Institutt for lærerutdanning og pedagogikk – UiT

Matematisk resonnement i 7.klasse

En kvalitativ undersøkelse av høytpresterende elevers matematiske resonnement i arbeid med generalisering av geometriske figurer og numeriske følger.

—

Patrick Vestad

Masteroppgave i Lærerutdanning 5.-10.trinn, mai 2016

LRU-3903 Matematikkdidaktikk

Sammendrag

Bakgrunnen for prosjektet ble dannet i forbindelse med fordypning i matematikkdidaktikk, høsten 2015. Her fikk jeg bedre kjennskap til tidlig algebra og norske elevers prestasjoner i tidligere gjennomførte TIMSS-undersøkelser. Videre har jeg personlig interesse for elevers resonnement, både i matematikk og i tilknytning til andre undervisningsfag. Problemstillingen som ligger til grunn for denne oppgaven er;

> Hva kjennetegner de matematiske resonnementene til elever i barneskolen med høy måloppnåelse i matematikk, i arbeid med generalisering av geometriske figurer og numeriske følger?

Teorikapittelet i oppgaven presenterer først et konseptuelt rammeverk knyttet til matematisk resonnement, med hovedtyngde fra Lithner (2007), Harel & Sowder (1998) og Balacheff (1988). Videre defineres sentrale begreper fra problemstillingen; høy måloppnåelse og algebra/aritmetikk. For å peke på hva som menes med geometriske figurer og numeriske følger har jeg tatt i bruk Kierans (2004) GTG-modell, og anvendt den på oppgavene som er brukt i forskningsintervjuet.

Metodekapittelet tar for seg rapportens forskningdesign, før jeg videre presenterer utvalgsprosessen og datainnsamlingsprosedyren knyttet til oppgavebasert intervju. Videre beskriver jeg hvordan jeg har gått frem for å analysere og presentere datamaterialet i prosjektet, samt metodiske utfordringer. Deretter vurderer jeg studiets kvalitet gjennom begrepene validitet og reliabilitet. Til slutt kritikk av valgte metoder og etiske aspekter ved oppgaven.

Resultatkapittelet er delt opp i to hoveddeler; 4.1. Oppgave en og to, 4.2. Relasjoner i datamaterialet. Kapittel 4.1. tar for seg hvordan jeg har klassifisert ulike typer resonnement, delt inn etter oppgave en og to. Kapittel 4.2. tar for seg relasjoner datamaterialet; oppgave; resonnement; par.

Diskusjonskapittelet starter med å oppsummere oppgavens funn. Videre ser jeg på bakenforliggende faktorer i mine resultater. Deretter ser jeg min forskning i lys av Balacheff (1988) og Varghese (2011). Kapittelet avsluttes med en oppsummering av elevers matematiske resonnement.

I avslutningen av oppgaven ser jeg på hvordan masterprosjektet har bidratt til egen læring, samt at jeg presenterer noen ideer for hvordan videre forskning på området kan gjennomføres.

Forord

Denne oppgaven markerer avslutningen på et femårig utdanningsløp for å bli lektor for 5.-10.trinn. Utdanningsårene har bydd på spennende utfordringer underveis, med masterprosjektet som den høyeste toppen jeg har klatret på, så langt.

Jeg vil rette en stor takk til familie, venner og medstudenter som har vært med på å gjøre perioden lærerik og full av erfaringer. Spesielt takk til min snille tante som har bidratt til å luke ut rare setninger og annet grums. En ekstra takk til studiekamerater som gjennom årenes løp har gjort studietiden til en sosial og minnerik opplevelse, både gjennom faglige og ikke-faglige begivenheter.

Videre vil jeg takke min veileder Per Øystein Haavold for et flott samarbeid og uvurderlig hjelp i forbindelse med oppgaven.

Til slutt ønsker jeg å takke skolen datainnsamlingen foregikk på. En spesiell takk til undervisningsinspektør ved skolen, som bidro til at godkjenningsprosessen gikk fort og smertefritt.

Innholdsfortegnelse

1 INNLEDNING

1.1 BAKGRUNN FOR PROSJEKTET

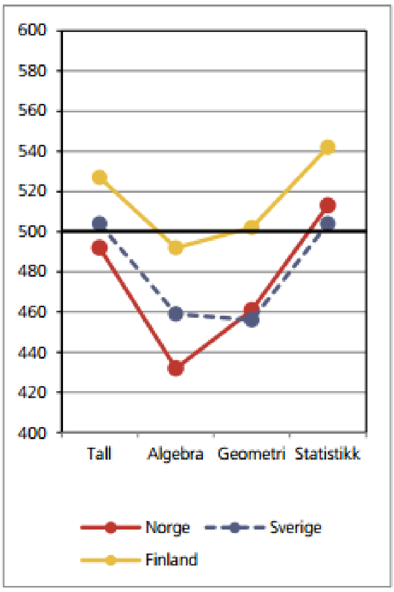
Gjennom utforming av masterskissen i forbindelse med metodeemnet på lærerutdanningens fjerde studieår, utviklet jeg en større interesse for fagområdet algebra. Interessen utviklet seg ytterligere i forbindelse med egen muntligeksamen, høsten 2016. Eksamen gikk ut på at jeg måtte fordype meg i et selvvalgt tema fra Frank K. Lester Jr. *«Second Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning»* fra 2007. Her oppdaget jeg problemløsning, da spesielt generaliserbare oppgaver som trekanttall, kvadrattall etc. Videre fikk jeg kjennskap til begrepet tidlig algebra, det aller første møtet elever i grunnskolen har med algebraiske temaer. Tidlig algebra tar ikke for seg skolealgebraen direkte, i form av grafer og likninger, men fokuserer på elevers kunnskaper innenfor aritmetiske spilleregler. Med dette som utgangspunkt satte jeg meg inn i lærerplanen for norsk, offentlig skole; Kunnskapsløftet. Her oppdaget jeg at ett av hovedtemaene i lærerplanen i matematikk for barneskolen het «Tall og algebra.» Ved nærmere ettersyn kunne jeg lese at kompetansemålene etter 7.årstrinn omhandlet formell algebra, noe jeg tidligere trodde elevene først skulle stifte kjennskap til på ungdomsskolen;

> Mål for opplæringa er at eleven skal kunne; utforske og beskrive strukturar og forandringar i geometriske mønster og talmønster med figurar, ord og formlar. (Udir.no, 2013)

Av kompetansemålet kan man se at etter 7.klasse skal elevene, blant annet, være i stand til «beskrive geometriske mønstre og tallmønstre.» Jeg valgte derfor å rette studien inn mot elever som nærmet seg slutten på barneskolen, for å undersøke i hvor stor grad elevene ville være i stand til å jobbe med geometriske figurer og numeriske følger. Videre har jeg gjennom eget utdanningsløp erfart at elevene i skolen har svært varierende muntlige ferdigheter i matematikkfaget. I følge Udir.no (2014a) synliggjøres progresjon i muntlige ferdigheter i faget gjennom økende presisjon i språket, bruk av fagbegreper og ved økende kyndighet til å formulere resonnementer og generaliseringer. Dette stimuleres, blant annet, gjennom faglige samtaler og diskusjoner (Udir.no, 2014a), som videre er en av årsakene til at oppgavebasert intervju er valgt som del av metoden i denne rapporten.

Faglige samtaler og diskusjoner drar oss videre over på de grunnleggende ferdighetene som er kommet inn i skolen gjennom Kunnskapsløftet (Udir.no, 2012). Brøyn (2009) omtaler grunnleggende ferdigheter som «ferdigheter som danner grunnlag for læring og utvikling,» altså ikke ferdigheter på et grunnleggende nivå som betegnelsen kan oppfattes som. Av egen erfaring har jeg opplevd at det «å prate matematikk» kan hjelpe med å øke forståelsen, dette blir også trukket frem i Brøyn (2009).

En siste motivasjon for prosjektet kommer gjennom norske resultater på internasjonale tester som TIMSS og PISA, hvor norske elever markerer seg med svake resultater i matematikk. Et fagområde som virker å være problematisk for norske elever er Algebra, se figur:



Figur 1: Norske prestasjoner i TIMSS (2011) i emneområder, sammenliknet med referanseland (Grønmo, Onstad, Nilsen, Aslaksen og Borge, 2012)

Sammenliknet med Sverige lå norske åttendeklassinger i 2011 på cirka samme nivå i fagområdene tall, geometri og statistikk. Begge land ligger markant bak Finland på samme områder. Imidlertid presterer norske elever betydelig lavere enn svenske elever i fagområdet algebra. Prestasjonene har fått stor oppmerksomhet i det norske samfunn, både gjennom mediedekning og som tema i politiske debatter, hvor matematikklærerne i Norge har måttet ta sin del av skylden. Som lærerstudent er jeg derfor opptatt av å få et innblikk i hvordan de aller flinkeste elevene på barneskolen jobber med oppgaver hvor de kan ta i bruk algebra, før de selv har blitt introdusert for den formelle algebraen i stor grad. Ved å få en større forståelse for hvordan disse elevene tenker, tror jeg at man i større grad kan bruke dette som inngangsport for den formelle biten av algebraen senere i opplæringen.

Prosessen med å komme frem til en endelig problemstilling har vært omfattende og bydd på ulike utfordringer, ettersom problemstillingen fungerer som et fundament for hele prosjektet.

Utgangspunktet jeg hadde valgte meg omhandlet temaet tidlig algebra og tilnærminger i skolen. Ut fra dette kunne jeg valgt minst to, logiske retninger for forskningen min; læreraspektet og elevaspektet. Med et ønske om anvendbarhet i egen undervisning, da med tanke på øke egne kunnskaper om elevers løsningsprosesser, valgte jeg en elevfokusert tilnærming. Videre bestemte jeg meg for at resonneringsprosessen fenget, og bestemte meg derfor for å se nærmere på algebraisk resonnering. Etter et studie av tidligere forskning omkring algebraiske resonnering oppdaget jeg at en slik tilnærming kunne ende opp med å ha et for enfoldig fokus, hvor viktige funn fort kunne bli utelukket. Algebraisk resonnering ble derfor omformulert til det mer vidtgående begrepet matematisk resonnering.

Ettersom jeg selv var høytpresterende elev i matematikk på barneskolen, og mange ganger opplevde at jeg ikke fikk tilstrekkende utfordringer i faget, ønsket jeg å se nærmere på elever i samme gruppe som meg selv. Valget falt på elever i slutten av barneskolen, dette med bakgrunn i læreplanens formuleringer knyttet til algebra, som tidligere nevnt. Den siste vurderingen jeg foretok før jeg fastsatte problemstillingen omhandlet hvilket hjelpemiddel jeg skulle ta i bruk for å avdekke matematisk resonnering. Også her valgte jeg å bruke kunnskapsløftet som utgangspunkt, hvor geometriske figurer og tallmøsntere blir trukket frem som forhold elevene skal ha kjennskap til i slutten av barneskolen.

1.1.1 Oppgavens Problemstilling

Problemstillingen som ligger til grunn for denne oppgaven er derfor;

> Hva kjennetegner de matematiske resonnementene til elever i barneskolen med høy måloppnåelse i matematikk, i arbeid med generalisering av geometriske figurer og numeriske følger?

1.2 GJENNOMFØRING AV PROSJEKTET

Prosjektet tar for seg elever med høy måloppnåelse i matematikk i barneskolen, med fokus på resonnement knyttet til geometriske figurer og numeriske følger. Prosjektets teoretiske grunnlag dannes av at konseptuelt rammeverk som tar for seg matematisk resonnement. For avdekke elevenes matematiske resonnementer har jeg tatt i bruk et oppgavebasert intervju, hvor elevene har blitt intervjuet parvis, samtidig som de løser to forhåndsbestemte oppgaver knyttet til geometriske figurer og numeriske følger. Dette blir siden presentert i en resultatdel som er utformet på bakgrunn av oppgavens rammeverk. Til slutt drøfter jeg mine funn i lys av teori og tidligere forskning.

2 TEORI

Teorikapittelet presenterer først et konseptuelt rammeverk knyttet til matematisk resonnement, med hovedtyngde fra Lithner (2007), Harel & Sowder (1998) og Balacheff (1988). Videre defineres sentrale begreper fra problemstillingen; høy måloppnåelse og algebra/aritmetikk. For å peke på hva som menes med geometriske figurer og numeriske følger har jeg tatt i bruk Kierans (2004) GTG-modell, før jeg til slutt redegjør for funn i tidligere, lignende forskning.

2.1 PROSJEKTETS RAMMEVERK

Lester (2005) hevder at det å ta i bruk et rammeverk for forskning vil være med på å styrke forskningsprosjektets resultat. Et rammeverk for forskning omfatter grunnleggende strukturer av ideer, som skal være med på å beskrive fenomenet som skal undersøkes (Lester, 2005). Bruk av rammeverk vil ha minst fire fordeler; et rammeverk danner grunnlag for konseptualisering og design i et forskningsprosjekt; et rammeverk vil være med på å gi innsamlede data mening; et godt rammeverk gir forskeren dypere forståelse enn sunn fornuft vil kunne gi; et rammeverk vil bidra til dypere forståelse av hvorfor ting er som de er, slik at funn ikke utelukkende peker på «hva som fungerer» (Lester, 2005). Ifølge Lester (2005) finnes det tre ulike typer rammeverk; teoretisk rammeverk; praktisk rammeverk; konseptuelt rammeverk. I denne rapporten har jeg tatt i bruk et konseptuelt rammeverk, som innebærer at jeg, i tråd med Lester (2005), har valgt ut tilgjengelig teori og tidligere forskning som er relevant for mulige funn i studien. Et konseptuelt rammeverk fungerer som en rettferdiggjørelse av studiet og mulige, heller enn en forklaring på hvorfor ting er som de er (Lester, 2005). Mitt hovedrammeverk er bygget på Lithners (2007) definisjon av resonnement og resonnementsstruktur, Harel & Sowders (1998) definisjon av bevisstrategi og Balacheffs (1988) nivåer av matematisk resonnement. Disse er supplert og underbygget av annen relevant teori fortløpende.

2.1.1 Matematisk resonnement

For å definere matematisk resonnement har jeg valgt å se til Johan Lithners (2007) rammeverk for kreativ og imitativ resonnering. Tanken bak utviklingen av dette rammeverket er bruk i anvendbar forskning som senere kan brukes for å utvikle forståelse av læring hos elevene og utvikling av matematikkundervisning. Lithner (2007) beskriver resonnering som en tankeprosess som produserer påstander og bidrar til å trekke konklusjoner omkring oppgaveløsning. Denne prosessen er ikke nødvendigvis basert på formell logikk og matematiske bevis. Prosessen kan dessuten være helt eller delvis feil, formelt sett, men så lenge det gir mening for eleven selv, og det ligger fornuftige begrunnelser til grunne for den som resonnerer skal det anerkjennes som et resonnement. I følge Kilpatrick, Swafford, & Findell (2001) handler resonnering om å velge prosedyrer og løsningsmetoder, og kunne forklare og begrunne sine løsninger for andre. Resonnering kan betegnes som tankeprosesser, produkter av disse tankeprosessene, eller begge deler. Resonnering kan bidra på mange plan innenfor matematikken; verifikasjon, forklaringer, systematisering, oppdagelser, kommunikasjon, konstruksjon av teori og utforskning (Lithner, 2007). Lithner (2007) beskriver et resonnement gjennom en firetrinnsstruktur;

1) Eleven møter en oppgave eller deloppgave. Denne betegnes som et problem dersom det ikke umiddelbart er åpenbart for eleven hvordan han skal løse oppgaven.
2) Eleven foretar et valg av strategi. Strategi representerer i denne sammenhengen alt fra kreative prosedyrer til mer generelle tilnærminger. Valg omfatter bevist valg av, automatisert valg, konstruksjon, oppdagelse, gjetning, etc. Dette trinnet støttes gjerne av logisk argumentasjon; *hvorfor vil dette fungere?*
3) Strategien settes til live. Støttes av argumenterende argumentasjon; *hvorfor fungerte strategien?*
4) En konklusjon oppnås. Stegene gjentas til eleven har oppnådd en tilfredsstillende løsning.

Lithner (2007) deler inn matematisk resonnering i to hovedgrupper: kreativ- og imitativ resonnering. Harel & Sowder (1998:240) betegner ulike former for resonnering som innovativt og imitativt resonnement. I følge Harel og Sowder (1998) går hovedskillet mellom hvor vidt eleven selv har kommet frem til en løsning eller om eleven har tatt i bruk en løsningsprosess som tidligere har vært kjent for han eller henne gjennom kommunikasjon med andre. Lithner (2007) deler videre imitativ resonnering inn i undergruppene memorert- og algoritmisk resonnering. En elev vil kunne bevege seg mellom de ulike formene for resonnering i arbeid med ulike typer oppgaver, basert på tidligere erfaringer og kunnskaper. I dette studiet har jeg valgt å legge fokuset på den kreative delen av elevenes resonnement. Dette kommer av at oppgavetypen som elevene møter vil være ukjent for dem, noe som forutsetter at elevene ikke vil kunne imitere kjente strategier i løsningsprosessen.

2.1.2 Kreativ resonnering

Kreativ resonnering (Lithner, 2007:266) kjennetegnes ved:

1) Den valgte strategien er ny for eleven. Dette kan innebære at strategien er utelukkende ny for eleven, eller at en tidligere kjent strategi delvis oppdages på nytt og rekonstrueres.
2) Eleven reflekterer over hvilken løsning den valgte strategien vil gi, og ut fra dette argumenterer hvorfor løsningen vil være riktig eller sannsynlig.
3) Argumentene som brukes har matematisk opphav eller baserer seg på matematiske egenskaper til de ulike delene som inngår i resonneringsprosessen.

Det er ingen krav om at kreativ resonnering, i motsetning til problemløsning, må være særlig utfordrende for eleven. Kreativ resonnering kan forekomme på ganske grunnleggende matematiske plan og har som hovedmål at eleven tar i bruk sin matematiske forståelse (Lithner, 2007).

2.1.3 Bevisstrategi

En bevisstrategi (*proof scheme*) består, ifølge Harel & Sowder (1998), av en persons evne til å konstatere for seg selv, eller overbevise seg selv og andre omkring riktigheten av en påstand. Denne definisjonen er bygd på tre delprosesser; formodning versus fakta; bevis; konstatering versus overtaling.

Elever kan komme med påstander på bakgrunn av to ting; antakelser eller fakta. Som et første ledd i bevisstrategien må eleven overbevise seg selv om at antakelsen han eller hun har gjort er riktig. En antakelse blir fullkommen i det øyeblikket eleven klarer å overbevise seg selv om at antakelsen er riktig. Dette fører oss over på neste ledd i prosessen, som handler om bevis. Harel & Sowder (1998) presiserer at bevis, i denne sammenhengen, handler om individets overbevisningsprosess og ikke bevis slik vi tradisjonelt bruker det innenfor matematikken. Bevisprosessen deles videre inn i to underprosesser; konstatering og overtaling. Konstateringen handler om elevens egen overbevisning, mens overtaling handler om elevens evne til å fjerne andres tvil knyttet til påstanden som er gjort (Harel & Sowder 1998).

I denne rapporten vil bevisstrategien som elevene velger kunne være med på å si noe om hvordan elevene resonnerer i sine løsningsprosesser, og dermed bidra til økt forståelse av elevenes resonneringsprosess. Det presiseres at varianter av bevisstrategi som; bevis, strategi, bevisføring, resonnement, resonneringsprosess, resonnementrekke og lignende uttrykk vil bli brukt med bakgrunn i overnevnte definisjon.

2.1.4 Elevenes ulike nivåer av bevisstrategier

For å bygge videre på Lithners (2007) kreative resonnement, samt Harel & Sowders (1998) bevisstrategi, har jeg valgt å bruke nivåene i Nicolas Balacheffs taksonomi av bevisstrategier fra 1988. Balacheffs taksonomi er i denne sammenhengen valgt som hovedrammeverk til fordel for Harel & Sowders taksonomi på bakgrunn av matematikken som brukes for å eksemplifisere de ulike nivåene. Mens Harel & Sowder bruker matematikk som ligger på et ganske høyt, formelt nivå, bruker Balacheff matematikk som kan relateres til grunnskolematematikk og dermed også matematikken i dette prosjektet.

Balacheff (1988) deler inn i to hovedkategorier av bevisføring som han kaller pragmatisk bevisføring og konseptuell bevisføring. Pragmatisk bevisføring beskrives av Balacheff (1988) som prosesser der eleven tyr til faktiske handlinger og konkretisering. Dette vil innebære tegning, bruk av konkretiseringsmateriell, eller andre former for fysiske representasjoner. Under kategorien pragmatisk bevisføring finner vi subkategoriene; naiv empirisme, avgjørende eksperiment og generisk eksempel. I kontrast til dette kommer konseptuell bevisføring. Dette innebærer distansering fra handling, å bevege seg bort fra fysiske representasjoner (Varghese, 2011). Konseptuell bevisføring omfatter strategier som ikke tar i bruk handling, men heller bygger på elevenes formuleringer knyttet til egenskaper det stilles spørsmål ved og relasjoner mellom dem (Balacheff, 1988). Under konseptuell bevisføring har jeg i denne oppgaven valgt å beskrive *tankeeksperiment*. I tillegg til tankeeksperiment trekker Balacheff (1988) ut subkategorien *beregning av påstand*. Denne er vanskelig å skille fra tankeeksperiment, i tillegg til at den ligger noe over elevenes forventede matematiske nivå. Varghese (2011) beskriver kun de fire første subkategoriene i forbindelse med sitt prosjekt knyttet til lærerstudenter. Jeg har derfor valgt å følge Varghese (2011) ved å ta i bruk kategoriene naiv empirisme, avgjørende eksperiment, generisk eksempel og tankeeksperiment i mitt rammeverk. Eksemplene gitt til hver kategori er hentet fra Varghese (2011), hvor avgangsstudenter på lærerstudiet fikk følgende oppgave; *lag en regel for beregning av antall diagonaler i en mangekant, når du vet hvor mange hjørner mangekanten har.* Samme oppgave ble også brukt i Balacheff (1988), da gitt til elever mellom tretten og fjorten år.

2.1.4.1 Naiv empirisme

Elever som tar i bruk naiv empirisme som bevisstrategi vil verifisere sin teori gjennom valg av få, tilfeldig valgte eksempler. Eksemplene som eleven velger trenger ikke å være representativ for helheten, slike sammenhenger vil være heller tilfeldige. Dersom eleven opplever at eksemplene er med på å verifisere sin teori, vil han eller hun vrake andre løsningsmuligheter. I følge Balacheff (1988) er dette en variant som ofte fremtrer tidlig i elevers generaliseringsprosesser og dermed også representerer en form for resonnement som er motstandsdyktig mot generalisering. (Balacheff 1988:218)

Under naiv empirisme trekker Varghese (2011) fram følgende eksempel på argumentasjon; *En firkant har fire hjørner og to diagonaler (h=4, d=2). En femkant har fem hjørner og fem diagonaler (h=5, d=5). Derfor, hvis h er et partall: d=h/2, hvis h er et oddetall: d=h.*

2.1.4.2 Avgjørende eksperiment

I følge Balacheff (1988) vil det avgjørende eksperiment kjennetegnes av elever som står ved en skillevei. Dette innebærer som oftest at eleven på et tidspunkt må gjøre et valg mellom to eller flere hypoteser, hvor eksperimentet skal være med på å påvirke dette valget. Eleven bestemmer seg derfor for en strategi, eller et eksempel, som skal være med på å skille de ulike hypotesene, hvor potensielle utfall skal gi eleven svar om hypotesen stemmer eller ikke. Gjennom et nøye utvalgt eksempel vil eleven prøve å forutse ulike utfall, hvor hvert enkelt utfall skal være så forskjellig fra hverandre at det skal hjelpe eleven til å bestemme seg for en hypotese. Elever som resonnerer på denne måten vil kjennetegnes av en argumentasjonsform som ligner; *Det virker her, derfor vil det alltid fungere* eller *det virker der, men ikke her. Derfor vil det ikke fungere over alt.* Denne formen for resonnement ble, i studiet beskrevet i Balacheff (1988), brukt av elever både til å sjekke resultater av det de allerede hadde gjort, men også som et våpen i argumentasjon med andre (Balacheff 1988:218f).

Varghese (2011) trekker frem følgende eksempel for avgjørende eksperiment; *Jeg formoder at antall diagonaler er lik antall hjørner, og vil derfor bruke en femkant for å bevise dette. Jeg bruker en femkant fordi det er den figuren med størst antall hjørner som fortsatt er enkel å tegne. En femkant har fem hjørner (h=5) og fem diagonaler (d=5), derfor: d=h.*

2.1.4.3 Generisk eksempel

Et generisk eksempel vil være et eksempel som representerer fremtredende karakteristikker av en hel klasse av tilfeller. Dette innebærer for en elev at han eller hun velger et eksempel som representerer helheten på en god måte. Elevene vil ofte kunne ta i bruk komponenter som i utgangspunktet ikke er representert i oppgaven, men inngår i eller karakteriserer på en god måte. Selv om fokuset til eleven ligger ved en bestemt situasjon, eller et eksempel, vil argumentasjonen ikke nødvendigvis omhandle det bestemte eksemplet men som en representasjon for helheten. Argumentasjonsformen her vil kunne ligne; *Noen kjøretøy er biler, alle biler er kjøretøy.* Det generiske eksempel ble, i likhet med det avgjørende eksperiment, brukt for å overbevise en partner som sådde tvil om løsningen som var valgt (Balacheff, 1988:219). Varghese (2011) skriver at det gjennom skriftlig arbeid er umulig å avgjøre om et eksempel er valgt tilfeldig eller med omhu, dersom eleven ikke eksplisitt skriver noe om dette. Varghese (2011:184) foreslår derfor at ekstremeksempler, for eksempel et høyt tall eller en stor figur, må falle inn under generisk eksempel.

I følge Varghese (2011) er følgende en forekomst av generisk eksempel: *En femkant har fem sider (n=5) og fem hjørner (h=5). Fra hvert hjørne kan man trekke to diagonaler, fordi; det er ikke mulig å trekke en diagonal fra et hjørne og tilbake til det selv, og det er ingen diagonaler til de to nærmeste hjørnene. Derfor vil det være tre diagonaler mindre enn antall sider (to diagonaler fra hvert hjørne). Vi kan derfor, i en femkant, ta 5x2=10, d=10. Men; diagonaler har to ender og ved å telle begge endene vil en komme frem til ti diagonaler i en femkant. Man skal derimot kun telle den ene enden av en diagonal, derfor vil totalt antall diagonaler være 10/2, som gir fem (n=5, h=5, d=5), d=h.*

Det generiske eksempel vil ligne på det Harel & Sowder (1998) kaller for *transformational proof scheme,* heretter omtalt som remodelleringstrategi. I følge Harel & Sowder (1998) kjennetegnes remodelleringstrategi gjennom tre trinn; generaliserbarhet; mål og delmål; logiske slutninger. Likheten med generisk eksempel omhandler trinnet for generaliserbarhet, hvor elevene argumenterer på en form som «en for alle» og ingen unntak vil godtas. I tillegg vil både generisk eksempel og remodelleringstrategi kunne ta for seg mål og delmål underveis i løsningsprosessen. Hovedskillet mellom generisk eksempel og remodelleringstrategi ligger omkring krav til argumentasjon og logiske slutninger. Mens generisk eksempel baserer seg på hverdagsspråk og det som virker logisk for eleven selv, vil remodelleringstrategien kreve en mer utfyllende form for argumentasjon og logiske slutninger i form av aksepterte sannheter.

2.1.4.4 Tankeeksperiment

Tankeeksperimentet er det fjerde nivået i Balacheffs taksonomi. Elevens argumentasjon har på dette nivået beveget seg bort fra praktiske og pragmatiske argumenter og over mot intellektuell, konseptuell argumentasjon. Denne formen for resonnement kjennetegnes ved at eleven er i stand til å distansere seg fra handling ved å bruke logiske slutninger med opphav i egenskaper og relasjoner som karakteriserer situasjonen (Balacheff, 1988; Varghese, 2011). Tankeeksperiment setter krav til elevens språkkonstruksjon, hvor elevens språk ligger på et nivå som tar for seg abstrakte egenskaper i objektet. Et svært avgjørende kjennetegn ved tankeeksperiment er elevens evne til å distansere seg fra de spesielle eksemplene (Balacheff, 1988). Varghese (2011) understreker at Balacheff (1988) kategoriserte dekontekstualiserte resonnementer under kategorien tankeeksperiment, også de som ikke var fullstendig matematiske korrekte.

For å illustrere tankeeksperiment trekker Varghese (2011) frem følgende eksempel: *Tenk deg en mangekant med v antall sider. Hvis det er v antall sider, vil det tilsvarende være v antall hjørner. Fra hver toppunkt kan man skrive (v-3) fordi; ingen diagonal fra et toppunkt og tilbake til seg selv, og det er ingen diagonaler til nærmestliggende hjørner. Derfor; tre færre diagonaler enn antall sider, (v-3) fra hvert toppunkt. Med v antall sider får vi da v(v-3). Imidlertid har man da talt alle diagonaler i to ender, man skal kun telle diagonalene i en ende. Derfor må man dele produktet av overnevnte på to. Derfor; formelen vil være d = (v(v-3))/2.*

Tankeeksperiment ligner det Harel & Sowder (1998) kaller referensiell-symbolsk bevisstrategi, som ligger under den deduktive kategorien i deres taksonomi. Denne formen for bevisstrategi omfatter de områder der elevene tar i bruk symbolsk matematikk som representasjonsform. Ved hjelp av den symbolske representasjonen skaper elevene mening omkring problemer som er gitt. Likheten med Balacheffs (1988) tankeeksperiment omhandler de konseptuelle referansene elevene tar i bruk ved å distansere seg fra det spesielle til det generelle. Tankeeksperimentet har derimot ikke like strenge krav til formell argumentasjon som referensiell-symbolsk bevisstrategi. I følge Harel & Sowder (1998) står denne formen for bevisføring i kontrast til den ikke-referensielle bevisstrategien, som kjennetegnes av ytre argumentasjoner. Dette kan være gjennom symbolmanipulasjon basert utelukkende på instrumentelle operasjoner, eksempler vil være; «flytt over og bytt fortegn, stryk det som er likt over og under brøkstreken, etc.» (Harel & Sowder, 1998).

2.2 RESULTATER I BALACHEFF (1988) OG VARGHESE (2011)

I sine forskningsrapporter brukte Balacheff (1988) og senere Varghese (2011) følgende oppgave for å avdekke matematisk resonnement; *lag en regel for beregning av antall diagonaler i en mangekant, når du vet hvor mange hjørner mangekanten har.*

Varghese (2011) og Balacheff (1988) fant i sin forskning at det var vanskelig å skille de tre pragmatiske bevisstrategiene fra hverandre. Balacheff (1988) oppdaget dessuten at naiv empirisme ble brukt i størst grad tidlig i løsningsprosessen, noe som støttes av Harel & Sowder (1998:277). Harel & Sowder (1998) argumenterer for at bruk av ulike strategier kan begrunnes i elevenes kjennskap til kontekst. Dessuten vil elevenes egen oppfatning av hva som er aksepterte beviser kunne variere i ulike kontekster, og dermed påvirke valg av strategi. Videre opplevde begge at det var vanskelig å finne forekomster av generisk eksempel, noe Varghese (2011) antydet kunne forklares i kvaliteten på oppgavene som ble gitt. Harel & Sowder (1998) peker dessuten på at det sosiale i et parintervju kan fungere som en hindring for at et høyere nivå av resonnement kan oppnås.

Balacheff (1988) understreker at et resonnement som gir feil svar, også er et resonnement. Det er derfor et poeng å klassifisere bevisformer som har ufullstendige eller ukorrekte sluttprodukter (Varghese, 2011).

2.3 SENTRALE BEGREPER I OPPGAVEN

2.3.1 Høy måloppnåelse

Læreplanen Kunnskapsløftet (LK-06) er styrende dokument for undervisning i norsk, offentlig skole. Kunnskapsløftet er delt inn i en generell del og en fagspesifikk del. Den generelle delen inneholder blant annet formål med opplæringen. Den generelle delen skaper et bilde av læring på tvers av fagene, i en bredere kontekst enn læreplanene for hvert enkelt fag. Læreplanene for fagene inneholder formål med faget, samt hovedområder i faget, grunnleggende ferdigheter i faget og kompetansemål. For 7.årstrinn finner man fire hovedområder; tall og algebra; geometri; måling; statistikk og sannsynlighet (Udir.no, 2013). Kompetansemålene er utformet for å beskrive hva eleven skal kunne etter endt opplæring (Udir.no, 2014a). I kunnskapsløftet for grunnskolen er det utformet kompetansemål etter 2.-, 4.-,7.- og 10.årstrinn (Udir.no, 2013).

I 2009 offentliggjorde utdanningsdirektoratet en rapport hvor de anbefalte å innføre nasjonale kjennetegn for måloppnåelse i enkelte fag, deriblant matematikk. I vedlegg 4 fra overnevnte rapport ligger det et utkast som inneholder kjennetegn til hvert hovedområde for 2.-,4.-,7.- og 10.trinn. Utkastet er utarbeidet av en faggruppe bestående av lærere og fagpersoner fra universitets- og høgskolesektoren. Hovedområdene fra lærerplanen er delt inn i kategoriene; begrep og ferdigheter; anvendelse og problemløsning; kommunikasjon.

Disse kategoriene skal være med på å dekke enkeltemner, så vel som helheten, i faget hvor alle kompetansemålene er representert (før revidert lærerplan i 2013). I barneskolen er kjennetegnene utformet på lav og høy grad av måloppnåelse, hvor kjennetegn på høy måloppnåelse bygger på at kjennetegn fra lav måloppnåelse er innfridd. Termene lav- og høy måloppnåelse vurderes endret dersom det innføres nasjonale kjennetegn på måloppnåelse i faget. Det foreligger videre forklaringer omkring didaktiske hensyn som har dannet grunnlag for utforming av kjennetegnene (Udir.no, 2009).

I alle hovedområdene, under kategorien «kommunikasjon, høy måloppnåelse» står det; *«<u>Gjør rede for egne og andres</u> instruksjoner, forklaringer, <u>resonnement</u>, både digitalt, skriftlig og muntlig»* (Udir.no, 2009, egen understreking). Dette i motsetning til «kommunikasjon, lav måloppnåelse,» hvor det står; *«Følger og formidler enkle instruksjoner og forklaringer»* (Udir.no, 2009). Ut fra dette kan en trekke slutninger om at elever med høy måloppnåelse i matematikk, blant annet, er i stand til å redegjøre for egne og andres resonnementer. Denne definisjonen vil sammenfalle med det høyeste kompetansenivået for 8.trinn i TIMSS; Avansert nivå. Avansert kompetansenivå kjennetegnes, blant annet, av at elevene kan resonnere på grunnlag av gitt informasjon, trekke slutninger på grunnlag av dette og forme generaliseringer. Avansert nivå for 4.trinn krever også at eleven er i stand til å forklare egne resonnementer (Grønmo et al., 2012).

Det er utarbeidet grunnleggende ferdigheter i alle undervisningsfag, disse er integrert i kompetansemålene og skal være med på å bidra til utvikling av fagkompetansen. De grunnleggende ferdighetene handler om å kunne uttrykke seg gjennom; muntlig; skriftlig; lesing; regning; digitalt (Udir.no, 2013). I følge Udir.no (2014a) synliggjøres utvikling i muntlige og skriftlige ferdigheter i matematikk gjennom presisjon i språket og bruk av faguttrykk. I tillegg kan dette komme til uttrykk gjennom økende evne til å formulere resonnementer og generaliseringer. Med dette som bakgrunn er det, blant annet, viktig at elevene får mulighet til å delta i faglige samtaler og diskusjoner (Udir.no, 2013).

2.3.2 8Algebra og aritmetikk

I følge Watson (2009) omfatter algebra generalisering av tall, mengder, relasjoner og funksjoner. For å lykkes innen algebra er det derfor viktig å ha god forståelse for sammenhengen mellom overnevnte egenskaper. Dette vil for eksempel innebære innsikt i multiplikasjon og divisjon, samt addisjon og subtraksjon, som inverse operasjoner (Watson, 2009). Carraher & Schliemann (2007) bruker algebra om aritmetikk med variabler og generalisering av uttrykk ved hjelp av aritmetiske spilleregler. Aritmetikk har en algebraisk karakter og har inherent aritmetiske egenskaper (Carraher & Schliemann, 2007). Caspi & Sfard (2012) hevder at algebra må sees på som formelle eller uformelle samtaler eller drøftelser, heller enn et språk.

På grunnskolenivå kan algebra beskrives som manipulasjon og omforming av symbolske påstander; generalisering av tall og mønstre; studie av abstrakte strukturer og beregninger; regler for omforming og løsning av likninger; læren om variabler og funksjoner, samt uttrykk for endring og relasjoner; modellering av matematiske strukturer knyttet til situasjoner både innenfor og utenfor matematikken (Watson, 2009). Skolealgebraen må sees på som Meta-aritmetikk som forenklet kan beskrives som generalisering og løsning av likninger. Med sistnevnte definisjon vil algebraisk tenkning oppstå når en diskuterer numeriske relasjoner i generaliseringsprosesser, eller i forsøk på å finne ukjente (Caspi & Sfard, 2012:46). Kieran (2007) trekker frem funn som viser at skolealgebra blir omtalt som aktiviteter. Dette kom blant annet frem når spørsmålet «Hva er algebra?» ble stilt i intervju av lærere, matematikere, lærere, studenter og forskere på området (Kieran, 2007:713).

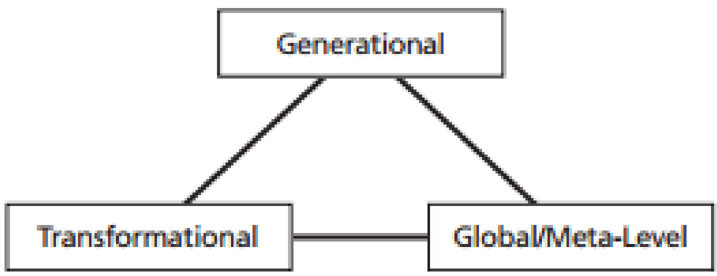
Overgangen mellom aritmetikk og algebra kan beskrives gjennom spiralprinsippet til Bruner (1960). Spiralprinsippet tar utgangspunktet i elevens nåværende kunnskaper, og har som mål å bygge videre på disse. Bruner (1960) skriver at tall og tallforståelse vil være en grunnstein i matematikken, undervisning av emnet bør derfor starte så tidlig som mulig i utviklingsprosessen til barnet. På barnenivå kan en lære barna å telle, senere kan en lære barnet enkle addisjonsprosesser, videre kan barnet få opplæring i subtraksjon, osv. helt opp til et så høyt nivå som mulig. Dette prinsippet har vært toneangivende for utvikling av læreplaner i nyere tid. Vi ser for eksempel at læreplanen for matematikk bygger på at elevene skal jobbe med et tema kort tid av gangen, for senere å komme tilbake for å lære temaet på et litt høyere nivå enn forrige gang (Imsen, 2005). (Se figur)

Figur 2:Bruners spiral (Khataybeth & Ateeg, 2011)

På samme måte som matematikk faget ellers, bygger algebraisk tilnærming på elevenes tidligere erfaringer. Før elevene i grunnskolen gjøres kjent med algebra ønsker man, gjennom undervisning i matematikkfaget at elevene skal ha et godt, aritmetisk grunnlag (udir.no, 2013). Aritmetisk kunnskap kan i overgangen til algebra være med på å skape problemer for elevene, ifølge Watson (2009). Dette innebærer for eksempel forståelse av likhetstegnet, inverse operasjoner og blandingen mellom bokstaver og tall (Watson, 2009).

2.4 GTG-MODELLEN

Med utgangspunkt i skolealgebra som aktivitet har Kieran utviklet en modell som tar for seg hovedtrekkene ved algebraiske aktiviteter (Kieran, 2004; Kieran, 2007). GTG-modellen deler skolealgebraen inn i tre forskjellige typer aktiviteter; genererende, transformerende, og resonnerende aktiviteter. Modellen skaper et teoretisk skille mellom kategoriene, i praksis vil en imidlertid oppleve at aktiviteter kan omfatte både to og alle tre kategoriene fra modellen (Kieran, 2004).



Figur 3: GTG-modellen (Kieran, 2007:713)

I Kierans (2004) modell for algebraisk aktivitet heter den siste aktivitetsformen global, meta-level aktivitet. Jeg velger imidlertid å bruke oversettelsen «resonnerende aktivitet,» som Petersen (2015:8) har kommet frem til i samråd med Kieran.

2.4.1.1 Genererende aktivitet

Genererende aktivitet handler i stor grad om arbeid knyttet til algebraiske uttrykk og likninger. Elevene vil typisk jobbe med likninger som inneholder ukjente, ofte vil disse konkretiseres for elevene gjennom tenkte situasjoner. I følge Kieran (2004) kan genererende aktiviteter også omfatte arbeid med generalisering av geometriske mønstre og numeriske følger. Og til slutt regler knyttet til relasjoner mellom tall (Kieran, 2004). Dette kan ofte settes i sammenheng med resonnerende aktiviteter (Kieran, 2007). Goldin (1997) hevder at arbeid med aritmetiske sekvenser, representert gjennom geometriske figurer, stimulerer elevene til å bruke visuelle, manipulative og symbolske representasjoner. Videre kan denne typen aktivitet få elevene til å vise vendbar tenkning (Goldin, 1997). Hovedområdet genererende aktivitet handler om meningsskapende aktiviteter for elevene, i arbeid med ukjente, variabler, generaliseringer og likhetstegnet (Kieran, 2004).

Genererende aktiviteter på mellomtrinnet og ungdomsskolen kan fokusere på bruk av minustegn og negative tall, for eksempel at uttrykket «–x = 1» viser –x som er det motsatte av x (Kieran, 2007). Denne typen aktivitet kan også innebære bruk av tabeller og regneark eller å lage matematiske representasjoner for tekstoppgaver, både som representasjon for selve problemet, men også for å løse problemet (Kieran, 2007).

2.4.1.2 Transformerende aktivitet

Transformerende aktivitet handler i det store bildet om å manipulere strukturer på likninger og algebraiske uttrykk. Denne formen for aktivitet er ofte knyttet til regelstyrte handlinger som for eksempel faktorisering, forenkling av uttrykk, løsning av likninger, potenser, parenteser og det matematiske språket (Kieran, 2004). Denne formen for aktivitet tar for seg, i motsetning til genererende aktivitet, den abstrakte siden av matematikken, hvor oppgavene ofte tar bort kontekst og sammenheng. I følge Kieran (2007) er transformerende aktiviteter med på å bygge mening omkring bruk av aksiomer og egenskaper knyttet til manipuleringsprosessen som en egen prosess. På mellomtrinnet og i ungdomsskolen vil transformerende aktiviteter i stor grad handle om å forene de algebraiske «spillereglene» med det elevene allerede kjenner fra aritmetisk oppgaveløsning (Kieran, 2007).

2.4.1.3 Resonnerende aktivitet

Resonnerende aktiviteter er aktiviteter som tar i bruk algebra som et verktøy. Disse aktivitetene kan for eksempel være problemløsning, modellering, bevisføring, matematisk argumentasjon og generalisering. Alt i alt er dette aktiviteter som ikke nødvendigvis krever bruk av algebra (Kieran, 2004). I følge Kieran (2007) kan de resonnerende aktivitetene brukes som deler eller i samhandling med genererende- og transformerende aktiviteter. Dette fordi resonnerende aktiviteter, på en og samme tid, er større og mindre enn algebraen i seg selv (Kieran, 2007). På mellomtrinnet og ungdomsskolen vil resonnerende aktiviteter ofte knyttes opp mot generaliseringsoppgaver, hvor elevene øver på å finne generelle uttrykk for geometriske figurer eller numeriske følger (Kieran, 2007).

2.4.1.4 Studiens oppgaver

Kieran (2007) gir et nærmere innblikk i studier som er gjort i tilknytning til algebraiske aktiviteter. Her blir det poengtert at studier som går på tvers av de tre kategoriene vil plasseres i den kategorien som dekker størst del av studiet (Kieran, 2007:715). Oppgavene i dette studiet kan klassifiseres både som genererende- og resonnerende aktiviteter. Imidlertid ligger hovedtrekkene omkring genererende aktivitet i form av at de tar for seg aritmetiske og algebraiske sekvenser, som representeres gjennom geometriske figurer.

3 METODE

Metodekapittelet tar for seg rapportens forskningdesign, før jeg videre presenterer utvalgsprosessen og datainnsamlingsprosedyren knyttet til oppgavebasert intervju. Videre beskrives det hvordan jeg har gått frem for å analysere og presentere datamaterialet i prosjektet. Siden vurderer jeg studiets kvalitet gjennom begrepene validitet og reliabilitet. Til slutt kritikk av valgte metoder og etiske aspekter ved oppgaven.

3.1 FORSKNINGDESIGN

I utarbeidelsen av mitt forskningdesign har jeg tatt hensyn til problemstilling, epistemologi og metodologi. Disse henger tett sammen og legger føringer for hvordan datainnsamlingen skal gjøres for å gi en best mulig beskrivelse av det jeg ønsker å undersøke. Ettersom problemstillingen min omfatter resonnement, de indre prosessene i forbindelse med oppgaveløsning, er utgangspunktet mitt at jeg mener at det lar seg gjøre «å gå inn i hodet» på elevene for å beskrive de kognitive prosessene. På bakgrunn av dette heller mitt syn mot kognitiv tradisjon og konstruktivistisk læringssyn. Videre ønsker jeg å undersøke et fenomen (resonnement) og hvordan dette kommer til uttrykk hos elever, jeg ønsker ikke å kartlegge hyppighet blant elever i Norge, dermed vil en kvalitativ tilnærming passe.

Det konstruktivistiske læringssynet bygger på prinsipper fra kognitiv psykologi (Glaserfeld, 1991). Kognitiv pyskologi undersøker hvordan mennesker prosesserer informasjonen som de er omgitt med. Dette innebærer studier av oppfatning, inntak av informasjon, hukommelse og bruk av informasjon. Videre undersøker kognitiv psykologi mangfoldige tankeprosesser som resonnement, språk og andre mentale aktiviteter (Fernald, 2008). I følge Cobb (2007) vil forskere innenfor den kognitive tradisjonen redegjøre for varianter av enkeltelevers resonneringsprosesser. Kognitiv psykologi står i kontrast til behaviorismen, som konsentrerer seg om observerbare, ytre handlinger. I tillegg vil kognitiv psykologi i stor grad stimulere til utvikling av teorier, ettersom mentale prosesser ikke lar seg observere direkte (Fernald, 2008). I henhold til konstruktivisme vil hvert enkelt individ ha sin egen, subjektive oppfatning av verden rundt seg. Dette kokes helt ned til at alt som prosesseres gjennom individets kognitive prosesser vil tolkes og gis betydning ut fra individets egne erfaringer, også det som blir ytret av andre enn individet selv (Glaserfeld, 1991). Forskningsdesignet for oppgaven skiller seg fra for eksempel fenomenologi og grounded theory, gjennom at både utformingen av intervjuet og analysen i oppgaven baserer seg på eksisterende teori. Fenomenologi har ifølge

Gray (2004) som mål å forstå et sosialt fenomen gjennom erfaringer knyttet til det aktuelle fenomenet. Dette innebærer, blant annet, at fenomenologi går bort fra eksisterende teorier om det som skal undersøkes, for å kunne oppdage nye meninger ved fenomenet (Gray, 2004).

Den metodologiske tilnærmingen i denne rapporten faller inn under generisk kvalitativ praksis. Generisk kvalitativ tilnærming kan enten kombinere flere metodologier og tilnærminger, eller distansere seg fra å vise et metodologisk standpunkt (Caelli, Ray & Miller, 2003). I følge Caelli et al. (2003) er generisk kvalitativ metode mest vanlig i kvalitativ forskning. Forskningen karakteriseres ofte gjennom utdanningsteorier, kognitiv psykologi eller sosiologi (Caelli et al., 2003). I en generisk kvalitativ tilnærming er det, ifølge Caelli et al. (2003), viktig å ta hensyn til fire ulike parameter; forskerens ståsted, samhandling mellom metodologi og metode; strategier for å etablere nøyaktighet; det analytiske perspektivet som data skal tolkes gjennom. Jeg har ingen erfaring som forsker i feltet, slik at forskerens ståsted i denne forbindelse er uerfaren og jeg har lært gjennom hele løpet. I følge Caelli et al. (2003) er generisk kvalitativ metode passende for uerfarne forskere, gjerne masterstudenter. Analysen er gjort gjennom en tolkende/konstruktivistisk tilnærming, hvor målet er å beskrive indre prosesser i intervjuobjektenes hoder. I tolkning av andres utsagn, for eksempel det som gjøres i denne rapporten, er det viktig for forskeren å være klar over egen påvirkning på det som tolkes (Glaserfeld, 1991). Den metodiske tilnærmingen for prosjektet er et oppgavebasert intervju. Oppgavene som er valgt, har som formål at intervjudeltakerne skal kunne gi uttrykk for sine tanker og meninger gjennom muntlig og skriftlig/praktiske løsningsprosedyrer.

3.2 UTVALG

Med problemstillingen som utgangspunkt, valgte jeg å ta kontakt med flere barneskoler i Nord-Norge. Det ble først sendt mail til rektorer ved aktuelle skoler, før jeg noen dager senere tok direkte kontakt via telefon. En av skolene meldte interesse, hvor jeg siden ble henvist til undervisningsinspektør ved skolen. Jeg har dermed brukt det Aarø (2007) kaller for et bekvemmelighetsutvalg, de som er lett tilgjengelig. Cohen, Manion & Morrison (2007) understreker at utvalget da ikke vil være representativt for populasjonen, noe som er tatt høyde for i rapporten.

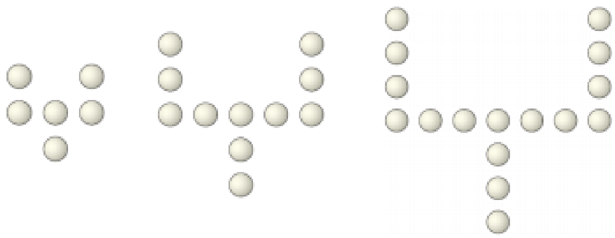
I samarbeid med inspektør ble det, på bakgrunn av resultater fra kartleggingsprøver gjennomført på 7.årstrinn, valgt ut ti elever som var aktuelle deltakere for intervjuet. Disse er kun valgt på bakgrunn av prøveresultater, kjønnsfordelingen på 5 gutter og 5 jenter er dermed mer tilfeldig. Sammensetning av par i intervjusituasjon ble gjort med bakgrunn i klassetilhørighet, ettersom elevene gikk i tre forskjellige klasser. Faglærer ble også tatt med i prosessen, for å kvalitetssikre at aktuelle elever passet inn i undersøkelsen. Inspektør tok deretter kontakt med elevene for å avdekke om de var villige til å delta, for så å kontakte foresatte for å informere. Samtykkeerklæring ble sendt hjem, med utdypende informasjon om formål og rettigheter, denne ble siden sendt tilbake til skolen i underskrevet tilstand. Elevene fikk muntlig innføring i formål og rettigheter i forbindelse med intervjusituasjon og samtlige ønsket å delta.

Kartleggingsverktøyet som har blitt brukt er PP-tjenestens M-prøver. M-prøvene finnes for 2.-10. klasse på grunnskolen, samt andre utgaver for høyere nivå, og har som formål å måle elevenes matematiske kompetanse. Disse prøvene er utarbeidet med bakgrunn i L-97, hvor det var fastsatt mål for hvert enkelt klassetrinn. Prøvene er ikke endret etter at LK-06 tredde i kraft. Bruk utenom 4.-, 7.- og 10.klasse kan derfor gi misvisende resultater med bakgrunn i oppbygningen av kompetansemål i LK-06. Imidlertid er 7.klasse siste året på barneskolen, slik at M-prøven for dette årstrinnet bør gi ganske gode indikasjoner på elevenes matematiske nivå. Prøven er delt inn etter ulike temaer innenfor matematikken. Elevene får en score på hvert tema etter et fastsatt poengsystem fra 1-9, hvor 1 er dårligst og 9 er best. Til slutt regnes det ut hvilken prøveklasse eleven har totalt, med bakgrunn i overnevnte system (ppt-materiell.no). Elevene i mitt utvalg ligger i sjiktet prøveklasse 7-9.

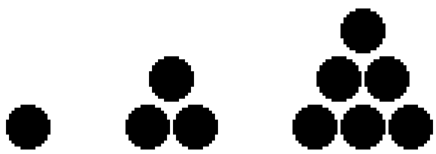
3.3 PROSEDYRE

Oppgavebaserte intervjuer er en underkategori av kliniske intervjuer. Disse kan gjennomføres både som strukturerte-, semi-strukturerte- og åpne intervjuer. Goldin (1997) skriver at på generell basis har denne formen for intervju som hovedmål å (a) observere adferden til voksne eller barn, som regel i en oppgaveløsnings-kontekst, og (b) trekke slutninger fra observasjoner som gir mulighet til å si noe om oppgaveløserens mulige meninger, kunnskapsstrukturer, kognitive prosesser, påvirkning eller endringer i disse gjennom intervjuet. Goldin (1997) har satt opp fem prinsipper for utforming av oppgavebaserte intervjuer; oppgavens tilgjengelighet for intervjuobjektet; rik representasjonsstruktur; åpen problemløsning; tydelige kriterier; interaksjon med læringsmiljøet. Goldins (1997) prinsipper er lagt til grunne for utformingen av intervjuguiden som er brukt i dette prosjektet.

I henhold til første punkt i Goldin (1997) ønsket jeg å velge oppgaver som var av en slik art at elevene kunne skape indre, så vel som ytre, representasjoner for å komme frem til en løsning. I tillegg bør oppgavene ifølge Goldin (1997) ha stor representasjonsstruktur, noe som innebærer at det kan skapes ulike representasjoner for oppgavene, både symbolsk og imaginært. Begrensningen i type oppgaver ligger i problemstillingen, og jeg bestemte meg derfor for å bruke numeriske følger, representert gjennom geometriske mønstre. Jeg ønsket videre å variere oppgavene gjennom å ta i bruk en med lineær vekst (5n+1) og en med eksponentiell vekst (n(n+1) /2). Rekkefølgen ble fastsatt etter pilotintervjuet, hvor elevene virket å jobbe lettere med lineær vekst enn eksponentiell vekst. Jeg valgte derfor å bruke lineær vekst som oppgave en.



Figur 4: Oppgave 1, 5n+1 (Cappelendamm.no)



Figur 5: Oppgave 2, (n(n+1) /2 (Matuszek, 2014)

Videre mener Goldin (1997) at intervjuguiden bør utformes på en slik måte at intervjuobjektene får frihet til å løse problemene med lav grad av påvirkning fra intervjuer. Jeg valgte derfor å utforme intervjuguiden på en slik måte at jeg startet med å gi intervjuobjektene oppgavene, uten å stille spørsmål umiddelbart. Dette for å fange opp umiddelbare, spontane reaksjoner. Dersom det kom en spontan reaksjon valgte jeg å ta tak i denne gjennom oppfølgingsspørsmål. Ved mangel på reaksjoner stilte jeg spørsmålet «Hva ser dere?» for å få elevene til å starte tankerekken. Videre var intervjuguiden designet på en slik måte at den startet med generelle, åpne spørsmål, for så å spisses mer og mer inn mot det spesielle dersom elevene stoppet opp i oppgaveløsningen. I følge Goldin (1997) er det viktig at intervjueren ikke er for førende gjennom å stille ledende spørsmål, eller ved å stille spørsmål for tidlig. Dette vil kunne være med på å påvirke intervjuobjektet i større grad og dermed vil verdifulle data gå tapt.

Oppgavene jeg valgte ut til intervjuet var av en art som elevene tidligere ikke hadde jobbet med. Det var derfor viktig at jeg på forhånd hadde reflektert rundt mulige mistolkninger rundt spørsmålsstillingen eller andre misforståelser som kunne oppstå underveis. Dette løste jeg ved å teste oppgavene på familie og venner, i tillegg til et pilotintervju. Jeg fikk da erfaring med å omformulere meg, ta spontane avgjørelser og oversikt over noen mulige komplikasjoner som kan oppstå underveis. Dette mener Goldin (1997) er en viktig side ved oppgavebaserte intervjuer, ettersom det vil være med på å sikre muligheter for generaliserbarhet og reproduserbarhet av funn.

Et siste aspekt ved oppgavebaserte intervjuer som trekkes frem i Goldin (1997) er intervjuobjektenes tilgang på ulike og varierte representasjonsformer. Gjennom denne typen tilgang vil en ifølge Goldin (1997) kunne observere et større spekter av løsninger og dermed kunne trekke flere slutninger om de indre prosessene som foregår. I mine intervjuer hadde elevene tilgang på oppgavearkene, hvor figurene var presentert, blanke A4-ark, blyanter, viskelær, penner, tusjer i ulike farger og en boks med fargede kuler. Elevene ble gjort kjent med disse artiklene før intervjuene startet, hvor de fikk fri tilgang til det de måtte ønske. Jeg erfarte imidlertid at ingen av elevene benyttet seg av fargede kuler eller tusjer.

Intervjuene foregikk på et grupperom ved skolen som elevene tilhører. Jeg valgte å bruke samme intervjuoppsett som beskrives i Caspi & Sfard (2012), hvor intervjuobjektene var plassert på en side av bordet, med kameraet rettet mot seg og jeg satt på andre siden av bordet, utenfor bildeutsnittet, (se figur).

Figur 6: Intervjuoppsett (Caspi & Sfard, 2012)

Jeg valgte å filme intervjuet ettersom jeg i ettertid da ville kunne observere adferden til elevene, samtidig som jeg fikk opptak av samtalene som pågikk. Dette er et valg som i ettertid har vist seg å være nyttig, ettersom jeg da fikk fanget opp resonnementer som jeg ikke fikk med meg i intervjuprosessen. I tillegg kan en samtale ofte basere seg på kroppsspråk, som for eksempel peking, som igjen ville vært vanskelig å fange opp hvis jeg kun hadde tatt lydopptak. Et annet valg som ble gjort på forhånd var antall deltakere per intervju. Med redegjørelsen for resonnement og elever med høy måloppnåelse, som nevnt i teorikapittelet, valgte jeg å gjennomføre intervjuene med par. Dette med ønske om å oppnå diskusjoner mellom elevene, slik at jeg som intervjuer kunne innta en observatørrolle i større grad enn hvis jeg hadde intervjuet en og en elev. Intervjuene varte i 25-30 minutter og ble gjennomført i løpet av en skoledag.

3.4 ANALYSEMETODE

Tematisk analyse er en metode som tas i bruk for å identifisere, analysere og rapportere trender i kvalitativt datamateriale. Braun & Clarke (2006:87f) beskriver en 6-trinnsmodell som kan brukes som retningslinjer i en tematisk analyse; gjør deg kjent med datasettet; lag koder; kategoriser koder i temaer; kontroller kategorier/temaer mot helheten i datasettet; definer og navngi temaer; skriv rapport. Denne tar for seg de samme områdene av en analyse som Renner & Taylor-Powell (2003) gjør i sin 5-stegs veiledning til analyse av kvalitative data; bli kjent med datasettet; velg fokus for analysen; kategoriser informasjon; finn sammenhenger i- og på tvers av kategorier; tolk og sett sammen til en helhet. Retningslinjene er veiledende og skal ikke nødvendigvis brukes slavisk, som en form for 1-2-3-regler for tematisk analyse. Det vil variere fra prosjekt til prosjekt hvordan en griper an disse retningslinjene, og en vil bevege seg frem og tilbake mellom de ulike stegene. Braun & Clarke (2006) argumenterer for at tematisk analyse bør sees på som et fundament, et verktøy, i analysearbeid i kvalitative analyser. De mener dessuten at en tematisk analyse passer godt for forskere som fortsatt er i en innlæringsfase av kvalitativ metode. Hovedmålet med en tematisk analyse er, gjennom blant annet koding, å tematisere og kategorisere utbredelsen av trender i datamaterialet. Det vektlegges også at forskeren har en aktiv rolle i analysearbeidet, og dermed vil være med på å påvirke funn og tolkninger av disse (Braun & Clarke, 2006; Renner & Taylor-Powell, 2003; Goldin, 1997; Glaserfeld, 1991).

I tråd med første steg i modellen til Braun & Clarke (2006) valgte jeg å gjøre meg kjent med datamaterialet før jeg gjorde utvalg av de delene som er brukt i oppgaven. Etter intervjuene valgte jeg derfor å transkribere intervjuene i sin helhet. Transkriberingsprosessen handler om å skrive ned ord for ord det som blir sagt, med vekt på hvem som sier hva og når. I tillegg markerte jeg kroppsspråk (peking, risting på hodet, oppgitthet etc.) i tilfelle det kunne komme til nytte senere i prosessen. Lengre pauser ble også markert. Etter at transkriptene var utarbeidet, leste jeg gjennom disse. Samtidig som transkriptene ble gjennomlest, hørte jeg på opptakene fra intervjuet. Dette for å sikre at jeg hadde fått med alt, og at det som var gjengitt i transkriptene ikke viket fra virkeligheten. Når jeg hadde sikret meg at kvaliteten på transkriptene var tilstrekkelig, leste jeg gjennom nok en gang for å orientere meg om innholdet i de ulike intervjuene, hvor jeg gjorde meg små notater om interessante områder ved de ulike intervjuene.

Neste steg i prosessen handlet om å kode datamaterialet. I følge Braun & Clarke (2006) handler koding om å systematisere materialet, hvor kodene omfatter interessante ideer og egenskaper i datamaterialet. Jeg valgte å bruke Balacheffs (1988) taksonomi som utgangspunkt for kodingen, ettersom disse også skulle brukes som rammeverk for oppgaven. Utgangspunktet for kodingsprosessen ble derfor de fire kategoriene som er beskrevet i teorikapitlet; N.E. (naiv empirisme), A.E. (avgjørende eksperiment), G.E. (generisk eksempel) og T.E. (tankeeksperiment). I tillegg til disse valgte jeg underveis å ta i bruk to induktive koder; I.N (ikke navngitt) og V.G. (vilkårlig gjetning). Disse kodene omfatter temaer i materialet som jeg i første omgang ikke kunne klassifisere under en av de fire deduktive kodene. Alle intervjuene viste seg å inneholde ulike nivåer av resonnement fra Balacheffs (1998) taksonomi. Hvert enkelt intervju ble derfor delt opp i ulike fraksjoner, basert på kodene. Kodingen ble gjennomført tre ganger, sammenliknet og sjekket opp mot hverandre. Her ble noe av materialet omkodet med bakgrunn i det teoretiske grunnlaget for oppgaven. Som nevnt i teorikapittelet kan det vise seg vanskelig å skille de tre formene for pragmatiske bevisstrategier. For avgjørende eksperiment valgte jeg å bruke situasjoner hvor elevene testet ulike hypoteser mot hverandre, enten det var uenighet mellom de to i paret, eller en av elevene testet to eller flere hypoteser. I utvelgelsen av generisk eksempel valgte jeg, som Varghese (2011) beskriver, å bruke ekstremverdier og anvendelse av oppdagede, sentrale egenskaper ved figurene som indikasjon. Det som ikke falt inn under en av disse to overnevnte ble klassifisert som naiv empirisme. I noen tilfeller opplevde jeg at resonnementene kunne plasseres på både generisk eksempel og avgjørende eksperiment, jeg valgte å kategorisere med høyest mulig bevisstrategi i slike tilfeller som Harel & Sowder (1998) anbefaler.

Etter at kodearbeidet var ferdig satt jeg igjen med 61 kodede resonnementer for oppgave en, og 49 kodede resonnementer for oppgave to. Disse var spredt på fire deduktive og to induktive koder. Ettersom de fire deduktive kodene allerede var temabaserte og skilte seg fra hverandre i slik grad som Braun & Clarke (2006) tilråder, ønsket jeg å finne temaer for de induktive kodene jeg hadde brukt. Ved nærmere ettersyn oppdaget jeg imidlertid at materialet som var kodet med V.G. paset inn under naiv empirisme, disse ble derfor slått sammen. Dette i tråd med Renner & Taylor-Powell (2003). Videre erfarte jeg at materialet som var kodet med I.N. omfattet to ting; databiter som kunne settes inn i naiv empirisme og databiter som ikke hadde tilstrekkelig med kontekst. Jeg gikk derfor tilbake i transkriptene for å skaffe meg dypere forståelse av hvordan disse hadde oppstått og om jeg ut fra dette kunne få en forståelse av kontekst. Jeg oppdaget imidlertid at det dreide seg om enkeltstående utsagn som hadde kommet fra en, på tidspunktet, inaktiv part i samtalen. For eksempel i situasjoner hvor jeg som intervjuer hadde stilt et oppfølgingsspørsmål som *«Hva tenkte du?»* til en av elevene, og derfor var opptatt med å følge den aktuelle elevens tankerekker og dermed ubevisst ignorerte den andre eleven. De resterende databitene i I.N. besto derfor bare av typen *«Det må jo bli 61»* uten at eleven hadde fått gitt utrykk for hvordan og hvorfor. På bakgrunn av dette hadde jeg to valg; opprette en ny kategori eller å vrake materialet. Ettersom konteksten manglet, og antydninger til hva elevene på tidspunktet egentlig tenkte ville blitt svært spekulativt, valgte jeg å vrake resterende biter i IN, i alt tre tilfeller.

Som et siste ledd i analysearbeidet ble det utarbeidet en resultatoversikt. Denne presenteres senere i oppgaven. I følge Braun & Clarke (2006) er det viktig å velge gode, representative eksempler, samt gi en utfyllende analyse av funn som er gjort. Dette er en kritisk fase i analysedelen, da dette er det som blir presentert for leseren. I denne fasen er det viktig å ha i tankene at leseren, ofte, ikke har tilgang til råmaterialet og dermed kun skal forholde seg til det som blir presentert gjennom rapporten (Braun & Clarke, 2006).

3.5 PRESENTASJON AV DATA

For å presentere dataene i studiet har jeg valgt å bruke en tilnærming beskrevet i Cohen et al. (2007). I følge Cohen et al. (2007) finnes det fem, overordnede måter å presentere kvalitative data; to handler om individet, to handler om tema og den siste tilnærmingen tar for seg innsamlingsinstrumentet. Med utgangspunkt i de temabaserte presentasjonene til Cohen et al. (2007) har jeg valgt å dele opp resultatene i to hoveddeler; oppgave en og to. Videre er hver hoveddel delt inn etter de deduktive kategoriene; naiv empirisme, avgjørende eksperiment, generisk eksempel og tankeeksperiment. Under hver av disse vil jeg presentere tilfeller som har kommet til uttrykk gjennom intervjuprosessen. Som tidligere nevnt er deltakerne i prosjektet anonymisert, dette innebærer blant annet at navnene som er brukt om parene er oppdiktet og ikke tilhører deltakerne. Sitatene er dessuten skrevet om til bokmål for ytterligere å ivareta individenes anonymitet.

Cohen et al. (2007) trekker frem tre problemområder ved å bruke en tilnærming lik den jeg har valgt. Det første handler om hvor vidt individets helhet, i denne rapporten hvert enkelt pars helhet, blir bevart i presentasjonen. Dette har jeg løst ved å se på relasjoner mellom oppgave, par og resonnement avslutningsvis i resultatkapittelet. Neste utfordring er ifølge Cohen et al. (2007) dekontekstualisering av datamaterialet. Dette innebærer videre at datasettet blir svært fragmentert i presentasjonen, samtidig som det ikke vil komme frem når i intervjuet de ulike resonnementene kommer til uttrykk. Dette har jeg løst ved å sette hvert enkelt sitat inn i kontekst, ved å beskrive situasjonen som danner grunnlaget for sitatet. Med tanke på tidsaspektet har ikke dette betydning for prosjektet, og er derfor ikke tatt hensyn til. Siste utfordring som trekkes frem i Cohen et al. (2007) er muligheten for å overse nyanser i datasettet som ikke dekkes av den deduktive tilnærmingen. En deduktiv tilnærming kan beskrives som å slippe en magnet ned i en beholder med magnetiske og ikke-magnetiske substanser. En vil potensielt kun dra de magnetiske substansene opp fra boksen, og de ikke-magnetiske substansene blir dermed oversett (Cohen et al., 2007:467f). Med dette beskrives muligheten for å overse det uforutsette i datamaterialet. Min løsning på dette var å ta i bruk induktive koder underveis i analyseprosessen, koder som beskrev materiale som umiddelbart ikke passet inn i de deduktive kategoriene. Disse ble, som tidligere nevnt, plassert i de deduktive kategoriene etter nærmere ettersyn. Materialet som ikke er tatt i bruk er gjennomgått i ettertid, uten at interessante funn ble gjort opp mot problemstillingen for oppgaven.

3.6 METODISKE UTFORDRINGER

3.6.1 Intervjuprosessen

Gjennom intervjuprosessen ble jeg kjent med intervjuerrollen på to forskjellige måter, både som ordstyrer og som gravende undersøker. Ettersom jeg i starten av prosjektet var uerfaren med å inneha rollen, er det uunngåelig at dette har vært med på å påvirke resultatet i rapporten, slik Goldin (1997) påpeker. I arbeid med å bearbeide videoopptak og senere justering av transkripsjoner har jeg avdekket tilfeller hvor oppfølgingsspørsmål burde ha vært stilt, eller situasjoner spørsmålene i stor grad var førende. Konsekvensene av manglende oppfølgingsspørsmål er ufullstendig eller tapt datamateriale, mens konsekvensene av førende spørsmål er misvisende datamateriale. Dette løste jeg imidlertid gjennom å vrake deler av materialet som falt inn under en av de to overnevnte tilfellene. Etter hvert som min erfaring og trygghet på oppgavene og spørsmålene i intervjuguiden økte, klarte jeg å unngå slike tilfeller i større grad.

3.6.2 Analyseprosessen

Både Balacheff (1988) og Varghese (2011) peker på utfordringer i å skille mellom ulike former for pragmatiske beviser. Særlig peker Varghese (2011) på vanskeligheten ved å finne forskjeller mellom naiv empirisme og generisk eksempel. Jeg erfarte lignende problemer gjennom analyseprosessen, hvor det ved flere tilfeller var særlig i tvil om hvordan naiv empirisme og generisk eksempel skulle skilles fra hverandre. Jeg valgte etter hvert, i tråd med Varghese (2011), å bestemme meg for ekstremverdier knyttet til oppgave en og to, for å bruke dette som utgangspunkt i tilfeller hvor det var utfordrende å avgjøre for eller imot. Jeg oppdaget da at arbeidet med å skille ulike typer resonnement ble enklere og at datamaterialet gav mer mening. Ettersom ekstremverdiene ble valgt på bakgrunn av egne meninger og kvalifisert synsing, kan dette være en feilkilde både i forhold til oppgavene isolert sett, men også i sammenlikning på tvers av oppgavene. Jeg valgte imidlertid at verdier fra figur syv/åtte og oppover skulle ansees som ekstremverdi, på begge oppgavene. Dette ble gjort på bakgrunn av at en da har tre/fire figurer mellom de som er kjent for elevene og ekstremverdien. I tillegg valgte jeg å bruke samme ekstremverdi på begge oppgavene for å begrense mulige forskjeller i klassifisering, som igjen ville påvirket resultatdelen i prosjektet.

Som ett ledd i kodingsarbeidet, og senere tematiseringen, valgte jeg å vrake materialet som var kodet IN (ikke-navngitt). Jeg har i kapittel 3 redegjort nærmere for hvorfor dette materialet ble vraket. Jeg erfarte at materialet var uten kontekst, eller hadde andre mangler. Årsaken til at jeg fikk denne typen datamateriale er min manglende erfaring som intervjuer. Jeg kunne valgt å bruke materialet, uten å redegjøre for kontekst. Dette ville imidlertid bygget på spekulasjoner og antakelser fra min side, og dermed ført til unøyaktige data, som igjen ville påvirket validiteten og reliabiliteten i rapporten. Imidlertid kan det tenkes at inkludering av disse kodene kunne ført til et annet resultat enn det som foreligger. Noe av IN-materialet virket for eksempel å være nærliggende både generisk eksempel og tankeeksperiment, men det var for ufullstendig og upresis til at jeg ville ta det i bruk i rapporten.

3.7 KVALITET I STUDIET

Validitet og reliabilitet er termer som blir brukt i tilknytning til forskning, begreper som skal være med på å sikre objektivitet og kvalitet. Begrepene knyttes ofte til kvantitative undersøkelser og derfor ikke like vanlige og anvendbare innenfor kvalitativ forskning (Christoffersen & Johannesen, 2012). Innenfor kvalitativ forskning tas begrepene troverdighet, generaliserbarhet og pålitelighet i bruk i større grad (Cohen, et al., 2007; Schoenfeld, 2007). Christoffersen & Johannesen (2012) omtaler validitet som et kvalitetskrav som bør være tilnærmet oppfylt, det kan imidlertid ikke betegnes som oppnådd eller ikke. Jeg har valgt å tilnærme meg validitet og reliabilitet med utgangspunkt i overnevnte definisjoner.

3.7.1 Validitet

Kvale (1997) omtaler validitet som forskningsfunnenes sannhetsverdi, og tar videre i bruk begrep som troverdighet, sikkerhet og bekreftbarhet. Creswell & Miller (2000) trekker frem tre viktige prosedyrer for validitet innenfor et konstruktivistisk paradigme; motbevise den etablerte oppfatningen; forlenget engasjement i feltet; omfattende beskrivelser. Schoenfeld (2007) bruker begrepene troverdighet, viktighet og relevans om det samme. Med troverdighet nærmer Schoenfeld (2007) seg det Cohen et al. (2007) omtaler som indre validitet. Indre validitet omhandler ifølge Cohen et al. (2007) om i hvilken grad det undersøkte representeres i datasettet. Innholdet i intervjuobjektenes utsagn kan være med på å påvirke den indre validiteten. Dette avgjøres av hvor vidt objektenes utsagn er sanne eller ikke. Imidlertid er det ingen andre enn intervjuobjektene selv som kan avgjøre om dette er tilfelle (Postholm, 2010).

Cohen et al. (2007) bruker begrepet ytre validitet om hvor vidt resultatene kan generaliseres og overføres til andre kontekster. Schoenfeld (2007) omtaler dette som generaliserbarhet. Videre trekker Kvale (1997) frem naturalistisk generaliserbarhet, som en av tre former for generaliserbarhet. Naturalistisk generaliserbarhet dreier seg om det assosiative aspektet, grad av gjenkjennelse fra leseren. Denne formen for generaliserbarhet vil ofte være implisitt og opp til hver enkelt å gjøre personlig (Kvale, 1997).

3.7.2 Validitet i eget studie

I følge Kvale (1997:164f) bør valideringen sees på som en pågående prosess gjennom hele studiet. Dette i kontrast til den tradisjonelle tilnærmingen, hvor valideringen fungerer som en «inspeksjon» i slutten av studiet. Jeg vil nå ta for meg validiteten i eget studie, knyttet opp mot Kvales (1997) modell for validering i syv stadier; tematisering; planlegging; intervjuing; transkribering; analysering; validering; rapportering.

Første ledd handler om tematisering, hvor studiens teoretiske grunnlag skal gi en logisk utledning til problemstilling, eller motsatt. Mitt studie har problemstillingen som utgangspunkt, hvor hovedaspektene i problemstillingen handler om; elever i barneskolen med høy måloppnåelse, kjennetegn på matematisk resonnement og til slutt geometriske figurer og numeriske følger. Teorigrunnlaget i rapporten er bygget opp med disse som grunnpilarer og validiteten i dette stadiet vil da, ifølge Kvale (1997) være høy.

Neste sjekkpunkt handler om planlegging av prosjektet. Dette stadiet tar for seg valg av undersøkelsesmetoder, og deres relevans i forhold til det som skal undersøkes. Ettersom jeg ønsket å finne ut av enkeltelevers resonnement knyttet til en bestemt form for oppgaver, ville det vært umulig å finne en hel skoleklasse som kvalifiserte til deltakelse. I tillegg ønsket jeg å dokumentere løsningsprosessen, slik at oppgavebaserte intervjuer var nærliggende å ta i bruk. Et siste aspekt ved planleggingen handler, ifølge Kvale (1997), om minimere skadelige konsekvenser. I mitt studie var ikke intervjuobjektene i direkte, medisinsk fare, men samtlige ville miste undervisning mens intervjuene pågikk. Ettersom intervjuene ble begrenset til 30minutter, vil ikke dette føre til særlige tap for elevene.

Kvales (1997) tredje ledd handler om selve intervjuet. I mitt tilfelle handler det om å avdekke kvalitet på oppgavene som ble valgt og andre vurderinger knyttet til innsamlingen av data. Dette aspektet har jeg diskutert under prosedyre, tidligere i oppgaven.

Fjerde ledd i valideringens syv stadier tar for seg transkriberingsprosessen, hvor Kvale (1997) trekker frem overføringsprosessen mellom det muntlige og det skriftlige. I mitt tilfelle intervjuet jeg elever med nord-norsk dialekt. I transkriptene valgte jeg å bruke bokmål som skriveform, etter at jeg først prøvde å bruke dialekt ved transkribering av første intervju. Denne prosessen med «oversettelse» kan føre til at noe av det som blir sagt mister eller endrer mening, som igjen vil føre til lavere validitet. Jeg mener imidlertid at jeg har unngått dette i størst mulig grad ved at jeg selv er kjent med dialekten og betydning av dialektspesifike ord. I tillegg ble transkriptene lest opp mot opptakene for å sikre gode «oversettelser.»

De tre siste stegene av valideringsprosessen går på analysering, validering og rapportering. Validitet i analyseringen handler om troverdighet knyttet til gyldighet av spørsmålene i intervjuet og i hvilken grad tolkningen av svar på disse er logiske. Med mine deduktive koder handlet analyseprosessen om å finne databiter som passet med teorien. Dette kan slås ned på som en svakhet i studiet (Cohen et al, 2007). For å øke validiteten i denne delen av studiet valgte jeg derfor å kode datamaterialet to ganger, uavhengig av hverandre, i tillegg til at jeg gikk gjennom det ferdigkodede materialet en siste gang til slutt.

Validering og rapportering trekker inn leserens rolle i validitetsbedømmelsen av rapporten som helhet, den ytre validiteten. I forbindelse med dette studiet trekker jeg frem den naturalistiske generaliserbarheten, det implisitte. Som helhet kan ikke prosjektet generaliseres for å gjelde en bestemt populasjon (elever med høy måloppnåelse), men gjenkjennelsesverdien vil ligge der ettersom leseren kan komme til å relatere seg til funnene i rapporten.

3.7.3 Reliabilitet

I følge Christoffersen & Johannesen (2012) er reliabilitet grad av nøyaktighet i undersøkelsens data. Dette innebærer hvordan data brukes, samles inn og bearbeidelsesprosessen. Reliabilitet, innenfor kvalitativ forskning, handler om grad av mulighet for gjentakelse av undersøkelsen, med samme utfall (Cohen et al., 2007). Postholm (2010) peker på at dataene fra et intervju vil påvirkes av kontekst og dermed ikke kunne oppnås ved ny gjennomføring. Det vil derfor, innenfor kvalitativ forskning, i større grad handle om pålitelighet i gjennomføring av studien (Postholm, 2010; Cohen et al., 2007).

3.7.4 Reliabilitet i eget studie

Ettersom resultatene fra et intervju, i denne sammenhengen et oppgavebasert intervju, påvirkes av kontekst, vil en ikke kunne få nøyaktig samme resultater ved å gjenta studien. I mitt studie lå påvirkningskraften hos meg som intervjuer, elevene som intervjuobjekter, lokalitet for intervjuene, rammene rundt intervjuet (videokamera), etc. Dette vil være umulig å gjenskape i samme setting etter som subjektive omstendigheter også vil endres over tid. Vurderingen i forhold til reliabilitet i studiet handler derfor om påliteligheten til det som er gjort. Metodedelen av denne rapporten skal være med på å skape pålitelighet i den grad at leseren får innblikk i hva som er gjort, hvorfor det er gjort og hvilke konsekvenser det har hatt for studiet. I resultatkapittelet er det redegjort for hvilke funn studiet har ført til, og omkringliggende begrunnelser for hvorfor dette er funn. Jeg har videre beskrevet hvordan datamaterialet ble kodet, hvilke koder som ble brukt videre, hvilke som ble vraket og hvorfor disse valgene ble fattet. Dette for å sikre rike beskrivelser av studiet. På bakgrunn av overnevnte vil det være opp til leseren å vurdere om det som legges frem er pålitelig eller ikke.

3.8 METODEKRITIKK

Ettersom utvalget som ble brukt i datainnsamlingen ikke er større enn 10 elever, vil den ytre validiteten svekkes (Cohen et al., 2007). Dette kommer av at resultatene ikke er generaliserbare for en hel populasjon. Dersom den ytre validiteten skulle vært styrket, måtte utvalgets størrelse vært betydelig større. I forbindelse med et masterprosjekt er tidsaspektet så dominerende omkring slike prioriteringer, noe som gjør en utvalgsøkning uaktuelt. Imidlertid er styrken i oppgaven knyttet til kvalitetssikring omkring den indre validiteten, og naturalistisk generaliserbarhet, og på den måten vil potensielle lesere kunne gjenkjenne trekk og dermed trekke ut aspekter ved funnene som er gjort.

Et annen side ved metodevalget er det Schoenfeld (2007) omtaler som konteksteffekten, noe som også trekkes frem i Goldin (1997). Under normalsituasjon er elevene vant til å jobbe med matematikkoppgaver i kjente omgivelser, klasserommet. Schoenfeld (2007) hevder at ved å endre disse rammene kan en risikere at løsningsprosessen til elevene påvirkes, og at data dermed er misvisende sammenlignet med «normalsituasjon» for elevene. Elevene virket imidlertid å bli trygget av at de jobbet sammen to og to, noe elevene også ga uttrykk for;

> Intervjuer: Hvis dere kunne velge mellom å jobbe to og to, slik som i dag, eller alene.
> Simen: To og to! For det første, så kan du se og sammenlikne om du har rett svar med den andre. Slik som vi hadde på oppgave 1. Så kan man spørre den andre hvis man ikke forstår.
> Ragnar: Så ville det vært litt ekkelt å sitte alene med det kameraet opp i fjeset.
> Simen: Ja, enig!

Elevene uttrykker her at de følte seg mer komfortable med å gjennomføre intervjuet i par, noe som kan ha vært med på å skape tryggere rammer og dermed også mer pålitelige data.

Valg av oppgaver i prosjektet er gjort på bakgrunn av teoretiske og praktiske vurderinger. Oppgavene har vært med på å gi forskjellige funn, se kapittel 4, noe andre oppgaver også kunne vært med på å gi. Jeg valgte å bruke kun to oppgaver av hensyn til lengde på intervjuet og elevenes tapte undervisning. Dersom jeg hadde tatt i bruk flere oppgaver, ville dette kunne ført til ytterligere nyanserte data. Imidlertid har de valgte oppgavene gitt et innblikk i hvordan ting kan være, og jeg mener derfor at valget av oppgaver har bidratt til et godt nok datamateriale.

3.9 ETIKK

I følge Christoffersen & Johannesen (2012) er det viktig å sikre anonymitet for forskningsobjektet. Dette innebærer at en ikke oppgir navn, eller annen informasjon som kan være med på å identifisere deltakerne i undersøkelsen. Anonymisering er også et viktig grep for å få tilgang til det ønskede utvalget. I forbindelse denne undersøkelsen har jeg søkt til NSD (Norsk Senter for Forskningsdata) for å få tillatelse til å gjennomføre studien slik jeg har ønsket. Dette innebærer blant annet at videoopptakene er lagret på en ekstern harddisk som kun undertegnede har tilgang til. Disse opptakene vil bli destruert når prosjektet er ferdigstilt. I tillegg er transkriptene bearbeidet uten at navn er gjengitt, nøkkelen for identifisering av elevene er lagret på samme harddisk som videoopptakene.

Videre skriver Christoffersen & Johannesen (2012) at informantene, i tråd med de forskningsetiske retningslinjene for samfunnsvitenskap, jus og humaniora, har rett til selvbestemmelse. I praksis betyr dette at informantene selv har rett til å bestemme over egen deltakelse i studiet. I mitt studie har informantene fått mulighet til å velge egen deltakelse ved tre ulike anledninger; først gjennom samtale med faglærer/inspektør ved skolen så gjennom samtale med foresatte som ble kontaktet av skolen (samtykkeskjema og telefonsamtale) og til slutt i forbindelse med intervjuet. Som oppstart for intervjuene valgte jeg å informere elevene om generelle ideer ved studiet, hvem som hadde tilgang på materialet og hvilke rettigheter de hadde. Ingen av elevene valgte å avbryte intervjuet etter dette.

Til slutt trekker Christoffersen & Johannesen (2012) frem forskerens ansvar for å unngå skade. Dette kan dreie seg om vurderinger av medisinsk risiko, noe som i mitt studie ikke er aktuelt. Jeg tar heller ikke i bruk spørsmål som er personlige og på den måten kan være til psykisk påkjenning for intervjuobjektene. Det som imidlertid kan være med på «å volde skade» for intervjuobjektene i denne studien, er tapt undervisning i tilknytning til gjennomføringen av intervjuene. Dette er imidlertid dekket opp gjennom at intervjuene ble begrenset til 30minutter, samt at det ikke ble introdusert nye emner i klassen parallelt med intervjuene.

4 RESULTATER OG FUNN

Kapittel 4 er delt opp i to hoveddeler; 4.1. Oppgave en og to, 4.2. Relasjoner i datamaterialet. Kapittel 4.1. tar for seg hvordan jeg har klassifisert ulike typer resonnement, delt inn etter oppgave en og to. Kapittel 4.2. tar for seg relasjoner datamaterialet; oppgave; resonnement; par.

4.1 OPPGAVE EN OG TO

Analyseprosessen avdekket, som tidligere nevnt, at de ulike parene tok i bruk ulike former for resonnement underveis i oppgaveløsningen. En direkte følge av dette, er at datamaterialet har blitt delt opp i mindre biter, for å kunne trekke med alt av funn som er av interesse. For å gi en oversikt over de ulike resonnementene som ble tatt i bruk i de to oppgavene, presenteres følgende tabell;

Tabell 1: Oversikt, oppgaver

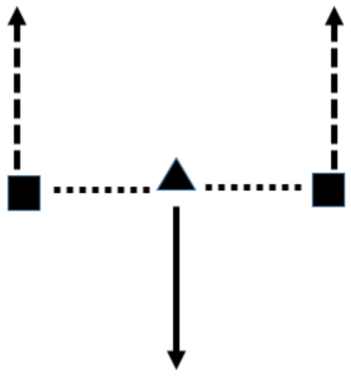
	NE	AE	GE	TE
Oppgave 1	12	15	27	7
Oppgave 2	27	15	5	2
1 i %	20 %	25 %	44 %	11 %
2 i %	55 %	31 %	10 %	4 %

Av tabellen kan vi se at det varierer i hvilke typer resonnementer som ble tatt i bruk på de ulike oppgavene. I tillegg er totalt antall resonnementer forskjellig på oppgave en (61) og to (49). For å gi et bedre bilde på trendene i datamaterialet har jeg derfor valgt å bruke prosentvis forekomst av totalen på hver oppgave. Dette for å enklere kunne sammenlikne oppgavene senere i rapporten.

4.1.1 Oppgave en

De ulike delene av figurene i oppgave en blir omtalt på ulike måter underveis i presentasjonen, både som kommentarer fra meg, eller for å påpeke hvor jeg eller intervjuobjektene peker underveis. For å gi et bedre bilde på hvilke deler av figurene som omtales har jeg valgt å bruke følgende figur;

Oppgave en og to



Figur 7: Oppgave en, forklaring

De stiplede pilene omtales som loddrett, oppover. Pilen ned omtales som loddrett, nedover. De vannrette, stiplede linjene omtales som vannrett. Firkantene omtales som hjørner og trekanten omtales som sentrum. Trekant og firkanter representerer enkeltkuler, linjer og piler representerer resterende kuler i figuren. Disse begrepene kombineres noen ganger, for eksempel vannrett + hjørner og sentrum, dette innebærer da alle de omtalte komponentene i figuren. Videre omtales de ulike figurene i rekken som figur en, to, tre og så videre, dette er et annet uttrykk for figurtall.

4.1.1.1 Naiv Empirisme

Kategorien omfatter den typen resonnement som faller under den mest eksempelorienterte argumentasjonen. I oppgave en var denne formen for resonnement representert med 20% av totalen. Generelt sett kjennetegnes naiv empirisme ved at elevene velger å forholde seg til figurer som allerede er kjent, figur en, to og tre, eller de figurene i rekken. Kategorien naiv empirisme tar også for seg de resonnementene hvor elevene ikke evner å ta i bruk oppdagelser som de har gjort, i nye beregninger. Dette vil for eksempel innebære situasjoner hvor elevene har funnet generelle egenskaper ved figurene, men i neste øyeblikk ikke tar i bruk disse egenskapene i en ny beregning.

> Albert: På figur nummer fire så vil disse være en lengre [vannrett, begge sider], så er de en lengre [loddrett, opp] og den en lengre [loddrett, ned]
> Josefine: Altså, to lengre [vannrett] [Ser på Albert]
> Albert: Ja, jeg pekte jo på begge sidene. Altså, en på hver side og det blir jo to!
> Josefine: Ja, og der [loddrett, opp] og der [loddrett, ned]

I samtalen mellom Albert og Josefine ser vi at de diskuterer egenskaper med figur nummer fire. Albert viser både hvordan den vannrette og de loddrette linjene vil utvikle seg, med bakgrunn i hvordan figur tre ser ut. Begge er i stand til å beskrive egenskapene og hvordan disse er forskjellig mellom figurene. Imidlertid tester ikke elevene noen form for hypotese, de diskuterer dessuten figur nummer fire som ikke ansees som en ekstremverdi, jfr. avgjørende eksperiment og generisk eksempel.

> Knut: På figur syv, så vil vi få åtte! Åtte oppover, så … Jeg husker ikke hvor … Det blir syv nedover [Loddrett, nede], og syv … Nei, fire ekstra den veien [Vannrett ut fra sentrum, sammenlikner med figur tre]
> Intervjuer: Hvor mange kuler får vi totalt da?
> Knut: Fem, nei, jo, ja! Det var vanskelig, jeg klarer ikke helt. Jeg vet i hvert fall at det er åtte oppover!

Her viser Knut at han ikke helt har kontroll på egenskapene i figuren. Resonnementet omhandler figur syv, hvor Knut virker å være usikker på både hvordan figuren vil se ut og hvor mange kuler det totalt vil være i figuren. Dette utsagnet kommer etter at Knut og Pål tidligere har blitt enige om hvordan egenskaper figurene vil ha.

> Knut: Ja, da blir det seks ganger tre! Nei, fire ganger fire, så blir det åtte ganger to.
> Pål: Hvorfor tenker du det?
> Knut: Fordi det er det som går opp i seksten, i gangetabellen. Seksten ganger en.
> Intervjuer: Kan du bruke det til noe?
> Knut: Hm. Nei, egentlig ikke. Jeg bare gjettet, tror jeg.

Knut og Pål har kommet frem til at figur tre har seksten kuler totalt. Ut fra sitt funn om at figuren har seksten kuler totalt prøver Knut å finne en regel. Han tar derfor utgangspunkt i seksten og prøver å finne ulike måter å multiplisere med seksten som produkt. Ved spørsmål fra meg om hva og hvordan Knut tenkte, kunne han ikke redegjøre for hvorfor han tenkte slik og kom deretter frem til at han egentlig bare hadde gjettet.

4.1.1.2 Avgjørende eksperiment

Avgjørende eksperiment er godt representert blant elevenes resonnementer, med 25% eller i alt ¼ av resonnementene som ble registrert på oppgave en. Denne kategorien omfatter situasjoner hvor elevene står ved en skilleveg, hvor de tester ut validiteten til en hypotese, eller flere hypoteser opp mot hverandre.

> Trine: Det er seks, så blir det elleve, så blir det seksten. Det er nesten det samme som på den andre, at det er fem. Her, også blir det seks [figur tre], så blir det sikkert syv på den neste? [Ser på Sandra].
> Sandra: Nei, det er jo fem [peker på figur en], fire [peker på figur to]
> Trine: Fire?
> Sandra: Nei, det blir større og større. Det er fire mellom de to [peker mellom figur to og tre]
> Trine: Er det fire?
> Sandra: Ja! Nei, det er jo fem!?
> Trine: [teller] Tre, fire fem …. Ni, ti, elleve. [Ser på Sandra]. En, to, tre, fire …
> Sandra: Det er fem! Unnskyld, det er ikke fire.
> Trine: Fem, ja!

> Sandra: Fem, fem! [Peker først mellom figur en og to, så mellom figur to og tre]

Utsnittet er tidlig i prosessen med å løse oppgave en. Trine og Sandra kommer opp i en situasjon hvor de er usikker på om økningen mellom figurene er på fire eller fem kuler. Gjennom å teste sine hypoteser på figurene de kjenner kommer de frem til at økningen er på fem kuler. Dette er en typisk variant av avgjørende eksperiment, hvor elevene står mellom to ulike svar. I dette tilfellet løste elevene det ved å se på allerede kjente figurer.

> Lise: Figur syv ville vært syv bortover sånn [vannrett, fra midten] så ville den vært åtte oppover [loddrett, oppe] og syv nedover [loddrett, nede] minus den der [sentrum]
> Andrea: Hva mener du?
> Lise: På hver side av den i midten [sentrum], så vil det være syv bortover, så ville det vært åtte oppover [loddrett, oppe], siden …
> Andrea: Nei, det ville vært seks oppover!
> Lise: Med den der [Hjørne] altså!
> Andrea: Blir det ikke seks oppover? Fire, fem … Å, nei, glem det! Det blir åtte selvfølgelig! Åtte oppover, og det samme blir det der [Loddrett, nede], så blir det …
> Lise: Nei, det ville vært ni oppover, tror jeg. Her er figur nummer tre. Fire, fem, seks [Teller loddrett, oppe]. Nei, det ville vært åtte oppover!
> Andrea: Det ville vært åtte oppover, ja! Så ville det vært åtte her også [loddrett, nede], så ville det vært [teller vannrett], en, to, tre, …, femten! Det vil være femten der! Hvis jeg ikke hadde visst hvordan figur tre var, så ville det blitt fire sånn [loddrett] og syv sånn [vannrett]. Nitten totalt!
> Intervjuer: Hvordan tenkte du da?
> Andrea: fire ganger tre, fordi tre ganger har man fire! [Loddrett] pluss syv.
> Lise: Blir det ikke seksten?
> Andrea: Jeg vet ikke! Jo, vent! Det blir feil! Det blir seksten, fordi … De der har vi allerede tatt med [Hjørner og sentrum] når vi plusser på fire!

I dette eksempelet ser vi at Lise og Andrea diskuterer egenskaper med figurene i oppgave en. Uenigheten dreier seg om hvordan de loddrette linjene oppover vil utarte seg på de ulike figurene. Lise har rett allerede i første utsagn, men Andrea stiller spørsmåltegn ved hvordan Lise har tenkt. Etter hvert smitter Andreas usikkerhet over på Lise, men de enes til slutt om hvordan figuren vil se ut. Andrea prøver deretter å bruke de samme egenskapene for å finne en figur som hun allerede kjenner til og kommer frem til et feil svar. Hun oppdager imidlertid selv hvor feilen ligger, ved at hun har talt noen kuler flere ganger.

> Sandra: Det er fem mer, det øker med fem! Det kan vi ha! Skal vi si fem ganger, liksom, figuren?
> Trine: Fem?
> Sandra: Fem ganger figur to, det blir jo ti! [Ser på Trine]
> Trine: Da mangler det en!
> Sandra: Tre ganger fem er femten. Jo det er figur en ganger fem, det blir fem pluss en, er lik seks. Ti, elleve, ja det stemmer der også!

Her har Sandra og Trine kommet lengre i generaliseringsprosessen, hvor de nærmer seg en form for generalisering. Elevene har holdt på premisset om økning på fem mellom figurene. Av sitatet ser vi at den første varianten av generaliseringen deres omhandler et tankemønster som (figur*fem), gjennom å teste hypotesen på figur to og tre. De oppdager i begge tilfeller at de mangler en kule. På grunn av at de tester sin hypotese kommer dermed Sandra og Trine frem til at «regelen» på oppgave en må være (figur*fem+1). Denne resonnementrekken kunne vært et generisk eksempel, imidlertid omhandler diskusjonen en allerede kjent figur, som i tillegg ikke omfatter noen ekstremverdi.

4.1.1.3 Generisk eksempel

Kategorien generisk eksempel utgjorde 44% av resonnementene som jeg har sett nærmere på i oppgave en. Det mest typiske ved elevenes resonnement av denne typen, er ekstremverdier som figur nummer tolv og tjuefem. Flere av resonnementene kunne vært plassert under både naiv empirisme og avgjørende eksperiment ut fra sin struktur, ekstremverdiene har derimot ført til at de ble plassert under generisk eksempel.

> Simen: Også, hvis du skal ha figur nummer tjuefem, så tar du bare fem ganger tjuefem, så plusser du på.
> Ragnar: Hvor mange må du plusse på?
> Simen: En, fordi det er det som er igjen [Viser sentrum på figur tre]

Simen har i dette tilfellet valgt en ekstremverdi, figur nummer tjuefem. Han har i tillegg gjort seg kjent med egenskapene til figurene, med økning på fem mellom hver figur, i tillegg til at det vil «mangle» en kule og hvor denne typisk kan plasseres i figurene. Simen fokuserer her på figur nummer tjuefem, men han er bevisst på at dette vil gjelde for alle figurene.

> Intervjuer: Hvor mange kuler ville det være i figur nummer tolv?
> Andrea: femtifire?
> Lise: Blir det ikke sekstifire?
> Andrea: Eller sekstifire da. Jeg tok de [Alle loddrette]. Tolv ganger tre, nei, jeg vet ikke!
> Lise: Så legger vi til en! Er det sekstien? På figur tolv?
> Intervjuer: Hvordan tenkte du da?
> Lise: Tolv ganger fem, pluss en!

Lise og Andrea har etter hvert kommet inn på figur nummer tolv, i utgangspunktet var de på dette tidspunktet opptatt av hvordan strukturen på figuren ville være. Jeg valgte derfor å bryte inn med et spørsmål om totalt antall kuler for å styre elevene tilbake mot det som de hadde blitt bedt om å gjøre. De diskuterer hvor vidt totalen vil være femtifire, sekstien eller sekstifire kuler og i så måte vil dette utsagnet isolert sett kunne falle inn under avgjørende eksperiment og ekstremverdien plasserer det under generisk eksempel. Som jeg trakk frem i metodekapittelet valgte jeg i slike tilfeller å klassifisere som høyest mulig bevisstrategi.

> Intervjuer: Hvis jeg skulle finne ut hvor mange kuler det totalt var i figur nummer syv da?
> Josefine: Åtte, seksten, tjuefire … pluss femten … trettini? Å, nei! Det blir åtte, seksten, tjuefire … Så må du ta de i minus [Hjørner og sentrum], tre, fordi du teller de to ganger! Så da blir det trettiseks! Tror jeg.

Dette eksemplet omfatter en situasjon hvor jeg diskuterer figur nummer syv med Josefine. Josefine bruker en additiv tilnærming for å finne frem til figur nummer syv, hvor hun først kommer frem til at totalen må være trettini kuler. Imidlertid oppdager Josefine selv, at hun med denne tilnærmingen har hun talt tre kuler to ganger (hjørner og sentrum). Josefine tar derfor trettini og trekker fra tre kuler, hvor totalen da blir trettiseks. Eksemplet viser ingen ekstremverdi, ettersom syv ikke er en spesielt stor figur i forhold til de elevene allerede kjenner. Jeg har valgt å klassifisere dette eksemplet som generisk eksempel på bakgrunn av Josefines evne til å gjenkjenne generelle egenskaper ved figurene, denne gangen i form av at «hjørner» og «sentrum» blir talt to ganger i hennes løsningsforslag.

4.1.1.4 Tankeeksperiment

Under kategorien tankeeksperiment har jeg plassert de strategiene som tar for seg konseptene ved oppgave en, uten å begrense seg til et spesifikt eksempel. Elevene som klarte å komme frem til en generell regel/formel havner under denne kategorien. Disse elevene kom frem til generaliseringen gjennom bruk av ett eller flere eksempler, men de klarte deretter å formulere en overordnet «regel» for antall kuler i en figur, en generell formel. Tankeeksperiment sto for 11% av resonnementene på oppgave en.

> Intervjuer: femtien? Hvordan tenkte du da?
> Sandra: Da tok jeg ti ganger fem, pluss en.
> Trine: Figurnummer ganger fem, pluss en! Der er regelen!

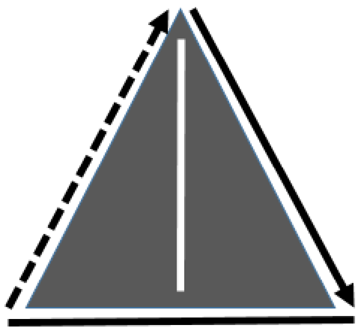
Sandra har i dette tilfellet kommet frem til at figur nummer ti må har femtien kuler totalt. Jeg stiller henne derfor et spørsmål hvordan hun har tenkt når hun kom frem til femtien. Sandra har brukt formelen ti ganger fem, pluss en. Ut fra denne regelen kommer Trine ganske kontant frem til at den generelle regelen for oppgave en må være (n*fem) +en, eller (figurnummer*fem) +en, som hun sier. Elevene var ikke kjent med termen figurnummer før de begynte å jobbe med denne oppgaven. Opptil flere ganger i løpet av intervjuet brukte elevene uttrykket «tallet» for figurnummer, og jeg valgte derfor å forklare begrepet figurnummer for dem.

> Intervjuer: Hva har du skrevet? [Peker på Ragnar]
> Ragnar: TALL ganger fem pluss en, er lik. Da finner man ut hvor stor den skal være, ut fra hvilken figur

Dette eksemplet er svært likt situasjonen med Sandra og Trine, hvor Ragnar har kommet frem til en generell formel (Tall ganger fem, pluss en). Imidlertid er dette noe jeg tilfeldigvis oppdaget at Ragnar hadde skrevet ned på sitt oppgaveark. Ragnar viser her at han har distansert seg fra det spesielle, til det generelle, hvor han ikke er avhengig av konkrete eksempler.

4.1.2 Oppgave to

På samme måte som i oppgave en omtales figurene i oppgave to med ulike uttrykk. Jeg har derfor valgt å forklare med følgende figur;



Figur 8: Forklaring, oppgave to

Pilene og linja i denne figuren representerer ytterste rad av kuler. Den stiplede pilen viser hvilke del av figuren som blir omtalt som skrå venstre, den andre pilen viser skrå høyre. Linjen nederst viser det som blir omtalt som vannrett, nede. Trekanten innenfor viser det som blir omtalt som midten. Den hvite linja i trekanten viser den raden av kuler som omtales som høyden ved et par tilfeller.

4.1.2.1 Naiv empirisme

Naiv empirisme i oppgave to kjennetegnes av at elevene er svært avhengig av spesifikke eksempler. Eleven kjenner igjen relasjoner mellom figurer, dersom de tegner opp begge figurene. Denne formen for resonnement står for i alt 55%, over halvparten, av argumentasjonen til elevene innenfor denne kategorien.

> Intervjuer: Kan dere finne figur nummer syv?
> Sandra: Det er jo bare å plusse her, så blir det femten. Det går å gange, men jeg vet ikke.
> Trine: Det blir tjueåtte!
> Sandra: [tegner på arket] Tjueåtte? Har du figur nummer syv? [Peker på arket]
> Trine: Ja, tjueåtte vil være [Antall kuler i] figur nummer syv. [Ser på Sandra]

> Sandra: Hvordan tenkte du da? Ganga du? Tenkte du på syv-gangen?
> Trine: Jeg plussa bare. [Ser på Sandra]

Sandra og Trine jobber med å finne figur nummer syv i oppgave to, etter oppfordring fra meg. Sandra foreslår å addere, da kommer hun frem til femten. Hun har da kommet frem til figur fem, via figur fire som elevene hadde funnet tidligere. Trine foreslår deretter at figur nummer syv må ha tjueåtte kuler totalt. Ettersom figur nummer syv ikke er noen ekstremverdi, faller dette resonnementet under naiv empirisme.

> Simen: Pluss på med fem! Etter den her [figur tre] legger det seg alltid på med fem. [Teller antall kuler, fire: 10, fem: 15 og tolker dette som et mønster], da går det jo litt lettere opp på den delen, hvis du regner det ut.

Simen har i denne situasjonen tolket at figurene vil øke med fem kuler for hver gang. Dette har han kommet frem til gjennom å se at figur fire har ti kuler og figur fem har femten kuler totalt. Simen registrerer at både ti og femten er i fem-gangen, og tolker dermed dette som et mønster som vil gjelde alle figurene i oppgave to.

> Albert: Figur nummer en til figur nummer syv, så er det egentlig bare å ta; En, pluss to, pluss tre, …, helt opp til syv! Hvis jeg hadde fått denne oppgaven på en prøve, så ville jeg ha gjort det på den måten.
> Josefine: Jeg ville bare tegnet opp og talt de.

Albert og Josefine diskuterer løsning av figur nummer syv. Albert har en additiv tilnærming, hvor han viser at han ville addert hvert enkelt «lag» i figuren for å finne totalen. Josefine har en relativt lik tilnærming, hvor hun foreslår å tegne opp hele figuren, for så å telle hver enkelt kule. I tillegg er syv ingen ekstremverdi, slik at dette faller inn under kategorien naiv empirisme.

> Pål: Jeg tipper at begge sidene er tolv [Vannrett nede og skrå, høyre side], men jeg er ikke sikker på hvor mange som vil være i midten.
> Knut: Men, på nummer tre, så har du tre nedover, tre nedover [Skrå, begge sider] og tre nederst. Så hvis det er fire [Figur fire], så vil det være en i midten. Så, tolv ganger tre. Så må man finne ut hvor mange det er midt i.
> Pål: Trettito blir det på kantene [«Rammen»]

Pål og Knut ser på egenskapene til figur tolv. Pål hevder at både den nederste raden og skråsidene vil dannes av tolv kuler hver. Han er imidlertid obs på at dette kun vil gi en indikasjon på «rammen» i figuren, og at han derfor må finne ut hvor mange kuler som vil være i «midten» på figuren. Knut prøver å relatere seg til det Pål sier, ved å bruke figur tre og fire som han allerede kjenner til. Begge viser her at de er avhengig av å bruke eksempler for å finne en løsning, samtidig som de kun opererer på de aktuelle eksemplene, dette er derfor naiv empirisme.

4.1.2.2 Avgjørende eksperiment

For oppgave nummer to står avgjørende eksperiment for 31% av resonnementene til elevene. Disse kjennetegnes av at elevene stiller hypoteser, i disse tilfellene enslige hypoteser, som deretter blir testet opp mot allerede kjente eksempler.

> Trine: Det blir ni. [Ser på Sandra], fordi [peker på figur to og tre] de to er jo med i tre-gangen, og da blir det ni som er neste.
> Sandra: Ja, den er i tre-gangen [peker på figur tre].
> Trine: Ja, men den er jo ikke med da [peker på figur en]. Hvis den hadde vært det, så ville det vært tre-gangen på alle, sikkert.

Trine har sett at figur to og tre har en total på tre og seks kuler, noe som passer inn i tre-gangen. Hun har derfor en hypotese om at figur fire må være ni totalt, på bakgrunn av overnevnte observasjon. Imidlertid tester Trine sin hypotese mot figur en, hvor hun oppdager at den ikke vil kunne passe under definisjonen tre-gangen. Dette er et avgjørende eksperiment ettersom elevene tester en hypotese, hvor ingen unntak vil bli akseptert. Argumentasjonen følger et mønster som «hvis den hadde vært, så ville» for å avkrefte hupotesen.

> Lise: Det går å dele de to i to [Figur tre og fire]
> Intervjuer: Hvordan tenker du da?
> Lise: Her er det fem og der er det fem [Deler opp figur fire i to grupper på fem kuler]
> Andrea: På figur nummer tre vil det være tre og tre.
> Lise: Men det går ikke på figur to, for da får man en og en halv, to ganger … Og den ville bare blitt en halv. [Figur en]

Lise og Andrea er inne i et tankemønster hvor ideen er å dele figurene i to. Elevene prøver hypotesen på figur tre og fire, hvor de ser at løsningen gir hele tall. Imidlertid oppdager Lise at dette ikke vil funke for figur en og to, hvor løsningen vil bestå av desimaltall. Argumentasjonen i dette tilfellet ligner det som Lise & Andrea viser i overnevnte eksempel. Vi ser at Lise argumenterer «det går ikke på figur to, for da må man» for å avkrefte hypotesen.

> Intervjuer: Er det noen likheter på formen?
> Albert: Ja, det er samme form på disse [Figur to og tre]
> Josefine: Alle går i en trekant … Bortsett fra den [Figur en], den kommer med tre nye, hele tiden. [To vs. tre]
> Albert: Tre nye, hele tiden?
> Josefine: Ja, for liksom … en, tre, seks [Total i alle]
> Albert: Ja, den kommer jo med tre. Fra en til to [Figur en og to], kommer det jo bare to nye da.

Tidlig i arbeidet med oppgave to ber jeg Albert og Josefine å si noe om likheter i figurene. Begge kommer frem til at figur to og tre er trekanter, mens figur en kun består av en enslig kule. Josefine lanserer deretter en hypotese om at økningen mellom figurene vil være konstant på tre kuler. Albert stiller spørsmålstegn ved hypotesen, for så å vise at dette ikke vil stemme mellom figur en og to. Argumentasjonen for å avkrefte hypotesen i dette tilfellet følger «ja, det stemmer der, men ikke der.»

4.1.2.3 Generisk eksempel

Generisk eksempel står for 10% av totalen i oppgave to. For oppgave kjennetegnes denne typen resonnement av at elevene kjenner igjen sentrale egenskaper i figurene, oftest representert ved eksponentiell økning. Elevene klarer videre å anvende dette for å si noe generelt om figurer de ikke allerede kjenner til.

> Trine: Det blir bestandig en rekke under. En, to, tre, fire [teller nederste rad på figurene], fem, seks, åtte.
> Sandra: Fire mellom dem [ser ned på arket]. Den fjerde figuren, der er det tre mellom, tre eller fire, fire! Det blir sånn, til den tredje figuren er det tre mellom den andre og den tredje.
> Trine: Hvis du tar [ser på Sandra og peker på oppgavearket] den neste blir fire, og da blir det tre her.

Trine og Sandra oppdager tidlig i prosessen avgjørende egenskaper ved figuren, eksponentiell vekst. I dette eksemplet diskuterer de relasjoner mellom figurene, hvor de gjennomgående viser at de evner å bruke de kunnskapene som de har tilegnet seg om figuren.

> Lise: Fire, tre, to, en [Teller nedenfra og opp] og der er det tre, to, en! [Figur tre]
> Andrea: Hvorfor det?
> Lise: Jeg tenkte bare at det blir en mer nederst, så må de være mellom sprekkene [Viser hvordan figuren er bygget opp]
> Andrea: Jeg tenkte sånn; En [Figur en], så legger de til to der [Figur to], tre der [Figur tre] og da blir det fire der [Figur fire]. [Peker konsekvent under figuren]. Jeg tenkte at det hele tiden blir en rad under de andre da? Fordi … Der er det to [Figur to] osv.

På samme måte som Trine og Sandra, oppdager Lise og Andrea den eksponentielle veksten i oppgave to. Mens Trine og Sandra stort sett fokuserer på totalt antall kuler i figuren, er Lise og Andrea mer opptatt av hvordan figuren vil se ut dersom den følger mønsteret de har oppdaget. Av eksemplet kan vi se at Trine og Sandra konsekvent ser på at det blir en ny rad under forrige figur, en egenskap de senere i intervjuet også evnet å bruke videre.

4.1.2.4 Tankeeksperiment

For oppgave to var tankeeksperiment representert i 4% av resonnementene som ble kodet, i alt to tilfeller. På oppgave to var det ingen av elevene som kom frem til en generell formel, resonnementene i denne kategorien handler derimot om elevenes evner til å reflektere rundt konsepter ved figuren, samt påbegynte generaliseringer.

> Albert: Jeg vet det! Eller, jeg tror at jeg vet svaret! For, hvis man ganger nummeret med nummeret pluss en, så. Jeg tror vi kan bruke det til noe.

I dette eksempelet har Albert beveget seg bort fra konkrete eksempler i et forsøk på å generalisere. Det overstående sitatet er ett av flere forsøk Albert gjorde i forbindelse med oppgave to, hvor han kunne lyktes ved å fortsette. Albert er inne på en tankerekke om at n(n+1) kan brukes til å finne ut noe generelt om figurene. I denne situasjonen ble imidlertid Albert avbrutt av sin partner, Josefine. Jeg prøvde å hente opp utsagnet like etterpå for å sjekke om det var tilfeldig eller ikke, Albert hadde imidlertid da gått inn i et annet tankemønster sammen med Josefine og var dermed ikke åpen for å ta videre tak i dette.

> Knut: Men hvordan finner man arealet i en trekant?
> Pål: Man ganger høyden med bredden, så deler man alt på to.

Knut og Pål diskuterte egenskaper ved figurene og fremmet derfor en ide om å se nærmere på trekanter og hvordan man kunne finne arealet i disse. Ideen valgte de imidlertid å legge fra seg ettersom de ikke klarte å finne noen «høyde» i de ulike trekantene. Jeg har valgt å klassifisere dette som tankeeksperiment på bakgrunn av at Knut & Pål ser på konseptet trekant, som er nærliggende en endelig generalisering.

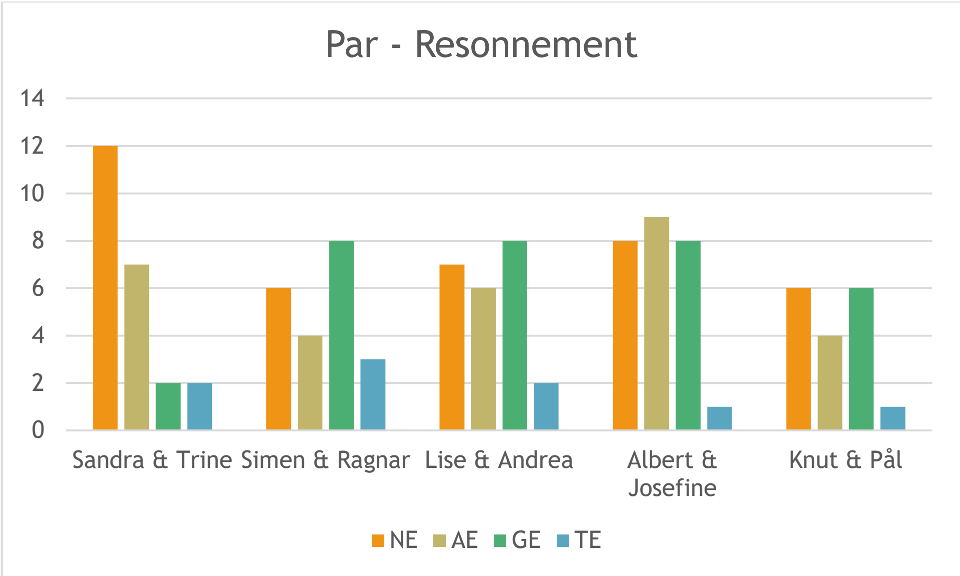
4.2 RELASJONER I DATAMATERIALET

4.2.1 Oppgave - Resonnement

For oppgave en fant jeg at hovedvekten av resonnement lå på generisk eksempel, med 44% ved endelig opptelling. Videre sto avgjørende eksperiment for 25%, naiv empirisme for 20% og tankeeksperiment for 11%. For oppgave to fant jeg at hovedvekten av resonnementene lå ved naiv empirisme, med 55% ved endelig opptelling. Videre sto avgjørende eksperiment for 31%, generisk eksempel for 10% og tankeeksperiment for 4%. Hovedforskjellen ved oppgave en og to er at oppgave en har stor representasjon av generisk eksempel og oppgave to har stor representasjon av naiv empirisme. Forskjellene i avgjørende eksperiment i oppgave en og to er ikke stor nok til at jeg vil anse det som betydelig. Elevene klarte imidlertid å nå høyeste nivå, tankeeksperiment, ved betydelig flere tilfeller i oppgave en sammenliknet med oppgave to.

4.2.2 Par - Resonnement

For å gi oversikt over hvilke resonnement de ulike parene tok i bruk, har jeg valgt å presentere resultatet i et søylediagram. Diagrammet viser totalt antall resonnement registrert på begge oppgavene.



Figur 9: Relasjon mellom par og type resonnement.

Av diagrammet kan vi se at alle parene, utenom Sandra & Trine har en relativt jevn fordeling mellom naiv empirisme og generisk eksempel, totalt sett. Sandra & Trine skiller seg ut ved at de har en ganske markant overvekt av naiv empirisme, både sammenliknet med de andre parene, men også i forhold til andre typer resonnementer som de tar i bruk selv. Videre viser diagrammet at Albert & Josefine har størst andel av avgjørende eksperiment totalt sett av sine resonnementer, men også sammenliknet med de andre parene. Ellers viser diagrammet at tankeeksperiment er den bevisstrategien som tas i bruk minst av alle parene, for utenom Sandra & Trine som har lik fordeling mellom generisk eksempel og tankeeksperiment.

4.2.3 Oppgave - Par

Får å få en nærmere oversikt over hvilke typer resonnementer de ulike elevene tok i bruk på de ulike oppgavene, har jeg valgt å presentere opptalte koder i følgende tabell;

Tabell 2: Oversikt, oppgave - par.

	Sandra & Trine				Simen & Ragnar				Lise & Andrea				Albert & Josefine				Knut & Pål			
	NE	**AE**	**GE**	**TE**	**NE**	**AE**	**GE**	**TE**	**NE**	**AE**	**GE**	**TE**	**NE**	**AE**	**GE**	**TE**	**NE**	**AE**	**GE**	**TE**
Oppgave 1	4	4	0	2	1	2	7	3	2	1	7	2	3	4	8	0	2	4	5	0
Oppgave 2	8	3	2	0	5	2	1	0	5	5	1	0	5	5	0	1	4	0	1	1

Av tabellen kan vi se at Sandra & Trine totalt sett hadde færre rekker av resonnementer i oppgave en enn oppgave to. Generisk eksempel ble brukt i oppgave to, men ikke i oppgave en. Videre oppnådde de øverste nivå ved to tilfeller på oppgave en, og ingen i oppgave to. Sandra & Trine tok i bruk naiv empirisme dobbelt så mange ganger i oppgave to som i oppgave en.

Simen & Ragnar hadde en fordeling som heller mot høye nivåer, hovedvekt på generisk eksempel, men også forekomster av tankeeksperiment i oppgave en. I oppgave to brukte de mer grunnleggende former for resonnementer, med en overvekt av naiv empirisme.

Lise & Andrea viser samme tendenser som Simen & Ragnar, med hovedvekt av avanserte resonnementer på oppgave en, og hovedvekt av mer primitive former for resonnementer på oppgave to. Lise & Andrea tok i bruk generisk eksempel ved hele syv tilfeller i oppgave en, og bare ved ett tilfelle i oppgave to.

Albert & Josefine har tilnærmet lik forekomst av naiv empirisme og avgjørende eksperiment, når man sammenlikner oppgave en og to. Imidlertid har de en svært høy andel av generisk eksempel på oppgave en, over halvparten av resonnementene. De er også ett av kun to par som oppnådde høyeste nivå, tankeeksperiment på oppgave to.

Knut & Pål har lavest og nest lavest antall resonnementer på henholdsvis oppgave to og en. Videre har viser de til avgjørende eksperiment og generisk eksempel, i stor grad, på oppgave en. I forbindelse med oppgave to ligger resonnementene mest på naiv empirisme, men Knut & Pål har, i likhet med Albert & Josefine, oppnådd høyeste nivå ved ett tilfelle i oppgave to.

Relasjoner i datamaterialet

5 DRØFTING

5.1 HVA HAR JEG FUNNET UT?

I resultatdelen har vi sett at det var et skille mellom type resonnement som ble tatt i bruk i oppgave en og to. Mens oppgave en hadde høy andel av generisk eksempel, var oppgave to preget av naiv empirisme. Begge oppgavene hadde ganske lik hyppighet av avgjørende eksempel. Videre viser relasjoner i datamaterialet at Sandra & Trine skilte seg ut fra de andre parene med en stor andel naiv empirisme. Albert & Josefine var det eneste paret som hadde høyest andel avgjørende eksperiment over begge oppgavene.

5.2 OPPGAVE - RESONNEMENT

Et perspektiv på forskjellen mellom naiv empirisme og generisk eksempel, trukket frem i Varghese (2011), omhandler kvalitet på oppgaven som gis. Varghese (2011) viser til at vanskeligheten med å skille disse kan komme av at oppgaven som blir gitt ikke gir rom for tydelige forskjeller i bruk av ulike typer resonnement. Ved å anvende Vargheses (2011) hypotese på min resultater, kan forskjellen i funn på oppgave en og to komme av at oppgavene er av forskjellig kvalitet. Som funnene i rapporten viser, tar elevene i bruk ulike nivåer av resonnement i større grad på oppgave en sammenliknet med oppgave to. Den samme trenden vises også i at elevene i oppgave en oppnår høyere former for resonnement enn i oppgave to. Oppgave en preges i stor grad av generisk eksempel, mens oppgave to domineres av naiv empirisme.

Utgangspunktet om at forskjell i oppgavenes struktur som forklaring på ulike resultater i oppgave en og to, gir flere underliggende mulige årsaker. Først vil jeg trekke frem lineær vekst opp mot eksponentiell vekst. Oppgave en tar for seg en figurrekke (numerisk følge) med lineær vekst. Jeg opplevde at elevene i løsningsprosessen rundt oppgave en enkelt kunne omgjøre figurene til en numerisk følge, hvor de videre oppdaget økningen på fem mellom hvert tall. Elevene hadde få problemer med å komme frem til en eller annen representasjonsform for denne oppdagelsen, noe som tyder på at oppgaven tar for seg noe som elevene allerede har kunnskaper om. Motsatt opplevde jeg at elevene i oppgave to ikke hadde like lett for å omforme figurrekken til en tallrekke, basert på den eksponentielle økningen. Dette kan tyde på at oppgaven viker i større grad fra det som er kjent for elevene, enn oppgave en. Lineær vekst ligger i så måte nærmere aritmetisk tenkning enn eksponentiell vekst, i tråd med Watson (2009). Det kan være med på å forklare hvorfor elevene i større grad benyttet seg av mer avanserte former for resonnement på oppgave en. I løsning av oppgave en oppnådde elevene ved syv tilfeller, 11%, høyeste nivå av bevisstrategi. Til sammenlikning var andelen to tilfeller for oppgave nummer to. Dette er nok en pekepinn på at elevene klarer å distansere seg fra det spesifikke til det generelle i større grad for oppgave en enn for oppgave to. Et annet aspekt knyttet til oppgavens struktur omhandler sluttproduktet som elevene skulle komme frem til, en formell generalisering. For oppgave en er formelen; 5n+1, og for oppgave to; (n (n+1)) /2. I oppgave en inneholder altså formelen en ukjent, mens det for oppgave to inneholder to ukjente. Dette kan ha vært med på å spille inn i elevenes løsningsprosess, og jeg tror at forklaringen kan ligge omkring overgangen mellom aritmetikk og algebra, som beskrevet i spiralmodellen til Bruner (1960).

5.3 Par – Resonnement

Jeg erfarte at to par skilte seg ut, sammenliknet med de andre parene, i bruk av type resonnement. Sandra og Trine brukte i stor grad naiv empirisme, både på oppgave en og to. Josefine og Albert tok i bruk avgjørende eksperiment i større grad enn de andre parene. Mitt inntrykk etter intervjuene er begrenset, slik at alle antydninger om årsak er spekulative. Jeg fikk imidlertid, med de andre elevene i studiet som sammenlikningsgrunnlag, inntrykk av at Sandra, Trine og Josefine hadde en annen type matematisk forståelse enn de andre elevene i studiet. Disse tre jentene virket å være preget av det Skemp (1976) omtaler som instrumentell forståelse, som innebærer at elevene i liten grad kan anvende sine matematiske kunnskaper på andre områder enn det de er opplært i. Noe som videre kan relateres til Balacheffs (1988) pragmatiske bevisføring. Dette kom til uttrykk gjennom at Sandra og Trine ofte jobbet med enkeltstående eksempler, både på oppgave en og to, og ikke evnet å se sine fremgangsmåter i et større bilde. Ettersom begge virket preget av instrumentell forståelse klarte de sjeldent å bevege seg oppover på mer avanserte former for resonnering.

Josefine & Albert viste, som tidligere nevnt, større hyppighet av avgjørende eksperiment enn de andre parene. Jeg mener at dette også kan forklares i elevenes matematiske forståelse. I motsetning til Josefine, virket Albert å ha en relasjonell, anvendbar forståelse av matematikk, i tråd med Skemp (1976). Min hypotese til at dette paret ofte hadde et resonneringssett som endte med avgjørende eksperiment, handler om uenigheten mellom elevene. Albert virket å se en større sammenheng, hvor han ofte viste tegn til å se nye delprosesser i oppgaveløsningen i lys av resultater fra tidligere løsninger. Imidlertid virket ikke Josefine å klare det samme, slik at det oppsto en interessekonflikt, hvor begge ønsket å ha rett. Der elevene var uenige om løsning endte de med å teste sine hypoteser opp mot hverandre og dette ble derfor klassifisert som avgjørende eksperiment som beskrevet i Balacheff (1988).

Begge de overnevnte parene kan også ha vært preget av den sosiale interaksjonen i intervjuet. Med ønske om at egen løsning skulle være den riktige, kan det ha vært slik at elevene ble så opphengt i at de selv skulle ha rett, at de til og med valgte å overse partnerens løsningsforslag. På den måten vil den sosiale interaksjonen ha fungert som et hinder for at elevene skulle oppnå et høyere nivå av resonnering.

5.4 OPPGAVE - PAR

Det første paret, Sandra & Trine, viste tendenser til lavere nivåer av bevisstrategier på oppgave to enn oppgave en. Dette var første intervjuet som ble gjennomført i studien, i tillegg til at oppgavene kom i motsatt rekkefølge av det som var tilfelle for resten av studiet. Imidlertid viser det seg at vi har fått en liknende trend blant de andre parene, det ser derfor ut som at rekkefølgen ikke har påvirket hvilke typer resonnement som ble brukt på hvilken oppgave. Videre tar Sandra & Trine i bruk generisk eksempel i oppgave to, noe de ikke gjorde i oppgave en. Dette kan imidlertid forklares med at de evnet å anvende allerede avdekkede egenskaper ved figuren, i tråd med Varghese (2011), ettersom de ellers lå på et svært lavt resonnementnivå.

Simen & Ragnar, og Lise & Andrea viste lignende tendenser i skillet mellom oppgave en og to. Dette kan tyde på tidligere nevnt årsak om at oppgave en ligner mer på aritmetisk tenkning enn oppgave to. Imidlertid viser Lise & Andrea tendenser til å bruke avgjørende eksperiment i større grad på oppgave to. Knut & Pål viste noe av de samme tendensene, hvor avgjørende eksperiment ble brukt ved hele fire tilfeller i oppgave en. Forklaringen her ligger i uenighet om løsning innad i paret, hvor avgjørende eksperiment ble brukt for å finne ut hvem som hadde kommet frem til riktig svar.

Albert & Josefine var det eneste paret som ikke brukte generisk eksempel på oppgave to. Dette tyder på at elevene ikke klarte å avdekke sentrale egenskaper i figuren, for så å anvende dette i videre oppgaveløsning. Imidlertid var Albert inne på konseptet omkring det å finne arealet i en trekant, noe som gjorde at de oppnådde en forekomst av tankeeksperiment, som også Knut & Pål var inne på. Et interessant aspekt ved dette intervjuet var at Albert valgte å forkaste sin tankerekke knyttet til trekanter i det han ble avfeid av Josefine. Her kan forklaringen ligge omkring det sosiale aspektet, hvor Albert kan ha fryktet at hans resonnement ville føre til feil svar. Dette er ett av de negative aspektene som jeg opplevde med å intervjue i par. Videre kan dette tyde på at forskjell i matematisk forståelse innad i paret, jfr. Skemp (1976), kan påvirke i større grad enn jeg hadde trodd på forhånd. Gjennom at Josefine ikke klarte å følge Alberts resonnement omkring trekanten og dens egenskaper, kan det ha vært slik at Albert forkastet forslaget fordi han ikke kunne forklare det på en måte som Josefine ville forstå.

5.5 SAMMENLIKNING MED BALACHEFF (1988) OG VARGHESE (2011)

I tråd med Balacheff (1988) og Varghese (2011) forventet jeg å ha problemer med å skille naiv empirisme, avgjørende eksperiment og generisk eksempel. Videre hadde jeg også en forventning om at det ville bli vanskelig å finne forekomster av generisk eksempel og tankeeksperiment. Dette viste seg å stemme godt overens med de erfaringene jeg har fått gjennom prosjektet.

Jeg hadde, ut fra Varghese (2011) og Balacheff (1988), ikke forventet å gjøre funn som ikke kunne brukes i resultatdelen. Eksempler på dette er, som nevnt tidligere, kategorien IN fra kodingsarbeidet. Varghese (2011) peker på at Balacheff (1988) klassifiserte lignende tilfeller under tankeeksperiment, imidlertid mener jeg de få tilfellene jeg ikke kunne klassifisere manglet kontekst i så stor grad at det ville svekket validiteten i studiet. Jeg har tidligere pekt på at min erfaring med forskning kan ha vært en hovedårsak til disse funnene. Videre kan det forklares i Lithners (2007) firestegstruktur for matematisk resonnement. I henhold til Lithners (2007) andre trinn i resonneringsprosessen, vil et valg av strategi kunne være bevisst og ubevisst. Ved ubevisste valg erfarte jeg at elevene i mindre grad var i stand til å redegjøre for hva de hadde gjort og hvorfor de hadde gjort det. Noen ganger vil elevene ikke være i stand til å redegjøre for hvordan de har tenkt, rett og slett fordi de ikke har reflektert over valg som ble gjort gjennom resonneringsprosessen. Dette vil igjen kunne være med på å svekke mulighet for å skape kontekst rundt resonnementet, som igjen kan føre til vanskeligheter med å klassifisere det. Videre kan lignende utfordringer føre til at det blir umulig å skape kontekst, som så vil skape tilfeller som møtt under koden IN.

Bakgrunn for elevenes valg av bevisstrategi, i forbindelse med intervju av typen som er brukt i denne rapporten, kan komme av «det som er forventet» eller den sosiale interaksjonen mellom elevene i intervjuet. I tillegg kan dette skyldes kvalitet på oppgavene, slik som Varghese (2011) påpeker, noe jeg drøfter senere i kapittelet. Et annet aspekt knyttet til oppgavenes natur handler om at elevene oppnådde tankeeksperiment oftere i oppgaven med lineær vekst, enn oppgaven med eksponentiell vekst, også dette vil jeg diskutere senere i kapittelet.

5.6 ELEVERS MATEMATISK RESONNEMENT

Denne rapporten har belyst problemstillingen;

> Hva kjennetegner de matematiske resonnementene til elever i barneskolen med høy måloppnåelse i matematikk, i arbeid med generalisering av geometriske figurer og numeriske følger?

Rapporten har avdekket at elever med høy måloppnåelse i matematikk ikke kan sees på som en homogen gruppe. Med dette menes det at den matematiske forståelsen vil variere innad i elevgruppen, hvor noen elever preges av instrumentell- og noen av relasjonell forståelse. Videre har jeg belyst at oppgavens struktur vil være med på å påvirke hvilke typer bevisstrategier elevene velger, både i form av tidligere kunnskaper, men også med tanke på hva elevene kan oppfatte om «det som er forventet.» Valget kan også preges av den sosiale interaksjonen som danner kontekst for intervjuet, hvor elevens ønske om å ha rett og ønske om å unngå misforståelser kan være med på å påvirke.

Tidligere forskning på området har avdekket utfordringer knyttet til å skille pragmatiske bevisstrategier fra hverandre. Jeg har erfart det samme gjennom dette prosjektet, og tatt hensyn gjennom ulike metodiske grep. Det er, på bakgrunn av eget prosjekt og egne funn, vanskelig å komme med noen endelig konklusjon omkring problemstillingen. Mine funn kan tyde på at elever vil kunne oppnå høyre nivåer av bevisstrategier jo nærmere oppgavene ligger elevenes tidligere erfaringer. Erfaringene fra denne rapporten viser at alle nivåer av bevisstrategier tas i bruk, i ulikt omfang. Det vil imidlertid kreves ytterligere og mer dyptgående forskning for å kunne si noe endelig om kjennetegn på elever med høy måloppnåelses matematiske resonnementer.

6 AVSLUTNING

6.1 DIDAKTISK REFLEKSJON

Prosjektet har gitt meg et lite innblikk i arbeid med forskning og forskningsrapporter. Jeg har stiftet bekjentskap til oppgavebasert intervju som forskningsmetode, og tilegnet meg kunnskaper om hvordan dette kan brukes i undervisningssituasjon. Intervju som metode kan for eksempel brukes til å kartlegge elevenes matematiske forståelse og tankesett på en mer inngående måte enn det en tradisjonell, skriftlig kartlegging vil klare å avdekke. Som lærer er det viktig å fortløpende ha oversikt over elevenes ferdigheter i faget, hvor muntlig aktivitet er med på å danne et bilde på daglig basis. Gjennom intervju og etterarbeid har jeg blant annet sett hvor enkelt det er «å overse» en elev som prøver å formidle noe, dersom en blir for oppsatt på å fange opp det en annen elev gir uttrykk for. Jeg mener derfor at arbeidet med masteroppgaven har bidratt til at jeg har blitt mer bevisst på hvor vanskelig det er å fange opp alt som burde tas til følge i undervisningen.

6.2 VIDERE FORSKNING

Mitt prosjekt har tatt for seg allerede godt etablerte teorier, hvor mine funn viser noe av det samme som for eksempel Balacheff (1988) og Varghese (2011). Teorigrunnlaget kan derfor sies å være solid, slik at videre forskning eventuelt bør kunne teste ut anvendbarhet knyttet til andre type oppgaver eller andre metoder. I tillegg har både Varghese (2011) og Balacheff (1988) tatt i bruk skriftlige besvarelser i sine studier, slik at det muntlige burde vært dekket i ytterligere grad. Det kunne for eksempel vært interessant å brukt de samme to oppgavene som jeg har brukt i mitt studie, bare at parene i intervjusituasjonen kun fikk tildelt en blyant på deling for å løse oppgaven. Dette kunne vært med på å redusert rollen til forskeren ytterligere, og skapt enda større aktivitet blant elevene. Samtidig kunne det vært interessant å prøvd samme oppsettet med enkeltelever i intervjusituasjon, for å se om det ville gitt noen forskjell i resultater og elevaktivitet.

7 LITTERATUR

Aarø, L. (2007): *Fra spørreskjemakonstruksjon til multivariat analyse av data: En innføring i survey-metoden.* Bergen: Research Centre for Health Promotion/Griegakademiet, Universitet i Bergen

Balacheff, N. (1988): Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I: *D. Pimm (Ed.), Mathematics, teachers and children, side 216-235.* London: Holdder & Stoughton.

Braun, V. & Clarke, V. (2006): Using thematic analysis in psychology. I: *Qualitative Research in Psychology, side 77-101.* London: Routledge

Bruner, J.S. (1960): Om å lære. Oversatt av: Hoff, G. & Wasenden, A.B. Oslo: Dreyers forlag. Oversatt fra: *The Process of Education.* The President and Fellows of Harvard College.

Brøyn, T. (2009): Muntlige ferdigheter i Matematikk - Å snakke seg til forståelse. I: *Bedre skole nr. 4 (2009), side 64-65.* Utdanningsforbundet. Hentet fra: https://www.utdanningsforbundet.no/upload/Tidsskrifter/Bedre%20Skole/BS_nr_4-09/4328-04-09-BedreSkole-Broyn_4.pdf

Caelli. K., Ray, L. & Mill, J. (2003): 'Clear as Mud: Toward Greater Clarity in Generic Qualitative Research. I: *International Journal of Qualitative Methods, 2(2). Side 1-13.* IIQM, University of Alberta.

Cappelendamm.no (Ukjent): *5.10 Tall og Figurer.* Hentet fra: http://sinus2p.cappelendamm.no/c1409643/binfil/download.php?tid=1423980

Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (2007): Early Algebra and Algebraic Reasoning. I: *F. K. Lester, Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, side 669-705.* Charlotte, NC: Information Age.

Caspi, S. & Sfard, A. (2012): Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. I: *International Journal of Educational Research 51-52 (2012), side 45-65.* Elsevier Ltd.

Christoffersen, L. og Johannesen, A. (2012): *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Abstrakt forlag AS, Oslo

Cobb, P. (2007): Putting philosophy to work. Coping with Multiple Theoretical Perspectives. I: *F. K. Lester, Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, side 3-38.* Charlotte, NC: Information Age.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007): *Research methods in education (6th. Utg.).* London: Routledge

Cresswell, J.W. & Miller, D.L. (2000): Determining Validity in Qualitative Inquiry. I: *Theory into Practice, Vol 39. No. 3, Getting Good Qualitative Data to Improve Educational Practice, side 124-130.* Taylor & Francic, Ltd.

Fernald, D. (2008): Cognitive Psychology. I: *Psychology: Six Perspectives, side 216-260.* SAGE Publications, Inc.

Glaserfeld, E.v. (1991): *Radical Constructivism in Mathematics Education. Hingham, side xiii-xx.* US: Kluwer Academic Publishers

Goldin, G.A. (1997): Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. I: *Journal for Research Methods in Mathematics Education, side 40-62.* National Council of Teachers of Mathematics.

Gray, D.E. (2004): 2: Theoretical perspectives and research methodologies. I: *Doing research on the real world, side 14-38.* SAGE publications Ltd.

Grønmo, L.S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H., Borge, I.C. (2012): *Framgang, men langt fram. Norske elevers prestasjoner i Matematikk og Naturfag i TIMSS 2011.* Oslo: Akademika forlag.

Harel, G. & Sowder, L. (1998): Students' proof schemes: Results from exploratory studies. I: *A.Schoenfeld, J.Kaput, & E.Dubinsky (Eds.), Research in collegiate mathematics education III, side 234-283.* Providence, RI: American Mathematical Sosciety.

Imsen, G. (2005): *Elevens verden. Innføring I pedagogisk psykologi.* 4. utgave, 5. Opplag 2012. Oslo: Universitetsforlaget AS

Khataybeth, A. & Ateeg, N.A. (2011): How "Writing Academic English" Follows Bruner's Spiral Mode Curriculum Planning. I: *Journal of Emerging Trends in Educational Research and Policy Studies (JETERAPS) 2 (2), side 127-138.* Scholarlink Research Institute Journals.

Kieran, C. (2004): Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? I: *The mathematics Educator, Vol. 8, No. 1 (2004), side 139-151.*

Kieran, C. (2007): Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels. Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. I: *F. K. Lester, Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, side 707-762*. Charlotte, NC: Information Age.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001): *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics.* Washington, DC: National Academy Press

Kvale, S. (1997): Det kvalitative forskningsintervju. Oversatt av: Anderssen, T.M. & Rygge, J., Oslo: Gyldendal akademiske. Oversatt fra: *Interviews. An Introduction to Qualitative Research Interviewing.* Studentlitteratur, Sverige

Lester, F.K. Jr. (2005): On the Theoretical, Conceptual, and Philosophical Foundations for Research in Mathematics Education. I: *ZDM, 2005, Vol.37(6). Side 457-467.*

Lithner, J. (2007): A research framework for creative and imitative reasoning. I: *Educational Studies in Mathematics, Vol. 67, No. 3 (Mar., 2008), side 255-276.* Springer Science + Business Media B.V.

Matuszek, D. (2014): *CIT 591 Assignment 2: Figurate Numbers.* Hentet fra: http://www.cis.upenn.edu/~matuszek/cit591-2014/Assignments/02_figurate_numbers.html

Petersen, I.J. (2015): *Hvordan kan elevers ferdigheter i algebra måles detaljert?* Masteroppgave i Lærerutdanning 5.-10. trinn, mai 2015. Universitetet i Tromsø – Norges arktiske universitet.

Postholm, M.B. (2010): *Kvalitativ metode: en innføring med fokus på fenomenologi, etnografi og kasusstudier (2.utg.).* Oslo: Universitetsforlaget.

PP-tjenesten (ukjent): *Hva prøveserien omfatter, Kartleggingsprøver i matematikk* Hentet fra http://www.ppt-materiell.no/ppt_matematikk.htm (08.04.16)

Renner, M. & Taylor-Powell, E. (2003): *Analyzing Qualitative Data.* University of Wisconsin-Extension, Madison; Wisconsin, G3658-12.

Schoenfeld, A.H. (2007): Method. I: *F. K. Lester, Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, side 69-107.* Charlotte, NC: Information Age.

Skemp, R. R. (1976): Relational Understanding and Instrumental Understanding. I: *Mathematics Teaching in the Middle School, side 88-95.* London: National Council of Teachers of Mathematics.

Udir.no (2009, juni): Vedlegg 4: Utkast nasjonale kjennetegn – matematikk, grunnskolen. I: *Udir.no, 2009: Bedre vurderingspraksis, sluttrapport fra Utdanningsdirektoratet.* Hentet fra: http://www.udir.no/Tilstand/Forskning/Rapporter/Utdanningsdirektoratet/Bedre-vurderingspraksis-sluttrapport-fra-Utdanningsdirektoratet-2009/

Udir.no (2012, februar): Rammeverk for grunnleggende ferdigheter. Hentet fra: http://www.udir.no/Lareplaner/Forsok-og-pagaende-arbeid/Lareplangrupper/Rammeverk-for-grunnleggende-ferdigheter/

Udir.no (2013, august): Læreplan i matematikk fellesfag. Hentet fra: http://www.udir.no/kl06/mat1-04/Hele/

Udir.no (2014a, februar): Veiledning i lokalt arbeid med læreplaner. Hentet fra: http://www.udir.no/Lareplaner/Veiledninger-til-lareplaner/Veiledning-i-lokalt-arbeid-med-lareplaner/

Varghese, T. (2011): Considerations Concerning Balacheff's 1988 Taxonomy of Mathematical Proofs. I: *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 2011, 7(3), side 181-192.* ESER, Eurasian Society of Educational Research.

Watson, A. (2009): Paper 6: Algebraic reasoning. I: *Key understandings in mathematics learning.* London: Nuffield Foundation.

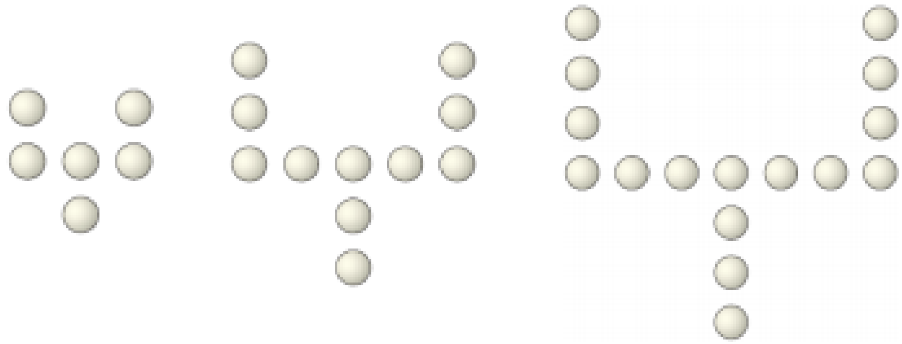
8 VEDLEGG

8.1 VEDLEGG 1 - INTERVJUGUIDE

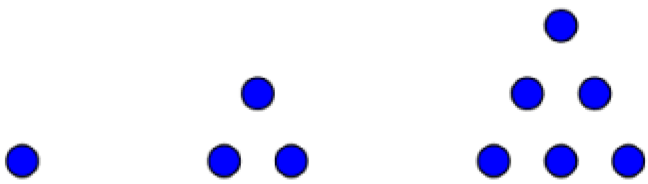
Spørsmål knyttet til hver oppgave:

- Beskriv det du ser
    - Hvordan ser figur 1 ut? Nr. 2? Nr. 3?
    - Er det noen sammenheng mellom figurene/tallene?
    - Hva er forskjellen mellom figurene/tallene?
        - Hva er likt?
- Hva tror du vil være neste figur/tall?
    - Hvorfor?
    - Hvordan tenkte du?
- Hvis vi skulle finne figur/tall nr. (n) i rekken, hvordan kunne vi gjort det?
    - Har du flere måter?
        - Hvis du for eksempel ikke kunne tegne alle.
    - Hva ville du valgt, hvorfor?
    - Hvilken metode ville vært den beste for å raskt komme frem til et svar?
- [Dersom eleven ikke har kommet frem til noen form for generalisering:]
    - Kan du prøve å beskrive sammenhengen mellom figurene/tallene? Bruk ord eller tall, tenk deg at du skal fortelle til noen som ikke kan se figurene.
- Har du sett denne oppgaven før?
    - Har du sett noen lignende oppgaver?
    - Hvor og når?
- Litt om hva de tenker om selve intervjuet
    - Hva var bra?
    - Hva kunne vært gjort annerledes?
        - Oppgaver
        - Situasjon
        - Meg som intervjuer
    - Hvis elevene fikk velge selv
        - Jobbe sammen i par?
        - Jobbe alene?

Oppgave 1)



Oppgave 2)



8.2 Vedlegg 2 - Søknad til skole

Hei!

Jeg heter Patrick Vestad, er 23år og studerer master i lærerutdanning 5.-10.trinn, ved UiT. I mai 2016 skal jeg levere mastergradsoppgave i matematikkdidaktikk. Oppgaven skal basere seg på forskning i «feltet,» og vil forhåpentligvis vise seg nyttig for flere enn meg selv.

Studien jeg ønsker å gjennomføre har så langt fått problemstillingen; «Hva kjennetegner de matematiske resonnementene til elever med høy måloppnåelse innenfor tall og algebra i barneskolen i arbeid med generalisering av algebraiske figurer og tallfølger?»

For å svare på min problemstilling ønsker jeg å gjennomføre 5 oppgavebaserte intervjuer med 2 og 2 elever fra 7.årstrinn. Hvert intervju er beregnet å ta ca. 30 minutter. Studien er søkt inn til NSD, norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste, og jeg ønsker å gjennomføre intervjuene fortløpende etter at søknaden blir godkjent (4-6uker, altså i løpet av februar). Jeg har utarbeidet en «kontrakt» for samtykke, både fra foresatte og elevene selv. Elevene vil stå fritt til å velge selv om de ønsker å delta. Mitt spørsmål til deres skole er derfor om dette er noe dere ønsker å ta del i, ved å stille informanter tilgjengelig for mine intervjuer.

Mvh. Patrick Vestad

Epost: pve002@post.uit.no

Tlf: 92898734

Vedlegg 2 – Søknad til skole

8.3 Vedlegg 3 - Samtykkeerklæring fra foresatte

Hei!

I forbindelse med min lærerutdanning ved Universitetet i Tromsø skal jeg skrive en mastergradsoppgave våren 2016. I sammenheng med denne vil jeg i uke 9 besøke Hakkebakkeskogen Barneskole for å gjennomføre intervju med elever ved skolen. Aktuelle deltakere er valgt ut i samarbeid med skolen.

Intervjuene vil dreie seg om parvis oppgaveløsning i matematikk med tema matematisk resonnement. Hvert intervju vil ta for seg to oppgaver som intervjuobjektene skal løse sammen og ingen sensitiv informasjon vil bli innhentet. Intervjuguide kan forevises ved forespørsel pr. mail. Jeg ønsker imidlertid å filme intervjuene ettersom dette vil lette mitt arbeid i etterkant. Opptakene vil kun være tilgjengelig for undertegnede og veileder på master, samt mulighet for innsyn av rektor/inspektør ved skolen.

Etter at opptakene har tjent sitt formål vil disse bli destruert. Informasjonen som blir hentet ut gjennom intervjuene vil bli brukt i min mastergradsavhandling, våren 2016. Alle deltakere vil da være anonymisert, slik at disse ikke vil være gjenkjennbar. Ettersom intervjuobjektene er mindreårige trenger jeg skriftlig samtykke fra foresatte. Samtykket kan til enhver tid trekkes tilbake uten begrunnelse. Jeg setter pris på om du/dere tillater meg å intervjue deres barn.

Spørsmål om studien kan rettes til:

Tlf: 92898734

Mail: pve002@post.uit.no

Mvh. Patrick Vestad

Jeg samtykker herved at____

(fornavn, etternavn, fødselsdato), kan delta i intervju i henhold til overstående vilkår. Jeg har til enhver tid mulighet til å trekke mitt samtykke, uten begrunnelse.

X ____

underskrift foresatte (dato, sted)