et uttrykk som gir oss f

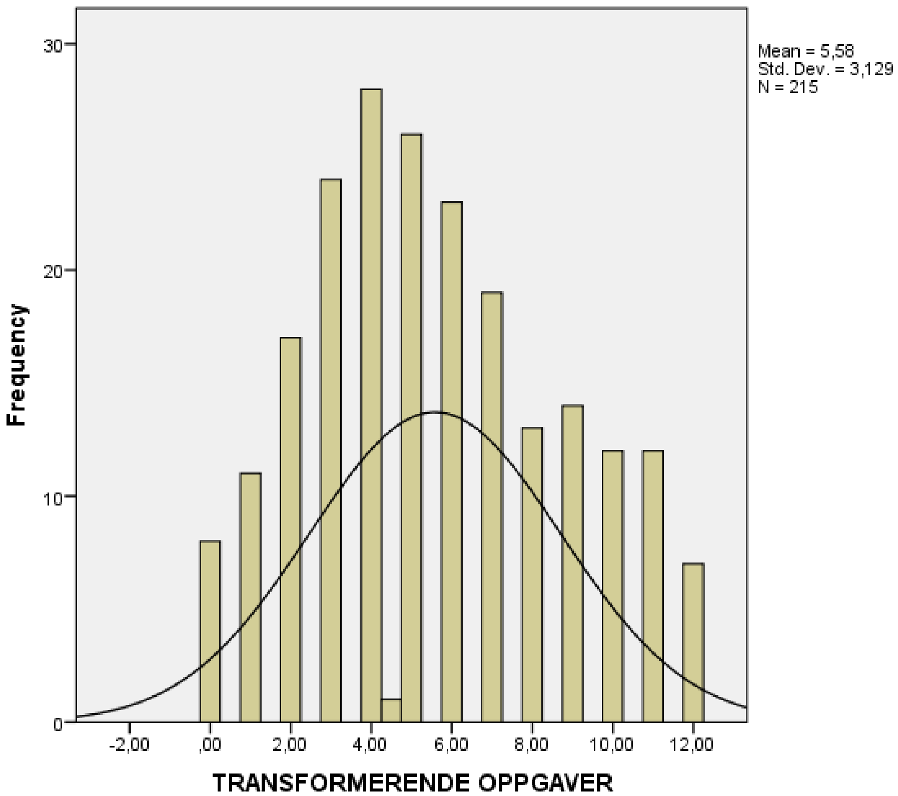
Svar: 3x

Figur 5.3: Elev 1 (t.v.) og elev 2 (t.h.)

Elev 1 har avdekket en sammenheng i tallrekken og verbalisert denne. Likevel greier ikke eleven å formulere et symbolsk uttrykk for sammenhengen. Dette er i tråd med funn fra tidligere forskning, eksempelvis Bednarz og Janvier (1996) og Healy og Hoyles (2000), nevnt i kapittel 2.6.3, som sier at problemet er manglende formell kompetanse. Det er også interessant å se i lys av Lees (1996) forskning, som viser at problemet ligger i at elevene ikke avdekker en presis sammenheng. Elev 1 viser at hun har avdekket en sammenheng mellom tallene, og eksemplifiserer med å vise hvilke tall som kommer videre. Hun spesifiserer imidlertid ikke hvor tallrekken starter, som er der problemet ligger for mange av elevene. Det samme kan antas for elev 2, som har satt opp et uttrykk som beskriver tallrekken *3, 6, 9, 12,* osv. Svært mange elever svarer det samme som elev 2. Det kan da antas at de har forstått at tallrekken øker med 3 hver gang. I den sammenheng er 3x riktig formulering for å angi stigning. De har ikke tatt hensyn til at tallrekken starter i 4, dermed blir svaret feil.

5.4 Resultat transformerende oppgaver

I grafen under vises resultatene for de transformerende oppgavene.



Figur 5.4: Transformerende resultat

5.4.1 Kommentar til transformerende oppgaver

Gjennomsnittet for de transformerende oppgavene er 5.6 poeng (46.6 %). Som det fremkom i forbindelse med korrelasjon, er den relative verdi nesten den samme som relativ gjennomsnittlig total-score (45.8 %). Skjevhet og kurtose forteller oss at data ikke er normalfordelt, men forskjøvet mot venstre, med en fordeling flatere enn normalfordeling. Dette kan også sees i forhold til normalfordelingslinjen i grafen. Også her er standardavviket relativt stort, 3.13 (26 %). Det tilsvarer omtrent like stor spredning som for de genererende oppgavene. Syv elever har oppnådd full score i kategorien transformerende oppgaver, mens åtte fikk 0 poeng.

5.4.2 Teoretisk perspektiv på transformerende resultater

Ved å sammenlikne transformerende aktiviteter med prosessen å bruke i PISA kan det sees at resultatet er liknende. Relativt dårlig, men ikke like dårlig som for prosessen å formulere. De transformerende aktivitetene er sammensatt av mange ulike prosesser, som følger stilles det ulike krav ved oppgaveløsning. Ved å sammenlikne statistikken for alle transformerende oppgaver kan det likevel sees flere mønstre:

	1 poeng (N)	Relativ frekvens
Oppgave 2a	*134*	*62.3 %*
Oppgave 2b	*49*	*22.8 %*
Oppgave 2c	*46*	*21.4 %*
Oppgave 4a	*141*	*65.6 %*
Oppgave 4b	*59*	*27.4 %*
Oppgave 5	*185*	*86.0 %*
Oppgave 8a	*167*	*77.7 %*
Oppgave 8b	*63*	*29.3 %*
Oppgave 8c	*54*	*25.1 %*
Oppgave 10	*37*	*17.2 %*
Oppgave 14a	*175*	*81.4 %*
Oppgave 14b	*89*	*41.4 %*

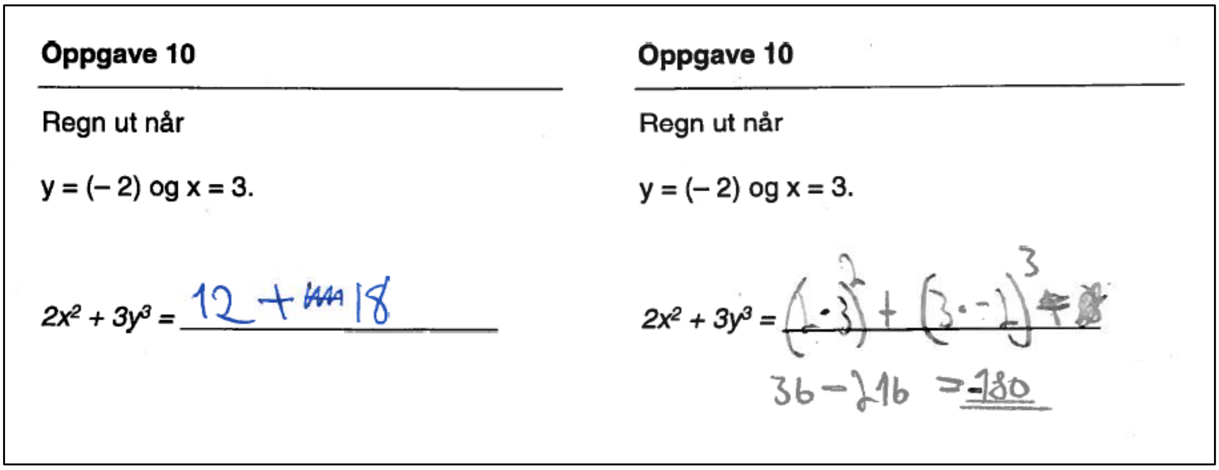
Tabell 5.4: Frekvens og relativ frekvens for transformerende oppgaver

De seks oppgavene færrest elever klarer, oppgave 2b, 2c, 4b, 8b, 8c og 10, har til felles at de involverer regning med variabler. At elever har problemer med bokstaver er i tråd med Brekkes (2000) forskning, som beskrevet i teorigrunnlaget. Regning med potenser sees i oppgave 2c, 4b, 8c og 10. Det som også fremkommer er at oppgavene elevene gjør det best i, oppgave 2a, 4a, 5, 8a og 14a er oppgaver der elevene kun testes i én, isolert regneteknisk prosess.

Eksempelvis tester oppgave 2a kun elevens ferdigheter i faktorisering, og oppgave 5 kun ferdigheter i substitusjon.

5.4.3 Transformerende oppgaver, drøfting

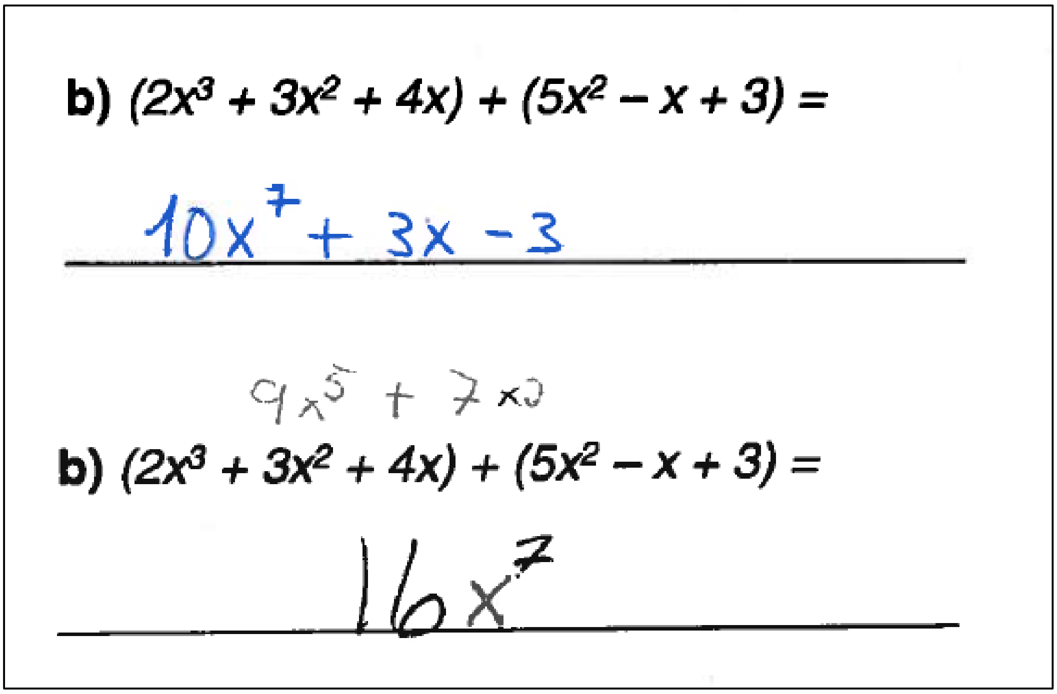
Det fremkommer av resultatene i tabell 5.4 at mange elever får vansker med oppgaveløsningen når flere metoder må anvendes på samme oppgave. Her kan oppgave 10 trekkes frem som eksempel. Oppgaven kategoriseres i dimensjonen substitusjon. Dette er samme dimensjon som oppgave 5, oppgaven flest elever klarer i hele kartleggingen. Det kreves imidlertid mer enn bare substitusjon i oppgave 10. Eleven må ha forståelse for potenser. Videre må eleven kunne multiplisere både negative og positive tall. I figur 5.5 sees to ulike svar. Riktig svar er *(-6)*:



Figur 5.5: Elev 3 (t.v.) og elev 4 (t.h.)

Elev 3 har substituert og regnet ut riktig. Imidlertid virker det som elev 3 ikke godtar to regnetegn etter hverandre og løser det ved å krote ut minustegnet. Kanskje er det tilfeldig at det var det negative tegnet som ble krotet ut. Kanskje har eleven regnet seg frem til -18 på kalkulator, og tror det er en feil – for negative svar går vel ikke an? For elev 4 stopper det allerede på potensregning. Eleven viser at han vet om «det usynlige» gangetegnet mellom et tall og en variabel. Imidlertid mangler elev 4 forståelse for innvirkningen potensen har på enkeltleddet x og y, og regner det ut som om oppgaven hadde vært $(2x)^2 + (3y)^3$.

Utfordringer med uttrykk med parentes kommer til syne i oppgave 4b også. Oppgaven er sammensatt, og krever at eleven har kunnskap om regning med bokstaver, potenser og parenteser. Det fremkommer at elevene har problemer både med parenteser og potenser. I figur 5.6 sees to løsninger på oppgave 4b. Riktig svar er $2x^3 + 8x^2 + 3x + 3$.



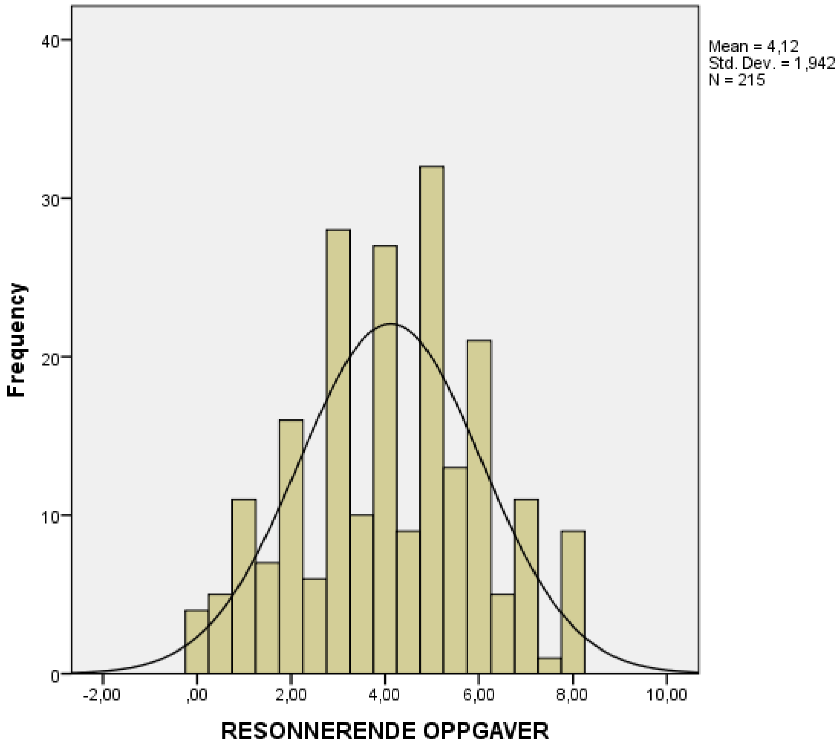
Figur 5.6: Elev 5 (øverst) og elev 6 (nederst)

Elev 5 løste oppgave 4a riktig. Det kan derfor antas at problemet ikke ligger i å trekke sammen tall og bokstaver. Ved å tolke oppgave 4b kan det sees at elev 5 har tatt bort parentesen og lagt sammen alle tall, alle verdier for x, og alle verdier for opphøyd x sammen. Ved å legge sammen alle grunntallene i andre- og tredjegradsleddene, og deretter legge sammen alle potensene fikk han at $2x^3 + 3x^2 + 5x^2 = 10x^7$, $4x – x = 3x$, og 3. Kanskje har elev 5 nettopp lært at det er forskjell på x og x^2 når man regner med potenser, men mangler forståelsen for potenser, og skjønner dermed ikke at dette gjelder for alle ulike potenser. Elev 6 har lagt sammen alle grunntall og alle potenser. Han fikk da at $2 + 3 + 4 + 5 – 1 + 3 = 16$, og $x^3 + x^2 + x + x^2 - x = x7$. En slik misoppfatning kan skyldes fenomenet beskrevet som «lack of closure», der eleven ikke godtar et svar med flere ledd (Brekke, 2000).

For oppgave 10 og oppgave 4b er det mange variasjoner av besvarelser som viser tegn til misoppfatninger med parentes- og potensregning. Brekke (2000) hevder at et grunnleggende problem i matematikkundervisning er at elever anvender kunnskap de nettopp har jobbet med i situasjoner de ikke er kjent med. Som følger av instruksjonsbasert undervisning og manglende forståelse benytter elevene metodene ukritisk. Dette kan antas for flere av eksemplene presentert i figur 5.5 og 5.6.

5.5 Resultat resonnerende oppgaver

I grafen under vises resultatene for de resonnerende oppgavene.



Figur 5.7: Resonnerende resultat

5.5.1 Kommentar til resonnerende oppgaver

I kategorien resonnerende oppgaver er fordelingen noe jevnere enn i de to foregående. Av 8 mulige poeng er gjennomsnittet 4.1 poeng (51.2 %), og standardavviket 1.9 (24 %). Dette er kategorien elevene scorer best i. Distribusjonsverdier og grafisk fremstilling forteller oss at data ikke er normalfordelt, men noe nærmere enn for de andre to kategoriene. Skjevheten er svakt negativ. Resultatene for de resonnerende oppgavene er altså svakt høyreskjeve – mot øvre sjikt av poengskalaen. Kurtosen er negativ for de resonnerende oppgavene, men også denne noe svakere enn for genererende og transformerende oppgaver. Standardavviket er noe mindre for de resonnerende oppgavene. Dette indikerer mindre spredning enn for de genererende og transformerende oppgavene, men fortsatt en relativt stor spredning. Ni elever fikk full score i kategorien resonnerende oppgaver, mens fire fikk 0 poeng.

5.5.2 Teoretisk perspektiv på resonnerende oppgaver

I lys av resultatene fra internasjonale undersøkelser er det ikke overraskende at dette er den kategorien elevene scorer best i. PISA bekrefter at norske elever scorer best på oppgaver som krever resonnement, oppgaver som handler om å vurdere og tolke matematikk i en kontekst (Kjærnsli og Olsen, 2013). Det påpekes også at elever som gjør det godt i prosessen å vurdere, gjør det dårlig i kategorien å formulere. Ved å sammenlikne resultatet for de genererende oppgavene (formulere) og de resonnerende oppgavene (vurdere) kan det sees at denne trenden finnes i dette datasettet også. En mulig forklaring på de relativt gode resultatene på de resonnerende oppgavene er det minimale kravet til formalkunnskaper, som har vist seg å være en viktig faktor i suksess i genererende og transformerende oppgaver.

6 RESULTAT DEL 3: LÆRINGSMULIGHETER OG ELEVPRESTASJONER

Kapitlets struktur

I dette kapitlet presenteres resultatene fra frekvensvariabelen. Jeg ønsker å se læreplanens vekting av Kierans tre algebraiske aktiviteter i forhold til disse. Her er det aktuelt å drøfte LK06 opp mot OTL og resultatene presentert i kapittel 5. Først drøftes det teoretiske perspektivet på samspillet mellom genererende, transformerende og resonnerende aktiviteter i skolen.

6.1 Samspillet mellom GTG i skolen

I kapittel 2.2.3 sammenliknes Kierans (2007) algebraiske aktiviteter med Bells (1996) algebraiske aktiviteter illustrert i Bergstens m.fl. (1997) algebraiske syklus. Det fremkommer at genererende, transformerende og resonnerende aktiviteter kan sees som komponenter i en problemløsningssyklus. Syklusen viser gangen i praktisk anvendelse av matematikk; fra en virkelighetssituasjon der et problem oppstår, til det er løst igjen. I denne syklusen representerer de genererende aktivitetene selve matematiseringen av problemet, og de transformerende aktivitetene manipuleringen for å bearbeide det matematiske problemet. De resonnerende favner noe bredere, men handler hovedsakelig om å sette matematikken i sammenheng med konteksten igjen, gjennom fortolkning og validering.

Både Bergsten m.fl. (1997) og Bell (1996) poengterer viktigheten av at alle fasene må beherskes av eleven som ønsker å benytte algebra som et problemløsningsverktøy. Dersom et ledd svikter i elevens problemløsning faller hele syklusen sammen. Det kan sees som et sammenflettet tau, der hver komponente bidrar til å styrke tauet – og svake komponenter svekker tauet. Ved å flette de tre komponentene sammen styrkes elevens helhetlige problemløsningskompetanse. Det er derfor med bekymring de merker seg at skolen primært jobber med transformerende aktiviteter.

6.1 Læreplanens vekting av GTG

I teorigrunnlaget presenteres Opportunity to learn (OTL) som den viktigste faktoren for elevers læring (National Research Council, 2001). OTL innebærer at elevene får mulighet til å arbeide med og bruke tid på akademiske oppgaver. Det påpekes at læreplaner setter grenser for elevers OTL (Stein m.fl., 2007), men også at læreren har mulighet til å vektlegge mål, emner, krav og forventninger ulikt. Lærerens disponering av tid og undervisningsressurser har stor innvirkning på elevenes læringsmuligheter (Hiebert og Grouws, 2007).

I den norske læreplanen er læringsmålene gitt i form av kompetansemål som skal forbedre elevenes grunnleggende ferdigheter, heriblant regning. I kapittel 2.5.1. sammenliknes kompetansemål opp mot Kierans (2007) tre algebraiske aktiviteter. Der fremkommer en tydelig vekting av de transformerende og resonnerende aktivitetene. De genererende er tilsynelatende vektet svært lite i kompetansemålene. I regning som grunnleggende ferdighet kan alle tre kategoriene sees isolert som ulike ferdighetsområder (kapittel 2.5.2). Genererende aktiviteter som å gjenkjenne og beskrive, transformerende aktiviteter som å bruke og bearbeide, og resonnerende aktiviteter som å reflektere å vurdere. Forstått slik kan det sees at alle Kierans aktiviteter vektlegges i LK06, men transformerende i større grad enn genererende.

I rammeverket for de grunnleggende ferdighetene er det imidlertid spesifisert at regning som grunnleggende ferdighet skal læres gjennom de spesifikke kompetansemål (Udir, 2012). Erfaringer fra praksis viser at det er kompetansemålene som vektes i undervisningsplanlegging, og i utarbeiding av tentamen- og eksamensoppgaver. Det kan sees som at det primært er kompetansemålene som bestemmer elevenes læringsmål. Sett i forhold til kompetansemålenes vekting kan det tyde på at genererende oppgaver er lite vektlagt i undervisning.

I forbindelse med utvikling av problemløsningskompetanse kan dette sees som en svakhet i den norske læreplanen. Som drøftet over er de genererende aktivitetene en viktig komponent i den helhetlige problemløsningskompetansen, et redusert fokus på disse kan derfor bidra til å svekke den helhetlige kompetansen.

6.2 Hva elevene oppgir å arbeide med

Som bakgrunnsvariabel til oppgaveløsningen skulle elevene oppgi hvor mye de hadde jobbet med de ulike oppgavene. Resultatet for hver kategori er presentert i tabell 6.1:

	Maks	Gjennomsnitt (poeng)	Gjennomsnitt (prosent)
Genererende frekvens	*28*	*8*	*28,5 %*
Transformerende frekvens	*48*	*19*	*39,5 %*
Resonnerende frekvens	*32*	*6*	*18,7 %*

Tabell 6.1: Statistikk for frekvensvariabel

Det sees at elevene oppgir å jobbe minst med resonnerende oppgaver, og mest med transformerende oppgaver. Resultatene for de genererende oppgavene er noe lavere enn for de transformerende oppgavene, men ikke så lave som for de resonnerende oppgavene.

At elevene oppgir transformerende oppgaver som det de arbeider mest med bygger opp under Bergstens m.fl. (1997) og Bells (1996) antakelser. Det er interessant at elevene oppgir den kategorien de scorer best i som den de arbeider minst med. Det er også interessant at tallet er relativt høyt for de genererende og transformerende aktivitetene, tatt i betraktning at elevene scorer relativt svakt i disse kategoriene. Dette kan kanskje forklares ved Hiebert og Grouws (2007) poeng; læringsmuligheter i seg selv er ikke nok for at eleven skal lære. Elevene må være klar for læringen – motivert og faglig sterk nok. Ved å se resultatene presentert i kapittel 4 i forhold til hvor mye elevene oppgir å jobbe med de ulike kategoriene kan det tenkes at de er utsatt for en del læringssituasjoner der dette ikke er tilfellet.

6.2.1 Resultater i OTL-perspektiv

Ved å se resultatene fra kartleggingen i lys av læreplanens vekting er det ikke overraskende at elevene scorer dårligst i de genererende aktivitetene. Lærerne legger undervisning opp etter kompetansemål som i svært liten grad vektlegger genererende aktiviteter. Det er mer overraskende er at elevene oppgir å jobbe relativt mye med de transformerende og genererende oppgavene, som de scorer relativt dårlig på. Mer forskning på elevenes forkunnskaper i undervisningssammenheng sammenliknet med læringsutbyttet trengs i denne sammenheng.

7 KONKLUSJON

Innledningsvis skrev jeg at internasjonale undersøkelser er inspirasjon og utgangspunkt for forskningen gjennomført i dette prosjektet. Mer spesifikt elevers dårlige resultater i algebra. Dette er en trend jeg ønsker å være med på å snu. For å gi mine fremtidige elever de beste mulighetene til å bli gode på algebra må jeg selv være det. Jeg valgte derfor en problemstilling som ga meg muligheten til å fordype meg i algebraopplæringen. Ved å kjenne til vanlige misoppfatninger og mestringsområder har jeg et fortrinn i arbeid med tilpasset opplæring. TIMSS og PISA er eksempler på verktøy som skal gi læreren slik informasjon. De er imidlertid ikke utformet etter den norske læreplanen. For å måle elevers algebraferdigheter på en måte som lettere kan anvendes i undervisningsplanlegging må ferdighetene sees i lys av LK06. For å finne ut mer om dette formulerte jeg problemstillingen *hvordan kan jeg måle elevers algebraferdigheter detaljert?*

På bakgrunn av ønsket om å måle algebraferdigheter isolert og muligheten til å gjøre antakelser utover forskningen min valgte jeg en kvantitativ datainnsamling gjennom en kartleggingsprøve jeg konstruerte selv. For et mer detaljert innblikk i elevers algebraferdigheter valgte jeg å bruke både kvalitativ og kvantitativ metode i dataanalysen. I metodekapitlet redegjorde jeg for de teoretiske og praktiske hensyn som er tatt for å sikre valide og reliable data.

For å måle algebraferdigheter detaljert måtte alle aspekter av algebra avdekkes, som følger ble en stor del av teorigrunnlaget dedikert til å redegjøre for algebra og forskning på elevers algebraferdigheter. Det framkom at algebra har utviklet seg i flere ulike retninger, og nå omfatter alt fra likningsløsning og formell symbolmanipulering til resonnement rundt geometriske figurer og funksjoner. I dette spektret viser forskning at norske elever har størst problemer med aktiviteter som krever formalkunnskaper (Grønmo m.fl., 2012). I forbindelse med algebraiske aktiviteter presenteres GTG-modellen. Den deler algebraiske aktiviteter inn i genererende, transformerende og resonnerende aktiviteter, og inkorporerer hele spektret av algebra (Kieran, 2007). Gjennom teoridrøfting framkom det at GTG-modellen kunne sees i sammenheng med LK06. Den dannet derfor grunnlaget i utformingen av kartleggingsprøven.
For å tilpasse de genererende, transformerende og resonnerende aktivitetene til LK06 anvendte jeg modellering som struktur i oppgaveutformingen. Modellering sees i regning som

grunnleggende ferdighet, og er en betegnelse på matematikk anvendt i dagliglivet. Gjennom syntetisering av modelleringssyklusen og GTG-modellen definerte jeg genererende aktiviteter som selve matematiseringen av et uttrykk, transformerende aktiviteter som formell symbolmanipulasjon, og resonnerende aktiviteter som fortolkning, validering og anvendelse av matematiske svar i en virkelighetssituasjon. Operasjonaliseringen av konstruktene ga gode reliabilitetsverdier, noe som forteller oss at det genererende, transformerende og resonnerende konstruktet finnes empirisk.

Resultatene fra kartleggingen viste at elevene hadde størst utfordringer med de genererende oppgavene, matematisering av virkelighetssituasjoner og problemer. For de transformerende oppgavene var resultatet noe bedre, men fortsatt i nedre sjikt. Resultatet for de resonnerende oppgavene var det beste, med gjennomsnittlig over 50 %. Spredningen i resultatene var stort, det var med andre ord store forskjeller innad i utvalget – noe som gjør det vanskeligere å generalisere. På bakgrunn av drøfting kan det likevel antas at mange elever har problemer med å matematisere ulike situasjoner og tilfeller, og relativt god kontroll på resonnement og fortolkning opp mot kontekst. Gjennom fortolkning av oppgaver framkom det at representasjonsformen hadde mye å si for suksess i genererende oppgaver, der situasjon tilsynelatende er best og tallrekke verst. Av oppgavedrøfting framkom det at elevene har problemer med transformerende oppgaver som krever mer enn én isolert regneoperasjon. Regning med potenser viste seg å være utfordrende, spesielt i kombinasjon med negative tall eller parenteser. Elevene er relativt gode i algebraisk tenkning, resonnement og fortolkning – aktiviteter der det ikke stilles formelle krav i oppgaveløsningen. Data generert fra kartleggingsprøven ga meg et detaljert innblikk i elevers algebraferdigheter, altså er kartleggingsprøven er en hensiktsmessig måte å måle elevers algebraferdigheter detaljert på.

Ved å drøfte resultatene opp mot teori framkom det at samme resultat og trender sees i data fra kartleggingen som i data fra TIMSS og PISA. Blant annet scorer norske elever i PISA svakest på genererende oppgaver, og elever får samme forholdsmessige resultat på transformerende oppgaver som totalt sett (Kjærnsli og Olsen, 2013). Ved å se korrelasjon mellom genererende og transformerende oppgaver sees en sterk sammenheng, i motsetning til sammenhengen mellom de to og det resonnerende konstruktet. I lys av TIMSS tolkes det som at formalkunnskap har vært avgjørende for suksess her også (Grønmo m.fl., 2012). Jeg antar derfor at kartleggingen min har målt det samme som TIMSS og PISA, men lagt opp etter LK06, noe som gjør resultatene lettere å anvende i undervisningsplanlegging.

Det var også interessant å se LK06' vekting av de tre algebraiske aktivitetene i forhold til resultatene. I teorigrunnlaget framkom det at alle tre bidrar til å styrke den helhetlige matematikkompetansen, en ubalanse i opplæringen vil derfor være uheldig (Bergsten m.fl., 1997). Det framkom at de transformerende og resonnerende vektes i større grad enn de genererende. Dette kan være en forklaring på hvorfor resultatet for de genererende oppgavene er så dårlig. Elevene oppga imidlertid å arbeide mest med transformerende og genererende oppgaver. For å tolke disse resultatene drøftet jeg læreplan og resultat opp mot *opportunity to learn*. Teorien viste at den viktigste faktoren for elevenes læring er at elevene gis mulighet til å lære (National Research Council, 2001). Det ble understreket at elevene må være klare – motivert og faglig (Hiebert og Grouws, 2007). Det er derfor betimelig å spørre i hvor stor grad elever utsettes for læringssituasjoner de ikke har faglige forutsetninger for å takle?

Resultatene drøftet i del 3 er særlig interessante med tanke på videre forskning. Ved å se resultatene i forhold til læreplanens vekting framkom det at elevene scorer svakest der læreplanen tilsynelatende er svakest. Dokumentanalysen jeg gjennomførte er imidlertid overflatisk, jeg kunne tenkt meg å forsket grundigere på læreplanens dekning av algebra. Herunder en grundig analyse av kompetansemålene opp mot emnet algebra. Får elevene alle læringsmulighetene de trenger for en fullstendig algebraopplæring hvis læreren følger læreplanen? Som drøftet vil et svakt ledd svekke den helhetlige matematiske kompetansen. Det er derfor viktig at alle aspekter av algebraemnet er nedfelt i læreplanen.

Jeg kunne også tenkt meg å undersøke sammenhengen mellom elevers faglige forutsetninger i forkant av en læringssituasjon og det faglige utbyttet etter. Ved å se hvilke forutsetninger elever har i forkant og deretter målt læringseffekt i etterkant av et læringssituasjon, kunne jeg fått et inntrykk av hvilke faglige forutsetninger som er viktige i ulike læringssituasjoner. Dette kunne vært gjennomført for ulike algebraiske aktiviteter, og kunne gitt en indikasjon på hvilke aktiviteter som legger grunnlaget for andre. Det må gjerne sees i sammenheng med læreplanen og den fastsatte progresjonen i opplæringen. Jeg kunne da fått et inntrykk av om progresjonen fra de ulike årstrinnene er lagt opp hensiktsmessig.

8 BIBLIOGRAFI

Aarø, L. (2007). *Fra spørreskjemakonstruksjon til multivariat analyse av data: En innføring i survey-metoden.* Bergen: Research Centre for Health Promotion/Griegakademiet, Universitet i Bergen.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (ss. 115-136). Dordrecht: Kluwer.

Bell, A. (1996). Problem-Solving Approaches to Algebra: Two Aspects. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to Algebra, Perspectives for Research and Teaching* (ss. 167-185). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bergsten, C., Häggström, J., & Lindberg, L. (1997). *Nämnaren tema: Algebra för alla.* Göteborg: Göteborgs universitet.

Bernhard, M., Lida, B., Riley, S., Hackler, T., & Janzen, K. (2002, Januar 10). *A Comparison of Popular Online Fonts: Which Size and Type is Best?* Hentet fra Software Usability Research Laboratory, Wichita State University: http://usabilitynews.org/a-comparison-of-popular-online-fonts-which-size-and-type-is-best/

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? I C. Haines (Red.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economic* (ss. 222-231). Chichester: Horwood.

Brekke, G. (2000). *Veiledning til algebra: F, H og J.* Oslo: Læringssenteret.

Briggs, S., & Cheek, J. (1986). The role of factor analysis in the evaluation of personality scales. *Journal og Personality, 54*, 106-148.

Carmines, E., & Zeller, R. (1979). *Reliability and validity assessment.* California: SAGE Publications.

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forkningsmetode for lærerutdanningene.* Oslo: Abstrakt forlag.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education.* Oxon, RN: Routledge.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9 (2)*, 19-25.

Fletcher, H. (1971). An efficiency reanalysis of the results. *Journal for Research in Mathematics education, 2*, 143-156.

Floden, R. E. (2002). The measurement of opportunity to learn. I A. Porter, & A. Gamoran, *Methodological advances in cross-national surveys of educational achievement* (ss. 231-266). Washington DC: National Academy Press.

Freudenthal, H. (1977). What is algebra and what has it been in history? I *Archive for History of Exact Sciences* (ss. 189-200). Springer Berlin Heidelberg.

Graham, A. T., & Thomas, M. O. (2000). Building a versatile understanding of algebraic variables with a graphic calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 265-282.

Gronlund, N. (1981). *Measurement and Evaluation in Teaching (4. edition).* New York: Collier - Macmillan.

Grønmo, L., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H., & Borge, I. (2012). *Framgang, men langt fram. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2012.* Oslo: Akademika Forlag.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for research in Mathematics Education, 31*, 396-428.

Hiebert, J., & Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. I F. Lester, *second handbook of research on mathematics teaching and learning* (ss. 371-404). Charlotte, NC: Information Age.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to algebra Perspectives for research and teaching* (ss. 225-236). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels. Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. I F. K. Lester, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (ss. 707-762). Charlotte, NC: Information Age.

Kieran, C. (2014). Algebra Teaching and Learning. I S. Lerman, & (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (ss. 27-32). Springer Netherlands. Hentet fra Springer Link: Encyclopedia of Mathematics Education: http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-94-007-4978-8

Kjærnsli, M., & Olsen, R. (2013). *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012.* Oslo: Universitetsforlaget.

Koedinger, K., & Nathan, M. (2004). The real story behind story problems: effects of representations on quantitative reasoning. *Journal of the Learning Sciences, 13*, 129-164.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (ss. 87-106). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Li, Y., Silver, E., & Li, S. (2014). *Transforming Mathematics Instruction: Multiple Approaches and Practices.* Sveits: Springer.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*, 173-196.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). Seeing a pattern and writing a rule. I I. Hirabayasha, N. Nohda, K. Shigematsu, & F.-L. Lin, *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1)* (ss. 181-188). Tsukuba, Japan.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots og algebra. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (ss. 65-86). Dordrecht: Kluwer.

Miyakawa, T. (2002). Relation between proof and conception: The case of proof for the sum of two even numbers. I D. Cockburn, & E. Nardi, *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3)* (ss. 353-360). Norwick, UK.

Murphy, K., & Davidshofer, C. (2005). *Psycolohocal Testing, Principles and Applications.* Upper Saddle River, NJ: Pearson Education International.

Nathan, M., Stephens, A., Masrik, K., Alibali, M., & Koedinger, K. (2002). Representational fluency in middle school: A classroom stydy. I D. Mewborn, *proceedings of the 24th annual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology og mathematics education (Vol 1)* (ss. 464-472). Athens.

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington DC: National Academy Press.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

NSD. (2015, mai 8). *Skal det registreres personopplysninger?* Hentet fra Personvernombudet: http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/meldeplikttest

Nunnally, J. (1967). *Psychometric Theory.* New York: McGraw-Hill.

Pallant, J. (2001). *SPSS Survival Manual, a step by step guide to data analysis using SPSS version 12.* Sydney: Open University Press.

Pedhazur, E., & Schmelkin, L. (1991). *Measurement, design and analysis. An integrated approach.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Pimm, D. (1995). *Symbols and Meanings in School Mathematics.* Routledge.

Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins, *Perspectives on school algebra* (ss. 13-36). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *Pensamiento Numérico Avanzado, 4 (2)*, 37-62.

Schwarts, J., & Yerushalmy, M. (1992). Getting students to function in and with algebra. I E. Dubinsky, & G. Harel, *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy, vol 25* (ss. 261-289). Washington DC: Mathematical Association of America.

Stein, M., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How Curriculum Influences Students Learning. I F. Lester, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (ss. 319-370). Charlotte, NC: Information Age.

Streiner, D. (2003). Starting at the beginning: An introduction to Coefficient Alpha and Internal Consistency. *Journal of Peraonality Assessment 80 (1)*, 99-103.

Tabachnick, B., & Fidell, L. (2011). *Using Multivariate Statistics.* Pearson.

Thagaard, T. (2003). *Systematikk og innlevelse, en innføring i kvalitativ metode.* Bergen: Fagbokforlaget.

Udir. (2012, Februar 20). *Rammeverk for grunnleggende ferdigheter.* Hentet fra Utdanningsdirektoratet: http://www.udir.no/Lareplaner/Forsok-og-pagaende-arbeid/Lareplangrupper/Rammeverk-for-grunnleggende-ferdigheter/

Udir. (2013, August 1). *Læreplan i matematikk fellesfag; kompetansemål*. Hentet fra Utdanningsdirektoratet: http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Kompetansemaal/?arst=98844765&kmsn=583858936

Udir. (2014a, Januar). *Fag- og timefordeling og tilbudsstruktur for Kunnskapsløftet Udir-1-2014*. Hentet fra Utdanningsdirektoratet: http://www.udir.no/Regelverk/Finn-regelverk-for-opplaring/Finn-regelverk-etter-tema/Innhold-i-opplaringen/Udir-1-2014-Kunnskapsloftet-fag--og-timefordeling-og-tilbudsstruktur/Udir-1-2014-Vedlegg-1/2-Grunnskolen/#GS-tabell-1

Udir. (2014b, November 5). *Obligatorisk deltakelse i internasjonale undersøkelser*. Hentet fra Utdanningsdirektoratet: http://www.udir.no/Tilstand/Internasjonale-studier-/Obligatorisk-deltakelse-i-internasjonale-undersokelser/

Udir. (2014c, Februar 27). *Veiledning i lokalt arbeid med læreplaner*. Hentet fra Utdanningsdirektoratet: http://www.udir.no/Lareplaner/Veiledninger-til-lareplaner/Veiledning-i-lokalt-arbeid-med-lareplaner/?read=1

Utdannings- og forskningsdepartementet. (2004, Desember 6). *Norsk skole trenger et kunnskapsløft*. Hentet fra Regjeringen.no: https://www.regjeringen.no/nb/aktuelt/norsk_skole_trenger_et_kunnskapsloft/id252942/

Vedeld, K., & Venheim, R. (2008, Mars). *Normalfordeling og standardavvik*. Hentet fra Matematikk.org: https://www.matematikk.org/artikkel.html?tid=68746

Wilson, K., Ainley, J., & Bills, L. (2003). Comparing competence in transformational and generational algebraic activities. I P. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox, *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4)* (ss. 427-433). Honolulu.

9 VEDLEGG 1: KARTLEGGINGSPRØVE

På grunn av utfordringer med formateringer er forsiden presentert som et bilde her. Resten av kartleggingsprøven presenteres slik den ble gitt til elevene, med referanser oppført for oppgaver som er hentet et sted.

UiT
NORGES ARKTISKE UNIVERSITET

Kartlegging:
Algebra

2014/2015

Klassenr: ______

Elevnr: ______

UNIVERSITETET I TROMSØ

Informasjon til elev

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, skrivesaker og linjal.

For hver oppgave vil det være en slik boks:

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Du skal krysse av i boksen for hver oppgave, for å svare på hvor mange ganger du har jobbet med den typen oppgave.

Spørreundersøkelse

Kryss av for det som stemmer for deg:

Kjønn:
☐ Jente ☐ Gutt

Karakter i matematikk (forrige halvårskarakter):
☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ Ingen karakter

Karakter i norsk hovedmål skriftlig (forrige halvårskarakter):
☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ Ingen karakter

Kryss av for hvor enig du er i følgende påstander:

	Enig	Litt enig	Ingen av delene	Litt uenig	Uenig
1. Hvis jeg jobber lenge nok med en matte-oppgave vil jeg klare å løse den til slutt.					
2. Målet med matteundervisning er å huske flest mulig formler.					
3. På en matteprøve er det bedre å svare riktig på oppgaver enn å bli ferdig med alle oppgavene.					
4. Hvis jeg ikke umiddelbart ser hvordan jeg skal løse en oppgave så hopper jeg over den.					
5. Det finnes flere måter å løse hver enkelt matteoppgave på.					
6. Selv om man bruker lang tid på å løse oppgaver kan man være flink i matte.					
7. Å være rask å løse oppgaver er <u>ikke</u> det viktigste i matte.					

	Enig	Litt enig	Ingen av delene	Litt uenig	Uenig
8. Hvis jeg bruker lang tid på å løse en oppgave er det fordi jeg ikke er flink nok.					
9. Jeg gjør først de oppgavene jeg greier å løse raskt.					
10. Å jobbe med matte krever mye regel-pugging.					
11. Hvis man ikke klarer å løse en oppgave med en gang er det viktig å prøve en stund uten å få hjelp.					
12. Ved å løse mange, korte matteoppgaver blir man flink i matte.					
13. Når vi har matteprøver er det ikke viktig for meg å levere så fort som mulig.					
14. Jo lengre tid jeg bruker på å løse en matteoppgave, jo mindre forstår jeg.					
15. Når jeg greier å løse en matteoppgave er det fordi jeg har pugget den riktige formelen.					
16. Jeg liker best oppgaver der jeg må prøve meg frem med ulike metoder for å finne svaret.					

Oppgave 1

Petter tjener x kr i timen. Anne tjener 20 kr mer i timen enn Petter. Sett opp et uttrykk for Annes lønn.

Svar:

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Oppgave 2

Faktoriser:

a) *12 =*

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

b) *(8x - 32) =*

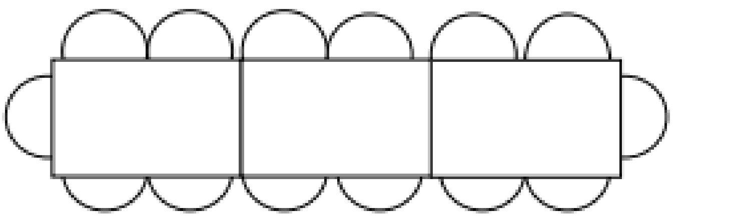
ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

c) $(4 + 2x^2) =$

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Oppgave 3

Et langbord er satt sammen av tre småbord. Rundt bordet er det stoler, slik:



Oppgave hentet fra Brekke (2000)

a) Hvor mange stoler er det plass til om vi har 50 småbord?

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

b) Sett opp et uttrykk for antall stoler ved x antall småbord.

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Oppgave 4

Trekk sammen så mye som mulig:

a) $5x + 3 - 2x - 7 + 10x =$

Svar:

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

b) $(2x^3 + 3x^2 + 4x) + (5x^2 - x + 3) =$

Svar:

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Oppgave 5

$$Y = \frac{a+b}{c}$$

$$a = 8,\ b = 6,\ c = 2$$

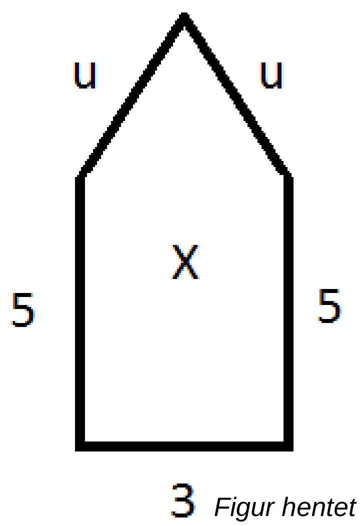
Oppgave hentet fra Grønmo m.fl. (2011)

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Hva er verdien av y? Sett ring rundt det riktige svaret.

a) *7* ***b)*** *10* ***c)*** *11* ***d)*** *14*

Oppgave 6



Figur hentet fra Brekke (2000)

Skriv et uttrykk for omkretsen til figur X.

Svar:

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Oppgave 7 (Oppgave hentet fra Brekke (2000))

Skriv en kort matematikkfortelling, eller tegn en figur som passer til uttrykket 2a + 4b.

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Oppgave 8

Regn ut:

a) *10 – (2 + 7) =*

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

b) *10a (5a + 3) =*

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

c) $(3 + x)^2 =$

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Oppgave 9

Eva tjener 5000 kr i måneden. Hun reiser hjem noen ganger i måneden, hver gang koster det totalt 290 kr i reisekostnader. Sett opp et uttrykk for hvor mye penger hun har igjen hvis hun reiser hjem x antall ganger i løpet av tre måneder.

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Svar: ____________________

Oppgave 10

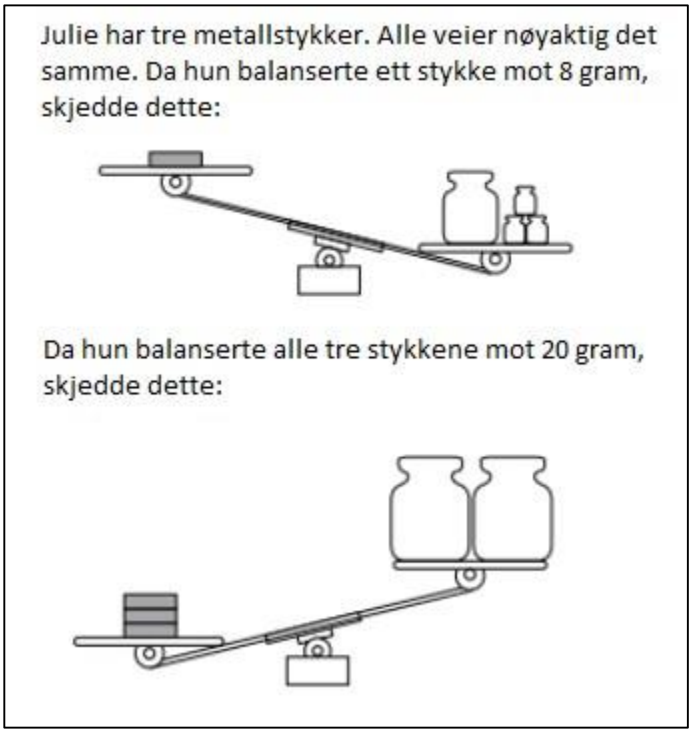
Regn ut når

y = (– 2) og x = 3.

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

$2x^2 + 3y^3 =$ ______________________

Oppgave 11 (Oppgave hentet fra Grønmo m.fl. (2012))

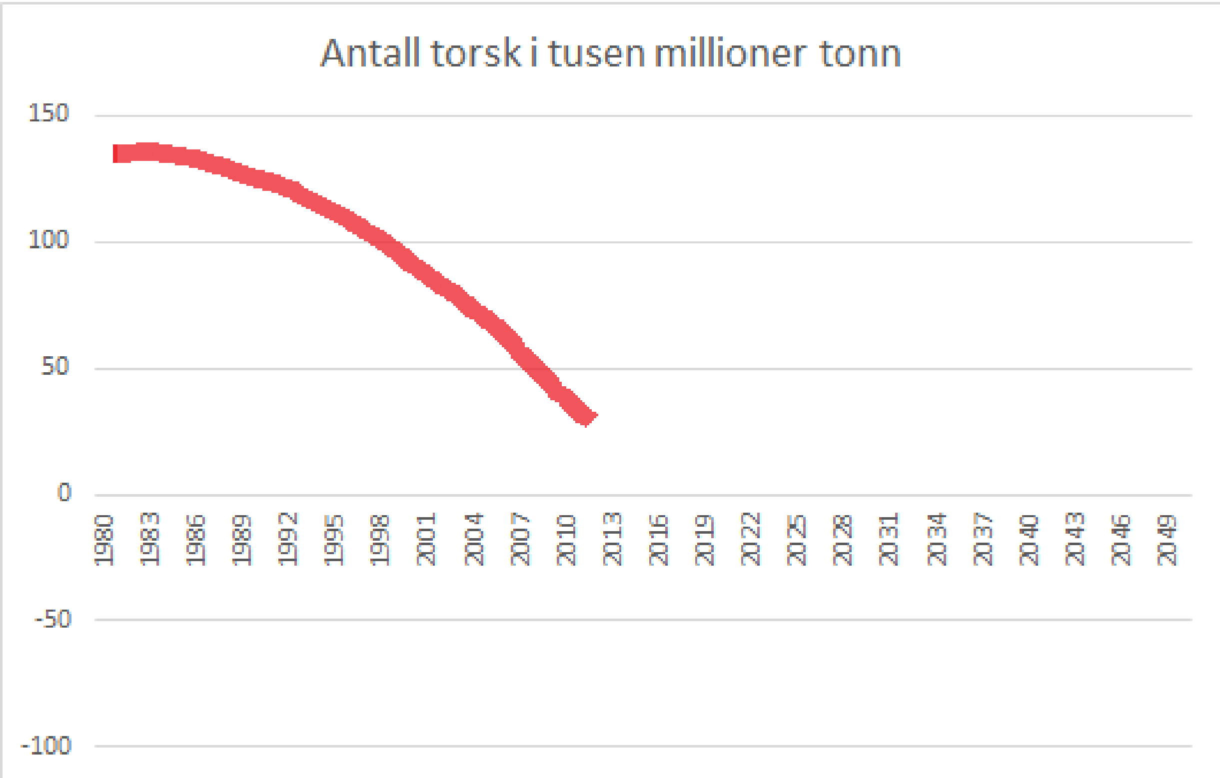


Sett ring rundt det du mener kan være vekten til ett metallstykke.

a) 5 g **b)** 6 g **c)** 7g **d)** 8g

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Oppgave 12



Grafen viser torskebestanden i Barentshavet fra 1980-2013, oppgitt i tusen millioner tonn. Ut ifra denne statistikkene forsøker forskere å spå torskebestanden i år 2040.

Hvor stor tror du den vil være? Sett et kryss i grafen. Begrunn svaret ditt:

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Oppgave 13

a)

Hva er sammenhengen mellom tallene i rekke A og rekke B i denne tabellen?

A	*B*
1	*5*
2	*10*
3	*15*
4	*20*
5	*25*

Svar:

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

b)

Formuler et algebraisk uttrykk for regelen, der du bruker bokstavene A og B. Kan du formulere flere?

Svar: ____

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Oppgave 14

Finn x.

a) $2x = 6$

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Svar: ____________________________________

b) $3x - 5 = 7 - 6x$

Svar: ____________________________________

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Oppgave 15

4, 7, 10, 13, 16, 19, …

I denne tallrekken er det et fast mønster.

Sett opp et uttrykk som gir oss formelen for tall nummer x i tallrekka.

Svar: ______________________________

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Oppgave 16

Fibonaccis tallrekke starter slik:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

Skriv de neste 3 tallene i Fibonaccis tallrekke.

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Svar: ______________________________

Oppgave 17

En generell formell for oddetall alle er $2x + 1$. Forklar hvorfor dette stemmer. Bruk gjerne tegning.

Svar:

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Oppgave 18 (Oppgave hentet fra Blum og Leiß (2007))

På et museum står skoene til kjempen fra myten om Gulliver. Skoene er 2,37 meter brede og 5,29 meter lange. Omtrent hvor høy må kjempen ha vært?

ALDRI	SJELDEN	FLERE GANGER	OFTE

Svar: ____________________________________

10 VEDLEGG 2: FASIT OG POENGFORDELING

Oppgave	Svar som gir 1 poeng	Svar som gir 0,5 poeng
1	*1) (20 + x)* eller 2) ($x + 20$)	-
2a	*1) (2 · 2 · 3)* eller 2) *(4 · 3)* eller 3) *(2 · 6)*	-
2b	1) $8(x - 4)$ eller med 2 eller 4 utenfor parentes, eller 2) $(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x – 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$. Flere versjoner mulig her, se 2a.	-
2c	1) $2(2 + x^2)$ eller 2) $(2 \cdot 2 + 2 \cdot x \cdot x)$	-
3a	*202*	-
3b	$4x + 2$	-
4a	$13x - 4$	-
4b	$2x^3 + 8x^2 + 3x + 3$	-
5	Alternativ a)*7*	-
6	1) $2u + 13$ eller 2) $u + u + 5 + 5 + 3$ eller 3) variasjoner av disse.	-
7	Figur eller fortelling som nevner a og b, og et riktig forhold mellom disse.	Figur eller fortelling som *kan* passe, men uten a og b er det tvil.
8a	*1*	-
8b	$50a^2 + 30a$	Riktig svar, men har forkortet svaret feil videre.
8c	$9 + 6x + x^2$	Riktig svar, men har forkortet svaret feil videre.
9	$15\,000 – 290x$	$5000 – 290\,x$
10	*-6*	Riktig substitusjon. Regnet de to leddene hver for seg, ikke totalt.
11	Alternativ c) *7*	-
12a	Krysset av for koordinat (2040, ≥0)	-
12b	Begrunnelse relatert til enten kontekst, eller kurven og tallene.	-
13a	Ulike variasjoner av «for hver a er det 5 i b».	«5-gangen»
13b	$(5a = b)$ eller $(b/5 = a)$	-

14a	*3*	-
14b	1) *1,33* eller 2) *1,1/3* (ulike versjoner av brøken)	-
15	$3x + 1$	-
16	34, 55, 89	-
17	Ulike variasjoner av «alt som multipliseres med 2 er et partall, for 2 er en faktor i alle partall. Når du legger til 1 får du et oddetall» eller ulike variasjoner av denne forklaringen».	-
18	Slingringsmonn på 30-45 meter godtas. Regning med forholdstall (beregnes ut fra egen høyde i forhold til fotlengde). Beregnet at høyden kan være fra 6-8,5 ganger så stor som lengden på foten. Fasit: slingringsmonn med forhold fra 1-6 til 1-8,5. Dette gir et slingringsmonn på ca 30-45 meter høy. Dette er satt opp på bakgrunn av erfaringer, og et forskningsprosjekt: http://forskning.no/content/600-sparket-av-seg-skoa-og-forsket-med-oss	Viser riktig tankegang, men har regnefeil i utregning, som gir ukorrekt svar.

11 VEDLEGG 3: OVERSIKT DIMENSJONER

Genererende oppgaver

Dimensjon	Beskrivelse	Oppgaver
1	Formulering av uttrykk eller likninger på bakgrunn av en situasjon	1, 7, 9
2	Formulering av uttrykk eller likninger på bakgrunn av geometriske mønstre og figurer	3b, 6
3	Formulering av uttrykk eller likninger på bakgrunn av numeriske forhold eller verdier	13b, 15

Transformerende oppgaver

Dimensjon	Beskrivelse	Oppgaver
1	Forenkling av uttrykk	4ab, 8abc
2	Likningsløsning	14ab
3	Substitusjon	5, 10
4	Faktorisering	2abc

Resonnerende oppgaver

Dimensjon	Beskrivelse	Oppgaver
1	Problemløsning og modellering	3a, 16, 17
2	Bevis og generalisering	3a, 12b, 16, 17
3	Sammenheng og forandring	12a, 13a