



UiT Norges arktiske universitet

Fakultet for naturvitenskap og teknologi

Papirbretting som geometrisk verktøy

Utforsket ved hjelp av Gröbner-basiser og anvendt i skoleundervisning

Ingar Wesenberg Eskeland

Masteroppgave i matematikk MAT-3907 juni 2022

Takk til Cordian Riener og Hilja Lisa Huru for herlig veiledning.

Innhold

0 Innledning	1
1 De klassiske konstruksjonene	2
1.1 Vinkelens tredeling og kubens fordobling	2
1.2 Pierre Wantzel's bevis	2
1.3 Sirkelens kvadratur	6
2 Instruksjoner	7
2.1 Forklaring av symboler	7
2.2 Eksempelkonstruksjoner	8
2.3 Praktiske tips til papirbretting	8
3 Huzita og Hatori's aksiomer	11
3.1 Origamitall	11
4 Løsning av tredjegradslikninger	14
4.1 Papirbretting og parabler	14
4.2 Beloch's kvadrat	15
4.3 Lill's metode	18
4.4 Eksempel på løsning av tredjegradslikning	20
4.5 Løsning av annengradslikninger	22
5 Punkters forflytning	23
5.1 Refleksjonene av et punkt over tangentene til en parabel	24
5.2 Sammenhengen mellom kurvene og papirbretting	27
5.3 Konvertering fra punkt og linje til parabel	28
6 Papirbretting i skolen	29
6.1 Papirbretting i forhold til læreplaner	29
6.2 Papirbretting på VG1 i praksis	31
6.2.1 Undervisningsoppleggets gang	31
6.2.2 Refleksjon og endringsforslag	33
Referanser	35
Appendiks: Gröbner-basiser	36

0 Innledning

Det finnes tre klassiske, uløselige problemer i geometri. Disse er vinkelens tredeling, kubens fordobling og sirkelens kvadratur. I disse problemene skal man bruke passer og linjal til å lage visse konstruksjoner. Av de gamle grekerne var det ingen som klarte å løse disse problemene, og de ble etterhvert mistenkt å være uløselige. Men det var ikke før i 1837, med Galois-teori, at to av tre problemer ble bevist uløselige, og det siste ble ikke bevist uløselig før i 1882. De to første problemene er uløselige fordi de krever bruk av kubikkrot, som er umulig under de klassiske reglene. Det tredje problemet, sirkelens kvadratur er enda mer vrien fordi den krever at man kan konstruere π , et transcendentalt tall. Man kan deretter undre seg over hvor mye som skal til for å kunne løse disse problemene; hvor lite kan man endre på reglene for at de skal tillate f.eks. kubikkrot? Det er mange forskjellige redskaper man kan tillate for å gjøre det mulig å konstruere kubikkrota av vilkårlige lengder. Redskapet, eller metoden, vi skal se på i denne teksten er papirbretting. Mens de klassiske reglene tillater deg å løse annengradsligninger lar papirbretting deg løse polynomligninger av opptil fjerde grad.

Vi begynner i kapittel 1 med å se nærmere på de klassiske konstruksjonene med passer og linjal. Vi ser både på reglene for slike konstruksjoner, hvilke problemer som er mest kjent, og beviset for uløseligheten av disse problemene. Først etter dette skal vi gå over til papirbretting. Vi begynner med notasjon og bretteinstruksjoner i kapittel 2. I kapittel 3 defineres det hvordan vi tillater at papiret skal brettes, basert på et ønske om nøyaktighet og matematisk egnethet. Disse reglene bestemmer hvilke lengder og vinkler som er mulige å konstruere med papirbretting. I kapittel 4 går vi gjennom Beloch's metode for å løse polynomligninger med papirbretting. Metoden benytter seg av Lill's metode for å finne røttene av polynomer, men kan bare anvendes på polynomer av opp til 4. grad. Deretter bruker vi i kapittel 5 Gröbner-basiser til å se nærmere på ett av stegene i Beloch's metode. I siste kapittel diskuteres det hvor aktuelt papirbretting kan være for matematikkundervisning i skolen, basert på teori og erfaringer jeg har hatt i praksis.

Med en struktur som dette får vi at kapittel 1 til 5 handler om ren matematikk, mens kapittel 6 er om matematikkdiraktikk. Vi får også at kapittel 1, 3 og 4 er innsamling og gjenbruk av andres arbeid, mens kapittel 2, 5 og 6 handler om mitt eget arbeid.

1 De klassiske konstruksjonene

De gamle greske matematikerne er godt kjent for geometriske konstruksjoner. Det er mange måter å lage geometriske konstruksjoner, men de høyest aktede ble gjort med passer og linjal under strenge regler. Passeren kan kun brukes til å tegne sirkelbuer til og fra punkter som allerede er funnet, og har passerspissen plassert i et punkt som også ble funnet tidligere. Man kan med andre ord ikke stille inn passeren på en bestemt lengde, for så å flytte denne lengden rundt på arket. Når vi konstruerer med passer og linjal er det likevel ofte man tillater å bevare innstillingen til passere, siden det finnes gyldige konstruksjoner som gir det samme resultatet. Linjalen i disse konstruksjonene har ingen markeringer, og kan kun brukes til å trekke linjer som skjærer to punkter som allerede er funnet. Man kan også kun bruke én side av linjalen, og ingen av hjørnene. Det er heller ikke lov å bruke kanten til papiret. Ofte begynner man med en enhetslengde allerede tegnet, som per definisjon har en lengde 1.

1.1 Vinkelens tredeling og kubens fordobling

Det sies at athenerne en gang oppsøkte orakelet på Delos for å få hjelp med pesten som herjet i landet. Og rådet de fikk var at alteret til Apollon måtte doubles. Alteret var en kube, og dermed kunne de undre seg over hvordan de skulle konstruere en kube med dobbelt så stort volum.[4] Denne legenden henger sammen med det kjente geometriske problemet om kubens fordobling. Siden det har mye til felles med et annet problem, vinkelens tredeling, ønsker jeg å gå gjennom begge problemene sammen:

Vinkelens tredeling:

Gitt en vinkel 3α , konstruer α .

Kubens fordobling:

Gitt en kube med volum V_1 , konstruer en kube med volum V_2 , slik at $V_2 = 2V_1$.

I vinkelens tredeling skal man altså finne vinkelen som er en tredjedel av en gitt vinkel. Det å finne en vinkel θ er ekvivalent med å finne lengden $\cos(\theta)$. Problemet kan da skrives som «Gitt en lengde $\cos(3\alpha)$, finn lengden $\cos(\alpha)$ ». Her er det naturlig å bruke trippelvinkelformelen:

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha) \quad (1)$$

Siden $\cos(3\alpha)$ er kjent har vi her en tredjegradslikning med $\cos(\alpha)$ som ukjent. for å finne roten til et tredjegradspolynom trenger vi tredjerot. Det blir aktuelt senere.

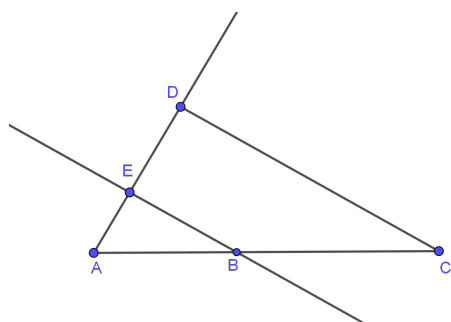
Vi får en lignende situasjon med kubens fordobling. Kubene er definert av enkeltsider, med henholdsvis lengde s og $\sqrt[3]{2}s$. Siden det er lett å konstruere en kube hvis sidelengden er gitt kan vi omformulere problemet til «Gitt en lengde s , finn en lengde $\sqrt[3]{2}s$ ». Og her ser vi umiddelbart at vi trenger tredjerot også for å løse dette problemet. I kapittel 1.2 gjengis beviset til Pierre Wantzel for hvorfor tredjerot generelt sett ikke kan gjøres med kun passer og linjal.

1.2 Pierre Wantzel's bevis

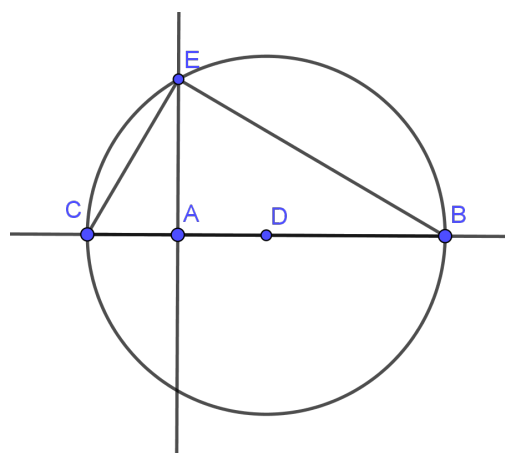
Både vinkelens tredeling og kubens fordobling ble bevist uløselige i 1837 av Pierre Wantzel. I beviset ser man på mengden av konstruerbare tall, det vil si alle tall som kan konstrueres som lengder. For å gjengi dette beviset bør vi først definere denne mengden.

Definisjon 1. La \mathbb{K} betegne mengden av alle tall som kan konstrueres med de klassiske reglene for konstruksjoner med passer og linjal. Elementene i \mathbb{K} kalles «konstruerbare tall», og representerer konstruerbare lengder.

La oss se på hva slags tall er konstruerbare. I disse geometriske konstruksjonene tillater vi å begynne med tallet 1, for så å utøve et endelig antall operasjoner. De mulige operasjonene oppstår fra reglene for slike konstruksjoner, og er addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon og kvadratroten. Konstruksjoner som utfører divisjon og kvadratroten beskrives i figur 1. Grunnen til at vi får akkurat disse operasjonene kommer fra hvordan man kan konstruere punkter med passer og linjal. Alle konstruerbare punkter er skjæringspunkter mellom sirkler og/eller linjer med konstruerbare koeffisienter. Det å finne skjæringen mellom to linjer er ekvivalent med å finne røttene til et førstegradspolynom. Skjæringen mellom ei linje og en sirkel er ekvivalent med å finne røttene til annengradspolynom, og det samme er skjæringen mellom to sirkler. Derfor er de matematiske operasjonene som kan gjøres i slike konstruksjoner nettopp de operasjonene som skal til for å løse første- og annengradslikninger, altså addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon og kvadratroten.



(a) Gitt to lengder $|AC|$ og $|AD|$ kan vi finne forholdet mellom disse som $|AE|$, gitt at $|AB| = 1$. Dette er siden $\triangle ACD$ og $\triangle ABE$ er formlike.



(b) Gitt en vilkårlig lengde $|AB|$ kan man konstruere $\sqrt{|AB|} = |AE|$, gitt at $|AC| = 1$. Dette kommer av at $\triangle ACE$ og $\triangle AEB$ er formlike.

Figur 1: Disse konstruksjonene med passer og linjal lar deg konstruere henholdsvis forholdet mellom to lengder og kvadratroten av en vilkårlig lengde. Multiplikasjon kan gjøres med en modifisert versjon av konstruksjonen til venstre.

Med tallet 1, addisjon og subtraksjon kan vi konstruere alle heltall. Siden vi også har divisjon kan vi konstruere alle rasjonale tall. Vi kan dermed konkludere med at $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$. Men vi har enda ikke sett på den siste operasjonen, kvadratroten. På grunn av kvadratroten kan ikke elementer i \mathbb{K} skrives på en enkel, generell måte. Ethvert element i \mathbb{Q} kan skrives som $\frac{a}{b}$, hvor $a, b, \in \mathbb{N}$, men i motsetning til rasjonale tall kan elementene i \mathbb{K} ha et vilkårlig antall ledd uten å kunne forkortes. F.eks. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{p} \in \mathbb{K}$, hvor $2, 3, \dots, p$ er primtall. La oss heller se på hva som skjer med mengden av konstruerbare tall når vi tillater kvadratroten flere og flere ganger.

La \mathbb{K}_1 betegne mengden av alle rasjonale tall og alle tall som er kvadratroten av et rasjonalt tall. La \mathbb{K}_2 betegne mengden av alle elementer i \mathbb{K}_1 , samt kvadratroten av hvert element i \mathbb{K}_1 . Vi kan slik bygge opp en kjede av mengder:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n \subset \mathbb{K} \quad (2)$$

Siden vi kan fortsette kjeden så langt vi måtte ønske, og i en konstruksjon kan man bare ha

endelig mange operasjoner, så vil ethvert konstruerbart tall eksistere i \mathbb{K}_n , for en eller annen $n \in \mathbb{N}$. n representerer her hvor mange ganger man må bruke kvadratroten. Mengden \mathbb{K} av alle konstruerbare tall er litt spesiell fordi den ikke setter noen grense på hvor mange operasjoner som kan utføres. For å følge de klassiske reglene er vi nødt til å ha et endelig antall operasjoner, og vi bruker dermed kvadratroten ikke mer enn n ganger. Vær også oppmerksom på at \mathbb{Q} og lignende symboler kan endre mening etter behov. Iblant representerer \mathbb{Q} mengden av alle rasjonale tall, mens det i andre situasjoner representerer kroppen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Til resten av beviset trenger vi å definere hva en kroppsutvidelse er, hva som er graden til utvidelsen, og tilhørende begreper.

Definisjon 2. La K være en kropp. En utvidelse av K er en kropp L slik at $K \subset L$. L kan også skrives som $K(x_1, x_2, \dots)$, hvor $x_1, x_2, \dots \notin K$ er elementene K må lukkes over for å bli til L .

Definisjon 3. En simpel utvidelse er en utvidelse generert av ett element, altså $K \subset L$, hvor $L = K(x)$.

Definisjon 4. La K være en kropp, og $K \subset L$ en utvidelse av denne kroppen. Da kan L skrives som $L = \{z \mid z = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n, a_i \in K, b_i \in L \forall i \in \mathbb{N}\}$. La $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. B er en basis til $K \subset L$ hvis og bare hvis elementene til B er lineært uavhengige.

Eksempel 1. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ er en simpel utvidelse. Den kan også skrives som $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$, siden den minste kroppen som inneholder \mathbb{C} er \mathbb{R} utvidet med i . Basisen til \mathbb{C} er $\{1, i\}$. Med andre ord kan ethvert element $z \in \mathbb{C}$ uttrykkes som $z = a \cdot 1 + bi$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$. En utvidelse kan ha uendelig mange ulike basiser, men elementene i en basis må være lineært uavhengige.

Definisjon 5. Til en utvidelse $L = K(\alpha)$ benevnes graden til utvidelsen som $[L : K]$. Gradene til en utvidelse er lik antall elementer i basisen.

Eksempel 2. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ er en utvidelse. Basisen til $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ er $B = \{1, \sqrt{2}\}$, siden enhver $q \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ kan uttrykkes som $q = a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2}$, og 1 og $\sqrt{2}$ er lineært uavhengige. Siden B har to elementer får vi at $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$, og $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ kan kalles en kvadratisk utvidelse.

Teorem 1. La K, L, M være kroppar slik at utvidelsene $K \subset L$ og $L \subset M$ er av endelig grad. Da er også $K \subset M$ av endelig grad, og

$$[M : K] = [M : L] \cdot [L : K] \quad (3)$$

Bevis. La basisen til $K \subset L$ være $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, og basisen til $L \subset M$ er $f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$. Da har vi at $[L : K] = n$ og $[M : L] = m$. Vi skal her uttrykke et element i M med e og f . La $x \in M$. For å uttrykke x med basisen til M må vi finne $a_j \in L$ slik at

$$x = \sum_{j=1}^m a_j f_j = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_m f_m \quad (4)$$

Siden $a_j \in L$ kan vi skrive dem med basisen til L :

$$a_j = \sum_{i=1}^n b_{i,j} e_i = b_{1,j} e_1 + b_{2,j} e_2 + \dots + b_{n,j} e_n \quad (5)$$

hvor $b_{i,j} \in K$. Vi får:

$$x = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n b_{i,j} e_i \right) f_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_{i,j} e_i f_j \quad (6)$$

Siden $b_{i,j} \in K$ og $x \in M$ har vi altså uttrykt et element i M ved hjelp av koeffisienter i K og basiselementer i M . For å vise at $(e_i f_j)$ faktisk danner basisen til $K \subset M$ må vi bare vise at de er lineært uavhengige. Dette kan vi gjøre ved å ta $x \in M$ og anta

$$x = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_{i,j} e_i f_j = 0 \quad (7)$$

og se om den eneste muligheten er at koeffisientene $b_{i,j} = 0$. Vi kan skrive om ligning 7:

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n b_{i,j} e_i \right) f_j = 0 \quad (8)$$

Inni parentesen har vi en lineær kombinasjon av basiselementene til $K \subset L$ og koeffisientene $b_{i,j} \in K$, så $\sum_{i=1}^n b_{i,j} e_i \in L$. Siden elementene i f er lineært uavhengige kan vi bare ha $x = 0$ dersom $\sum_{i=1}^n b_{i,j} e_i = 0$.

$$\sum_{i=1}^n b_{i,j} e_i = 0 \implies b_{i,j} = 0 \quad (9)$$

Altså er elementene i $(e_i f_j)$ lineært uavhengige, og følgelig danner de en basis til $K \subset M$. For å finne graden til $K \subset M$ trenger vi bare å telle antall elementer i $(e_i f_j)$.

$$(e_i f_j) = \{e_1 f_1, e_2 f_1, \dots, e_n f_1, e_1 f_2, \dots, e_n f_m\} \quad (10)$$

Som vi ser har $(e_i f_j)$ nm elementer, så $[M : K] = mn$, og vi får resultatet i teorem 1. ■

Og nå har vi det vi trenger for å konstruere et teorem om graden til en kroppsutvidelse, som vi kan bruke i Wantzel's bevis. La oss bruke definisjon 5 og teorem 1 når vi betrakter de konstruerbare tallene som en utvidelse av de rasjonale tallene.

For en vilkårlig n vil graden til utvidelsen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_n$ være gitt ved

$$[\mathbb{K}_n : \mathbb{Q}] = [\mathbb{K}_n : \mathbb{K}_{n-1}][\mathbb{K}_{n-1} : \mathbb{K}_{n-2}] \dots [\mathbb{K}_1 : \mathbb{Q}] \quad (11)$$

For enhver ikke-triviell utvidelse $\mathbb{K}_i \subset \mathbb{K}_{i+1}$ har vi fra definisjon 5 at $\mathbb{K}_{i+1} = \mathbb{K}_i(\alpha)$ er en simpel utvidelse over \mathbb{K}_i . Videre vet vi at $\alpha = \sqrt{\beta}$, hvor $\beta \in \mathbb{K}_i$. Følgelig har vi at $B = \{1, \sqrt{\alpha}\}$ er basisen til $\mathbb{K}_i \subset \mathbb{K}_{i+1}$. Siden B har to elementer vet vi at $[\mathbb{K}_{i+1} : \mathbb{K}_i] = 2 \forall i \in \mathbb{N}$. Altså er graden til en utvidelse $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_n$ gitt ved

$$[\mathbb{K}_n : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n \quad (12)$$

Dette gir oss teorem 2.

Teorem 2 (Graden til mengder av konstruerbare tall). *La $\lambda \in \mathbb{K}$. La \mathbb{K}_n være den minste mengden av konstruerbare tall som inneholder λ . Da er graden til utvidelsen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_n$ gitt ved*

$$[\mathbb{K}_n : \mathbb{Q}] = 2^n$$

Husk at det elementet vi trenger i \mathbb{K}_n for å kunne doble en kube er $\sqrt[3]{2}$. La oss finne graden til $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ og sammenligne med $[\mathbb{K}_n : \mathbb{Q}]$. Basisen til $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ er $C = \{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}^2\}$. Siden C har tre elementer vet vi fra definisjon 5 at $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$. Men fra teorem 1 vet vi at $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$ må være en faktor av $[\mathbb{K}_n : \mathbb{Q}]$. Fra teorem 2 vet vi at $[\mathbb{K}_n : \mathbb{Q}]$ ikke er delelig på 3. Altså er det umulig å konstruere et linjestykke med lengde $\sqrt[3]{2}$, og dermed er det umulig å konstruere en kube med volum 2. Mer generelt kan man se at $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{a}) : \mathbb{Q}] = 3 \forall a \in \mathbb{Q}$, altså er tall på formen $\sqrt[3]{a}$ generelt sett ikke element i \mathbb{K}_n , siden $[\mathbb{K}_n : \mathbb{Q}]$ ikke er delelig med 3.

1.3 Sirkelens kvadratur

«Squaring the circle» er idag et uttrykk for å forsøke noe håpløst. Sirkelens kvadratur var opprinnelig et geometrisk problem man forsøkte å løse, men i likhet med de to andre klassiske problemene har det blitt bevist uløselig. Problemet er som følger:

Sirkelens kvadratur:

Gitt en sirkel med areal A , konstruer et kvadrat med samme areal.

Problemet skal selvfølgelig løses med passer og linjal, under de reglene beskrevet i kapittel 1. Sirkelens kvadratur ble bevist uløselig i 1882, da Ferdinand von Lindemann beviste at π er transcendentalt. Mengden av tall som er konstruerbare med passer og linjal er en delmengde av de algebraiske tallene, og de transcendentale tallene er nettop de tallene som ikke er algebraiske, men som er roten til et polynom med algebraiske koeffisienter. Følgelig kan ikke transcendentale tall konstrueres. Arealet til sirkelen er $A = \pi r^2$, som også er arealet til kvadratet med sider s , $A = s^2$. Altså må vi konstruere $s = r\sqrt{\pi}$ for å konstruere kvadratet, men $r\sqrt{\pi}$ er transcendentalt (utenom spesielle, transcendentale, verdier for r).

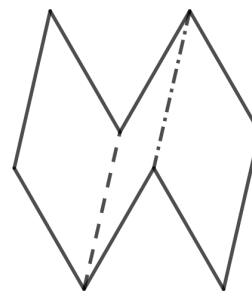
2 Instruksjoner

2.1 Forklaring av symboler

I denne oppgaven er det mange figurer, og vi bør derfor innføre noen symboler for å kunne formidle hvordan papiret brettes. Det mest elementære i mange origamibøker er å skille mellom dal- og fjellbretter. Dalbretter markeres med stiplet linje, mens fjellbrettene veksler mellom stiplet og prikket linje (se figur 2). I matematisk papirbretting er det ikke viktig å skille mellom disse, siden alle bretter representerer linjer. Det er bare i enkelte situasjoner at f.eks. en dalbrett vil være lettere å bruke enn en fjellbrett av rent praktiske årsaker. Linjene, som matematiske objekter, eksisterer i det uendelig tynne planet som papiret representerer. Men når vi lager konstruksjoner på papir kan det være gunstig å tegne noen punkter og linjer på den ene siden av arket framfor den andre.



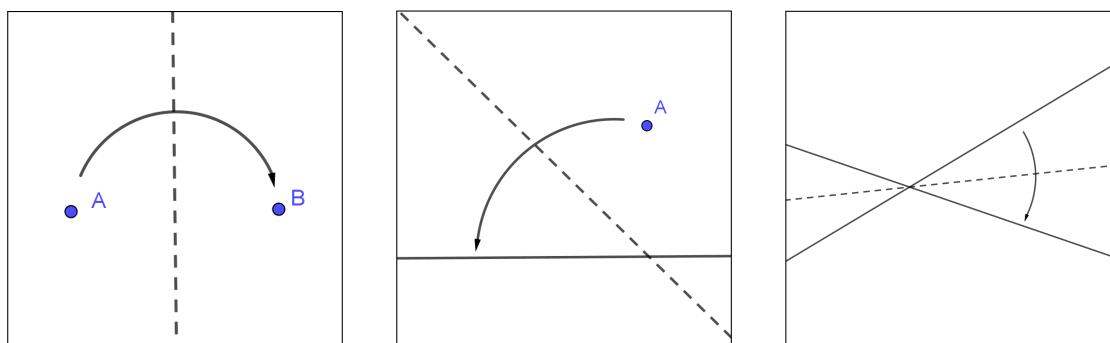
(a) På denne papirstripen er det markert at man skal ha en dalbrett til venstre og en fjellbrett til høyre.



(b) Her den samme papirstripen, men brettene har blitt utført.

Figur 2: Forskjellen mellom dalbretter og fjellbretter.

Legg merke til at i figur 2 er det ikke spesifisert noe om hvor brettene skal utføres. Det er spesifisert at det skal gjøres én dalbrett og én fjellbrett, men det står ikke noe om hvor de skal ligge eller hvilken retning de skal gå. I denne oppgaven vil jeg bruke piler til å vise hvilke objekter som skal legges mot hverandre når bretten utføres, som vist i figur 3. Siden bretter er rette linjer kan de defineres med to ulike punkter. Og i en figur som viser hvordan en brett skal utføres er det vanligvis passende å bruke to indikasjoner for å definere bretten. Når man tolker en slik figur må man identifisere de indikasjonene som definerer bretten, og det er derfor nyttig å huske på at det ofte er to slike indikasjoner. For å indikere at en brett skal gå gjennom et punkt kommer jeg til å bruke kryss, som i figur 4. For å indikere at et punkt ble funnet gjennom å markere et annet punkts plassering etter en brett bruker jeg sirkel, som i figur 4c. Ideelt sett burde slike diagrammer som i figur 3 og 4 være tilstrekkelig for å formidle en konstruksjon, men iblant brukes ytterligere instruksjoner for å gjøre det lettere.



(a) Å brette A til B resulterer i midtnormalen mellom dem. Det finnes kun én slik linje.

(b) Her vises en av uendelig mange måter å brette et punkt mot ei linje. Bretten er med andre ord bare delvis definert.

(c) Det er kun én måte å brette en linje mot en annen, og det resulterer i halveringslinja til vinkelen mellom linjene.

Figur 3: Pilene kommer i denne oppgaven til å indikere hvilke objekter som skal ligge oppå hverandre når bretten utføres.

2.2 Eksempelkonstruksjoner

Konstruksjon av 60° vinkel: Gitt to punkter A og B skal vi konstruere et tredje punkt B' slik at $\angle BAB' = 60^\circ$. Én metode vises i figur 5.

Vinkeltredeling: Som et geometrisk verktøy er det vanlig å sammenligne papirbretting med passer og linjal. Det er derfor spesielt interessant å se hvordan papirbretting lar deg løse geometriske problemer, her vinkelens tredeling, som ikke lar seg løse med passer og linjal. Denne metoden (i figur 6) for å tredele vinkler ble oppdaget av Hisashi Abe i 1980 [5].

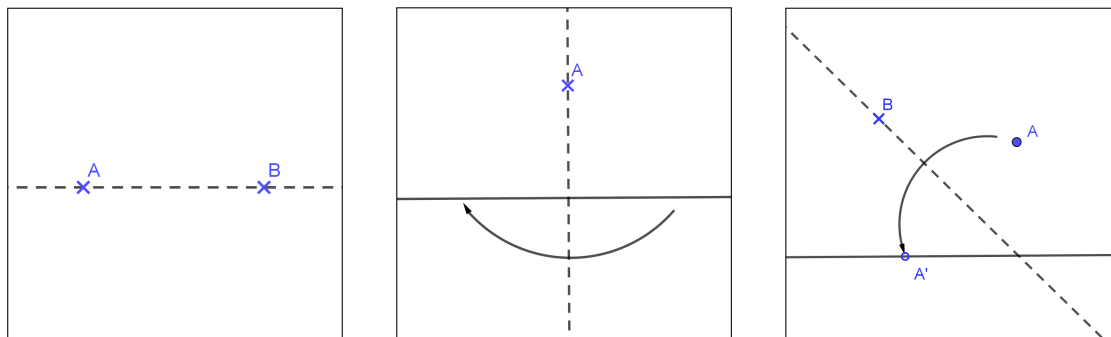
Konstruksjon av $\sqrt[3]{2}$: Et annet klassisk problem, kubens fordobling, krever konstruksjonen av et linjestykke med lengde $\sqrt[3]{2}$ for å løses. Dette er ikke mulig med de klassiske reglene, men M. P. Beloch og G. E. Martin oppdaget en måte å gjøre det med papirbretting, som vist i figur 7 [6]. Denne metoden er den vi kommer til å bruke i seksjon 4 for å løse vilkårlige tredjegradslikninger. Her brukes den samme metoden til å finne den reelle rota til $x^3 - 2$.

2.3 Praktiske tips til papirbretting

En brett definerer en linje, men ofte er det nyttig å gjøre linjene lettere å få øye på. Spesielt hvis den skal synes gjennom arket. Det er forskjellige virkemidler man kan ta i bruk for å oppnå dette. For å få et punkt til å synes på begge sider av arket er det ofte praktisk å lage hull i punktet. Med linjer hjelper det å tegne linja på begge sider av arket. Uansett vil det hjelpe å ha god belysning. Man kan med fordel bytte ut vanlig papir med hvitt bakepapir, men da synes ikke konstruksjonene like godt dersom man for eksempel skal presentere de for andre.

For å tegne en linje langs en fjellbrett kan man gni grafitten i en blyant (eller tuppen av en tusj) langs fjellryggen. Da hjelper det å ha en blyant som er ganske myk. I en dalbrett kan man holde bretten halvveis åpen og føre en spiss blyant langs bretten. Også kan man selvfølgelig bruke linjal eller ruteark for å få litt fortgang hvis man ikke er for streng med reglene.

Mange geometriske konstruksjoner krever at man definerer en enhetslengde. Denne kan selvfølgelig være hva som helst, så lenge den kan måles. Større enhetslengder gjør at brettene blir mer nøyaktige sammenlignet med lengdene, og dermed vil man få mer nøyaktige resultater.

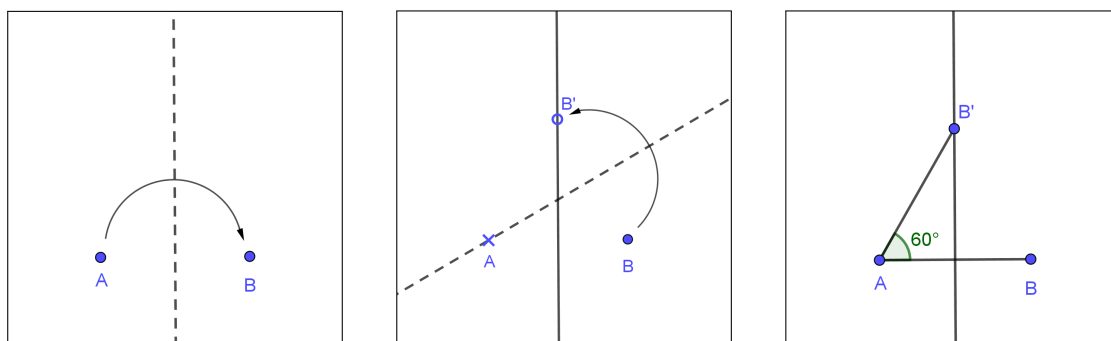


(a) Her er A og B markert som kryss for å indikere at det er de som definerer bretten.

(b) Her er bretten definert av at horisontallinja skal brettes på seg selv samtidig som bretten går gjennom A.

(c) I dette tilfellet brettes A mot linja samtidig som bretten går gjennom B. A' konstrueres ved avtrykk under A.

Figur 4: Punkter markert som kryss indikerer at bretten går gjennom punktet. Tomme sirkler er punkter som blir markert etter avtrykk av et annet punkt.

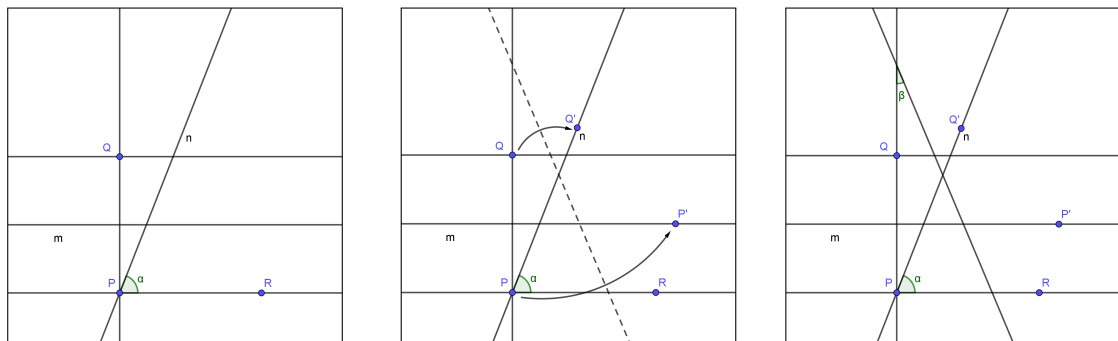


(a) Konstruer og marker midtnormalen mellom A og B.

(b) Lag en Brett i A slik at B treffer midtnormalen i B'.

(c) $\angle BAB' = 60^\circ$

Figur 5: En metode for å konstruere en vinkel på 60° ved hjelp av papirbretting.

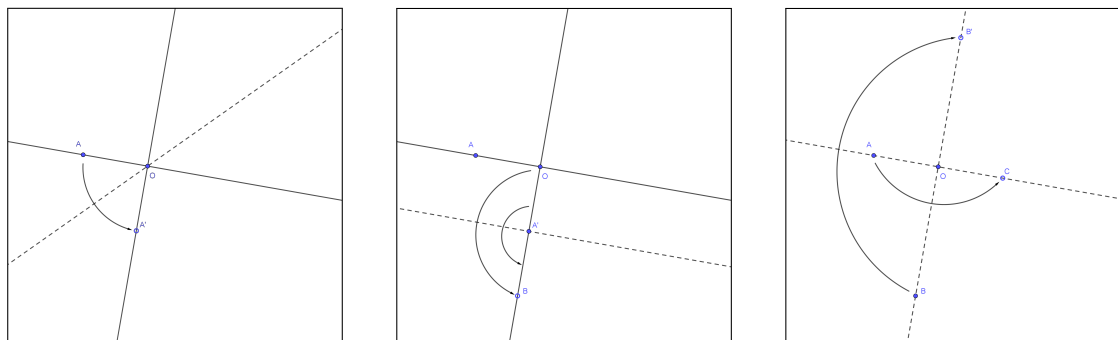


(a) Her har vi plassert vinkelen α i en ferdig konstruksjon. Merk at $\angle QPR = 90^\circ$ og de horisontale linjene er parallelle.

(b) Vi bretter P mot m og Q mot n .

(c) $\beta = \frac{1}{3}\alpha$.

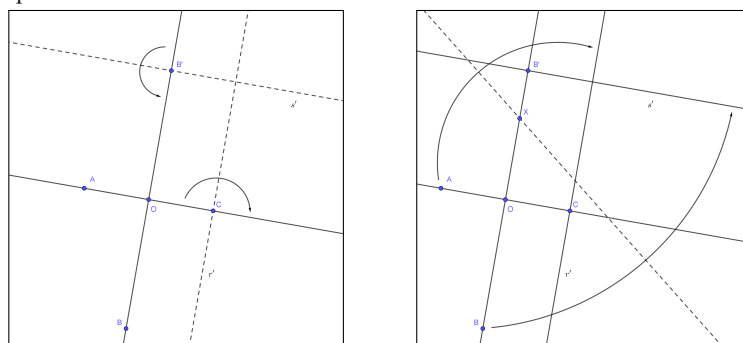
Figur 6: Hisashi Abes metode for å tredele vinkler med papirbretting.



(a) Vi begynner med to ortogonale linjer og lengden $AO = 1$. En vinkelhalvering lar oss konstruere lengden 1 på normalen.

(b) Å konstruere en normal lar oss doble OA' , slik at vi får $OB = 2$.

(c) Ved å brette langs de originale linjene får vi konstruert C og B' .



(d) Normalene r' og s' konstrueres i henholdsvis B' og C .

(e) Her bretter vi slik at A reflekteres over på r' samtidig som B reflekteres over på s' . Lengden $OX = \sqrt[3]{2}$.

Figur 7: Konstruksjonen av et linjestykke med lengde $\sqrt[3]{2}$.

3 Huzita og Hatori's aksiomer

Humiaki Huzita beskrev seks aksiomer for papirbretting. Senere beskrev Koshiro Hatori et syvende aksiom. Disse aksiomene beskriver de ulike brettene man kan gjøre, og er gjengitt i figur 8. Operasjonene som beskrives i aksiomene er ment å beskrive alle ulike enkeltbretter som kan gjøres ved å legge punkter og linjer oppå hverandre [14]. Brettene er ekvivalente med geometriske steder i form av linjer, og aksiomene forutsetter at en slik linje eksisterer. For eksempel kan ikke aksiom 6 utføres dersom linjene m og n er parallelle og distinkte, for da finnes det ikke noen linje som oppfyller kravene til aksiomet [12]. Men i alle situasjoner hvor linja beskrevet av aksiomet eksisterer kan den konstrueres med én enkelt Brett.

I matematisk papirbretting er det vanlig å begynne med en enhetslengde allerede konstruert, og derifra har man et visst sett med mulige operasjoner man kan utføre, tilsvarende det man har i konstruksjoner med passer og linjal. Dermed får man også en situasjon lignende konstruksjoner med passer og linjal, hvor ikke alle lengder er mulige å konstruere. Vi har altså en mengde av brettbare tall å jobbe med. Dersom man tillater våtbretting eller å konstruere flere bretter samtidig vil mengden øke, og følgelig vil man kunne løse flere problemer. I denne teksten skal vi begrense oss til Huzita og Hatori's 7 aksiomer.

3.1 Origamitall

Vi så i seksjon 1.2 at det bare er en viss mengde tall \mathbb{K} som kan konstrueres under de klassiske reglene for passer og linjal. Spørsmålet er så: gitt disse aksiomene, hvilke tall kan konstrueres med papirbretting? La oss omtale disse tallene som «origamitall», og si at \mathbb{O} representerer mengden av alle origamitall. Alperin [1] bygger opp til \mathbb{O} på en interessant måte. Han tar for seg Huzita og Hatori's aksiomer og ser hvilke tall som kan konstrueres hvis man begrenser seg til bare noen av aksiomene. For eksempel er aksiom 1-5 nok for å kunne konstruere «Euclidean origami numbers» [1], dvs. tallene som kan konstrueres med passer og linjal, her omtalt som elementene i \mathbb{K} . Vi vet altså at alle tall som kan konstrueres med passer og linjal også kan konstrueres med papirbretting, altså at $\mathbb{K} \subset \mathbb{O}$. Da vi så på konstruksjoner med passer og linjal i seksjon 1.2 ble \mathbb{K} begrenset av hvilke operasjoner som var tilgjengelig, som igjen var avhengig av at de konstruerbare punktene er skjæringspunkter mellom sirkler og linjer. Med papirbretting kan vi ikke tegne sirkler, men vi skal se (i seksjon 4.1) at papirbretting kan utføre operasjoner som tilsvarer det å løse tredjegradslikninger. Derfor kan vi konkludere med at de operasjonene som er tilgjengelig for konstruksjoner med papirbretting er de som er nødvendige for å løse tredjegradslikninger, altså addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon, kvadratrot og kubikkrot.

Definisjon 6. *Mengden av alle origamitall, \mathbb{O} , er den minste mengden som inneholder \mathbb{Q} og er lukket under addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon, kvadratrot og kubikkrot.*

Hvis vi ser på \mathbb{O} som en utvidelse av \mathbb{Q} kan vi beregne graden til $\mathbb{Q} \subset \mathbb{O}_{n,m}$, tilsvarende det vi gjorde med $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_n$ i teorem 2. Igjen representerer n antall ganger vi bruker kvadratrot, men vi har også m som representerer antall ganger vi bruker kubikkrot. Hvor dette kommer fra skal vi se når vi ser på graden til $\mathbb{Q} \subset \mathbb{O}_{n,m}$. Med denne definisjonen av $\mathbb{O}_{n,m}$ har vi at $\mathbb{O}_{0,0} = \mathbb{Q}$, og $\mathbb{O}_{n,0} = \mathbb{K}_n$.

La oss et øyeblikk legge $\mathbb{O}_{n,m}$ i bakhodet og heller benevne kropper av brettbare tall som \mathbb{O}_j , hvor j er antall ikke-trivielle utvidelser fra \mathbb{Q} til \mathbb{O}_j , slik at $\mathbb{O}_0 = \mathbb{Q}$. Da har vi en utvidelse $\mathbb{Q} \subset \mathbb{O}_j$, og la oss dele opp denne utvidelsen i simple utvidelser. Altså:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha_1) \subset \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2) \subset \dots \subset \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j) \quad (13)$$

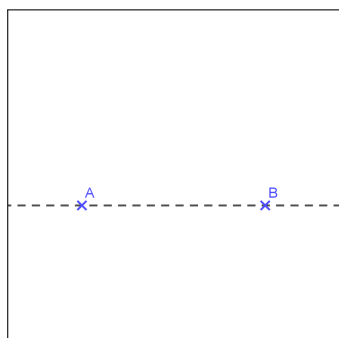
$$\mathbb{O}_0 \subset \mathbb{O}_1 \subset \mathbb{O}_2 \subset \dots \subset \mathbb{O}_j \quad (14)$$

Vi kan se bort fra trivielle utvidelser siden de ikke påvirker graden til den totale utvidelsen. Vi vet at det bare gjøres én brett om gangen, så hver utvidelse $\mathbb{O}_k \subset \mathbb{O}_{k+1}$ er enten $\mathbb{O}_{k+1} = \mathbb{O}_k(\sqrt{\alpha})$ eller $\mathbb{O}_{k+1} = \mathbb{O}_k(\sqrt[3]{\alpha})$, gitt $\alpha \in \mathbb{O}_k$, $k \in [1, j]$. Alle utvidelser på formen $\mathbb{O}_k \subset \mathbb{O}_k(\sqrt{\alpha})$ har grad 2, mens alle utvidelser på formen $\mathbb{O}_k \subset \mathbb{O}_k(\sqrt[3]{\alpha})$ har grad 3. Vi får dermed følgende teorem:

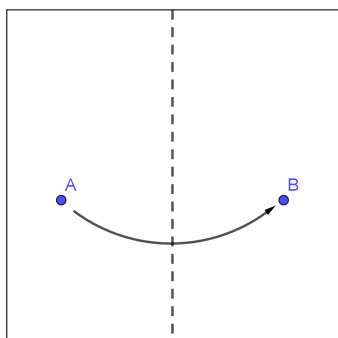
Teorem 3 (Graden til mengder av origamitall). *La $\lambda \in \mathbb{O}$. La $\mathbb{O}_{n,m}$ være den minste mengden av origamitall som inneholder λ . Da er graden til utvidelsen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{O}_{n,m}$ gitt ved*

$$[\mathbb{O}_{n,m} : \mathbb{Q}] = 2^n 3^m \quad (15)$$

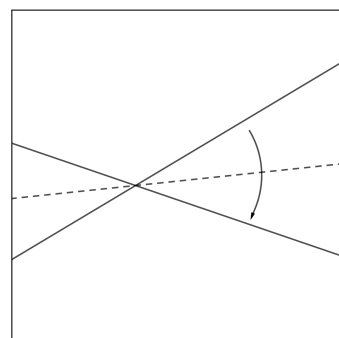
Ligningen i teorem 3 har jeg fra notatene til en presentasjon av Kay Paulus. Det tilsvarer teorem 2 i kapittel 1.2. Her representerer n antall kvadratiske utvidelser i kjeden i linje 13 og 14, mens m er antall kubiske utvidelser. Vi kan også se at j , i samme linje, er totalt antall utvidelser fra \mathbb{Q} til \mathbb{O}_j , med andre ord $j = n + m$.



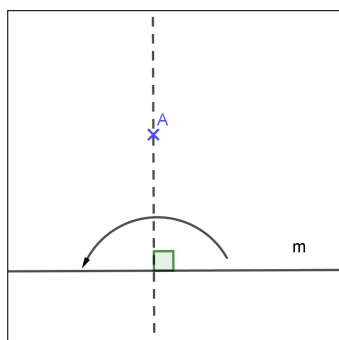
(1) Gitt to punkter A og B kan man brette linjen gjennom dem.



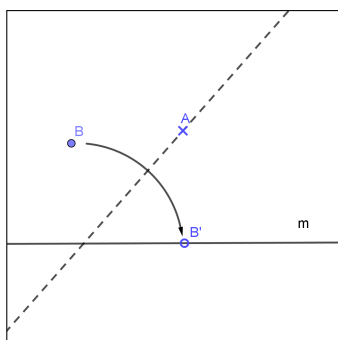
(2) Gitt to punkter A og B kan man brette ett punkt over på det andre og konstruere midt-normalen.



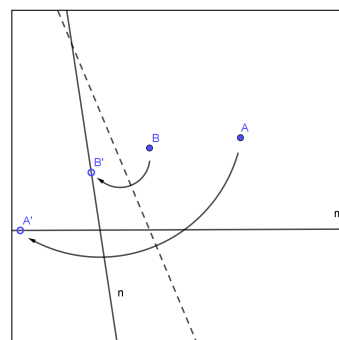
(3) Gitt to linjer m og n kan man brette én linje over på den andre og konstruere halveringslinja til vinkelen mellom m og n.



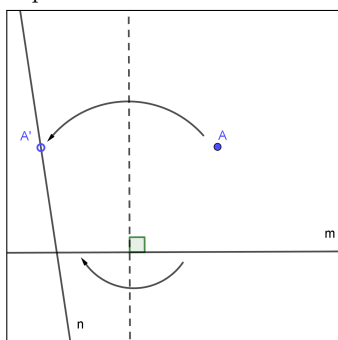
(4) Gitt et punkt A og en linje m kan man brette linja som er ortogonal på m og går gjennom A.



(5) Gitt to punkter A og B og ei linje m kan man brette ei linje som går gjennom A og plasserer B på m.



(6) Gitt to punkter A og B og to linjer m og n kan man brette linja som plasserer A på m og B på n samtidig.



(7) Gitt et punkt A og to linjer m og n kan man brette linja som er ortogonal på m og plasserer A på n.

Figur 8: De syv aksiomene utviklet av Huzita og Hatori.

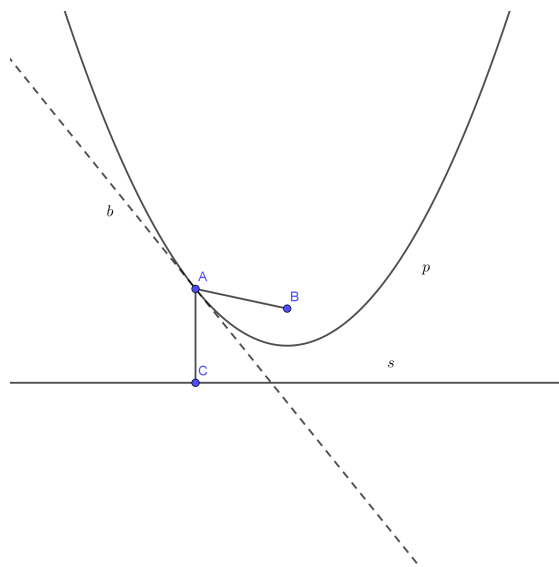
4 Løsning av tredjegradslikninger

En viktig forskjell mellom papirbretting og konstruksjoner med passer og linjal er at papirbretting kan løse polynomlikninger av opptil fjerde grad. Siden løsningen av fjerdegradslikninger er mulig så lenge man kan løse annen- og tredjegradslikninger skal vi kun se på likninger av annen og tredje grad. Metoden gjengitt her er basert på [6], men den ble utviklet av Margherita Piazzolla Beloch.

4.1 Papirbretting og parabler

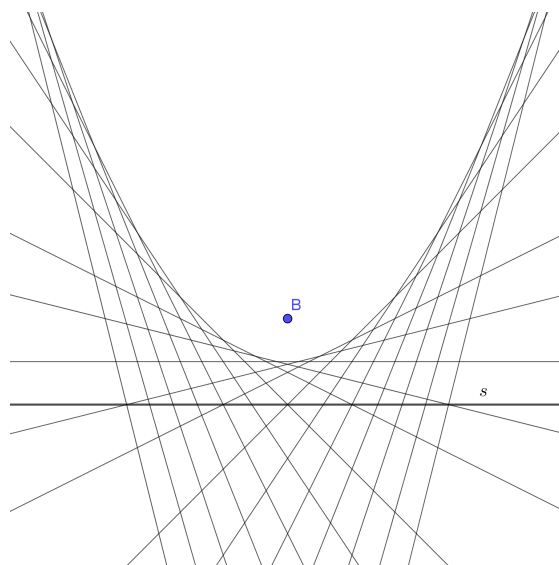
Definisjon 7. Gitt et brennpunkt B og en styrelinje s er en parabel p definert som alle punktene som er like langt fra B som fra s .

En parabel er illustrert i figur 9. La oss betrakte linja b . Siden b er mengden av alle punkter som er like langt fra B og C , vil b tangere p uavhengig av hvor A plasseres på p . Med andre ord vil alle midtnormaler mellom B og et punkt på s tangere p . Dette kan også illustreres med papirbretting. Dersom man har et ark med et punkt B og ei linje s kan man brette B mot ulike punkter på s , og man kan ende opp med noe lignende figur 10 hvor det ser ut som at alle bretter som flytter et punkt mot ei linje tangerer en parabel definert av brennpunktet B og styrelinja s . En god måte å teste ut dette er å markere et punkt på et ark og velge ut den kanten av arket som er nærmest punktet. Deretter bretter man arket slik at kanten skjærer punktet. Om man gjør mange slike bretter vil man etterhvert se at brettene tangerer en parabel.



Figur 9: En parabel p er mengden av alle punkter som er like langt fra styrelinja s som fra brennpunktet B . Altså $|AB| = |AC|$. Linja b er midtnormalen til B og C , og tangerer parabelen i A .

Når vi skal løse tredjegradslikninger er vi nødt til å gjøre noe som ikke kan gjøres med passer og linjal. Og verktøyet vi bruker er det sjettede av Huzita og Hatori's sju aksiomer. Aksiomet sier at vi kan brette to punkter på to linjer samtidig, som vist i figur 11. Alle mulige bretter som plasserer A på r tangerer som sagt en parabel definert av A og r . Og det finnes en tilsvarende parabel definert av B og s , hvis tangenter er de brettene som plasserer B på s . Så når vi ser

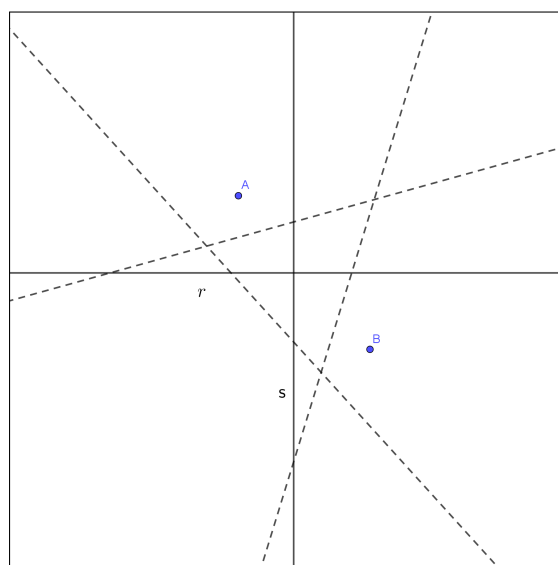


Figur 10: Hvis man bretter et punkt B ned mot ulike punkter på ei linje s vil man se at brettene kan dekke ethvert punkt på arket, unntatt et område som er avgrenset av en parabel.

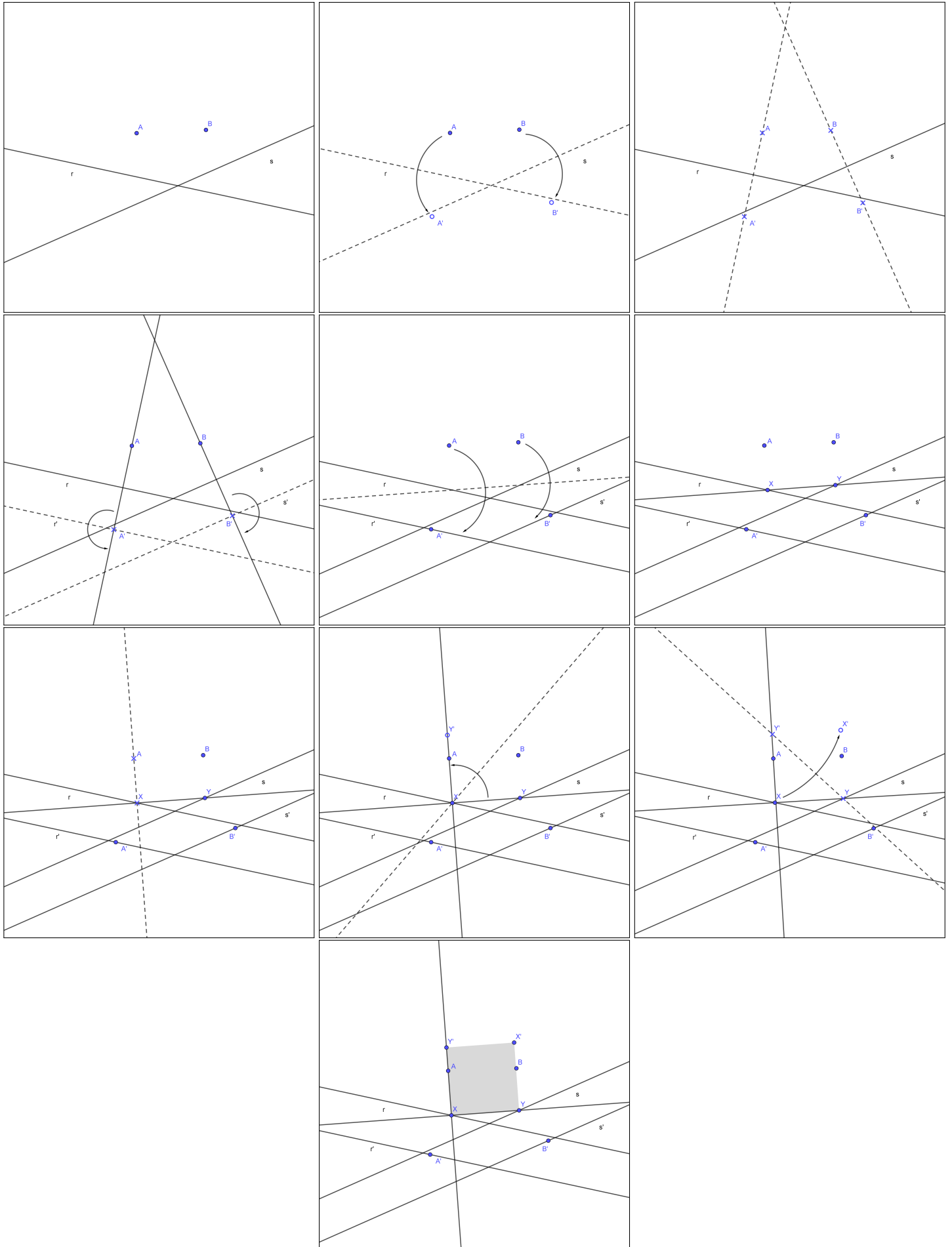
etter bretter som flytter A mot r og B mot s samtidig, så må vi finne linjer som tangerer begge parablene. Det å finne felles tangenter til to parabler er ekvivalent med å løse tredjegradslikninger (dette beskrives mer i kapittel 4.3), og det er dette som gjør at papirbretting kan løse ligninger som ikke kan løses med passer og linjal.

4.2 Beloch's kvadrat

Beloch's kvadrat er en origamikonstruksjon som kan brukes til å finne kubikkroten av en vilkårlig lengde, men også til å finne de reelle løsningene til en tredjegradslikning [6]. Kvadratet er oppkalt etter sin oppfinner, Margherita Piazzolla Beloch. Beloch's kvadrat er definert ut fra to punkter A og B, og to linjer r og s . A og B ligger på motstående sider i kvadratet (eller forlengelsen av disse), mens r og s skjærer hvert sitt nabo hjørne på sidene som inneholder A og B, som vist nederst i figur 12. I figur 12 blir det også vist hvordan man kan brette et slikt kvadrat.



Figur 11: Her har vi to punkter A og B , og to linjer r og s . Med papirbretting kan vi konstruere de brettene som reflekterer A mot r og B mot s samtidig. Disse brettene er stiptet. Det vil være 0 til 3 mulige bretter avhengig av hvor punktene og linjene plasseres i forhold til hverandre.



Figur 12: En metode for å brette Beloch's kvadrat, $XYX'Y'$, gitt to punkter og to linjer. Kvadratet kan brukes til å finne en reell rot av et tredjegradspolynom.

4.3 Lill's metode

Lill's metode er en grafisk metode for å finne røtter av polynomer, og er den metoden Beloch brukte for å løse tredjegradslikninger med papirbretting. Metoden er oppkalt etter Eduard Lill. Det som kobler Lill's metode til papirbretting er Beloch's kvadrat, som er beskrevet i seksjon 4.2. Lill's metode fungerer for polynomer av vilkårlig grad, men her ser vi på spesifikt tredjegrads-polynomer siden det er det mest interessante for papirbretting. Det første steget i Lill's metode er å sette sammen en rekke linjestykker ortogonalt på hverandre. Denne stien ble omtalt av T. C. Hull som en «skilpaddesti». La oss si at vi har et polynom

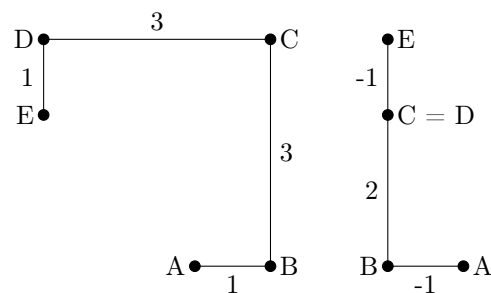
$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (16)$$

For å konstruere skilpaddestien konstruerer man først et linjestykke med lengde a_3 . Skilpadden går bortover dette linjestykket før den roterer 90° mot klokka og går langs et nytt linjestykke med lengde a_2 . Denne prosessen gjentar vi for alle de fire koeffisientene. En koeffisient lik 0 gir et «linjestykke» med lengde 0, men skilpadden roterer på stedet. En negativ koeffisient gjør at skilpadden går baklengs, men roterer som vanlig når den har nådd enden av linjestykket.

En annen måte å beskrive dette er at stien går mellom punktene A, B, C, D, E , hvor

$$\begin{aligned} A &= (0, 0), \\ B &= (a_3, 0), \\ C &= (a_3, a_2), \\ D &= (a_3 - a_1, a_2), \\ E &= (a_3 - a_1, a_2 - a_0) \end{aligned}$$

Et par eksempler på slike stier vises i figur 13.



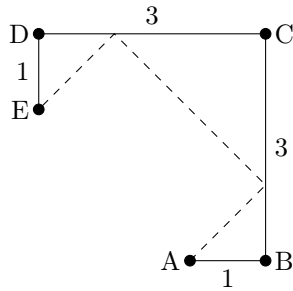
(a) $P_1(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. (b) $P_2(x) = -x^3 + 2x^2 - 1$.

Figur 13: Skilpaddestiene som korresponderer med to tredjegradspolynomer.

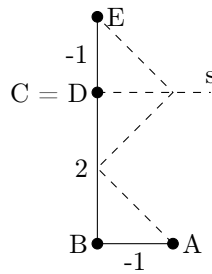
Når vi har laget skilpaddestien kan vi konstruere linja r som en uendelig forlengelse av BC, og s som en uendelig forlengelse av CD. Deretter kan vi se for oss at vi står i A og skyter ei kule som skal sprette på r og s før den treffer E. Denne kula spretter på en unaturlig måte. Hver gang den treffer enten r eller s snur den 90° i en retning vi selv kan velge. Refleksjonsvinkelen vil altså sjeldent være lik innfallsvinkelen.

Når vi har konstruert skilpaddestien sier Lill's metode oss at polynomet har rota $-\tan(\theta)$, hvor θ er vinkelen kulestien har i A.

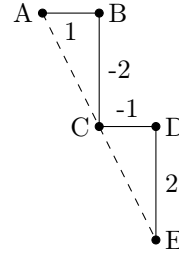
Eksempel 3. La oss finne røttene til $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, fra figur 14c, siden dette polynomet brukes i neste kapittel. Vi kan se i figur 15 at $P(x)$ har tre reelle røtter, hver med sin tilhørende



(a) $P_1(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. Kulestien danner vinkler på 90° når den kolliderer med BC og CD.



(b) $P_1(x) = -x^3 + 2x^2 - 1$. Her er r forlengelsen av BC, mens s er en stiple linje som skjærer C og står ortogonalt på BC.



(c) Her har vi det spesielle tilfellet at kula skjærer både r og s samtidig, og ender opp med å gå i rett linje.

Figur 14: Her ser vi veien som kula går fra A til E for ulike tredjegradspolynomer. Kulestien er tegnet med stiplede linjer. Linjene som kula spretter på, r og s , er forlengelsene av henholdsvis BC og CD. Kula spretter ikke naturlig, men snur alltid 90° .

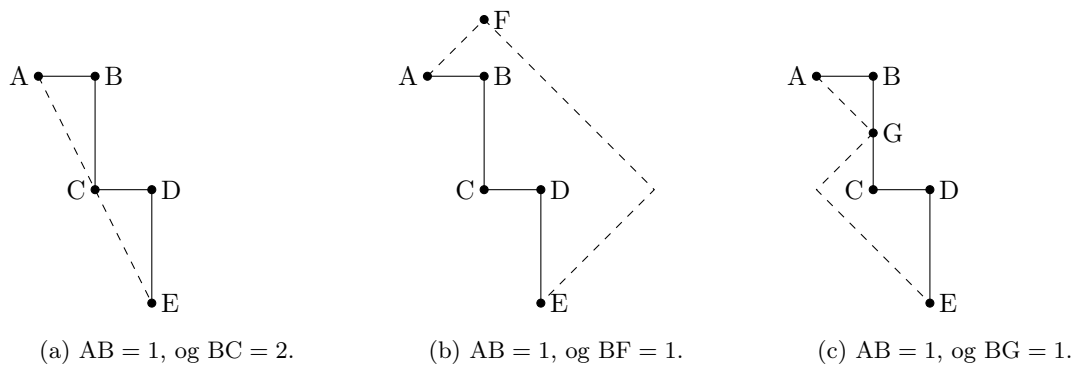
kulesti. Som sagt er hver rot ρ gitt som $\rho = -\tan(\theta)$, hvor θ er vinkelen kulestien har mot AB. En annen måte å si det på er at rota er gitt ved $\rho = -m$, hvor m er stigningstallet til kulestien, gitt et koordinatsystem med førsteakse langs AB og andreakse langs BC. La ρ_1, ρ_2, ρ_3 korrespondere til henholdsvis figur 15a, 15b og 15c.

$$\rho_1 = \frac{-BC}{AB} = \frac{-2}{1} = -2 \quad (17)$$

$$\rho_2 = \frac{BF}{AB} = \frac{1}{1} = 1 \quad (18)$$

$$\rho_3 = \frac{-BG}{AB} = \frac{-1}{1} = -1 \quad (19)$$

Og her kan vi ense hvorfor Lill's metode passer så godt med papirbretting. Det å brette skilpaddestien kan ta litt tid, men er meget overkommelig. Kulestien består av opptil tre linjestykker, og vi finner de to andre om vi klarer å konstruere den midterste. Og dette midterste linjestykket er en av sidene til Beloch's kvadrat, som vi så på tidligere. For å se at dette linjestykket er en av sidene til Beloch's kvadrat er det lettest å betrakte figur 14a.



Figur 15: $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ er et tredjegradspolynom med tre reelle røtter. Derfor får den også tre ulike kulestier.

4.4 Eksempel på løsning av tredjegradslikning

Vi skal her finne en reell rot til polynomet

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \quad (20)$$

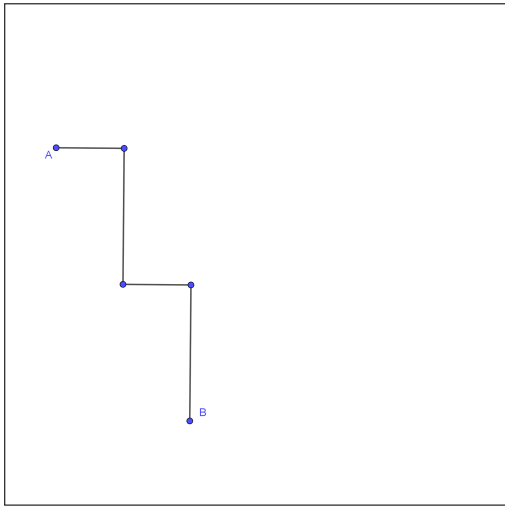
Dette er den generelle planen:

1. Definer enhetslengden og konstruer skilpaddestien.
2. Konstruer en av sidene i Beloch's kvadrat.
3. Finn tangens av vinkelen i starten av skilpaddestien.

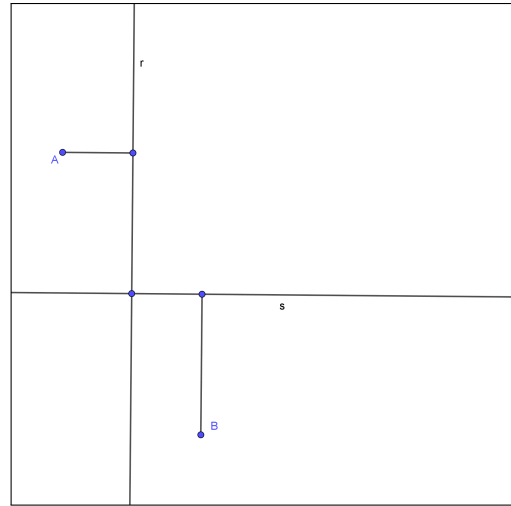
Denne metoden illustreres fullstendig i figur 16. Merk at i figur 16e utfører vi en brett som plasserer to punkter på to linjer samtidig. Som vist i seksjon 4.1 kan en slik brett utføres på enten 0, 1, 2 eller 3 måter. Men på grunn av hvordan skilpaddestien konstrueres vil det alltid være minst 1 måte å gjøre denne bretten når man skal løse en tredjegradslikning. For i disse tilfellene har man to punkter A og B som brettes mot linjene r' og s' , men r' og s' står alltid ortogonalt på hverandre. I *Existence of a Solution for Beloch's Fold* [12] har vi følgende teorem (oversatt av underskrivede):

Teorem 4. *Gitt to punkter P , Q og linjer m , n , vil en brett som plasserer P på m og Q på n eksistere hvis og bare hvis avstanden mellom P og Q ikke er mindre enn avstanden mellom m og n .*

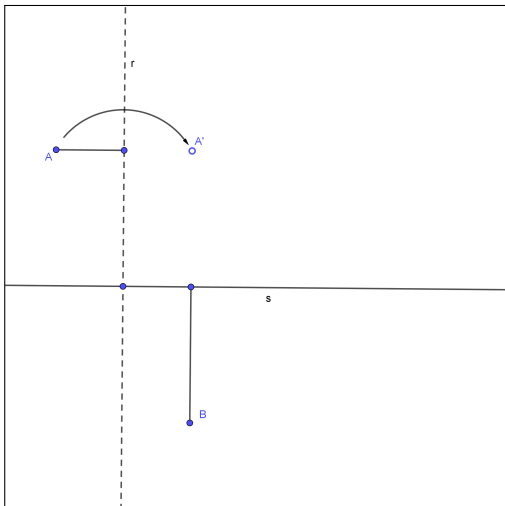
Beviset kan finnes i [12]. Siden avstanden mellom r' og s' er 0 vil det alltid være minst én brett som plasserer A på r' og B på s' . Når vi bruker metoden i figur 16 vil vi altså ha 1 til 3 muligheter for bretten i figur 16e. Disse brettene svarer til de forskjellige røttene av polynomet, som også korresponderer til de ulike kulestiene i figur 15.



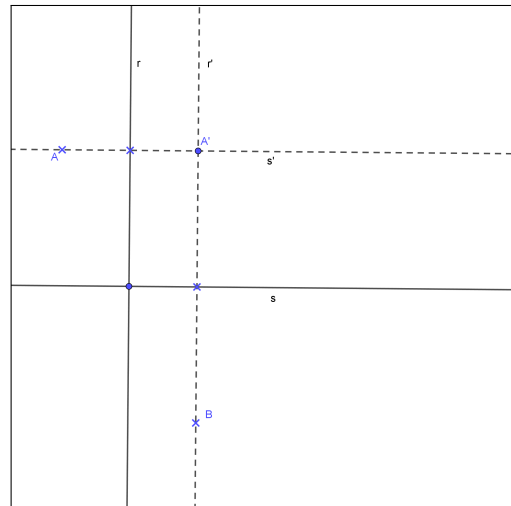
(a) Skilpaddestien som tilsvarer koeffisientene 1, -2, -1, 2. Konstruksjonen definerer også enhetslengden.



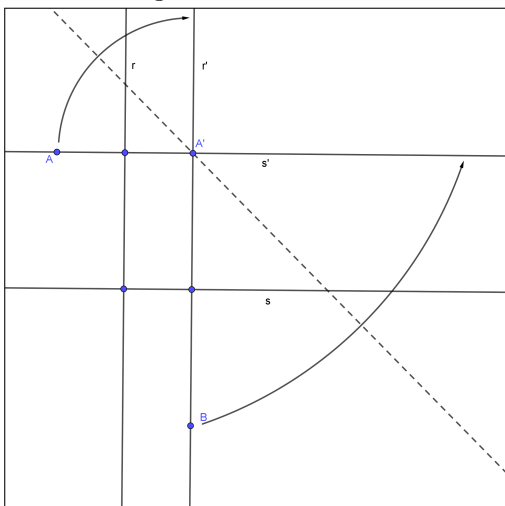
(b) Linjestykkene som hører til andre og tredje koeffisient definerer r og s .



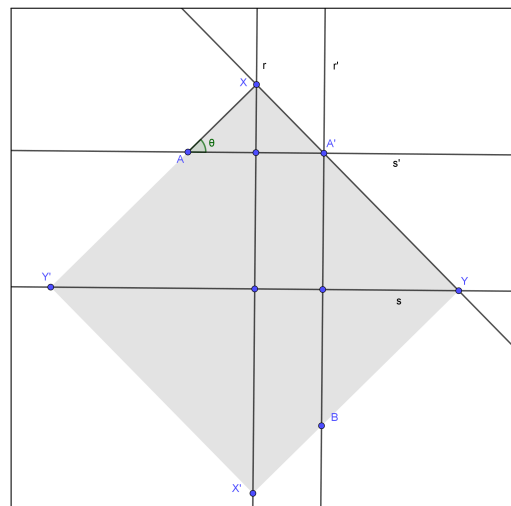
(c) Å speile A over r gir oss et punkt på r' . Det er her ikke nødvendig, men gjøres for å illustrere den generelle metoden.



(d) I dette tilfellet blir r' og s' forlengelsen av henholdsvis første og siste steg i skilpaddestien.



(e) Bretten som plasserer A på r' og B på s' samtidig er en av sidene i Beloch's kvadrat.

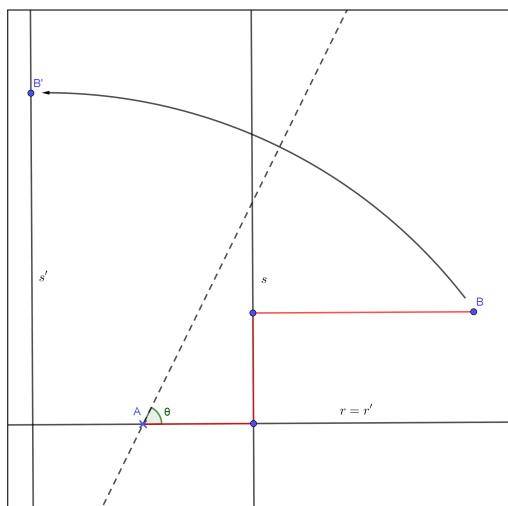


(f) Vi kan konstruere Beloch's kvadrat hvis det er ønsket, men for å finne rota til P trenger vi bare vinkelen θ .

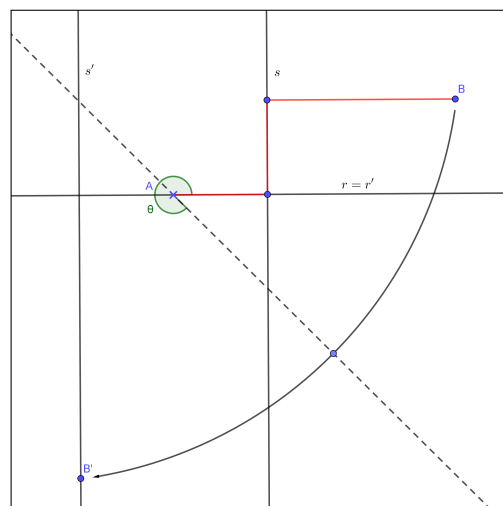
Figur 16: Her blir en origamikonstruksjon brukt til å finne en reell rot av $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Rota er $-\tan \theta$, som her blir $-\frac{1}{1} = -1$. Siden $P(x)$ har tre reelle røtter er det tre forskjellige bretter som kan utføres i (e).

4.5 Løsning av annengradsligninger

For å løse annengradsligninger med papirbretting kan man bruke samme metode som beskrevet tidligere i dette kapitlet, men man får en liten forenkling. Som vi kan se i figur 17 vil linja vi kjenner som r' i dette tilfellet være samme linje som r . Når vi da skal brette slik at A lander på r' og B lander på s' får vi bare to muligheter. Enten går bretten gjennom A, eller så er bretten ortogonal på r' . Men bretter som er ortogonale på r' vil ikke gi noen løsninger, så de ser vi bort fra. Og vi trenger altså ikke noen ekstra steg for å konstruere r' , men får linja med en gang vi konstruerer første steg i skilpaddestien. s vil her være forlengelsen av andre steg i skilpaddestien, og s' konstrueres som vanlig ved å reflektere B over s .



(a) Denne bretten tilsvarer rota $x = -\tan(\theta) = -2$.

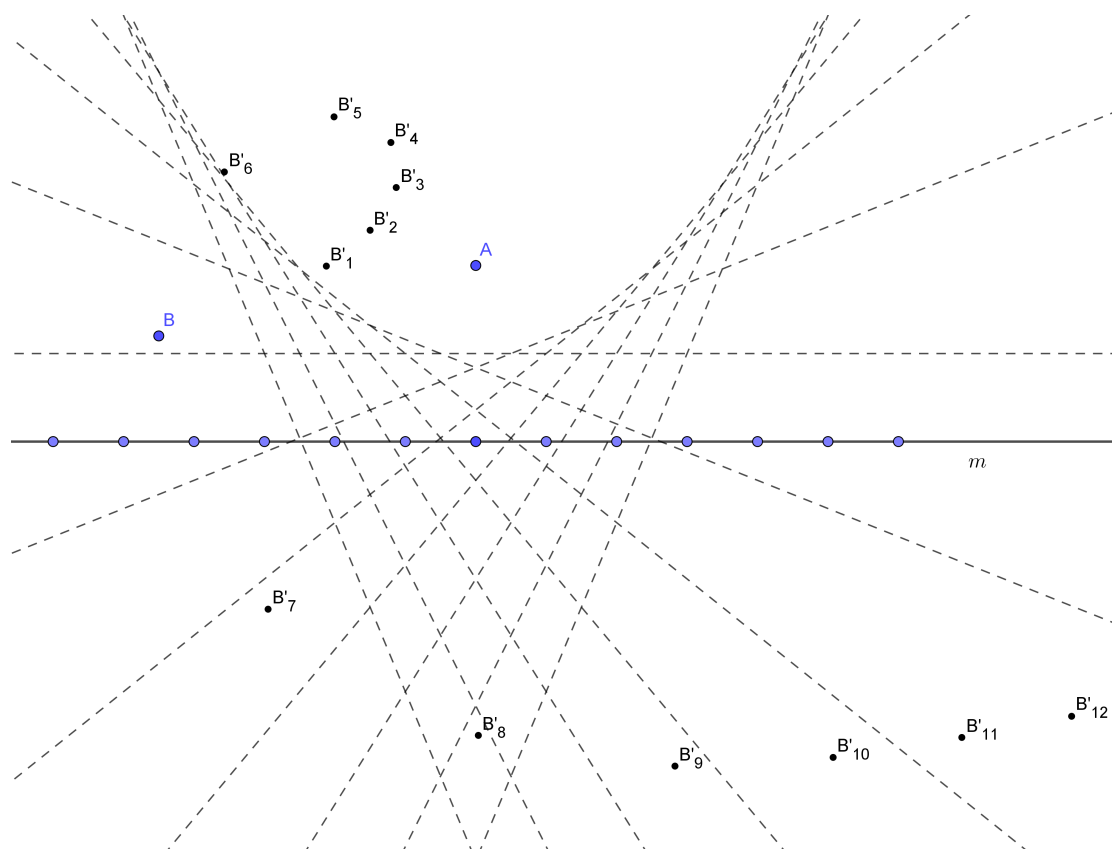


(b) Denne bretten tilsvarer rota $x = \tan(\theta) = 1$.

Figur 17: Løsning av $P(x) = x^2 + x - 2$ vha. papirbretting. De to røttene er gitt ved $-\tan(\theta)$ og korresponderer med hver sin brett. Skilpaddestien er tegnet i rødt.

5 Punkters forflytning

Når vi løser tredjegradslikninger med papirbretting er det et kritisk øyeblikk når vi gjennomfører aksiom 6 (se figur 8). Denne bretten tilsvarer som sagt å finne felles tangent til to parabler og dermed også løsningen av en tredjegradslikning. For å få bedre forståelse for hva denne bretten kan og ikke kan gjøre kan det være ønskelig å se alle punktene B som reflekteres mot når A brettes mot r' . Denne øvelsen kan gjøres manuelt, eller digitalt som i figur 18. Resultatet blir lignende figur 10, men vi har også et annet punkt B som vi lar reflekteres over brettelinjene. Dersom man har et system bestående av A , B og m og man ønsker å brette A ned mot m vil følgelig alle de mulige refleksjonene av B ligge på en kurve som går gjennom B'_1, B'_2 , osv. (inkludert B selv). I denne seksjonen skal vi se hvordan Gröbner-basiser kan brukes til å beskrive en slik kurve. Hva en Gröbner-basis er står beskrevet i appendiks. Vi begynner med å finne en parametrisert funksjon for tangentene til en parabel. Så blir det vist hvordan et punkt B kan reflekteres over disse tangentene. Da får vi en parametrisert framstilling av kurva, som gjøres om til en polynomialligning ved å finne systemets Gröbner-basis i Mathematica.



Figur 18: Punktet A brettes ned mot ulike punkter på linja m . B'_1, B'_2, \dots er de punktene B reflekteres til over ulike bretter.

5.1 Refleksjonene av et punkt over tangentene til en parabel

La $p(x)$ være en parabel slik at $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Vi får dermed at punktet $(t, p(t))$ ligger på parabelen. Stigningstallet λ til tangenten i $(t, p(t))$ er gitt ved

$$\lambda = \frac{y - p(t)}{x - t} \quad (21)$$

Hvor $\lambda = \left. \frac{dp}{dx} \right|_{x=t} = 2a_2t + a_1$. Sammen med ligning 21 får vi

$$(2a_2t + a_1)(x - t) = y - (a_2t^2 + a_1t + a_0) \quad (22)$$

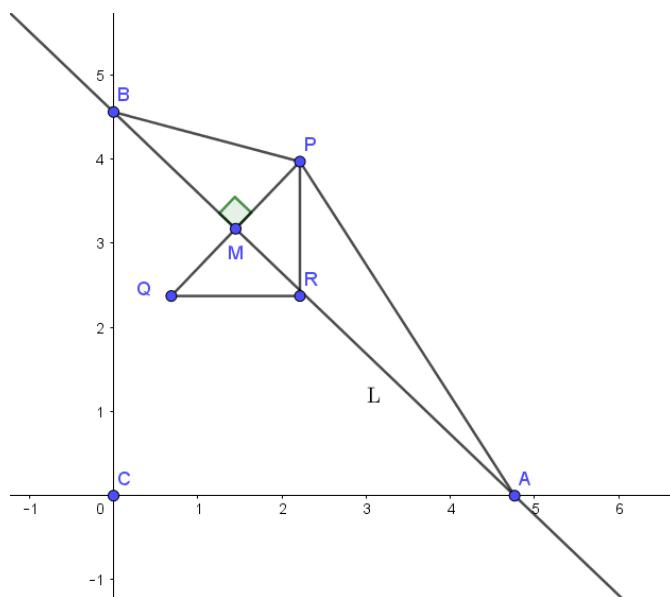
Som gir oss et uttrykk for linja T, som er tangenten til $p(x)$ i punktet $(t, p(t))$:

$$T : -(2a_2t + a_1)x + y + a_2t^2 - a_0 = 0 \quad (23)$$

Teorem 5. Refleksjonen Q av et punkt $P = (x_1, y_1)$ over linja $ax + by + c = 0$ er gitt ved

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = -\frac{2(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2} \quad (24)$$

Bevis. Vi finner først avstanden PQ mellom P og Q. Vi kan gjøre dette ved å betrakte arealet Ω til $\triangle PAB$ i figur 19.



Figur 19: Punktet Q er refleksjonen av P over linja $L : ax + by + c$. A og B er skjæringspunktene L har til aksene, og C er origo. R er konstruert slik at $\angle PRQ = 90^\circ$, den er altså ikke nødvendigvis på L, selv om det kan se slik ut her.

Arealet til $\triangle PAB$ kan beregnes på to måter:

$$\Omega = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \cdot |\vec{PM}| \quad (25)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AP}| \quad (26)$$

Vi kan sette disse sammen for å finne høyden til trekanten, PM.

$$|\vec{AB}| \cdot |\vec{PM}| = |\vec{AB} \times \vec{AP}| \quad (27)$$

Vi ser at $A = (0, -\frac{c}{b})$ og $B = (-\frac{c}{a}, 0)$, slik at $\vec{AB} = [-\frac{c}{a}, \frac{c}{b}]$ og $|\vec{AB}| = \frac{c}{ab} \sqrt{a^2 + b^2}$. Vi ser videre at $\vec{AP} = (x_1, y_1 + \frac{c}{b})$. Vi legger til 0 som et tredje element i \vec{AB} og \vec{AP} slik at

$$\vec{AB} \times \vec{AP} = \left[0, 0, -\frac{c}{a} \left(y_1 + \frac{c}{b} \right) - \frac{cx_1}{b} \right] \quad (28)$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AP}| = -\frac{c}{a} \left(y_1 + \frac{c}{b} \right) - \frac{cx_1}{b} \quad (29)$$

Ligning 27 gir oss

$$|\vec{PM}| = \frac{1}{|\vec{AB}|} |\vec{AB} \times \vec{AP}| \quad (30)$$

$$|\vec{PM}| = \frac{1}{\frac{c}{ab} \sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \left(-\frac{c}{a} \left(y_1 + \frac{c}{b} \right) - \frac{cx_1}{b} \right) \quad (31)$$

$$|\vec{PM}| = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (32)$$

Avstanden PQ er gitt ved $|\vec{PQ}| = 2|\vec{PM}|$, så

$$|\vec{PQ}| = -\frac{2(ax_1 + by_1 + c)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (33)$$

Deretter kan vi sammenligne $\triangle PQR$ og $\triangle ABC$ i figur 19. Siden PQ er ortogonal på AB og PR er ortogonal på AC får vi $\angle QPR = \angle BAC$. Følgelig er $\triangle PQR$ og $\triangle ABC$ formlike trekanter, slik at

$$\frac{QP}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RP}{CA} \quad (34)$$

Disse forholdene lar oss utlede QR, som er differansen mellom P og Q's x-koordinat, og RP, som er det tilsvarende for y-koordinatet.

$$QR = -\frac{2a(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2} \quad (35)$$

$$RP = -\frac{2b(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2} \quad (36)$$

Følgelig er koordinatene til Q summen av koordinatene til P og henholdsvis QR og RP.

$$Q = \left(x_1 - \frac{2a(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}, y_1 - \frac{2b(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2} \right) \quad (37)$$

Eventuelt kan man skrive det som at $Q(x, y)$ er gitt ved ligninga

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = -\frac{2(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2} \quad (38)$$

Ligning 38 er resultatet vi bruker i teorem 5. ■

Fra teorem 5 får vi at kurva C , som er mengden av alle punkter som er refleksjonen av $A = (x_1, y_1)$ over en tangent til p , er gitt ved

$$C : \begin{cases} \frac{x-x_1}{a} = -\frac{2(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2} \\ \frac{y-y_1}{b} = -\frac{2(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2} \end{cases} \quad (39)$$

Hvor $a = -(2a_2t + a_1)$, $b = 1$ og $c = a_2t^2 - a_0$ er koeffisientene til T i ligning 23. Vi får:

$$C : \begin{cases} (a^2 + 1)x + (a^2 - 1)x_1 + 2ay_1 + 2ac = 0 \\ (a^2 + 1)y + 2ax_1 + (1 - a^2)y_1 + 2c = 0 \end{cases} \quad (40)$$

Med uttrykket i ligning 40 finner man en parametrisk framstilling av kurva. Dersom man ønsker å heller uttrykke kurva med et polynom kan man bruke et digitalt verktøy til å finne Gröbner-basisen til C . Det kan gjøres i Mathematica med følgende kode:

```
{a2, a1, a0} = {0.25, 0, 1};
{x1, y1} = {-2, 0};
a = -(2 a2 t + a1);
c = a2 t^2 - a0;
polys = {(a^2 + 1) x + (a^2 - 1) x1 + 2 a y1 + 2 a c,
          (a^2 + 1) y + 2 a x1 + (1 - a^2) y1 + 2 c};
gb = GroebnerBasis[polys, {x, y}, {t}]
```

I de to første linjene kan man sette inn koeffisientene til parabelen $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ og koordinatene til punktet $P(x_1, y_1)$ som skal reflekteres. I eksempelkode ovenfor ble det brukt parabelen og punktet fra eksempel 4 nedenfor.

Eksempel 4. La oss ta utgangspunkt i parabelen $p(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ og punktet $A = (-2, 0)$. Da får vi $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_1 = 0$, $a_0 = 1$, $x_1 = -2$, og $y_1 = 0$. Dette gir oss $a = -\frac{t}{2}$, $a^2 = \frac{t^2}{4}$, $c = \frac{t^2}{4} - 1$. Med disse mellomregningene kan vi nå bruke ligning 40 til å finne kurva som dannes av å reflektere punktet A over alle tangentene til $p(x)$.

$$C : \begin{cases} \left(\frac{t^2}{4} + 1\right)x + \left(\frac{t^2}{4} - 1\right)(-2) + 2\left(-\frac{t}{2}\right) \cdot 0 + 2\left(-\frac{t}{2}\right)\left(\frac{t^2}{4} - 1\right) = 0 \\ \left(\frac{t^2}{4} + 1\right)y + 2\left(-\frac{t}{2}\right)(-2) + \left(1 - \frac{t^2}{4}\right) \cdot 0 + 2\left(\frac{t^2}{4} - 1\right) = 0 \end{cases} \quad (41)$$

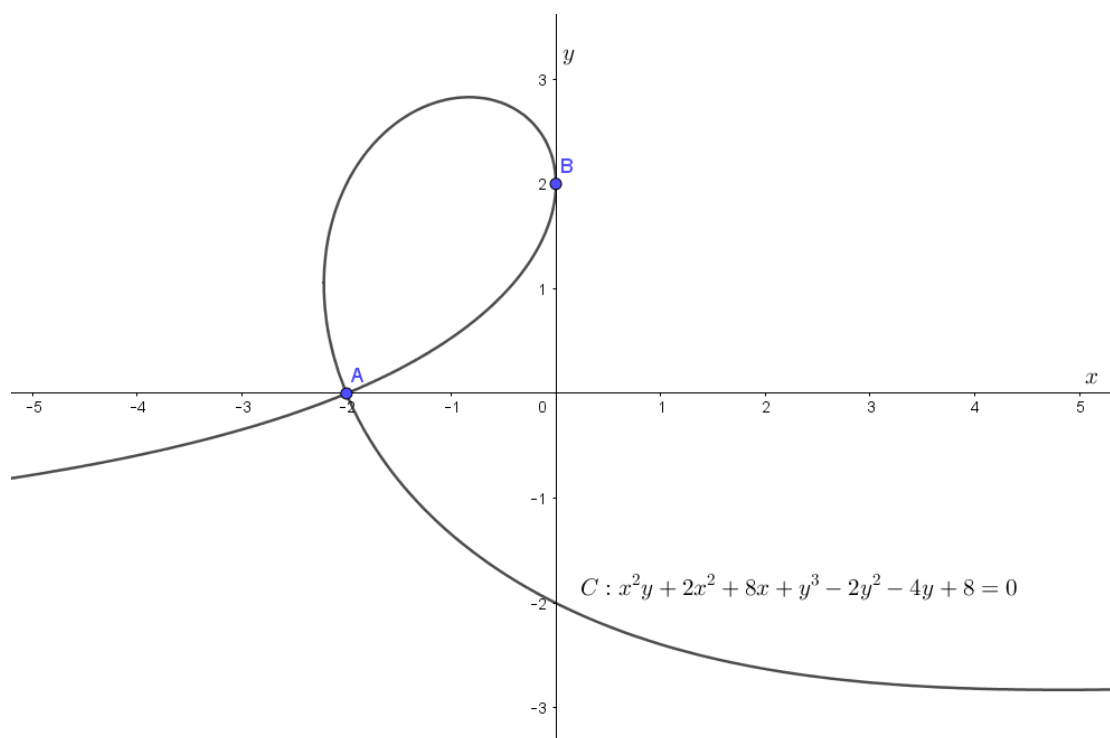
Som gir oss

$$C : \begin{cases} \left(\frac{1}{4}t^2 + 1\right)x - \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t + 2 = 0 \\ \left(\frac{1}{4}t^2 + 1\right)y + \frac{1}{2}t^2 + 2t - 2 = 0 \end{cases} \quad (42)$$

Siden vi har to ligninger kan vi eliminere variabelen t , slik at vi får et ligningssett med bare to variabler, x og y . Deretter kan man finne Gröbner-basisen til dette ligningssettet. Mathematica gir oss denne ligningen for kurva:

$$C : x^2y + 2x^2 + 8x + y^3 - 2y^2 - 4y + 8 \quad (43)$$

Denne kan tegnes implisitt som i figur 20.



Figur 20: Kurva som dannes når $A = (-2, 0)$ skal reflekteres over tangentene til $p(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$. Denne parabelens brennpunkt er B, og styrelinja er x-aksen.

5.2 Sammenhengen mellom kurvene og papirbretting

Med en kurve som i ligning 42 får man se alle punktene et punkt A kan lande på når et annet punkt B brettes mot ei linje (her x-aksen). Faktisk så er A og B i figur 42 ikke plassert tilfeldig, men slik at de korresponderer med løsningen av en viss tredjegradslikning. Systemet har blitt konstruert for å studere en tredjegradslikning med ei rot med multiplisitet 2. La oss se på

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)^2 = x^3 + x^2 - x - 1 \quad (44)$$

Med koeffisienter $1, 1, -1, -1$ får vi skilpaddestien i figur 21a. Dersom vi ønsker å konstruere Beloch's kvadrat er vi nødt til å finne r' og s' , som i dette tilfellet går gjennom henholdsvis B og A (se figur 21b). Dersom man ønsker å løse $P(x) = 0$ er neste steg å brette A mot r' og B mot s' . Men la oss heller se på punktene A kan brettes mot når B brettes mot s' . Som vi har sett tidligere (figur 10) vil brettene som flytter B mot s' være tangenter til en parabel med brennpunkt B og styrelinje s' . La oss sette x-aksen langs s' og y-aksen langs r' . Denne parabelen vil dermed være gitt ved $p(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ (utledning i seksjon 5.3). Følgelig beskriver kurven C fra figur 20 nettopp de brettene som kan gjøres når man skal løse $P(x)$ med papirbretting. Ut fra denne kurva kan vi blant annet se hvor mange reelle røtter $P(x)$ har, og hvilken multiplisitet de har. Når B brettes mot s' lander A på A' , som må være et av punktene til C. Her er r' langs y-aksen, så hver rot til P korresponderer til et skjæringspunkt mellom C og y-aksen. Skjæringspunktet $(0, -2)$ korresponderer til rota $x = 1$. Tangentpunktet $(0, 2)$ korresponderer til rota $x = -1$, med multiplisitet 2.



(a) Skilpaddestien til $P(x) = (x - 1)(x + 1)^2$. (b) Med $P(x)$ får vi det spesielle tilfellet at r' går gjennom B og s' går gjennom A.

Figur 21

5.3 Konvertering fra punkt og linje til parabel

Vi har sett at når vi løser tredjegradslikninger får vi et punkt A som skal brettes ned mot ei linje r' , og punktet B reflekteres over bretten. Vi har sett at det finnes en tilhørende parabel som beskriver denne bretten. Her skal vi se på hvordan man algebraisk finner en parabel ut fra brennpunktet A og styrelinja r' . La $A = (x_1, y_1)$ og $r' : y = h$, og $P = (x, y)$ er et vilkårlig punkt på parabelen. Siden en parabel er alle punktene som er like langt fra A som fra r' (se figur 9) får vi at avstanden d mellom A og P er gitt ved

$$d = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = y - h \quad (45)$$

Med litt rydding kan vi skrive det som

$$y = \frac{1}{2(y_1 - h)}x^2 + \frac{x_1}{h - y_1}x + \frac{x_1^2 + y_1^2 - h^2}{2(y_1 - h)} \quad (46)$$

Eksempel 5. La oss bruke eksempelet fra seksjon 5.2. Skilpaddestien ga oss punktet $B = (0, 2)$ og styrelinja $s' : y = 0$. Hvis vi setter inn $(x_1, y_1) = (0, 2)$ og $h = 0$ i ligning 46 får vi

$$y = \frac{1}{2(2 - 0)}x^2 + \frac{0}{0 - 2}x + \frac{0^2 + 2^2 - 0^2}{2(2 - 0)} \quad (47)$$

Altså er parabelen med brennpunkt $(0, 2)$ og styrelinje $y = 0$ gitt ved

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \quad (48)$$

6 Papirbretting i skolen

Papir er en svært tilgjengelig ressurs på alle skoler jeg har sett, og siden man kan gjøre så mye geometri med papirbretting gir det mening å vurdere om papirbretting kan være aktuelt for geometriundervisning. Man kan ha forskjellige innfallsvinkler til papirbretting, men hvis man bruker det til å lage geometriske konstruksjoner kan det i stor grad sammenlignes med passer og linjal.

Konstruksjoner laget med papirbretting kan absolutt ses på konkrete, fordi de består av vinkler, linjestykker og andre geometriske figurer representert ved fysiske objekter som eleven kan ta på, konstruere selv, sammenligne, og modifisere. Med papirbretting får elevene mulighet til å lage vinkler, linjestykker og figurer med sine egne hender. Man blir også oppfordret til å fysisk flytte de ulike geometriske objektene oppå hverandre; i utgangspunktet for å brette linja mellom disse objektene, men det kan også brukes til å sammenligne vinkler og annet. Slike konkrete anses gjerne som gunstig for undervisning så lenge det gjøres på riktig måte [2]. Problemet som Kaufmann trekker fram med konkrete er at det ikke nødvendigvis er så lett å koble konkretene mot det de skal representere. I papirbretting, som med passer og linjal, har man den fordel at det er liten forskjell mellom de fysiske konkretene og de matematiske objektene de representerer. Det eneste som skiller en tegnet vinkel fra en konseptuell vinkel er at den kan ses og at den har litt tykkelse. Klaveness [11] påpeker at det er fordelaktig om elevene gjør ting selv, istedenfor at konkretene blir brukt til demonstrasjon hvor det bare er læreren som gjør noe. Siden papirbretting i hovedsak består av å konstruere sine egne konkrete anser jeg ikke problemet som relevant.

6.1 Papirbretting i forhold til læreplaner

I de gamle læreplanene i Kunnskapsløftet kan vi finne følgende kompetansemål for elever etter endt 10. trinn:

Eleven skal kunne (...) utføre, beskrive og grunngje geometriske konstruksjonar med passar og linjal og dynamisk geometriprogram [13]

Og fra L97:

I opplæringen skal elevene (...) undersøke, lage, tegne og konstruere figurer med varierte redskaper og klassifisere figurer etter deres egenskaper [8]

Det å bruke verktøy til å lage geometriske konstruksjoner har med andre ord vært viktig i flere perioder i norsk skole, dog det finnes ikke tilsvarende kompetansemål i Fagfornyelsen. Diskusjonen om hvorvidt papirbretting er et reelt alternativ til passer og linjal er dermed ikke så relevant nå som det kunne vært for noen år siden, men man skal ikke se bort ifra at en form for fysiske konstruksjoner kan havne i læreplanen en gang i framtiden.

Og selv om slike geometriske konstruksjoner er tatt ut av læreplanene kan fortsatt matematisk papirbretting ha en plass i skolen. Vi skal her se på hvordan matematisk papirbretting kan passe inn med spesielt to av kjerneelementene i matematikk.

Under utforsking og problemløsning skriver UDIR [9]

Utforsking i matematikk handler om at elevene leter etter mønstre, finner sammenhenger og diskuterer seg fram til en felles forståelse. Elevene skal legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningene. (...) Problemløsning i matematikk handler om at elevene utvikler en metode for å løse et problem de ikke kjenner fra før. (...) Problemløsning handler også om å analysere og omforme kjente og ukjente problemer, løse dem og vurdere om løsningene er gyldige.

Og nettopp dette er viktig når man lager geometriske konstruksjoner med papirbretting. Med Huzita-Hatori's aksiomer har vi en liten mengde elementære bretter, som produserer hvert sitt geometriske sted. Det å forstå seg på disse geometriske stedene krever utforsking, og som vi har sett er det mange problemer som kan løses ved å sette sammen disse brettene på kreative måter. I tillegg kan papirbretting gi en særskilt mulighet til elever som ikke er like interessert i tall og ligninger. Med papirbretting jobber man med utforsking og problemløsning uten at man er avhengig av kunnskap om funksjoner, ligninger og formler.

Det andre kjerneelementet som passer spesielt bra med papirbretting er resonnering og argumentasjon. På UDIR sine sider skriver de dette [9]:

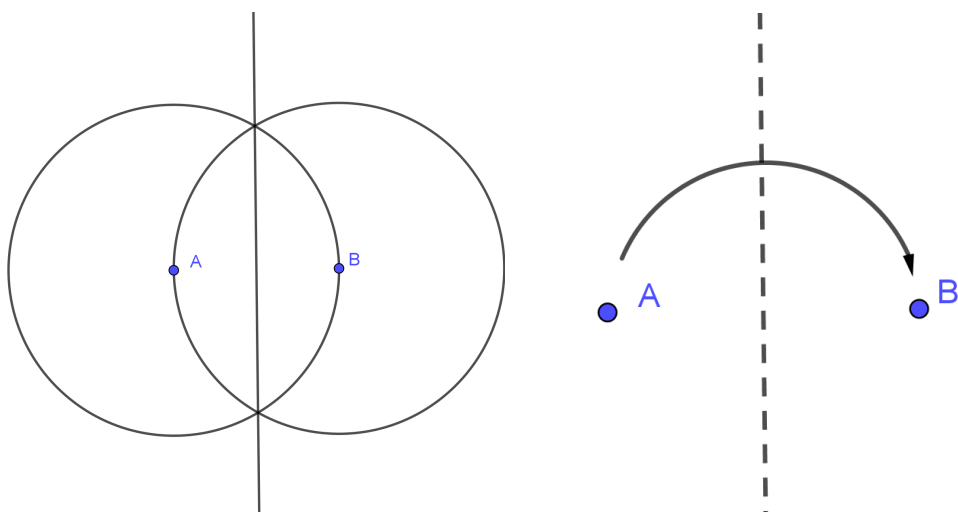
Resonnering i matematikk handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser.

I papirbretting får man argumentere og resonnerere med utgangspunkt i ting man kan se og ta på. Det handler om figurer og fysiske former. Geometriske bevis betraktes gjerne som mer tiltalende i et klasserom, sammenlignet med algebraiske bevis, siden man får noe mer håndfast å forholde seg til [15]. Dersom man jobber med vinkler kan man bruke formlikhet og ortogonalitet, og dersom man jobber med arealer kan man dele det opp og sette det sammen igjen på kreative måter. Papirbretting er her særlig egnet på grunn av muligheten til å fysisk dele det opp og flytte på delene, noe som er vanskelig å gjøre med en vanlig figur. For eksempel kan man se at summen av vinklene i en trekant blir 180° ved å fysisk flytte vinklene sammen slik at de danner en rett linje. For å se formlikhet mellom to trekantar kan man legge trekantene oppå hverandre i tilsvarende vinkler. Da får man også se forskjellen mellom kongruens og formlikhet rent praktisk.

Hvis vi ønsker å se på noe mer spesifikt enn kjerneelementene kan vi vurdere papirbretting i sammenheng med spesifikke kompetansemål. Etter 9. trinn er det 10 ulike kompetansemål, hvorav halvparten handler om geometri [10]. Disse målene handler (grovt forklart) om geometriske mønstre, polygoner, formlikhet & kongruens, sammenhenger mellom sidelengdene i en trekant, og effekten ulike forutsetninger har for geometriske problemstillinger. En fordel papirbretting har over skrift og tegninger er som sagt at delene kan flyttes på. Hvis man ønsker å sammenligne to sidelengder (eller to vinkler eller polygoner) kan man flytte det ene objektet oppå det andre og få et klart bilde. Dette er ikke noen eksakt metode, men den gir didaktiske muligheter.

Papirbretting har også noen fordeler over passer og linjal. Rent matematisk har det den fordel at papirbretting tillater tredjerot, og dermed kan produsere lengder, vinkler og løsninger på problemer som passer og linjal ikke er i stand til. Det er ikke sikkert løsning av annen- og tredjegradsligninger ville vært den beste bruken av papirbretting i skolen, men papirbretting har også den fordel at det å ikke være en rent matematisk aktivitet. De fleste har allerede brettet papirfly når de går på ungdomsskolen, og mange har også laget spåpper, frosker, båter eller hatter, for ikke å snakke om at det er en hel verden av origami. Til sammenligning er passeren primært assosiert med matematikk og skole. På grunn av dette mistenker jeg at det kan være lettere å introdusere en klasse for konstruksjoner med papirbretting framfor passer og linjal. Det kan også være gunstig for elevenes holdninger i matematikk å se at man kan møte på og løse matematiske problemer med hverdagslige redskaper. Den siste fordel jeg vil trekke fram er at konstruksjoner med papirbretting ofte krever færre steg. I figur 22 ser vi at for å konstruere en midtnormal med passer og linjal må man først konstruere to sirkler før man kan trekke en linje mellom skjæringspunktene. Med papirbretting flytter man det ene punktet på det andre, bretter, og bretten er midtnormalen. En lignende forenkling kan man gjøre med vinkelhalvering, og papirbretting gjør spesielt speiling mye enklere.

Passer og linjal har selvfølgelig også sine fordeler. Passer og linjal har historisk sett blitt brukt til både praktiske og teoretiske formål, og er en viktig del av den matematiske arven. En



Figur 22: Her ser vi på konstruksjonen av midtnormaler. Med passer og linjal trekker man to sirkler, og midtnormalen er linja som går gjennom skjæringspunktene. Med papirbretting flytter man A på B, og midtnormalen er bretten mellom dem.

annen fordel med passer og linjal er at de kan lage sirkler. Når man sier at papirbretting kan gjøre alt man kan gjøre med passer og linjal, så snakkes det om hvilke lengder og vinkler man kan konstruere, det er ikke snakk om hvilke figurer man kan tegne. Med papirbretting kan man ikke lage kurver, og det nærmeste man kommer å lage en sirkel er å kunne plassere punkter i en sirkelform. Sirkelen er blant de mest grunnleggende geometriske formene, og det er dermed viktig at elevene i grunnskolen får en forståelse for dem. Dersom man ønsker å inkludere sirkler i papirbrettingen må man lage de med andre redskaper. For eksempel kan man bruke papirbretting til å utforske geometrien i en allerede tegnet sirkel. I denne oppgaven har vi tatt utgangspunkt i at man starter med bare en enhetslengde på arket, så det kunne vært interessant å se på hvilke muligheter man har med andre forutsetninger. For eksempel er ruteark veldig bra for løsning av annen- og tredjegradslikninger, siden man da kan tegne opp skilpaddestien ved å telle ruter istedenfor å møysommelig måle opp ortogonale linjestykker.

6.2 Papirbretting på VG1 i praksis

Siden jeg er på lektorstudiet ved UiT har jeg fått muligheten til å prøve å bruke papirbretting i skoleundervisning i praksis. Jeg var i praksis på en videregående skole i to uker, og fikk undervise matematikk 1P i totalt 6 timer, hvorav 2 timer ble brukt på papirbretting. Elevene hadde blitt fortalt i god tid i forveien at vi skulle drive med papirbretting. I denne seksjonen kommer jeg til å beskrive hvordan jeg brukte papirbretting i skoleundervisning, hvorfor jeg tok de valgene jeg gjorde, hva jeg observerte i undervisningsøkten, samt tanker om hva som burde forandres. Erfaringene fra praksisen ble dokumentert i lognotater [3].

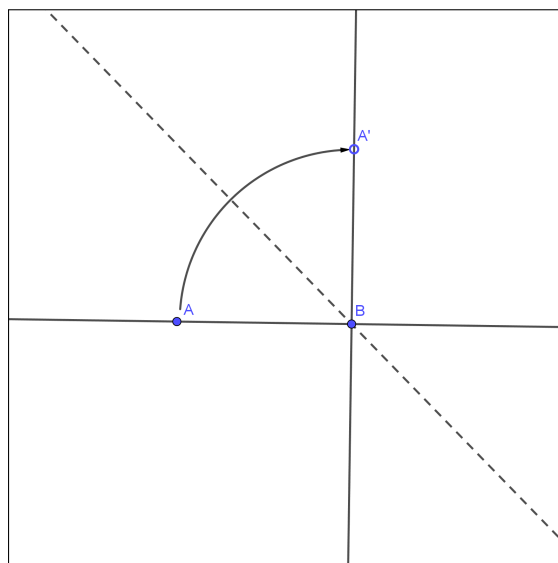
6.2.1 Undervisningsoppleggets gang

Jeg begynte med en historisk introduksjon [3]. Det startet med de gamle greske matematikerne og hvordan de gjorde geometri med passer og linjal. Jeg fortalte historien om alteret til Appollon (se [4]) for å gi et eksempel på hva slags problemer man kunne ønske å løse geometrisk med

passer og linjal. Eksempelet er kubens fordobling, og er derfor en god overgang til å snakke om at ikke alt kan løses med passer og linjal. Deretter nevnte jeg også at Pierre Wantzel beviste uløseligheten av kubens fordobling i 1837, og det var ikke før 100 år senere at M. P. Beloch viste hvordan man kunne løse problemet hvis man tillater å brette papiret. En årsak til at grekerne ikke fant ut dette er naturligvis at de ikke hadde papir. Formålet med denne introduksjonen var å vise hvorfor papirbretting er relevant for matematikk. I tillegg kan matematikkhistorie være interessant i seg selv. Deretter delte jeg klassen i grupper på 4 og lot hver person finne seg et stykke bakepapir. Fordelen med bakepapir er at det er lett å se gjennom det. Jeg hadde på forhånd skåret opp halve bakeark, men kvarte bakeark er nok en bedre størrelse. Da alle hadde satt seg igjen demonstrerte jeg at bretter er symmetrilinjer, før vi sammen gikk gjennom et par grunnleggende bretter. De grunnleggende brettene som kan gjøres med papirbretting er beskrevet med Huzita-Hatori's aksiomer, men siden vi hadde liten tid gikk jeg bare raskt gjennom nummer 1 og 2 (se kapittel 3). Deretter skrev jeg opp en oppgave på tavla:

Opgg. 1: Konstruer et kvadrat.

Elevene hadde på dette tidspunktet hvert sitt ark hvor de hadde plassert to punkter og konstruert midtnormalen og linja gjennom punktene. De to punktene kunne de bruke som en av sidene i kvadratet. I en klasse på rundt 20 elever var det bare 1 som klarte oppgaven alene, og de tre andre i gruppen tok ikke initiativ til å lære hvordan det ble gjort. I alle de andre gruppene viste jeg hvordan man kan lage en normal i et av hjørnene (aksiom nr. 4), og at man kan brette linjene mot hverandre for å «flytte den ene lengden over på normalen» som i figur 23 [3]. En viktig lærdom i denne oppgaven er nettopp det at man kan ta et linjestykke og rotere det om et av endepunktene. I tillegg blir man vant til å brette papiret med rette vinkler. Jeg forsøkte også å tegne et diagram på tavla for å vise hvordan man kan brette, men fant fort ut at det blir vanskelig uten først å ha diskutert hvordan slike diagrammer kan tegnes.



Figur 23: Når man konstruerer et kvadrat kan man speile et av hjørnene om diagonalen for å finne det tredje hjørnet. Det fjerde hjørnet finnes enten som avtrykket av B over AA' eller skjæringspunktet mellom diagonalen gjennom B og en normal i A.

Da alle gruppene hadde fått laget et kvadrat presenterte jeg oppgave 2 og 3. Ideen var at de

skulle få velge hvilken de ville gjøre først, men alle endte opp med å ta først 2 så 3. Jeg kommer her til å presentere de i den rekkefølgen.

Oppg. 2: Konstruer en likesidet trekant.

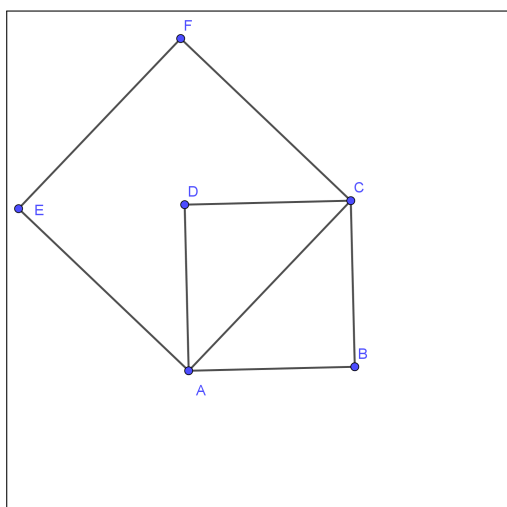
Denne oppgaven var det ingen som fikk til uten hjelp [3]. Den første hjelpen jeg ga var å tegne en likesidet trekant på tavla og beskrive at hver av sidene er like lange, og alle vinklene er like store. Det neste hintet jeg ga er at det tredje punktet ligger på midtnormalen mellom de to andre, og derifra kan man vise hvordan man bruker samme trikset som i oppgave 1 for å rotere lengden til linjestykket 60° rundt (se figur 5b). I denne oppgaven får man igjen sett hvordan en lengde kan flyttes rundt et punkt, i tillegg til at man jobber med vinkler som ikke er 90° , og man ser at man kan bruke avtrykk til å speile punkter over ei linje.

oppg. 3: Konstruer et kvadrat med dobbelt så stort areal som kvadratet i oppgave 1.

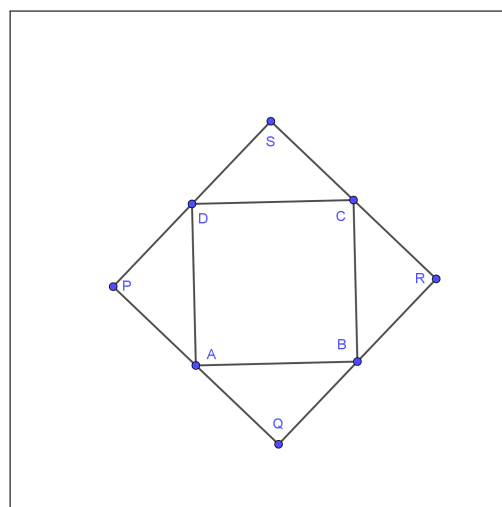
Denne oppgaven var det heller ingen som fikk til uten hjelp. Forklaringen jeg ga i praksis var ved hjelp av Pythagoras' læresetning. Elevene virket lite interessert i denne forklaringen. I ettertid har jeg sett en geometrisk forklaring som virker mer tiltalende. Disse to forklaringene på kvadratfordobling sidestilles i figur 24.

6.2.2 Refleksjon og endringsforslag

Den mest påtrengende refleksjonen er at papirbretting kunne fungert mye bedre hvis vi hadde brukt mer tid på det. I de to timene jeg underviste fikk vi såvidt gått gjennom to aksiomer og sett hvordan de kan brukes til å løse tre forskjellige oppgaver. Dersom papirbrettingsopplegget hadde gått over lengre tid kunne man brukt en økt på å gå gjennom et eller to aksiomer og løst enklere oppgaver for å bygge forståelse for disse aksiomene. Dette kunne man gjort flere økter etter hverandre for å gi elevene verktøyene de trenger for å løse mer kompliserte oppgaver på egenhånd. I mars 2022 arrangerte jeg et kort papirbrettingskurs for realfagsstudenter på universitetet. Der ble Huzita og Hatori's aksiomer presentert som «de operasjonene som er mulige». Formålet var å bruke aksiomene som en verktøykasse så deltakerne hadde bedre oversikt over mulighetene, men til tross for at alle deltakerne var voksne mennesker med bakgrunn i realfag opplevde jeg ikke at aksiomene var særlig nyttige. På bakgrunn av dette har jeg gått bort fra tanken om å bruke aksiomene som en liste over lovlige operasjoner i pedagogisk sammenheng. I ettertid har jeg oppdaget *Paper Folding for the Mathematics Class* av D. A. Johnson [7]. Her presenteres en annen tilnærming til papirbretting uten Huzita og Hatori's aksiomer. Johnson oppgir 68 konstruksjoner med papirbretting. Han begynner med de enkleste (f.eks. konstruksjonen av en rett linje gjennom to punkter) og gir gradvis mer kompliserte konstruksjoner. Disse konstruksjonene er oppgitt på en måte som legger opp til bruk i skolen, og de er lette å gjøre om til oppgaver man kunne brukt i geometriundervisning. Han har også noen oppgaver hvor man undersøker egenskapene til sirkler. Dersom jeg hadde visst om denne teksten tidligere ville jeg antagelig brukt disse oppgavene istedenfor de beskrevet i kapittel 6.2. Oppgavene til Johnson legger spesielt vekt på utforskning; det gjøres ved å stille gode spørsmål, men også ved å gi praktiske metoder for å finne like vinkler og like lengder. Som et eksempel, la oss se på konstruksjon nr. 12, gjengitt i figur 25.



(a) Dersom $\square ABCD$ har sidelengde 1 gir Pythagoras' læresetning at diagonalen er $\sqrt{2}$. Altså er arealet til $\square ACFE$ $\sqrt{2}^2 = 2$.



(b) Her kan vi se at $\triangle ABQ$ har $\frac{1}{4}$ av arealet til $\square ABCD$. Følgelig har $\square PQRS$ dobbelt så stort areal som $\square ABCD$.

Figur 24: To forskjellige tilnærminger til kvadratfordobling.

12. Vertical angles

Fold any two intersecting creases AB and CD intersecting at O . Compare the vertical angles by folding through the vertex O , placing BO on CO . Do AO and DO coincide? Are vertical angles equal?

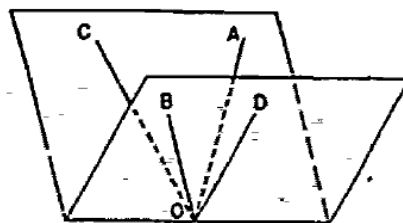


Figure 12

Figur 25: Én av konstruksjonene som brukes av D. A. Johnson. Oppgaven er ment å belyse det at i skjæringspunktet mellom to linjer er motstående vinkler like store.

Her brukes papirbrettingen til å plassere to vinkler oppå hverandre så man kan se at de er like. Dette er selvfølgelig ikke noen eksakt metode, og ikke noe formelt bevis, men kan brukes for å gi elevene et tydelig bilde av hva det betyr at to vinkler er like, og det er en metode de kan bruke for å sammenligne vinkler i situasjoner som i figur 25. Og som i dette eksempelet hvor man ser at i kryssningen mellom to linjer er vinklene parvis like er det ofte nyttig å kunne sammenligne de ulike objektene for å se generelle sammenhenger.

Referanser

- [1] Roger C. Alperin. «A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers». I: *New York Journal of Mathematics* 6 (2000), s. 119–133.
- [2] «Bruk av konkreter». I: *Tangenten* 1 (2010), s. 23–26.
- [3] Ingar Wesenberg Eskeland. *Loggnotater*. 2021.
- [4] Audun Holme. *Matematikkens Historie 1*. 2008.
- [5] Thomas C. Hull. *Origami and Geometric Constructions*. URL: <http://origametry.net/omfiles/geoconst.html>. (nedlastet 11.02.2022).
- [6] Thomas C. Hull. «Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill». I: *The American Mathematical Monthly* 118.4 (2011), s. 307–315.
- [7] Donovan A. Johnson. *Paper Folding for the Mathematics Class*. 1957.
- [8] Kirke-, undervisnings- og forskningsdepartementet. *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen*. 1996.
- [9] *Kjerneelementer*. URL: <https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer?lang=nob>. (nedlastet 19.01.2022).
- [10] *Kompetansemål og vurdering*. URL: <https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv15?lang=nob>. (nedlastet 16.05.2022).
- [11] «Konkretiseringsmaterieell og abstraksjonsmaterieell». I: *Tangenten* 1 (2010), s. 29–53.
- [12] Jorge C. Lucero. «Existence of a Solution for Beloch's Fold». I: *Mathematics Magazine* 92.1 (2019), s. 24–31.
- [13] *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. URL: <https://www.udir.no/k106/mat1-04/hele/kompetansemaal/kompetansemal-etter-10.-arssteget>. (nedlastet 27.10.2021).
- [14] Erik D. Demaine & Joseph O'Rourke. *Geometric Folding Algorithms*. 2008.
- [15] Ellen K. Hovik & Ida H. Solem. «Bevis og generalisering i skolen — utfordringer og muligheter». I: *Undervisningskunnskap i matematikk*. Red. av Ellen K. Hovik & Bodil Kleive. Cappelen Damm, 2016. Kap. 3.

Appendiks: Gröbner-basiser

I dette appendikset blir det gitt en kort forklaring på Gröbner-basiser. Hvis du ønsker en grundigere forklaring kan jeg anbefale *Ideals, Varieties, and Algorithms*, av David A. Cox, John Little og Donal O'Shea.

I denne oppgaven blir polynomer med to variabler brukt til å beskrive én-dimensjonale kurver i planet. Typisk har vi her et polynom som $P = x^2 - 4y + 1$. Nullpunktene til P er alle punkter (x, y) slik at $P = 0$. Dersom vi tegner disse punktene i et koordinatsystem får vi en parabel, altså grafen til $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$. Dersom man bruker polynomer med flere variabler, eller ser på felles nullpunkt til flere polynomer samtidig, får man flere muligheter og man kan også beskrive matematiske objekter i flere dimensjoner. I seksjon 5 hadde vi en én-dimensjonal kurve beskrevet med to polynomer i tre variabler, og vi brukte Mathematica til å finne en såkalt Gröbner-basis. I vårt tilfelle kunne vi se at Gröbner-basisen uttrykker den samme kurva på en enklere måte, og den har også andre fordeler som gjør at det er lettere å jobbe med en Gröbner-basis enn andre basiser. Først skal vi definere konseptene vi trenger for å forstå Gröbner-basiser.

La K være en kropp med tilhørende polynomring $K[x_1, \dots, x_n] = K[X]$ i n variabler.

Definisjon 8. *Et ideal $I \subset K[X]$ er en mengde av polynomer som*

1. *er lukket under addisjon,*
2. *er lukket under multiplikasjon med elementer i $K[X]$,*
3. *inneholder 0.*

For å generere et ideal kan man med andre ord ta utgangspunkt i en polynommengde $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ og tilføye de polynomene som mangler for at idealet skal oppfylle betingelsene i definisjon 8. Da kalles B for «basisen» til I .

Definisjon 9. *$B \subset K[X]$ er en basis til idealet $I \subset K[X]$ hvis og bare hvis I er det minste idealet som inneholder B . Med $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ kan I skrives som*

$$I = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$$

For å forstå Gröbner-basiser er vi også nødt til å skrive polynomer på en viss måte. Siden addisjon i $K[X]$ er kommutativt vet vi at $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$, men for å kunne forstå og lage Gröbner-basiser er vi nødt til å definere en standardisert måte å ordne leddene i et polynom. Det er mange måter å gjøre dette, med ulike fordeler og ulemper, men vi skal holde oss til den leksikografiske rekkefølgen, siden den ligner på alfabetisk rekkefølge. Med variablene x_1, x_2, \dots, x_n skriver vi hvert polynom slik at det leddet som kommer først er det leddet som har den minste indeksen blant sine variabler. Dersom flere ledd inneholder variabelen med den minste indeksen er det det leddet med størst potens av variabelen med minst indeks som kommer først. Dersom variabelen har lik potens i begge leddene sammenligner man neste variabel. Det blir som alfabetisk rekkefølge, dersom a, b, \dots, \hat{a} byttes ut med x_1, x_2, \dots, x_n , og x_i^2 skrives som $x_i x_i$.

Eksempel 6. *La oss ordne*

$$P = x_1 x_3^5 + x_1^2 + x_2 x_4 + x_2 x_3$$

etter den leksikografiske rekkefølgen. Den variabelen som har den minste indeksen er x_1 , så enten det første eller det andre leddet skal først. Siden de begge inneholder x_1 ser vi at x_1^2 har den største potensen, så x_1^2 kommer først. Tredje og fjerde ledd har begge x_2 , så vi ser på neste variabel og ser at x_3 kommer før x_4 . Følgelig kommer fjerde ledd før det tredje. Vi ender opp med dette:

$$P = x_1^2 + x_1 x_3^5 + x_2 x_3 + x_2 x_4$$

Nå som vi har en måte å ordne leddene i et polynom kan vi innføre notasjon for å finne det første leddet i et polynom, og bruke det til å definere Gröbner-basiser.

Definisjon 10. La $P \in K[X]$. $L(P)$ er det første leddet til P . For $I \subset K[X]$ er $L(I)$ gitt ved

$$L(I) = \{L(q) \mid q \in I\}$$

Definisjon 11. La $I = \langle b_1, \dots, b_m \rangle \subset K[X]$ være et ideal. Basisen $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ er en Gröbner-basis hvis og bare hvis

$$\langle L(b_1), \dots, L(b_m) \rangle = \langle L(I) \rangle$$

For å konstruere en Gröbner-basis kan man bruke Buchberger's algoritme. Den kombinerer polynomdivisjon i flere variabler med Gauss-eliminasjon for å konstruere en Gröbner-basis ut av en av idealets mulige basiser.

Det er flere fordeler ved å uttrykke et ideal med sin Gröbner-basis. Gitt et ideal $I \subset K[X]$ kan det være ønskelig å finne ut om et vilkårlig polynom P er et element i dette idealet. Dersom man har idealets Gröbner-basis $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ vet man at $P \in I$ hvis og bare hvis $P = a_1 b_1 + \dots + a_k b_k$, hvor $a_1, \dots, a_k \in K$. Følgelig kan vi finne ut om $P \in I$ ved å dividere P på hvert element i B . Dersom vi ikke får noen rest er P et element i I . En annen fordel handler om å finne de felles nullpunktene til en mengde G av polynomer, siden Gröbner-basisen til $\langle G \rangle$ har de samme nullpunktene som G . I seksjon 5 brukte vi nettopp en mengde polynomer til å definere en kurve. Vi hadde i utgangspunktet to polynomer med tre variabler, men ved å forenkle mengden til en Gröbner-basis endte vi opp med kun ett polynom med to variabler.

